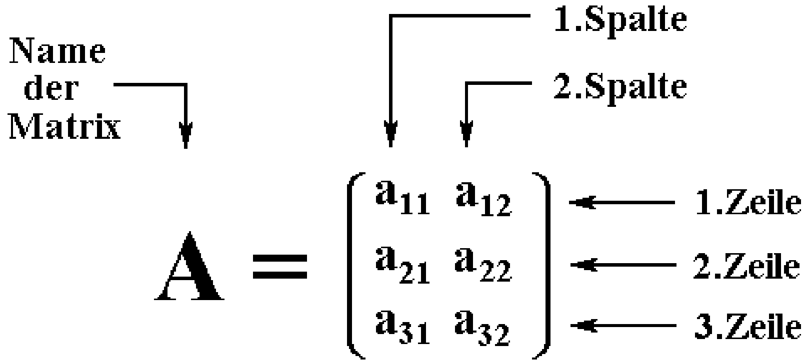
Matrizen

Definition:

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema.

Die Matrix (Mehrzahl: Matrizen) besteht aus waagerecht verlaufenden Zeilen und senkrecht verlaufenden Spalten.

Verdeutlichung am Beispiel:



Anmerkungen zur Definition:

- Eine Matrix besteht aus reellen Zahlen, die man Elemente nennt. Z.B. sind die Elemente a_{21} und a_{22} Elemente der Matrix oben, genauer gesagt die Elemente der zweiten Zeile der Matrix.
- Eine Matrix wird in runde Klammern geschrieben.
- Eine Matrix wird mit einem großen Buchstaben bezeichnet, deren Elemente mit kleinen Buchstaben. Beispiel: Die Matrix A besteht aus den Elementen a_{11}, a_{12},a_{21}, ...
- Anhand der Bezeichnung des Elementes kann man erkennen, zu welcher Matrix es gehört, am Index eines Elementes kann man erkennen, in welcher Zeile und Spalte das Element steht: z.B. ist das Element a_{32} in der 3.Zeile und 2.Spalte der Matrix A zu finden.

Weites Beispiel: Das Element c_{97} steht in der 9.Zeile und 7.Spalte der Matrix C.

Weitere Bezeichnungen:

Für die Matrix A (siehe Bild) gibt es eine kürzere Schreibweise:

$A=(a_{ik})$ mit $1<i<3$ und $1<k<2$. Oder noch kürzer: $A=(a_{ik})_{(3,2)}$.

Allgemein schreibt man: $A=(a_{ik})_{(m,n)}$ für eine Matrix A mit m Zeilen und n Spalten, die aus den Elementen a_{ik} besteht.

Typ einer Matrix

Hat eine Matrix m Zeilen und n Spalten, so sagt man, dass die Matrix vom Typ (m,n) ist, z.B. ist die Matrix A (siehe Bild) vom Typ (3,2).

Zeilenmatrix:

Besteht eine Matrix nur aus einer Zeile, so nennt man sie Zeilenmatrix.

Das Beispiel zeigt eine Zeilenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix}$$

Eine Zeilenmatrix ist somit vom Typ (1,n)

Spaltenmatrix:

Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte, so heißt sie Spaltenmatrix.

Das Beispiel zeigt eine Spaltenmatrix:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$$

Eine Spaltenmatrix ist somit vom Typ (m,1)

Nullmatrix

Besteht eine beliebige Matrix nur aus Nullen, so nennt man sie eine Nullmatrix. Das Beispiel zeigt eine Nullmatrix von Typ (3,4):

Zeilen- und Spaltenvektoren

Definition:

Die Zeilen einer Matrix bezeichnet man auch als Zeilenvektoren, analog bezeichnet man die Spalten als Spaltenvektoren.

Beispiel:

Die folgende Matrix besteht aus drei Zeilen und zwei Spalten, also aus drei Zeilenvektoren (oder aus zwei Spaltenvektoren):

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} \downarrow \text{1.Spaltenvektor} \\ \downarrow \text{2.Spaltenvektor} \end{array} & \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{1.Zeilenvektor} \\ \leftarrow \text{2.Zeilenvektor} \\ \leftarrow \text{3.Zeilenvektor} \end{array} \end{array}$$

Es gilt also:

1.Zeilenvektor von A = (a_{11},a_{12})

2.Zeilenvektor von A = (a_{21},a_{22})

3.Zeilenvektor von A = (a_{31},a_{32})

1.Spaltenvektor von A = (a_{11},a_{21},a_{31})

2.Spaltenvektor von A = (a_{12},a_{22},a_{32})

Gleichheit von Matrizen

Definition:

Zwei Matrizen $A=(a_{ik})$ und $B=(b_{ik})$ sind gleich, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Die beiden Matrizen sind vom gleichen Typ
- Die Matrizen stimmen in jedem Element überein:

$a_{ik} = b_{ik}$ (für alle i,k)

Beispiel:

Folgende zwei Matrizen sind gleich:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Transponieren

Definition:

Vertauscht man die Zeilen und die Spalten einer Matrix A, so heißt die entstandene Matrix die "Transponierte der Matrix A".

Die Transponierte der Matrix A nennt man A^T.

Beispiel:

Als Beispiel sei folgende Matrix vom Typ (3,2) gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vertauschen wir nun die Zeilen und Spalten der Matrix, so erhalten wir A^T, d.h. die Transponierte der Matrix A:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen zur Definition:

Ist die Matrix A vom Typ (m,n), so ist die A^T vom Typ (n,m)

Transponiert man eine Matrix zweimal, so erhält man wieder die ursprüngliche Matrix. Als Formel: $(A^T)^T = A$

Die Elemente der Matrix A und der Matrix A^T stehen in folgenden Zusammenhang:

$$\mathbf{a}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{ik}} = \mathbf{a}_{\mathbf{ki}}$$

Quadratische Matrix

Definition:

Eine quadratische Matrix ist eine Matrix, bei der die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten übereinstimmt.

