Operations Research

Merkmale des Operations Research

Definition 1:

Operations Research ist ein angloamerikanischer Begriff. Synonym ist hierzu der deutsche Begriff: **Optimalplanung**. Eine Optimalplanung besitzt folgende

Eigenschaften:

- Vorbereitung optimaler Entscheidungen
- Verwendung mathematischer Modelle zur Optimierung

Problemstellungen

Allgemein sind Gegenstand von OR-Untersuchungen: Probleme der wirtschaftlichen, gesellschaftlichen Praxis, die sich durch mathematische Modelle beschreiben lassen.

Solche Probleme können sein:

Zuteilungsprobleme:

Eine vorgegebene Leistung ist durch den Einsatz beschränkter Mittel auf wirtschaftliche Weise zu erzielen bzw. mit gegebenen Mitteln ist ein maximaler Ertrag zu erzielen.

Am häufigsten zur Lösung von Zuteilungsproblemen verwendete mathematische Verfahren: Lineare Planungsrechnung (lineare Optimierung, lineare Programmierung)

Konkurrenzprobleme:

Entscheidungen des einen Partners werden durch Entscheidungen des anderen Partners beeinflusst.

Konkurrenzprobleme werden mit Hilfe von Spielen (z.B. Zweipersonen- Nullsummenspiele) beschrieben, d.h. charakterisiert durch eine bestimmte Anzahl von Spielern, Spielregeln, Gewinn und Verlust.

Das grundlegende mathematische Verfahren ist in der Spieltheorie beschrieben.

Lagerhaltungsprobleme:

In diesen Problemen sind die Kosten der Lagerung abzuwägen gegen Auftragskosten bzw. Bestellkosten und Kosten, die durch verzögerte Lieferung wegen Erschöpfung des Lagerbestands entstehen.

Mathematische Hilfsmittel sind hier: Gleichungssysteme und Verfahren der linearen und dynamischen Planungsrechnung.

Wartezeitprobleme:

Personen und Güter werden durch (eine oder mehrere) Stellen abgefertigt. Von Ausnahmefällen abgesehen, müssen dabei zu bedienende Einheiten oder Bedienungsstellen warten. Es entstehen Kosten. Die Summe dieser Kosten soll einen möglichst geringen Wert annehmen.

Mathematische Verfahren zur Behandlung derartiger Probleme stellen zur Verfügung:

1. Warteschlangentheorie, z.B.

- zur Bestimmung der Anzahl der Bedienungsstellen
- zur Festlegung der Zeitpunkte, zu denen die abzufertigenden Einheiten voraussichtlich eintreffen

2. Optimale Reihenfolgen

Optimale Bestimmung der Reihenfolge in der bereitstehende Einheiten zur Bedienung herangezogen werden. Die Zahl der Bedienungsstellen liegt hier fest, die Reihenfolge ist dagegen beeinflussbar.

Bsp.: Ablaufplanung für Produktserien über eine Reihe von Maschinen mit dem Ziel eine minimale Gesamtlaufzeit zu erreichen.

Dazu verwandte Probleme:

- Das Abstimmen der einzelnen Arbeitsgänge an einem Montageband mit dem Ziel eine minimale Gesamtlaufzeit zu erreichen

Eine Route für eine Reihe von Orten so festlegen, dass die zurückgelegte Entfernung ein Minimum wird.

Ersatzprobleme:

- Die Leistungsfähigkeit der Einrichtungen nimmt allmählich ab. Es ist der optimale Einsatzpunkt zu bestimmen durch Minimieren der Kosten für eine neue Einrichtung bzw. der Kosten zur Erhaltung der Leistungsfähigkeit der alten Anlage.
- Die Einrichtungen fallen plötzlich vollständig aus.

Hier ist festzustellen:

Welche Stücke sind zu ersetzen? (z.B. alle außer in der letzten Woche eingesetzten Stücke). Wie oft sollen diese Einrichtungen ersetzt werden?

