Logarithmen

Gesetzmäßigkeiten

Einführung

Als erstes muss geklärt werden, für was ein Logarithmus gebraucht wird. Dazu sollte folgendes einführendes Beispiel gemacht werden.

Beispiel 1:

$2^x = 8$

Wie an diesem Beispiel erkennt, ist es bei einfachen Zahlen leicht die Lösung zu finden. Nimmt man aber ein Beispiel, bei dem keine gerade Zahl als Lösung herauskommt, so haben wir jetzt die Schwierigkeit die Lösung zu finden.

$7^x = 11$

Dies bedeutet folgendes:

Ein Logarithmus wird immer dann benötigt, wenn die Unbekannte in der Potenz steht.

Solche oben dargestellte Gleichungen kann man mittels den Logarithmen umformen.

Umformungsregel:

$\mathrm{a}^{\mathrm{x}} = \mathrm{b} \quad \rightarrow \quad \mathrm{x} = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$

Bezeichnungen $(\mathbf{a}^{\mathbf{x}} = \mathbf{b})$:

x: Exponent

a: Basis

b: Potenzwert

Bezeichnungen $(\mathbf{x} = \mathbf{log_a}\, \mathbf{b})$:

a: Logarithmusbasis

b: Numerus

x: Logarithms

Daraus ergibt sich folgende Aussage:

Der Logarithmus von b zur Basis a ist der Exponent x, mit dem man eine Basis a potenzieren muss, um den Potenzwert (Numerus) b zu erhalten.

Dabei gelten folgende Einschränkungen:

$\mathrm{a}, \mathrm{b} > 0 \ \wedge \mathrm{b} \neq 1$

Beispiel 2:

$3^x = 9 \quad \rightarrow \quad \log_3 9 = x$

Logarithmengesetze

Logarithmieren und Potenzieren zur gleichen Basis b heben sich also gegenseitig auf.

Beispiel 3:

$a^x = b \quad \rightarrow \quad x = \log_a b$

$a^{\log_a b} = b$

Als Zahlenbeispiel:

$2^{\log_2 100} = 100$

Basiswechselsatz

Wenn ein Logarithmus zu einer bestimmten Basis nicht bekannt ist, oder nicht berechnet werden kann, so kann er mit dem Basiswechselsatz in den Quotienten zweier Logarithmen zur Basis c umgewandelt werden.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dieser Basiswechselsatz wird hauptsächlich zum Berechnen von Logarithmen mit dem Taschenrechner benutzt. In vielen Taschenrechnern hat es nur bestimmte Logarithmen.

Bezeichnungen für Logarithmen

Dekadischer oder 10er-Logarithmus:

Einen Logarithmus zur Basis 10 wir als der dekadische Logarithmus bezeichnet.

Es wird dazu folgende Schreibweise verwendet:

$\log_{10}(b) = \lg(b)$

Natürlicher Logarithmus:

Einen Logarithmus zur Basis e wird als natürlicher Logarithmus bezeichnet.

Es wird dazu folgende Schreibweise verwendet:

$\log_e(b) = \ln(b)$

Binärer Logarithmus:

Einen Logarithmus zur Basis 2 wird binärer oder dualer Logarithmus genannt.

Es wird dazu folgende Schreibweise verwendet:

$\log_2(b) = \mathrm{lb}(b)$

Achtung:

Auf Taschenrechner wird sehr häufig der dekadische Logarithmus mit log bezeichnet. Hier muss einfach aufgepasst werden.

Beispiel 4:

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner.

$$\log_3 7 = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} = 1{,}7712$$

Logarithmus eines Produkts

Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert.

$$\log_a(u \cdot v) = \log_2(u) + \log_v(v)$$

Beispiel 5:

$$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(4) + \log_2(8) = 2 + 3 = 5$$

Logarithmus eines Quotienten

Ein Quotient wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren des Zählers und des Nenners subtrahiert.

