Polynomgleichungen

Gesetzmäßigkeiten

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht eine Gleichung. Enthält die Gleichung die Variable x nur in der 1. Potenz, so spricht man von einer linearen Gleichung.

Was muss getan werden um eine lineare Gleichung zu lösen?

Um lineare Gleichungen zu lösen, führen wir systematisch arithmetische Operationen auf beiden Seiten der Gleichung aus.

Hier einige Gleichungstypen, die in Aufgaben häufig vorkommen.

- Einfache lineare Gleichung mit der Variablen x auf der linken Seite.
- Einfache lineare Gleichung, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.
- Lineare Gleichung mit der Lösungsvariablen x und den Formvariablen m, n und a.
- Einfache lineare Gleichung mit Brüchen und der Variablen auf der linken Seite.
- Lineare Gleichung, mit Brüchen, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.
- Lineare Gleichung mit Klammerausdrücken.
- Lineare Gleichung mit eckiger und runder Klammer (Zweifachklammerung).
- Lineare Gleichung mit geschweifter, eckiger und runder Klammer (Dreifachklammerung).

Ein paar wichtige Begriffe, die im Zusammenhang von linearen Gleichungen oft auftauchen und unbedingt erwähnt werden müssen.

Lösungsmenge

Die Lösungsmenge ($\mathbb{L}$) enthält alle Werte, die für die Variable x eingesetzt werden können, damit für die Gleichung eine richtige Lösung entsteht. Bei linearen Gleichungen die eine Lösung besitzen ist dies genau ein Wert.

Grundmenge

Alle Werte die für eine mögliche Lösung zur Verfügung stehen ($\mathbb{G}$). Diese Zahlen kommen meistens aus den reellen Zahlen ($\mathbb{R}$).

Wenn eine Gleichung gelöst wird, so bedeutet dies, dass eine Lösungsmenge bestimmt wird.

Definitionsmenge

Die Definitionsmenge ($\mathbb{D}$) ist die Menge aller Zahlen, die als mögliche Lösung in Betracht kommen.

Eine Lösungsmenge wird bestimmt durch Äquivalenzumformungen der Gleichung. Dabei ist zu beachten, dass die Umformungen die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändert.

Wichtige Einschränkungen in der Definitionsmenge.

- Die Variable steht im Nenner (teilen durch Null).
- Der Radikand einer Wurzel muss größer oder gleich Null sein.
- Der Numerus eins Logarithmus muss immer größer als Null sein.

Äquivalenzumformungen

Eine Gleichung besteht aus zwei Termen mit einem Gleichheitszeichen dazwischen, also ist von der Form Term1 = Term2.

Aber nur wenn die zwei Terme wertgleich sind, stimmt das für alle Werte. Für gewöhnlich sind die zwei Terme aber nicht wertgleich, sodass wir die Lösungsmenge bestimmen müssen, also die Zahlen suchen müssen, die man für die Variablen einsetzen kann, sodass wir dadurch eine wahre Aussage erhalten.

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung findet man durch Äquivalenzumformung, das ist eine Umformung, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändert.

Folgendes ist bei Äquivalenzumformungen zu beachten, damit sich die Lösungsmenge nicht verändert:

- Zusammenfassung gleichartiger Glieder, die auf derselben Seite einer Gleichung stehen
- Auf beiden Seiten der Gleichung ist die gleiche Zahl oder der gleiche Term zu addieren oder subtrahieren.
- Beide Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl, mit demselben Term zu multiplizieren oder durch die gleiche Zahl zu dividieren.
- Vertauschen von rechter und linker Seite der Gleichung

Keine Äquivalenzumformungen sind:

- Multiplikation mit Null
- Division durch Null

- Quadrieren
- Wurzel ziehen
- Logarithmieren

Die Schwierigkeit in der Lösung von linearen Gleichungen liegt also nicht in der direkten Lösung, sondern in den Vereinfachungen, die notwendig sind, um die Gleichung in die Standardform zu bringen um das Ergebnis zu erhalten.