Die Fragen werden mit Hilfe des folgenden Entscheidungskriteriums beantwortet:

- Kosten, die durch die Einrichtung entstehen
- Kosten, die durch den Ausfall entstehen

Problemlösungen

Mit Hilfe eines Algorithmus wird das mathematische Modell unter Verwendung der Daten gelöst.

OR im weitesten Sinn beschäftigt sich mit Modellbildung und Lösungsfindung (Entwicklung und / oder Anwendung von Algorithmen) sowie Methoden zur Datenermittlung.

Modelle spielen im OR eine zentrale Rolle. Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild eines realen Systems oder Problems. OR benutzt im wesentlichen Entscheidungs- bzw. Optimierungs- – sowie Simultaionsmodelle.

Ein Entscheidungs- bzw. Optimierungsmodell ist eine (formale) Darstellung eines Entscheidungs- oder Planungsproblems, das in seiner einfachsten Form mindestens eine Alternativmenge und eine bewertende Zielfunktion enthält.

Es wird aufgestellt, um mit geeigneten Verfahren optimale und suboptimale Lösungsvorschläge ermitteln zu können.

Ein Optimierungsmodell lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Definition 2:

Maximiere (oder Minimiere) eine Zielfunktion unter den Nebenbedingungen.

Häufig sind aber die angegebenen Probleme so komplex, dass zu den mathematischen Modellen keine bzw. nur sehr komplizierte, direkte analytische Lösungsmethoden vorliegen. In solchen Fällen setzt man auf Simulationsverfahren.

Darunter wird das Zielgerichtete Experimentieren an Modellen, die der Wirklichkeit nachgebildet sind verstanden. Durch die Simulation, d.h. die Bearbeitung von Modellen bei Zielgerichteter Veränderung der Einflussgrößen, sollen Rückschlüsse auf das reale System möglich werden.

Simulation als Methode des OR wird dann angewandt, wenn sich das Problem nicht durch ein mathematisches Modell beschreiben lässt oder wenn es kein analytisches Lösungsverfahren gibt oder wenn ein solches einen zu hohen Rechenaufwand erfordern würde. Zielsetzung der Simulation ist das Bestimmen sog. Suboptima, z.B. die optimale Bestellmenge, optimale Ersatzzeitpunkte, u. ä. Häufig werden lediglich Subboptimahle Lösungen erreicht, da die Modelle nur Teilzusammenhänge realer Systeme nachbilden. Simulationen gehören somit zu den heuristischen Verfahren.

Lineare Planungsrechnung

Einführung

Lineare Optimierung, was ist das?

Mit linearer Optimierung bezeichnet man ein Teilgebiet der Optimierungsrechnung. Diese ist ein wichtiges Hilfsmittel zur optimalen Entscheidungsfindung bei komplizierten Problemen.

Die lineare Optimierung wird verwendet, um das **Minimum** beziehungsweise das **Maximum** einer linearen Funktion unter einschränkenden Bedingungen zu ermitteln. Die zu maximierende Funktion ist dabei meistens die Gleichung für den Gewinn, die zu minimierende Funktion die Gleichung für die Kosten eines Unternehmens.

Um das Minimum oder das Maximum zu bestimmen, muss man die einschränkenden Bedingungen, die Einfluss auf das Ergebnis haben herausfinden und mit dem zu erreichenden Minimum/Maximum in Verbindung setzten.

Erste Schritte:

Diejenigen Bedingungen zu bestimmen, die eine Wirkung auf das Optimierungsergebnis haben, ist eine wichtige Aufgabe, die vor der eigentlichen Rechnung gelöst werden muss. Hierbei ist die exakte Formulierung der Aufgabe sehr wichtig, die meistens aus zwei Teilen besteht: die Bestimmung des Ziels und die Bedingungen, die dafür notwendig sind.