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

Beispiel 6:

$$\log_3\left(\frac{56}{8}\right) = \log_3(56) - \log_3(8) = 3{,}6640 - 1{,}8928 = 1{,}7712$$

Logarithmus einer Potenz

Eine Potenz wird logarithmiert, indem der Exponent mit dem Logarithmus der Basis multipliziert wird.

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$$

Beispiel 7:

$$\log_8(4^2) = 2 \cdot \log_8(4)$$

Logarithmus einer Wurzel

Eine Wurzel wird logarithmiert, indem man den Kehrwert des Wurzelexponenten mit dem Logarithmus des Radikanden multipliziert.

$$\log_a\left(\sqrt[n]{b}\right) = \log_a\left(b^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$$

Beispiel 8:

$$\log_4 \sqrt[3]{27} = \log_4(27^{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4} \cdot \log_4(27)$$

Kehrwertsätze des Logarithmus

Man kann einen Logarithmus berechnen, indem man die Basis mit dem Numerus vertauscht und dann den Kehrwert bildet.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Beispiel 9:

$$\log_7(5) = \frac{1}{\log_5(7)}$$

Sonderfälle und besondere Logarithmen

Hier einige Sonderfälle, wobei es nützlich sein kann, zu wissen was für ein Ergebnis herauskommt. Damit kann man Rechenwege verkürzen.

$\log_a a = \mathrm{lg}(10) = \ln(\mathrm{e}) = \mathrm{lb}(2) = 1$

$\log_a 1 = \mathrm{lg}(1) = \ln(1) = \mathrm{lb}(1) = 0$

$\log_a(a^n) = \mathrm{lg}(10^{\mathrm{n}}) = \ln(\mathrm{e}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{lb}(2^{\mathrm{n}}) = \mathrm{n}$

$\mathrm{a}^{\log_{\mathrm{a}}\mathrm{b}} = 10^{\mathrm{lg(b)}} = \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{b})} = 2^{\mathrm{lb(b)}} = \mathrm{b}$

Für das Rechnen mit Logarithmen sollte der ungefähre Verlauf von Logarithmen bekannt sein. Deshalb hier der allgemeine Verlauf von Logarithmen am Beispiel des natürlichen Logarithmus.

$\ln(-2) = \text{kann nicht berechnet werden}$

$\ln(0) = \text{kann nicht berechnet werden}$

$\ln(0{,}5) = \text{negativ}$

$\ln(1) = 0$

$\ln(2) = \text{positiv}$

Wenn der Numerus des Logarithmus kleiner oder gleich Null ist, so ist der Logarithmus nicht definiert.

Wenn der Numerus des Logarithmus zwischen Null und Eins liegt, ist der Logarithmus immer negativ.

Wenn der Numerus des Logarithmus gleich eins ist, ist der Logarithmus Null.

Wenn der Numerus des Logarithmus größer als Eins ist, ist der Logarithmus immer positiv.

Häufig gemachte Fehler

Vorher wurde folgendes Logarithmusgesetz behandelt.

$\log_a(u \cdot v) = \log_2(u) + \log_v(v)$

Dieses wird sehr häufig mit folgendem verwechselt.

$\log_a(u + v) = \log_2(u) \cdot \log_v(v)$

Hierbei handelt es sich aber um keine gültige Gesetzmäßigkeit.

Etwas Ähnliches gilt für folgende Gesetzmäßigkeit.

$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

Dieses wird sehr häufig mit folgendem verwechselt.

$\log_a(u - v) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(v)}$

Eine weitere Gesetzesmäßigkeit.

$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

Dieses wird sehr häufig mit folgendem verwechselt.

$\log_a^n b = (\log_a(b))^2 \neq \log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

Achtung:

Es gibt zwar ein Logarithmusgesetz für den Logarithmus einer Potenz, aber nicht für die Potenz eines Logarithmus.