Dies soll in den nächsten Übungen den Studenten näher gebracht werden. Dabei ist auf die bereits erarbeiteten Grundlagen zurückzugreifen.

Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung ist eine mathematische Bestimmungsgleichung, in der ausschließlich Linearkombinationen der Unbekannten vorkommen.

Beispiel 1:

Bestimmung die Definitionsmenge.

Lösen der folgenden Gleichung.

Bestimmung der Lösungsmenge.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$2x - 3 = 5x + 7 \quad | - 2x$

$-3 = 3x + 7 \quad | - 7$

$-10 = 3x \quad |: 3$

$-\frac{10}{3} = x$

$x = -\frac{10}{3}$

$\mathbb{L} = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$

Beispiel 2:

Bestimmung die Definitionsmenge.

Lösen der folgenden Gleichung.

Bestimmung der Lösungsmenge.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$ax + 7 = 3x - b \quad | - 3x$

$ax - 3x + 7 = -b \quad | - 7$

$ax - 3x = -b - 7$

$x(a - 3) = -(b + 7) \quad |: (a - 3)$

Hier muss beachtet werden:, dass a nicht 3 sein darf, da wir sonst durch Null teilen würden. Wir fügen diese Bedingung der Definitionsmenge hinzu.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $a \neq 3$

$$x = -\frac{(b + 7)}{(a - 3)}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{(b + 7)}{(a - 3)}\right\}$$

Beispiel 3:

Bestimmung die Definitionsmenge.

Lösen der folgenden Gleichung.

Bestimmung der Lösungsmenge.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$(x - 3)^2 + 3x^2 = (2x + 7)^2$

$x^2 - 6x + 9 + 3x^2 = 4x^2 + 28x + 49$

$4x^2 - 6x + 9 = 4x^2 + 28x + 49 \quad | - 4x^2$

$-6x + 9 = 28x + 49 \quad | - 28x$

$-34x + 9 = 49 \quad | - 9$

$-34x = 40 \quad |: (-34)$

$$x = -\frac{40}{34} = -\frac{20}{17}$$

Quadratische Gleichungen

In einer quadratischen Gleichung kann neben dem Vielfachen dieser Variablen auch das Quadrat dieser Variablen vorkommen, nennt man quadratische Gleichung.

Die Definitionsmenge ist bei quadratischen Gleichungen nicht eingeschränkt. Sollte aber immer angegeben werden.

Bei quadratischen Gleichungen gibt es entweder keine, eine oder zwei Lösungen. Als weitere aber seltene Variante gibt es auch noch unendlich viele Lösungen, dabei müssen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleichwertige Terme stehen.

Es sollte das Ergebnis immer mit einer Lösungsmenge angegeben werden. Man sollte sich mit diesem Schritt immer vergewissern, dass keine Lösungen angegeben werden, die in der Definitionsmenge ausgeschlossen wurden. Dies passiert hauptsächlich bei nicht äquivalenten Umformungen.

Gleichungen in faktorisierter Darstellung (Faktor mal Faktor=0)

Diese Gleichungen liegen in folgender Form vor:

$(ax + b)(cx + d) = 0 \quad \text{mit}\, a, b \neq 0$

Beispiel 4:

$(3x - 3)(x + 4) = 0)$

Diese Art von quadratischer Gleichung ist am einfachsten zu lösen.

Bei der Lösung muss man nur wissen, dass ein Produkt genau dann Null ist, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. (Faktordarstellung)

Deshalb setzt dabei jeden der Faktoren auf null und erhält damit die Lösungen.

Für obiges Beispiel ergibt sich dann:

$(3x - 3) = 0$

$x_1 = 1$

$(x + 4) = 0$

$x_2 = -\frac{1}{4}$

$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{4}; 1\right\}$

Eine Sonderform dieser Gleichungsart ist:

Es fehlt das absolute Glied. Diese Art wird durch ausklammern von x in die Faktordarstellung gebracht. Allgemeine Form:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

Beispiel 5:

$2x^2 - 4x = x(2x - 4) = 0$

$x_1 = 0$

$2x - 4 = 0$

$x_2 = 2$

$\mathbb{L} = \{0; 2\}$

Reinquadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$ax^2 + b = 0$

Bei diesem Gleichungstyp tauchen keine Vielfachen der Variablen auf.