Mathematischer Zusammenhang:

Die lineare Optimierung hat sich aus der linearen Algebra herausgebildet. Die Bestimmung eines Extremwertes ist aus der Differenzialrechnung bekannt.

Sie wird dort auf nichtlineare Funktionen einer oder mehrerer unabhängiger Variablen angewendet. Für die Extremwertberechnungen linearer Funktionen versagen die Methoden der Differenzialrechnung. Lineare Funktionen sind zwar differenzierbar, da aber ihre erste Ableitung stets konstant ist, kann die für einen Extremwert bestehende notwendige Bedingung nicht erfüllt werden.

Die Frage nach einem Extremwert einer linearen Funktion geht bei den Problemen der linearen Optimierung von wesentlich anderen Gesichtspunkten aus als bei der Differenzialrechnung. Sie wird erst sinnvoll durch die stets mit auftretenden Nebenbedingungen, die die Form von linearen Gleichungen und Ungleichungen haben.

Sind Entscheidungen Glücksache?

„OR oder Optimalplanung bedeutet das Vorbereiten optimaler Entscheidungen“.

Entscheidungen sind aber häufig von zufälligen Ereignissen abhängig, d.h. "Entscheidungen sind Glücksache".

1) Gegeben ist das folgende Problem:

Beispiel 1:

Aus einem bestimmten Kontingent an Rohmaterial können 2 Erzeugnisse (Produkte) hergestellt werden.

Der Stückgewinn des einen Produkts (Produkt 2) ist doppelt so hoch wie der Stückgewinn des anderen Produkts (Produkt 1).

Die aus dem gegebenen Rohmaterial mögliche Produktion ist in jedem Fall ganz absetzbar.

Wie viel ist von beiden Produkten zu fertigen, wenn ein optimaler Gewinn erreicht werden soll?

Dazu wollen wir versuchen verschiedene Dispositionsregeln aufzustellen.

Dispositionsregel (1):

Es ist nur das Produkt zu fertigen, das den höchsten Gewinn abwirft.

Das bedeutet:

Nur das Produkt 2 ist zu fertigen. Ist diese Entscheidung richtig? Sie kann auch falsch sein.

Das vorhandene **Rohmaterialkontingent** ist:

Rohmaterial 1: 6t

Rohmaterial 2: 10t

Rohmaterial 3: 16t

Davon wird für die Fertigung je eines Stücks benötigt:

Produkt 1: 1t Rohmaterial 1

2t Rohmaterial 2

1t Rohmaterial 3

Produkt 2: 1t Rohmaterial 1

1t Rohmaterial 2

3t Rohmaterial 3

Fertigt man 5 Stück von Produkt 2, dann bleiben noch übrig:

Rohmaterial 1: 1t

Rohmaterial 2: 5t

Rohmaterial 3: 1t

Diese Rohmaterialien reichen zur Fertigung von Produkt 2 nicht mehr aus, wohl aber zur Herstellung eines Stücks von Produkt 1.

Dispositionsregel (1) ist zu diesem speziellen Fall falsch.

Dispositionsregel (2):

Es wird soviel wie möglich von dem Produkt gefertigt, das den höchsten Gewinn abwirft. Vom etwa übrig gebliebenem Rohmaterial wird soviel wie möglich vom anderen Produkt erzeugt.

Auch diese Regel muss nicht allgemeingültig sein.

Deshalb versuchen wir es mit einem anderen Beispiel:

Beispiel 2:

Zur Fertigung eines Produkts A bzw. B braucht man

Produkt A:	1t Rohmaterial A
	2t Rohmaterial B
	1t Rohmaterial C
Produkt B:	1t Rohmaterial A
	1t Rohmaterial B
	3t Rohmaterial C

Das vorhandene **Rohmaterialkontingent** ist:

Rohmaterial 1: 6t

Rohmaterial 2: 10t

Rohmaterial 3: 16t

Der Gewinn für ein Stück von Produkt 2 ist wieder doppelt so groß wie für ein Stück von Produkt 1 (z.B. 200.- Euro gegenüber 100.- Euro).