Quadratische Matrizen sind also Matrizen vom Typ (m,m).

Die Haupt- und Nebendiagonale:

Quadratische Matrizen (und nur diese) haben eine so genannte Hauptdiagonale sowie eine Nebendiagonale. Beispiel:

Hauptdiagonale **Nebendiagonale**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Hauptdiagonale beginnt immer links oben (beim Element a_{11}) und endet rechts unten (im Beispiel beim Element a_{33}).

Die Nebendiagonale beginnt rechts oben und endet links unten.

Transponiert man eine Matrix A, so entspricht dies einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Diagonalmatrix

Ein Spezialfall der quadratischen Matrix ist die so genannte Diagonalmatrix, bei der alle außerhalb der Hautdiagonalen liegenden Elemente gleich Null sind.

Eine Diagonalmatrix hat also immer die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Zwei Beispiele dazu:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix ist ein Spezialfall der Diagonalmatrix, die wiederum ein Spezialfall der quadratischen Matrix ist:

Ein Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente gleich 1 sind, nennt man Einheitsmatrix.

Zwei Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix

Ein weiterer Spezialfall der quadratischen Matrix ist die so genannte "untere Dreiecksmatrix". Bei ihr sind alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen gleich Null.

Eine "untere Dreiecksmatrix" hat also immer die folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Zwei Beispiele dazu:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 44 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix

Neben der unteren gibt es auch eine obere Dreiecksmatrix.

Bei der oberen Dreiecksmatrix sind alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null.

Eine "obere Dreiecksmatrix" hat also immer die folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Zwei Beispiele dazu:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix

Definition:

Ein weiterer Spezialfall der quadratischen Matrix ist die so genannte "symmetrische Matrix":

Bei der "symmetrischen Matrix" sind alle Elemente spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen angeordnet:

$a_{ik} = a_{ki}$

Beispiele:

Folgende zwei Matrizen sind symmetrische Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 2 & 7 \\ 2 & 14 & 5 \\ 7 & 5 & 71 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Schiefsymmetrische Matrix

Definition:

Ein weiterer Spezialfall der quadratischen Matrix ist die so genannte "schiefsymmetrische Matrix":

Eine "schiefsymmetrischen Matrix" liegt vor, wenn gilt:

- Die Elemente, die spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen liegen, sind vom Betrag gleich, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen.
- Die Hauptdiagonalenelemente sind gleich Null.

Beide Teile der Definition kann man durch folgende Formel

zusammenfassen:

$a_{ik} = -a_{ki}$

Beispiele:

Folgende zwei Matrizen sind schiefsymmetrische Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & 5 \\ 7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Definition:

Zwei Matrizen werden addiert, indem Elemente mit gleichem Index addiert werden.

Wichtige Anmerkung

Die beiden Matrizen die addiert werden sollen, müssen vom gleichem Typ sein, d.h. die Anzahl der Zeilen muss bei beiden Matrizen gleich sein, und die Anzahl der Spalten muss bei beiden Matrizen gleich sein.

Gesetze

Für die Matrizenaddition gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetz: A+B = B+A

Assoziativgesetz: A+(B+C) = (A+B)+C

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Matrizen

Definition:

Zwei Matrizen werden subtrahiert, indem Elemente mit gleichem Index subtrahiert werden.

Wichtige Anmerkung

Die beiden Matrizen die subtrahiert werden sollen, müssen vom gleichem Typ sein, d.h. die Anzahl der Zeilen muss bei beiden Matrizen gleich sein, und die Anzahl der Spalten muss bei beiden Matrizen gleich sein.

Gesetze:

Für die Matrizensubtraktion gilt weder das Assoziativgesetz noch das Kommutativgesetz.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} \end{pmatrix}$$

Skalar-Matrix-Multiplikation

Definition:

Ein Skalar α (eine Zahl) wird mit einer Matrix A multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit dem Skalar multipliziert.

Gesetze:

Für die Skalar-Matrix-Multiplikation gelten folgende Gesetze:

Assoziativgesetz: $\alpha_1(\alpha_2 A) = (\alpha_1\alpha_2)A$

Distributivgesetze: $(\alpha_1+\alpha_2)A = \alpha_1 A+\alpha_2 A$

$\alpha_1(A+B) = \alpha_1 A + \alpha_1 B$

Beispiel:

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \end{pmatrix}$$

Anmerkungen:

- Das Beispiel bzw. die Definition kann man auch anders herum lesen: Ein Faktor der in allen Elementen einer Matrix enthalten ist, darf vor die Matrix geschrieben werden.
- Den "Multiplikationspunkt" haben wir, so wie es üblich ist, fortgelassen, z.B. müsste man für $\alpha_1(\alpha_2 A)$ genau genommen $\alpha_1\cdot(\alpha_2\cdot A)$ schreiben.

Matrizen-Multiplikation

Definition:

Das Produkt einer Matrix $A=(a_{ik})$ mit einer Matrix $B=(b_{ik})$ ist ebenfalls eine Matrix, die wir Matrix $C=(c_{ik})$ nennen.

Die Elemente c_{ik} der Matrix C werden auf folgende Weise gebildet:

Das Element c_{ik} ist das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors der Matrix A mit dem k-ten Spaltenvektor der Matrix B.