Die beiden Seiten der Gleichung müssen so umgeformt werden, dass auf der einen Seite die Vielfachen von x^2 stehen und auf der anderen Seite die Zahlenwerte.

In der Mathematik bezeichnet man dieses auch als das „Zusammenfassen gleicher Summanden".

Beispiel 6:

$4x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$

$4x^2 = 9 \quad |: 4$

$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$x = \pm\frac{3}{2}$

$\mathbb{L} = \left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$

Allgemeine quadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$ax^2 + bx + c = 0$

Löst man entweder mit der Mitternachtsformel oder der p-q-Formel.

Hier muss die quadratische Gleichung natürlich in der obigen allgemeinen Form vorliegen.

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel 7:

$x(5x + 2) = 2 - x$

$5x^2 + 2x = 2 - x \quad | + x$

$5x^2 + 3x = 2 \quad | - 2$

$5x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{10} = \frac{-3 \pm 7}{10}$$

$x_1 = -1$

$x_2 = \frac{2}{5}$

$\mathbb{L} = \left\{-1; \frac{2}{5}\right\}$

Beachten:

- Der Ausdruck unter der Wurzel heißt Determinante.
- Ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ, so gibt es keine Lösung.
- Wird der Ausdruck unter der Wurzel Null, es ergibt sich nur eine Lösung.
- Ist der Ausdruck unter der Wurzel größer als Null, so erhält man immer zwei Lösungen.

Normierte Quadratische Gleichungen

Als weitere Möglichkeit eine quadratische Gleichung zu lösen, hat man mit der p-q-Formel.

Allgemeine Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

Dabei ist zu beachten, dass der Faktor vor dem x^2 immer eins betragen muss. Ist dies nicht der Fall, muss diese Gleichung durch den Faktor geteilt werden. Diesen Vorgang nennt man auch normieren.

Dann kann die Gleichung mit folgender Formel gelöst werden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel 8:

Nehmen wir das Beispiel von oben.

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \quad |:5$$

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{2}{5}} = -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{40}{100}}$$

$$= -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{49}{100}} = -\frac{3}{10} \pm \frac{7}{10}$$

$$x_1 = -\frac{3}{10} - \frac{7}{10} = -1$$

$$x_2 = -\frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-1; \frac{2}{5}\right\}$$

Biquadratische Gleichungen

Unter biquadratischen Gleichungen versteht man Gleichungen, die nur die vierte und die zweite Potenz der unbekannten Größe.

Die Lösung der biquadratischen Gleichung erfolgt über eine Substitution.

Nach der Substitution sollte eine quadratische Gleichung entstehen, die man dann mit der Mitternachtsformel lösen kann.

Im Anschluss muss noch rücksubstitutiert werden, um die Lösungen zu erhalten.

Beispiel 9:

Folgende biquadratische Gleichung soll gelöst werden.

$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Bei einer biquadratischen Gleichung führt man als erstes eine Substitution durch.

Substitution:

$u = x^2$

Damit ergibt sich folgende neue Gleichung.

$u^2 + 2u - 3 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$u_1 = -3$

$u_2 = 1$

Rücksubstitution:

$u = x^2$

$-3 = x^2$

Keine Lösung

$1 = x^2$

$x_{1,2} = \pm 1$

$\mathbb{L} = \{\pm 1\}$

Eine biquadratische Gleichung wird nach folgenden Schritten gelöst:

Führen Sie eine geeignete Substitution ein, damit die Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführt werden kann. Lösen Sie die so entstandene Gleichung nach der eingeführten Substitution auf. Lösen Sie durch die Rücksubstitution die Gleichung nach der ursprünglichen Gleichung auf. Schreiben Sie die Lösungsmenge an.

Kubische Gleichungen

Polynomgleichungen dritten Grades werden auch als kubische Gleichungen bezeichnet und haben folgende allgemeine Form:

$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ (a_0 wird auch als Absolutglied bezeichnet).