Nach Dispositionsregel (2) ist der Gesamtgewinn = 1.100.- Euro. Es könnte ein Höchstgewinn von 500.- Euro erreicht werden, wenn 6 Stück von Produkt A hergestellt werden.

Dispositionsregel (3):

Fertigung des Produkts, das den niedrigeren Stückgewinn bringt.

Auch hier erhalten wir einen Gewinn von 600.- Euro

Bemerkung 1:

Offensichtlich ist es Glücksache, eine Dispositionsregel zu finden, die zum optimalen Ergebnis führt.

Vom Zufall zur Methode

Eine Methode in jedem Fall eine optimale Dispositionsregel zu finden, besteht aus folgenden Schritten:

Definition 3:

Stelle systematisch sämtliche Möglichkeiten (der Fertigung von Produkten) auf unter Berücksichtigung von

1. Materialanforderungen

2. Beschränkung der Materialkapazität

Rechne für jede Möglichkeit den Gewinn aus

Wähle die, oder, wenn es mehrere gibt, eine optimale (Fertigungs-) Kombination aus.

Anwendung auf das gegebene Problem

(1) systematische Zusammenstellung der Möglichkeiten

1) Möglichkeiten, die die Rohmaterialkapazität 1 zur Fertigung bietet.

2) Möglichkeiten, die die Rohmaterialkapazität 2 zur Fertigung bietet.

3) Möglichkeiten, die die Rohmaterialkapazität 3 zur Fertigung bietet.

(2) Bestimmen des Gewinns für die 25 zulässigen (Fertigungs-) Kombinationen.

Annahme: Gewinn für ein Stück des Produkts 1 ... 1 GE

Gewinn für ein Stück des Produkts 2 ... 2 GE

Zur Wiederholung nochmals die Vorgaben

Das vorhandene **Rohmaterialkontingent** ist:

Rohmaterial 1: 6t

Rohmaterial 2: 10t

Rohmaterial 3: 16t

Davon wird für die Fertigung je eines Stücks benötigt:

Produkt 1: 1t Rohmaterial 1

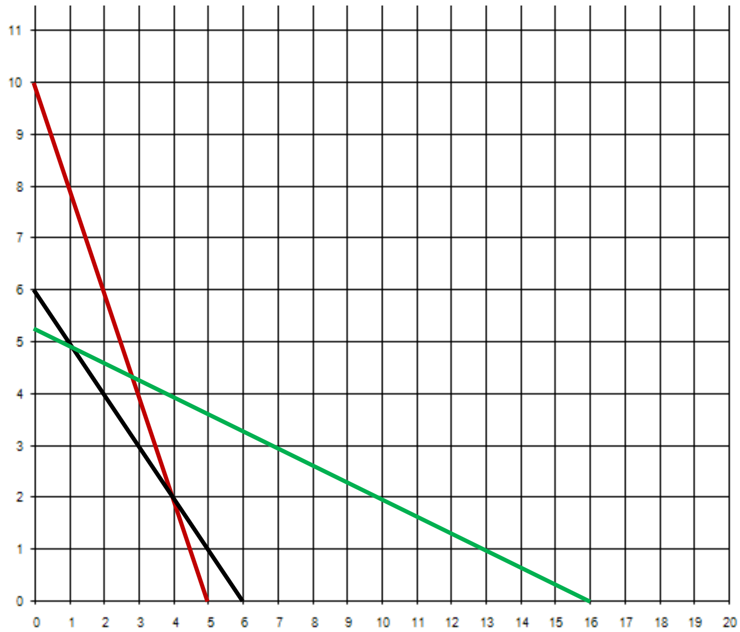
2t Rohmaterial 2

1t Rohmaterial 3

Produkt 2: 1t Rohmaterial 1

1t Rohmaterial 2

3t Rohmaterial 3



(3) optimale Kombination

Einzeichnen der Zielfunktion auf die gleiche Weise $z=x_1+2x_2$
$(x_2=-0{,}5x_1+0{,}5z)$

Optimale Lösung:

5 Stück Produkt 2

1 Stück Produkt 1

Gewinn 11 GE

Zusammenfassung:

Ein Verfahren wurde gefunden, dass jedes beliebige Zahlenbeispiel mit 2 zu fertigenden Produkten und beliebig vielen Rohmaterialien systematisch zu einer gewinnoptimalen Lösung führt, falls es eine solche Lösung gibt.