Beispiel:

Gegeben sei eine Matrix $A=(a_{ik})$ und eine Matrix $B=(b_{ik})$. Das Produkt der beiden Matrizen ist laut Definition wieder eine Matrix, die wir in der Definition $C=(c_{ik})$ genannt hatten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

Warum die Matrix C vom Typ (3,2) ist wird erst auf der nächsten Seite erklärt. Jetzt wollen wir die Matrix erst einmal berechnen:

Um die Matrix C zu bestimmen muss man nun (mit Hilfe der Definition) deren Elemente c_{ik} bestimmen. Exemplarisch bestimmen wir c_{32}:

Laut Definition ist c_{32} gleich dem Skalarprodukt aus dem 3.Zeilenvektor der Matrix A und dem 2.Spaltenvektor der Matrix B:

$$c_{32} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}$$

Nun können wir das Element c_{32} in die Matrix C eintragen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der restlichen Elemente (c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} und c_{31}) erfolgt analog. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Anmerkung 1:

Das Matrizenprodukt A·B ist nur definiert, wenn die Spaltenzahl der Matrix A mit der Zeilenzahl der Matrix B übereinstimmt.

Man sagt auch: Ist eine Matrix A vom Typ (m,n) so kann sie nur dann mit einer Matrix B multipliziert werden, wenn die Matrix B vom Typ (n,r) ist.

Erklärung: Nehmen wir an, die Spaltenzahl der Matrix A würde nicht mit der Zeilenzahl der Matrix B übereinstimmen, sondern wäre z.B. kleiner:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir z.B. c_{11}. Laut Definition ist c_{11} gleich dem Skalarprodukt aus dem 1.Zeilenvektor von A und dem 1.Spaltenvektor von B.

$(a_{11}, a_{12})\cdot(b_{11}, b_{21}, b_{31})$

Dieses Skalarprodukt ist aber gar nicht definiert. Das Skalarprodukt ist nämlich nur zwischen Vektoren definiert, die gleich viele Komponenten haben.

Ist das Skalarprodukt nicht definiert, so gilt dies auch für das Matrizenprodukt.

Anmerkung 2:

Die Matrix C=A·B hat so viele Zeilen wie die Matrix A und so viele Spalten wie die Matrix B.

Man sagt auch: Ist die Matrix A vom Typ (m,n) und B vom Typ (n,r), so ist die Matrix C vom Typ (m,r).

Warum ist das so? Wir erklären dies am Beispiel der Vorseite.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

Laut obigen Satz hat die Matrix C genau 3 Zeilen.

Nun beweisen wir, dass die Matrix C keine 4 Zeilen haben kann:

Nehmen wir an, die Matrix C hätte 4 Zeilen, dann gäbe es z.B. ein Element c_{41}. Dieses wäre definiert als das Skalarprodukt aus dem 4.Zeilenvektor von A und dem 1.Spaltenvektor von B.

Da die Matrix A aber keinen 4.Zeilenvektor hat, kann man kein Element c_{41} bilden, und somit hat die Matrix C keine 4 Zeilen.

Beispiel:

Gegeben seien die Matrizen A und B, gesucht das Matrizenprodukt C=A·B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Als erstes werden wir das Element c_{11} berechnen. Laut Definition gilt:

c_{11} ist gleich dem Skalarprodukt aus dem 1.Zeilenvektor der Matrix A und dem 1.Spaltenvektor der Matrix B:

$$c_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

Jetzt tragen wir c_{11} in die Ergebnismatrix ein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Analog berechnen wir das Element c_{12} der Ergebnismatrix: Laut Definition ist c_{12} gleich dem Skalarprodukt aus dem 1.Zeilenvektor der Matrix A und dem 2.Spaltenvektor der Matrix B:

$$c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

Auch c_{12} tragen wir in die Ergebnismatrix ein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Schließlich müssen wir nur noch die Elemente c_{21} und c_{22} berechnen:

c_{21} ist das Skalarprodukt aus dem 2.Zeilenvektor der Matrix A und dem 1.Spaltenvektor der Matrix B.

c_{22} ist das Skalarprodukt aus dem 2.Zeilenvektor der Matrix A und dem 2.Spaltenvektor der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Will man eine Matrix berechnen, so kann man das am einfachsten mit dem folgenden Schema machen:

Das Schema:

Gegeben seien zwei Matrizen A und B. Gesucht ist deren Produkt $C=A\cdot B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = ?$$

Die Matrix A schreibt man nach links, die Matrix B nach oben:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} A \\ \downarrow \end{matrix} \quad B \rightarrow & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \end{array}$$

Will man nun ein Element berechnen, so stehen die Vektoren die man dazu braucht links bzw. oberhalb des gesuchten Elementes.

Exemplarisch haben wir die Elemente c_{11} und c_{32} berechnet:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} A \\ \downarrow \end{matrix} \quad B \rightarrow & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (a_{11}a_{12})(b_{11}b_{21}) & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & (a_{31}a_{32})(b_{12}b_{22}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Gesetze

Für die Multiplikation von Matrizen gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetz: nein, gilt im Allgemeinen nicht

Assoziativgesetz: (AB)C = A(BC)

Distributivgesetze: A(B+C) = AB + AC

(A+B)C = AC + BC

Verflechtungsmatrix

Stücklistenprobleme treten in der Wirtschaft auf. Dabei geht es um die Verflechtung von Produktionsschritten und deren Zwischen- und Endprodukten. Produziert eine Firma ein Produkt, so setzt sich dieses zumeist aus mehreren verschiedenen Einzelprodukten zusammen, die wiederum aus unterschiedlichen Komponenten bestehen können.

