# Wurzelgesetze

## Gesetzmäßigkeiten

### Grundlagen

Das Wurzelziehen (oder Radizieren) ist die Umkehrung des Potenzierens. Daher sind die Wurzelgesetze den Potenzgesetzen sehr ähnlich. Die Wurzel aus einer positiven Zahl ergibt wieder eine positive Zahl. Aus einer negativen Zahl lassen sich keine Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten ziehen. Wurzeln lassen sich nach bestimmten Regeln multiplizieren, dividieren, radizieren und potenzieren. Im Folgenden werden wir uns anhand von Beispielen mit den Wurzelgesetzen vertraut machen.

### Bezeichnungen

Das Wurzelziehen (in der Mathematik auch das Radizieren genannt) ist die Umkehrung der Potenzrechnung. Wenn $a^n = x$ ist, so ergibt wieder die n-te Wurzel aus x wieder a.

Man hat sich auf folgende Schreibweise verständigt:

$$\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{x}} = \mathrm{a}$$

n: Wurzelexponent

x: Radikand oder Wurzelbasis

a: Wurzelwert

Bei der ersten Wurzel wird einfach das Wurzelzeichen weggelassen.

$$\sqrt[1]{\mathrm{x}} = \mathrm{x}$$

Die zweite Wurzel wird als Quadratwurzel oder einfach nur als die Wurzel bezeichnet und der Wurzelexponent weggelassen.

$$\sqrt[2]{\mathrm{x}} = \sqrt{\mathrm{x}}$$

Bei allen anderen Wurzeln muss der Wurzelexponent hingeschrieben werden, um eine eindeutige Berechnung zu ermöglichen.

### Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten

Potenzen mit einer geraden Hochzahl (Exponent) sind immer auch positive Zahlen. Aus diesem Grund lassen sich bei geraden Wurzelexponenten n die n-te Wurzel nur aus positiven Zahlen ($x \geq 0$) ziehen. Das Ergebnis ist dann wieder eine positive Zahl.

**Beispiel 1:**

$\sqrt[4]{16} = 2$

$2^4 = 16$

Es ist aber auch $(-2)^4 = 16$.

Nach der Definition der Wurzel wurde festgelegt, dass bei einem positiven Radikant x das Ergebnis der n-ten Wurzel aus x eine nichtnegative Zahl sein muss.

**Wurzeln mit ungeradem Wurzelexponenten**

Bei einem ungeraden Wurzelexponenten kann man die n-te Wurzel sowohl aus einer positiven als auch aus einer negativen Zahl ziehen.

Im Fall eines positiven Radikanden ist das Ergebnis wieder eine positive Zahl.

Im Fall eines negativen Radikanden ist das Ergebnis eine negative Zahl.

**Beispiel 2:**

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

In diesem Beispiel handelt es sich um Kubikwurzeln, weil der Wurzelexponent n=3 ist.

**Quadratwurzeln**

Wenn der Wurzelexponent n=2 ist, so spricht man von sogenannten Quadratwurzeln. Dabei wird in der Schreibweise die zwei im Allgemeinen weggelassen.

Als Sprechweise hat sich für die Quadratwurzel auch der einfachere Begriff "Wurzel" eingebürgert.

$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

Aus Quadratzahlen lassen sich sehr einfach die Wurzeln ziehen. Als der Ergebnis dieser Rechnung erhalten wir eine natürliche Zahl.

Wenn wir aber die Wurzel aus einer nicht quadratischen Zahl ziehen, so erhalten wir als Ergebnis dieser Rechnung eine irrationale Zahl, die nicht als Bruch geschrieben werden kann.

Sollte die Wurzel keine Quadratzahl sein, so sollte die Wurzel nicht ausgerechnet werden. Auch kann sie im Ergebnis stehen bleiben.