Von der Methode zum praktischen Verfahren

Unbefriedigend an dem bisher entwickelten, methodisch einwandfreien Verfahren ist:

- Das Verfahren ist nicht mehr in dieser Form durchführbar, wenn mehr als 2 zu fertigende Produkte behandelt werden müssen.
- Auch bei 2 Produkten kann die Prozedur, die nach den 3 Schritten abläuft, sehr langwierig sein, z.B. dann, wenn die Zahl der grundsätzlich möglichen Fertigungskombinationen sehr groß ist.

Wie muss ein Verfahren beschaffen sein, das diese beiden Schwachpunkte vermeidet, dennoch systematisch in jedem Fall eine optimale Dispositionsregel bestimmt?

Dazu sind 3 Fragen zu klären:

- Wie stellt man das Problem formelmäßig dar? (Voraussetzung für die Lösung durch einen formalen Rechenprozess)
- Gibt es einen Rechenprozess, der immer, auch bei beliebig vielen Produkten, systematisch zu einer optimalen Lösung führt?
- Gibt es einen solchen Rechenprozess, der mit möglichst wenigen Rechenschritten auskommt?

Die Klärung der unter 2. und 3. ausgeführten Fragen erfordert umfangreiche mathematische Beweisverfahren.

Ergebnis dieser mathematischen Untersuchungen:

Es gibt tatsächlich einen Rechenprozess, der immer zum Ziel führt. Dazu brauchen nur die Punkte eines „**Simplex**“ für die Berechnung des Optimums herangezogen werden. Eine optimale Lösung liegt in dem Punkt eines „Simplex“.

Simplex oder n-Simplex (Mehrzahl: Simplexe und Simplizia) ist ein Begriff aus der Geometrie und beschreibt einen n-dimensionalen Körper (eigentlich ein Polytop).

Das auf diese Weise angedeutete Rechenverfahren heißt Simplexverfahren.

Die Antwort auf die erste Frage zeigt die folgende mathematische Formulierung des Problems:

Mögliche Stückzahl des Produkts 1: x_1

Mögliche Stückzahl des Produkts 2: x_2

Allgemein gilt: $x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$

Die grafische Darstellung lässt sich dann folgendermaßen beschreiben:

Dazu nochmals die Daten:

Annahme: Gewinn für ein Stück des Produkts 1 ... 1 GE

Gewinn für ein Stück des Produkts 2 ... 2 GE

Zur Wiederholung nochmals die Vorgaben

Das vorhandene **Rohmaterialkontingent** ist:

Rohmaterial 1: 6t

Rohmaterial 2: 10t

Rohmaterial 3: 16t

Davon wird für die Fertigung je eines Stücks benötigt:

Produkt 1: 1t Rohmaterial 1

2t Rohmaterial 2

1t Rohmaterial 3

Produkt 2: 1t Rohmaterial 1

1t Rohmaterial 2

3t Rohmaterial 3

$x_1 + x_2 <= 6$

$2x_1 + x_2 <= 10$

$x_1 + 3x_2 <= 16$

Gewinn: $Z = x_1 + 2x_2$

Wähle aus den möglichen Lösungen des Systems von Ungleichungen die heraus, die den Wert der Zielfunktion Z zu einem Maximum macht. Das Auswählen erfolgt nach einem speziellen Rechenformalismus, dem (bereits erwähnten) Simplex-Verfahren.