Bei der Fertigung dieser Produkte muss die Anzahl der einzelnen Komponenten bzw. Zwischenprodukte bekannt sein, um einen reibungslosen Betrieb sicherzustellen. Wenn nicht nur das Endprodukt, sondern auch die Zwischenprodukte verkauft werden, wie es z. B. in der Automobilindustrie üblich ist, erhöhen sich die Stückzahlen der Einzelprodukte nicht nur um die geforderte Nachfrage, sondern auch um den Bedarf, der benötigt wird, um die Einzelprodukte herzustellen.

Es geht daher um die Frage, wie groß die Anzahl der verschiedenen Zwischen- und Endprodukte jeweils sein muss, um die Anfrage von außen decken zu können. Diese Frage kann mit Linearen Gleichungssystemen beantwortet werden. In der Praxis jedoch bedient man sich der Matrizenrechnung aufgrund der Vielzahl von Zwischen- und Endprodukten.

Zu Beginn der Überlegungen steht die graphische Darstellung der Verflechtung der einzelnen Produkte untereinander, ein sogenannter "**Gozintograph**", der anschaulich beschreibt, welche Produkte und welche Anzahl (Mengeneinheiten) der jeweiligen Produkte für die Fertigung der übergeordneten Produkte nötig sind. Daraus ergibt sich die Erstellung einer **Verflechtungstabelle in technologischer Reihenfolge** z. B.

für wird benötigt	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1: Draht	0	20	0	6	8	10
x_2: Spule	0	0	0	1	3	2
x_3: Widerstand	0	0	0	2	1	1
x_4: Bauteil A	0	0	0	0	0	2
x_5: Bauteil B	0	0	0	0	0	1
x_6: Apparat	0	0	0	0	0	0

und deren Verflechtungsmatrix

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix wird auch als Input-Output-Matrix bezeichnet.

Betrachtet man nun den internen Bedarf der Produktion und die externe Bestellung

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 420 \\ 210 \\ 305 \\ 500 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich für den Produktionsvektor $\vec{x}$ (Anzahl der herzustellenden Produkte), dass $\vec{x} = V \cdot \vec{x} + \vec{b}$ (1) ist.

Diese Gleichung lässt sich zu der Form $\vec{x} = (E - V)^{-1} \cdot \vec{b}$ (2) umformen, so dass nach der Eingabe der Daten in einen Computer sofort der Produktionsvektor ausgegeben wird.

Bei der Umformung müssen die Rechenregeln für Matrizen beachtet und die Existenz der Inversen $(E - V)^{-1}$ begründet werden, die sich aus der besonderen Dreiecksgestalt der Matrix *V* und der Differenz E-V ergibt, z. B.:

- $\vec{x} = V \cdot \vec{x} + \vec{b}$
- $\Leftrightarrow \vec{x} - V \cdot \vec{x} = \vec{b}$ Rechenregeln der Addition
- $\Leftrightarrow (E - V) \cdot \vec{x} = \vec{b}$ Distributivgesetz der Multiplikation, Eigenschaften der Einheitsmatrix
- $\Leftrightarrow \vec{x} = (E - V)^{-1} \cdot \vec{b}$ Existenz der Inversen, Nichtkommutativität der Multiplikation, daher Multiplikation von links

Daraus lässt sich für Stücklistenprobleme solcher Form eine allgemeine Regel formulieren:

Produktionsvektor = (Einheitsmatrix – Verflechtungsmatrix)$^{-1}$ · Bestellvektor

Es ergibt sich in dem zu behandelnden Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -20 & 0 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 420 \\ 210 \\ 305 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122200 \\ 5125 \\ 4145 \\ 1210 \\ 805 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Durch die Aufstellung eines Linearen Gleichungssystems vorab ist es möglich, die Gleichung (1) oder durch eine Umformung des Systems die Gleichung $(E - V) \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (3) zu erhalten, z. B. für (1):

$$\begin{array}{llllll} x_1 = & 20x_2 & +6x_4 & +8x_5 & +10x_6 & +1000 \\ x_2 = & & x_4 & +3x_5 & +2x_6 & +500 \\ x_3 = & & 2x_4 & +x_5 & +x_6 & +420 \\ x_4 = & & & & 2x_6 & +210 \\ x_5 = & & & & x_6 & +305 \\ x_6 = & & & & & 500 \end{array}$$

In dem Beispiel ist das Lineare Gleichungssystem noch einfach zu finden und zu lösen, in der Praxis handelt es sich allerdings um wesentlich größere Listen ("z. B.: BASF/Chemie: Matrizen mit etwa 10000 Zeilen", so dass ein Gleichungssystem nicht mehr praktikabel ist und die Verflechtungsmatrix zur Anwendung kommt.

Aufgabe 01:

In einer Möbelfabrik werden aus Holz, Metall und Stoff Tische, Bänke und Stühle produziert, die einzeln bzw. als Sitzgruppen verkauft werden.

Für einen Tisch werden 12 Einheiten Holz und 3 Einheiten Metall,

für eine Bank 6 Einheiten Holz, 2 Einheiten Metall und 5 Einheiten Stoff,

für einen Stuhl 2 Einheiten Holz, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Stoff benötigt.

Eine Sitzgruppe A besteht aus einem Tisch und vier Stühlen,

eine Sitzgruppe B aus einem Tisch, einer Bank und drei Stühlen.

a) Geben Sie die Verflechtungsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Einzelprodukten und für den Zusammenhang von Einzelprodukten und Sitzgruppen an und bestimmen Sie aus diesen durch Matrizenmultiplikation die Verflechtungsmatrix für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Sitzgruppen!

b) Ein Kunde bestellt 40 Sitzgruppen A, 60 Sitzgruppen B und zusätzlich 10 Bänke. Ermitteln Sie unter Verwendung der Verflechtungsmatrizen aus a), welche Mengen der Ausgangsmaterialien benötigt werden!