**Umrechnung von Wurzeln in Potenzen**

Für das Umrechnen von Wurzeln in Potenzen oder umgekehrt gelten folgende Regeln:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{a}}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

**Beispiel 3:**

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$$

$$32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$$

**Addition/Subtraktion von Wurzeln**

Die Addition von Wurzel ist zwar grundsätzlich möglich, damit aber diese Rechenoperation durchgeführt werden kann, müssen der Radikand und der Wurzelexponent übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, so kann die Addition nicht durchgeführt werden.

$$u \cdot \sqrt[n]{x} \pm v \cdot \sqrt[n]{x} = (u \pm v) \cdot \sqrt[n]{x}$$

**Beispiel 4:**

$$6 \cdot \sqrt[4]{3} - 2 \cdot \sqrt[4]{3} = (6 - 2) \cdot \sqrt[4]{3} = 4 \cdot \sqrt[4]{3}$$

**Multiplizieren von Wurzeln**

Die Wurzeln haben alle den gleichen Radikanden, aber unterschiedliche Wurzelexponenten. Es muss folgende Regel angewendet werden:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = \sqrt[n \cdot m]{x^{m+n}}$$

Dies erfolgt aus folgender Herleitung:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{m+n}}$$

**Beispiel 5:**

$$\sqrt{64} \cdot \sqrt[3]{64} = \sqrt[2 \cdot 3]{64^{2+3}} = \sqrt[6]{64^5} = 32$$

Die Wurzeln haben den gleichen Wurzelexponenten, aber unterschiedliche Radikanden. Man kann die Radikanden multiplizieren und aus dem Produkt die Wurzel ziehen:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

Analog gilt wie oben die folgende Herleitung:

$$x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

**Beispiel 6:**

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$

Umgekehrt kann man auch die Wurzel ziehen, indem die Radikanden in einzelne Faktoren zerlegt und aus den einzelnen Faktoren die Wurzel zieht.

$$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

**Beispiel 7:**

$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$

Da die dritte Wurzel aus 3 eine irrationale Zahl ergibt, lässt man die 3 unter der Wurzel stehen und rechnet sie auf keinen Fall aus. (Teilweises radizieren)

**Dividieren von Wurzeln**

Die Wurzeln haben den gleichen Radikanden, aber unterschiedliche Wurzelexponenten. Es muss folgende Regel angewendet werden:

$$\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{m-n}}$$

Bei Potenzen mit gleicher Grundzahl gilt natürlich analog das gleiche:

$$\frac{x^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} = x^{\frac{n-m}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{n-m}}$$

**Beispiel 8:**

$$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[8]{81^2} = \sqrt[8]{6.561} = 3$$

Die Wurzeln haben den gleichen Wurzelexponenten, aber unterschiedliche Radikanden. Dann können die Radikanden dividiert werden und aus dem Ergebnis die Wurzel gezogen werden.

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

Das gleiche gilt für Potenzen mit unterschiedlicher Basis:

$$\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{m}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\frac{x}{y}}$$

**Beispiel 9:**

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Umgekehrt kann die Wurzel aus einem Bruch ziehen, im dem man sie einzeln aus Zähler und Nenner zieht.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$$

**Sonderfall beim Dividieren**

Wenn der Radikand im Zähler gleich 1 ist, ergibt sich natürlich auch für seinen Wurzelwert gleich1 und damit vereinfacht sich der Bruch folgendermaßen:

$$\sqrt[m]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

**Beispiel 10:**

$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

**Radizieren einer Wurzel**

Man kann die Wurzel aus einem Wurzelterm ziehen, indem man die Wurzelexponenten multipliziert. Das Produkt ergibt den Wurzelexponenten des Radikanden zu x:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

Das gleiche gilt natürlich auch hier für die Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

**Beispiel 11:**

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{32768}} = \sqrt[15]{32768} = 2$$

**Potenzieren einer Wurzel**

Ein Wurzelterm wird potenziert, indem der Radikand potenziert wird. Es wird also die Wurzel aus der Potenz des Radikanden gezogen:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Das gleiche gilt natürlich auch hier für die Potenzen:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**Beispiel 12:**

$$\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$$

**Kürzen von Wurzeln**

Exponenten und Wurzelexponenten lassen sich gegeneinander kürzen.

$$\sqrt[r \cdot n]{x^{r \cdot m}} = \sqrt[n]{x^m}$$

**Beispiel 13:**

$$\sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$$