Dieses Verfahren werden wir später noch kennen lernen.

Lineares Optimierungsproblems

Ein LOP besteht grundsätzlich aus folgenden Punkten:

- die Zielfunktion
- den Restriktionen (Nebenbedingungen
- den Nichtnegativitätsbedingungen (Vorzeichenbeschränkungen)

Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

LOP:	lineares Optimierungsproblem
Z:	Zielfunktion
NB:	Nebenbedingungen
NNB:	Nichtnegativitätsbedingungen

Definition 4:

Eine zulässige Lösung, für die die Zielfunktion einen optimalen (maximalen oder minimalen) Wert annimmt, heißt **optimale Lösung** (Optimallösung) des LOP.

Graphische Lösung

NNB schränken die Lösung auf positive Werte ein.

NB schränken im ersten Quadranten die Lösungsmenge weiter ein.

Mit der Zielfunktion ergibt sich dann die optimale Lösung (minimal oder maximal).

Beispiel 3:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB:
$$\begin{aligned} x_1 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 + 4x_2 &\le 36 \end{aligned}$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Zunächst werden die zu den Restriktionen gehörenden Hyperebenen gezeichnet und die entsprechenden Halbebenen gekennzeichnet. Unter Berücksichtigung der NNB erhält man den schraffierten Bereich der zulässigen Lösungen.

Jeder Punkt des Lösungsbereiches stellt eine zulässige Lösung des LOP dar. Von diesen Punkten wird derjenige (im Fall einer eindeutigen Optimallösung) bzw. werden diejenigen (im Falle einer mehrdeutigen Optimallösung) gesucht, in dem bzw. in denen die Zielfunktion einen maximalen Wert Z annimmt.

Die Zeichnung der Zielfunktion und in der Folge die Ermittlung der Optimallösung geschieht im Allgemeinen in zwei Schritten:

- man zeichnet eine erste Zielfunktion für einen beliebigen Wert von Z
- man verschiebt diese Zielfunktion so lange parallel, bis Z einen maximalen Wert annimmt

Diese Vorgehensweise ist deswegen möglich, weil die Zielfunktion für alle Werte von Z die gleiche Steigung hat. Im vorliegenden Fall formt man die Gleichung

$$Z = 2.000x_1 + 3.000x_2$$

in ihre Normalform

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{Z}{3.000}$$

um:

für beliebige Werte von Z beträgt die Steigung $-\frac{2}{3}$, und die Zielfunktionen verlaufen für verschiedene Werte von Z parallel, d. h. die zuerst gezeichnete Zielfunktion kann parallel verschoben werden.

Vielfach wird für die erste Zielfunktion der Wert Z=0 vorgegeben. Dann lautet die Normalform $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$, und die Zielfunktion verläuft durch den Nullpunkt. Eine Parallelverschiebung in Richtung zunehmender werte für Z ist möglich bis zum Punkt P.

Solange die Zielfunktion zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt P verläuft, ist die Lösung noch nicht optimal; wird die Zielfunktion aber über den Punkt p hinaus verschoben, so ist die Lösung nicht mehr zulässig.

Somit stellt der Punkt p die (eindeutige) Optimallösung des gegebenen LOP dar.

Anschließend müssen die Koordinaten (x_1, x_2) des Punktes P sowie der Wert Z der Zielfunktion ermittelt werden.

Für den Punkt P(4,8) und die Zielfunktion

$$Z = 2.000 \cdot 4 + 3.000 \cdot 8 = 32.000$$

Eine Alternative für die Zeichnung der ersten Zielfunktion ist die folgende. Man verwendet die Achsen-Abschnitts-Form und gibt für Z einen solchen Wert vor, dass die Schnittpunkte mit den beiden Achsen in der Zeichnung eingetragen werden können; damit ist der für Z vorzugebende Wert vom Maßstab der Zeichnung abhängig.