Lösung:

a) Ausgangsmaterial – Einzelprodukte

	je Tisch	je Bank	je Stuhl
Holz	12	6	2
Metall	3	2	1
Stoff	0	5	2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Einzelprodukte – Sitzgruppen

	je Sitzgruppe A	je Sitzgruppe B
Tisch	1	1
Bank	0	1
Stuhl	4	3

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ausgangsmaterial – Sitzgruppen: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 7 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

b) $$\begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 7 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2240 \\ 760 \\ 980 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2300 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix}$$

Es werden 2300 Einheiten Holz, 780 Einheiten Metall und 1030 Einheitem Stoff benötigt.

Matrixinversion

Bei den reellen Zahlen ist zu jeder Zahl x eine Inverse x^{-1} definiert mit der Eigenschaft, dass $x*x^{-1} = 1$. Ähnlich definiert man bei Matrizen:

Inverse Matrix:

Sei $\boldsymbol{X}$ eine quadratische Matrix. Die Inverse von $\boldsymbol{X}$ ist, sofern sie überhaupt existiert, jene Matrix $\boldsymbol{X}^{-1}$, für die gilt: $\boldsymbol{X}*\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}^{-1}*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ *(Einheitsmatrix)*

Im Gegensatz zu reellen Zahlen (außer der Zahl Null), bei denen die Inverse immer existiert, existiert die Inverse einer Matrix $\boldsymbol{X}$ nur, wenn X quadratisch ist und wenn außerdem gilt:

Existenz der Inversen:

$\boldsymbol{X}^{-1}$ existiert nur dann, wenn $\det(\boldsymbol{X}) \neq 0$.

Eigenschaften der Inversen:

Vorausgesetzt wird, dass die Inversen von $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ existieren. Dann gilt:

1) $(\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} * \boldsymbol{A}^{-1}$

2) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

3) $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$

4) $(k * \boldsymbol{A})^{-1} = 1/k * \boldsymbol{A}^{-1}$

5) Ist $\boldsymbol{A}$ symmetrisch, so ist auch $\boldsymbol{A}^{-1}$ symmetrisch

6) Ist $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix, so ist $\boldsymbol{D}^{-1}$ ebenfalls eine Diagonalmatrix mit dem allgemeinen Element $1/d_{ii}$

7) Für die Einheitsmatrix gilt $\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}$

8) $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = 1/\det(\boldsymbol{A})$

Regeln für die Bildung der Inversen:

Man bildet die Inverse am einfachsten wie folgt:

1. Man setzt rechts neben $\boldsymbol{X}$ die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$

2. Man transformiert durch elementare Zeilenumformungen (**Nicht Spaltenumformungen !!**) die Matrix $\boldsymbol{X}$ in die Einheitsmatrix. Alle diese elementaren Zeilenumformungen werden gleichzeitig auch mit der Matrix $\boldsymbol{I}$ durchgeführt. Dadurch wird $\boldsymbol{I}$ zu $\boldsymbol{X}^{-1}$

Beispiel:

Berechnen der Inversen von $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Vertauschen der 1. und der 2. Zeile:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Addieren des -1-fachen der 1. Zeile auf die 2. Zeile:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Addieren des -3-fachen der 1. Zeile auf die 3. Zeile:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$ Addieren des -1-fachen der 2. Zeile auf die 3. Zeile:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ Addition der 3. Zeile auf die erste Zeile:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ Multiplikation der 3. Zeile mit -1/2:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix}$ Addieren des 3-fachen der 3. Zeile auf die 2. Zeile:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 5/2 & 2 & -3/2\\ 1/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix}$$

Probe: Multiplikation der Matrix mit ihrer Inversen muss ***I*** ergeben:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 5/2 & 2 & -3/2\\ 1/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Berechnung der inversen (2,2)-Matrix

Eine (2,2)-Matrix ist gegeben durch $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Die Matrix ist regulär, falls gilt: $D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$. Man nennt D auch die **Determinante** von A.

Ist die Determinante ungleich Null, die Matrix also regulär, so ist die **inverse Matrix:**

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Berechnung einer inversen (3,3)-Matrix

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind nun die Koeffizienten einer Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

so dass gilt: $A \cdot B = E = B \cdot A$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Ausführlich bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung des Matrizenproduktes führt dann auf folgende Darstellung:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2b_{11} + 1b_{21} + 1b_{31} & 2b_{12} + 1b_{22} + 1b_{32} & 2b_{13} + 1b_{23} + 1b_{33} \\ 4b_{11} + 1b_{21} + 3b_{31} & 4b_{12} + 1b_{22} + 3b_{32} & 4b_{23} + 1b_{23} + 3b_{33} \\ -2b_{11} + 2b_{21} + 1b_{31} & -2b_{12} + 2b_{22} + 1b_{32} & -2b_{13} + 2b_{32} + 1b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vergleich der Spalten der Matrizen führt auf folgende 3 Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} + 1b_{21} + 1b_{31} \\ 4b_{11} + 1b_{21} + 3b_{31} \\ -2b_{11} + 2b_{21} + 1b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2b_{12} + 1b_{22} + 1b_{32} \\ 4b_{12} + 1b_{22} + 3b_{32} \\ -2b_{12} + 2b_{22} + 1b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2b_{13}+1b_{23}+1b_{33} \\ 4b_{13}+1b_{23}+3b_{33} \\ -2b_{13}+2b_{23}+1b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die linke Matrix lässt sich auch als Produkt aus der Matrix A und den Spaltenvektoren der Matrix B schreiben

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Koeffizienten b_{11}, b_{21},....,b_{33} erfolgt wieder nach dem bekannten Gauß-Verfahren

Zur Vereinfachung des Verfahrens bietet sich folgendes Schema an, bei dem die **3 Gleichungssysteme gleichzeitig gelöst** werden.