Kubische Gleichungen ohne Absolutglied

Bei einem fehlenden Absolutglied kann ein x ausgeklammert werden. Damit erhalten wir eine Faktordarstellung. Eine Lösung ist dabei Null. Die restlichen Lösungen können durch den anderen Faktor ermittelt werden. Dieser Faktor entspricht einer quadratischen Gleichung und kann mit der Mitternachtsformel gelöst werden.

Beispiel 10:

$7x^3 - 7x^2 - 84x = 0$

$x(7x^2 - 7x - 84) = 0$

Erste Lösung:

$x_1 = 0$

Weitere Lösungen:

$7x^2 - 7x - 84 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-84)}}{2 \cdot 7} = \frac{7 \pm 49}{14}$$

$$x_2 = \frac{7 + 49}{14} = \frac{56}{14} = 4$$

$$x_3 = \frac{7 - 49}{14} = -\frac{42}{14} = -3$$

$\mathbb{L} = \{0; -3; 4\}$

Kubische Gleichungen mit Absolutglied

Hier ist es nicht möglich die Gleichung in eine Faktordarstellung zu bringen.

Es muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

Polynomdivision

Die Polynomdivision ist ein Verfahren der Mathematik, um Nullstellen von Polynomen zu berechnen.

Die Berechnungsweise ähnelt der in der Schule erlernten schriftlichen Division.

Vorgehensweise:

Suchen einer ersten gültigen Lösung. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die kubische Gleichung. Ziel des Einsetzens ist eine Lösung zu finden, sozusagen eine Startlösung. Diese Lösung sollte in den Übungsaufgaben immer zwischen -3 und +3 liegen.

Beispiel 11:

Hier soll eine Gegenüberstellung der schriftlichen Division und der Polynomdivision erfolgen.

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

$x = 0 \rightarrow 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 + 6 = 0 \rightarrow 6 = 0 \rightarrow$ keine wahre Aussage

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 0 \rightarrow 4 = 0 \rightarrow$ keine wahre Aussage

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ wahre Aussage

Damit haben wir den Startwert für die Polynomdivision gefunden.

Schriftliche Division:

```
  462:2=231
 -4
 ---
  06
  -6
 ---
 02
 -2
 --
 0
```

Polynomdivision:

Für die Schreibweise des Teilers ergibt sich folgendes:

Wird die gefundene Lösung in den Teiler eingesetzt muss sich Nullergeben.

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x + 1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\qquad -5x^2 + x \\
\underline{\quad -(-5x^2 - 5x)} \\
\qquad\qquad 6x + 6 \\
\underline{\qquad\qquad -(6x + 6)} \\
\qquad\qquad\quad -
\end{array}
$$

Damit ergibt sich folgende faktorisierte Darstellung:

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x^2 - 5x + 6) \cdot (x + 1)$$

Nach dieser Zerlegung in einen quadratischen Teil und einen linearen Teil, kann der quadratische Teil mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Terme gelöst werden.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

Damit ergibt sich folgende nächste faktorisierte Darstellung:

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$$

Hieraus sieht man wesentlich besser als aus der Ausgangsgleichung, welche Werte man einsetzen müsste um den ganzen Ausdruck Null zu setzen. wird nämlich einer der Faktoren Null, so ist die gesamte Gleichung erfüllt.

Beispiel 12:

Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung.

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$

Da keiner der drei kritischen Fälle für die Definitionsmenge hier auftaucht, kann man auch auf explizite Angabe der Definitionsmenge verzichten.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$x = 0 \rightarrow 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 6 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = 2 \rightarrow 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 6 = 0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 2x^2 + 3x - 6) : (x - 2) = x^2 + 3 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\qquad +3x - 6 \\
\underline{\qquad\qquad -(+3x - 6 - 5x)} \\
\qquad\qquad\quad -
\end{array}
$$

$x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3$

Keine weiteren Lösungen mehr: $x_1 = 3$

Damit ergibt sich folgende nächste faktorisierte Darstellung:

$(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) = (x - 2) \cdot (x^2 + 3)$