Aufgaben

Aufgabe 1:

Addieren Sie die beiden folgenden Matrizen:

$$A+B=\begin{pmatrix}7 & 5a\\ 6y & -3x\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x & 2y\\ -2y & 6a\\ 5x & 0\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A+B=\begin{pmatrix}7 & 5a\\ 6y & -3x\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x & 2y\\ -2y & 6a\\ 5x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-x & 5a+2y\\ 4y & 6a-3x\\ 5x & 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Es sind folgende Matrizen gegeben:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Rechenoperationen:

a) $A+B$

Lösung:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

b) $A\cdot B$

Lösung:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+2 & 1+2\\ 3+4 & 3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 7 & 7\end{pmatrix}\end{array}$$

c) $A+C$

Lösung:

$$A+C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

d) $A\cdot C$

Lösung:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+0 & 1+2\\3+0 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\end{array}$$

e) $A+D$

Lösung:

$$A+D=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$$

f) $A \cdot D$

Lösung:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix} & \text{geht nicht}\end{array}$$

g) $A+E$

Lösung:

$$A+E=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$$

h) $A \cdot E$

Lösung:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+2\\3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\end{array}$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie von folgenden Matrizen A+B und A-B.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 9\\ 11 & 15 & 21\\ 27 & 30 & 34\\ 35 & 36 & 40\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}13 & 17 & 5\\ 15 & 11 & 14\\ 5 & 2 & 12\\ 15 & 23 & 4\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A+B=\begin{pmatrix}16 & 24 & 14\\ 26 & 26 & 35\\ 32 & 32 & 46\\ 50 & 59 & 44\end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix}-10 & -10 & 4\\ -4 & 4 & 5\\ 22 & 28 & 22\\ 20 & 13 & 36\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Skalar λ

$$A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 9\\ 11 & 15 & 21\\ 27 & 30 & 34\\ 35 & 36 & 40\end{pmatrix} \qquad \lambda=2$$

Lösung: $$A*\lambda=\begin{pmatrix}6 & 14 & 18\\ 22 & 30 & 42\\ 54 & 60 & 68\\ 70 & 72 & 80\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Es sind folgende Matrizen gegeben:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Rechenoperationen:

a) $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5+0 & 1+6\\ 10+0 & 2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 10 & 10\end{pmatrix}\end{array}$$

b) $A \cdot C$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2+9 \\ 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) $B \cdot C$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10+3 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

d) $B \cdot A$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5+2 & 15+4 \\ 0+4 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e) $C \cdot A$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{geht nicht} \end{matrix}$$

f) $C \cdot B$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{geht nicht} \end{matrix}$$

Aufgabe 6:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Bilden Sie folgende Operationen:

a)
$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&3&4&5&1\\7&8&9&10&5\\12&13&11&15&3\end{pmatrix}$$

b)
$$A+C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$$

c)
$$B+A=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&3&4&5&1\\7&8&9&10&5\\12&13&11&15&3\end{pmatrix}$$

d)
$$C+A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$$

e)
$$B+C=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$$

f) $C+B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

g) $A-B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&1&2&3&-1\\3&4&5&6&1\\6&7&5&9&-3\end{pmatrix}$

h) $A-C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

i) $B-A=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&-1&-2&-3&1\\-3&-4&-5&-6&-1\\-6&-7&-5&-9&3\end{pmatrix}$

j) $C-A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

k) $B-C=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

l) $C-B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

Aufgabe 7:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 wird das Material M1 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material 1 wird im ersten Quartal benötigt?

Lösung: 63

Lösung:

$$A_{(1,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_{(E,1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = 0*8+1*15+3*16 = 63$$

Es werden also im ersten Quartal 63 Einheiten des Materials 1 benötigt.

Aufgabe 8:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material wird im ersten Quartal benötigt?

Lösung: (63;39;80;69)

Lösung:

$$A_{(M,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{T}{}_{(E,1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A * B^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0*8+1*15+3*16=63 \\ 1*8+1*15+1*16=39 \\ 2*8+0*15+4*16=80 \\ 1*8+3*15+1*16=69 \end{matrix}$$

Es werden somit im ersten Quartal folgende Einheiten der Materialien benötigt:

	Material 1	Material 2	Material 3	Material 4
Quartal1	63	39	80	69

Aufgabe 9:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

In den Quartalen des Jahres sollen folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16
Quartal 2	10	20	20
Quartal 3	12	24	25
Quartal 4	10	18	20

Wie viel Einheiten der 4 Materialien werden in den 4 Quartalen benötigt?

Lösung:

	Material 1	Material 2	Material 3	Material 4
Quartal 1	63	39	80	69
Quartal 2	80	50	100	90
Quartal 3	99	61	124	109
Quartal 4	78	48	100	84

Lösung:

$$A_{(M,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T_{(E,Q)} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 10 \\ 15 & 20 & 24 & 18 \\ 16 & 20 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A * B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 10 \\ 15 & 20 & 24 & 18 \\ 16 & 20 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Bei der Multiplikation zweier Matrizen wird jede Zeile der ersten Matrix mir jeder Spalte der zweiten Matrix multipliziert. Die Produkte werden addiert. Dabei geht man nach ff. Rechenschema vor:

			8	10	12	10
			15	20	24	18
			16	20	25	20
0	1	3	**63**	**80**	99	78
1	1	1	**39**	**50**	61	48
2	0	4	**80**	**100**	124	100
1	3	1	**69**	**90**	109	84

$0*8+1*15+3+16=63$ $\quad$ $0*10+1*20+3*20=80$

$1*8+1*15+1*16=39$ $\quad$ $1*10+1*20+1*20=50$

$2*8+0*15+4*16=80$ $\quad$ $2*10+0*20+4*20=100$

$1*8+3*15+1*16=69$ $\quad$ $1*10+3*20+1*20=90$

usw.

Es werden in den Quartal folgende Einheiten der Materialien benötigt:

	Material 1	Material 2	Material 3	Material 4
Quartal 1	63	39	80	69
Quartal 2	80	50	100	90
Quartal 3	99	61	124	109
Quartal 4	78	48	100	84

Aufgabe 10:

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1) mal 0,5 + (2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2) mal } (-\frac{2}{3}) + (1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1) geteilt 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2) mal } (\frac{2}{3})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12:

Berechnen Sie Inverse Matrix zu A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

```
             M                         E

          3   5   1                 1   0   0
          2   4   5                 0   1   0
          1   2   2                 0   0   1

   Vertausche die erste und die dritte Zeile

          1   2   2                 0   0   1
          2   4   5                 0   1   0
          3   5   1                 1   0   0

   Subtrahiere das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten

          1   2   2                 0   0   1
          0   0   1                 0   1  -2
          3   5   1                 1   0   0

   Subtrahiere das Dreifache der ersten Zeile von der dritten

          1   2   2                 0   0   1
          0   0   1                 0   1  -2
          0  -1  -5                 1   0  -3

   Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit -1

          1   2   2                 0   0   1
          0   1   5                -1   0   3
          0   0   1                 0   1  -2

   Subtrahiere das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten

          1   0  -8                 2   0  -5
          0   1   5                -1   0   3
          0   0   1                 0   1  -2

   Addiere das Achtfache der dritten Zeile zur ersten

          1   0   0                 2   8  -21
          0   1   5                -1   0   3
          0   0   1                 0   1  -2

   Subtrahiere das Fünffache der dritten Zeile von der zweiten

          1   0   0                 2   8  -21
          0   1   0                -1  -5   13
          0   0   1                 0   1   -2

           = E                       = M^-1
```

Aufgabe 13:

Berechnen Sie die Matrizenprodukte AB, BA, $A^T A$, AA^T mit:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche besondere Eigenschaft besitzen die Matrizen $A^T A$ und AA^T?

Lösung:

$$AB=\begin{array}{r|c} A \qquad\qquad B & \begin{pmatrix}7&3&-2\\-1&-5&3\\-8&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}5&3&2\\1&0&-1\\4&2&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}16&0&1\\15&3&-3\\26&2&-2\end{pmatrix}\end{array}$$

z.B.: $5\cdot 7 + 3\cdot(-1) + 2\cdot(-8) = 16$

$$BA=\begin{array}{r|c} B \qquad\qquad A & \begin{pmatrix}5&3&2\\1&0&-1\\4&2&0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}7&3&-2\\-1&-5&3\\-8&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}30&17&11\\2&3&3\\-36&-22&-16\end{pmatrix}\end{array}$$

z.B.: $(-8)\cdot 5 + 0\cdot 1 + 1\cdot 4 = -36$

$$A^TA=\begin{array}{r|c} A^T \qquad\qquad A & \begin{pmatrix}5&3&2\\1&0&-1\\4&2&0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}5&1&4\\3&0&2\\2&-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}42&23&9\\23&13&6\\9&6&5\end{pmatrix}\end{array}$$

z.B.: $3\cdot 3 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2 = 13$

$$AA^T=\begin{array}{r|c} A \qquad\qquad A^T & \begin{pmatrix}5&1&4\\3&0&2\\2&-1&0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}5&3&2\\1&0&-1\\4&2&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}38&3&26\\3&2&4\\26&4&20\end{pmatrix}\end{array}$$

z.B.: $4\cdot 4 + 2\cdot 2 + 0\cdot 0 = 20$

AA^T und A^TA sind symmetrische Matrizen.

Aufgabe 14:

Berechnen Sie die Determinanten dieser Matrizen!

a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 7 & -8 & 11 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

. a) $A=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

Berechnung der Determinante einer Matrix vom Typ (2,2):

$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$

$\det(A) = -4 \cdot 5 - 7 \cdot 1 = -20 - 7 = -27$ $\det(B) = 2 \cdot 7 - (-4) \cdot 8 = 14 - (-32) = 46$

c) $C=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 7 & -8 & 11 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der Determinante einer Matrix vom Typ (3,3):

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2}$$

$\det(C) =$

$$6 \cdot (-8) \cdot 2 + 2 \cdot 11 \cdot (-3) + (-4) \cdot 7 \cdot (-1) - (-4) \cdot (-8) \cdot (-3) - 6 \cdot 11 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 \cdot 2$$
$$= (-96) + (-66) + 28 - (-96) - (-66) - 28$$
$$= 0$$

Aufgabe 15:

Berechnen Sie die inversen Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) 1. Schritt: Berechnung der Determinante der Matrix A

$$\det(A) = 1\cdot3\cdot2 + 0\cdot4\cdot3 + 2\cdot2\cdot0 - 2\cdot3\cdot3 - 1\cdot4\cdot0 - 0\cdot2\cdot2 = 6 - 18 = -12$$

2. Schritt: Berechnung der Matrix der Adjunkten von A

$$\begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix}3 & 4\\0 & 2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 0\end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} +(6) & -(-8) & +(-9) \\ -(0) & +(-4) & -(0) \\ +(-6) & -(0) & +(3) \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ -0,67 & 0,33 & 0 \\ 0,75 & 0 & -0,25 \end{pmatrix}$$

b.) 1. Schritt: Berechnung der Determinante der Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 3\cdot4\cdot2 + 5\cdot5\cdot1 + 1\cdot2\cdot2 - (1\cdot4\cdot1 + 3\cdot5\cdot2 + 5\cdot2\cdot2) = 53 - 54 = -1$$

2. Schritt: Berechnung der Matrix der Adjunkten von B

$$\begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix}4 & 5\\2 & 2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 2\end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}3 & 5\\1 & 2\end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix}5 & 1\\4 & 5\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 5\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}3 & 5\\2 & 4\end{pmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & -1 \\ 21 & -13 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 21 \\ 1 & 5 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} -2 & -8 & 21 \\ 1 & 5 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -8 & 21 \\ 1 & 5 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c.) $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ det(C)= 5 – 4 = 1

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie die inverse Matrix.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 10 & -3 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3\end{array}\right)$$

Aufgabe 17:

Gesucht wird die inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Das Lösungsverfahren zum Auffinden der inversen Matrix besteht nun darin, das Matrixtableau von A zu erweitern zur erweiterten Matrix B = A/E, worin E die (4,4) Einheitsmatrix darstellt:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nun wenden wir das Gauß - Verfahren so an, daß wir von B = A/E auf eine Matrix der Form C = E/D, gelangen, wobei dann $D = A^{-1}$ ist. Auf diesem Umwandlungsweg durchlaufen wir der Reihe nach die folgenden Stationen:

$$\left.\begin{array}{lcr} z_1 & \rightarrow & z_2 \\ z_2 & \rightarrow & z_1 + 2z_2 \\ z_3 & \rightarrow & z_2 + 1z_3 \\ z_4 & \rightarrow & z_4 - 3z_2 \end{array}\right\} B_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 8 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -6 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

Nachdem wir mit unserer 1. Umwandlung auf der linken Matrixseite dafür gesorgt haben, daß unterhalb des Diagonalelementes a_{11} in der ersten Spalte lauter Nullen stehen, sorgen wir im zweiten Schritt dafür, daß dies auch in der zweiten und dritten Spalte geschieht:

$$
\left.\begin{array}{lcr}
z_1 & \to & z_1 \\
z_2 & \to & z_2 \\
z_3 & \to & z_3 - z_2 \\
z_4 & \to & z_4 + z_2
\end{array}\right\}
\quad B_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 12 & 8 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right).
$$

Nun bringen wir alle Diagonalelemente a_{ii} der linken Seite auf den Wert 1:

$$
\left.\begin{array}{lcr}
z_1 & \to & z_1 \\
z_2 & \to & \frac{1}{2}z_2 \\
z_3 & \to & -\frac{1}{2}z_3 \\
z_4 & \to & \frac{1}{2}z_4
\end{array}\right\}
\quad B_3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 6 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}\right).
$$

An diesem Punkt sind alle Elemente Null bis zum Diagonalelement. Die Diagonalelemente selbst sind 1. In der 4. Zeile steht auf der linken Hälfte die angestrebte Form der Einheitsmatrix. Auf der rechten Seite der 4. Zeile stehen dann die gesuchten Elemente der inversen Matrix. Wir belassen deshalb diese Zeile. Um auch die dritte Zeile auf der linken Seite in die Form der Einheitsmatrix zu bringen, ziehen wir die 4. Zeile von der dritten Zeile ab:

$$
\left.\begin{array}{lcr}
z_1 & \to & z_1 \\
z_2 & \to & z_2 \\
z_3 & \to & z_3 - z_4 \\
z_4 & \to & z_4
\end{array}\right\}
\quad B_4 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 6 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}\right).
$$

Jetzt haben die dritte und die vierte Zeile die gesuchte Form. Wir belassen deshalb im weiteren Verfahren diese beiden Zeilen und verwenden sie, um auch die linken Seiten der beiden ersten Zeilen in die Form der Einheitsmatrix zu bringen:

$$
\left.\begin{array}{lcr}
z_1 & \to & z_1 - 5z_3 - 2z_4 \\
z_2 & \to & z_2 - 6z_3 - 4z_4 \\
z_3 & \to & z_3 \\
z_4 & \to & z_4
\end{array}\right\}
\quad C = E/D = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}\right)
$$

Die rechte Seite von C repräsentiert schließlich die inverse Matrix:

$$D = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18:

Es liegt ein zweistufiger Produktionsprozess vor, bei dem folgende Bedingungen vorliegen:

1. Stufe: Rohstoffe R1, R2, R3, R4 –> Halbfabrikate H1, H2, H3

2. Stufe: Halbfabrikate H1, H2, H3 –> Endprodukte E1, E2

z. B.

Für 1 ME Endprodukt E_1 wird benötigt: 4 ME H_1, 2 ME H_2, 10 ME H_3
Für 1 ME Halbfabrikat H_2 wird benötigt: 3 ME R_1, 5 ME R_2, 0 ME R_3, 7 ME R_4

	H_1	H_2	H_3
R_1	1	3	0
R_2	10	5	8
R_3	2	0	1
R_4	3	7	1

	E_1	E_2
H_1	4	20
H_2	2	3
H_3	10	5

Wie viel Rohstoffe sind nötig, um 2000 ME E_1 und 10000 ME E_2 herzustellen?

Lösung:

Definieren entsprechende Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor

Berechnung der Verflechtungsbilanz (Menge nötiger Rohstoffe)

$$\begin{aligned} r &= A \cdot B \cdot p \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 29 \\ 130 & 255 \\ 18 & 45 \\ 36 & 86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310000 \\ 2810000 \\ 486000 \\ 932000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur Herstellung von 2000 ME E_1 und 10000 ME E_2 sind Rohstoffe in folgender Menge nötig:

310000 ME R_1, 2810000 ME R_2, 486000 ME R_3, 932000 ME R_4