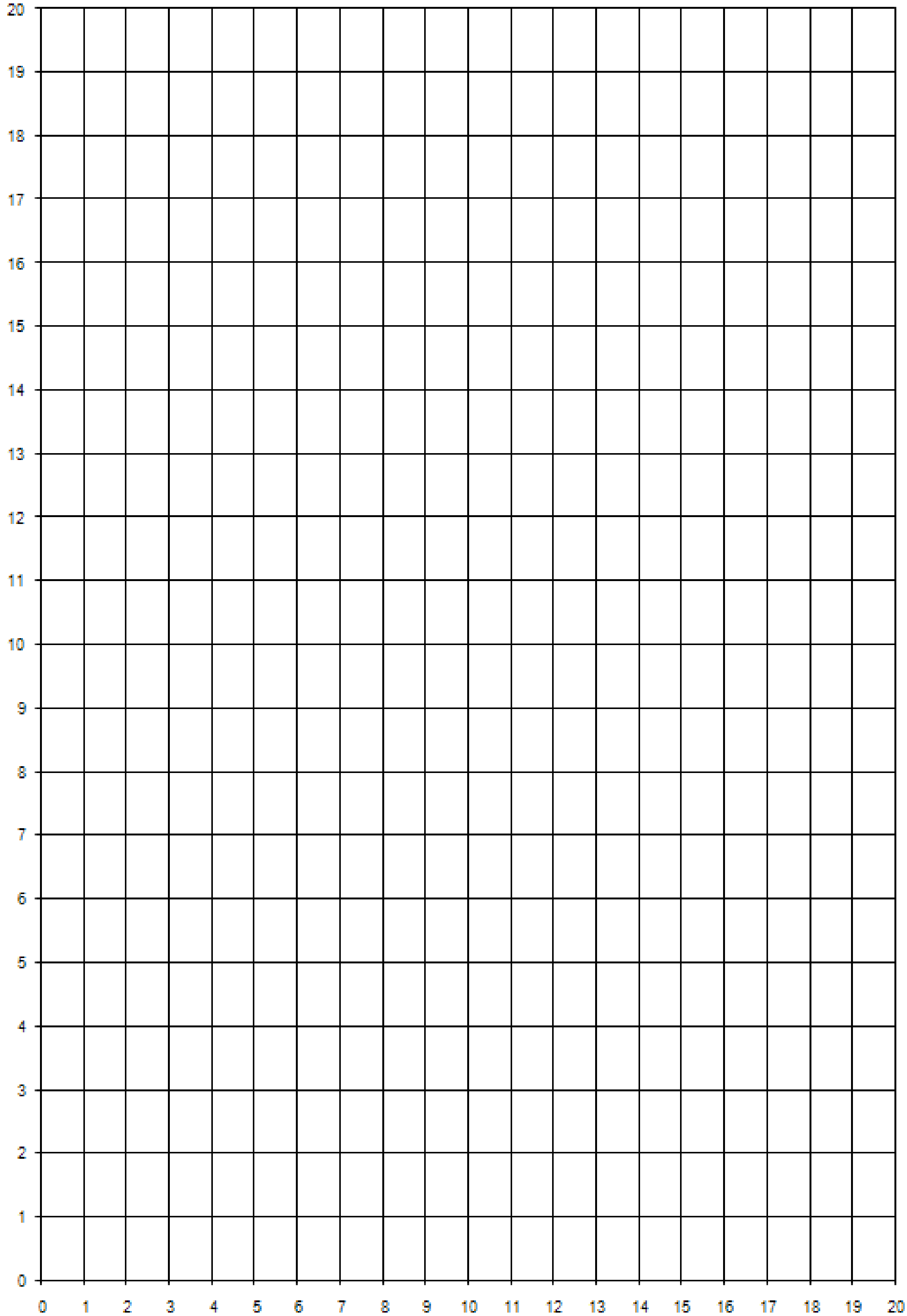
Für dieses Beispiel lautet die Achsen-Abschnitts-Form der Zielfunktion

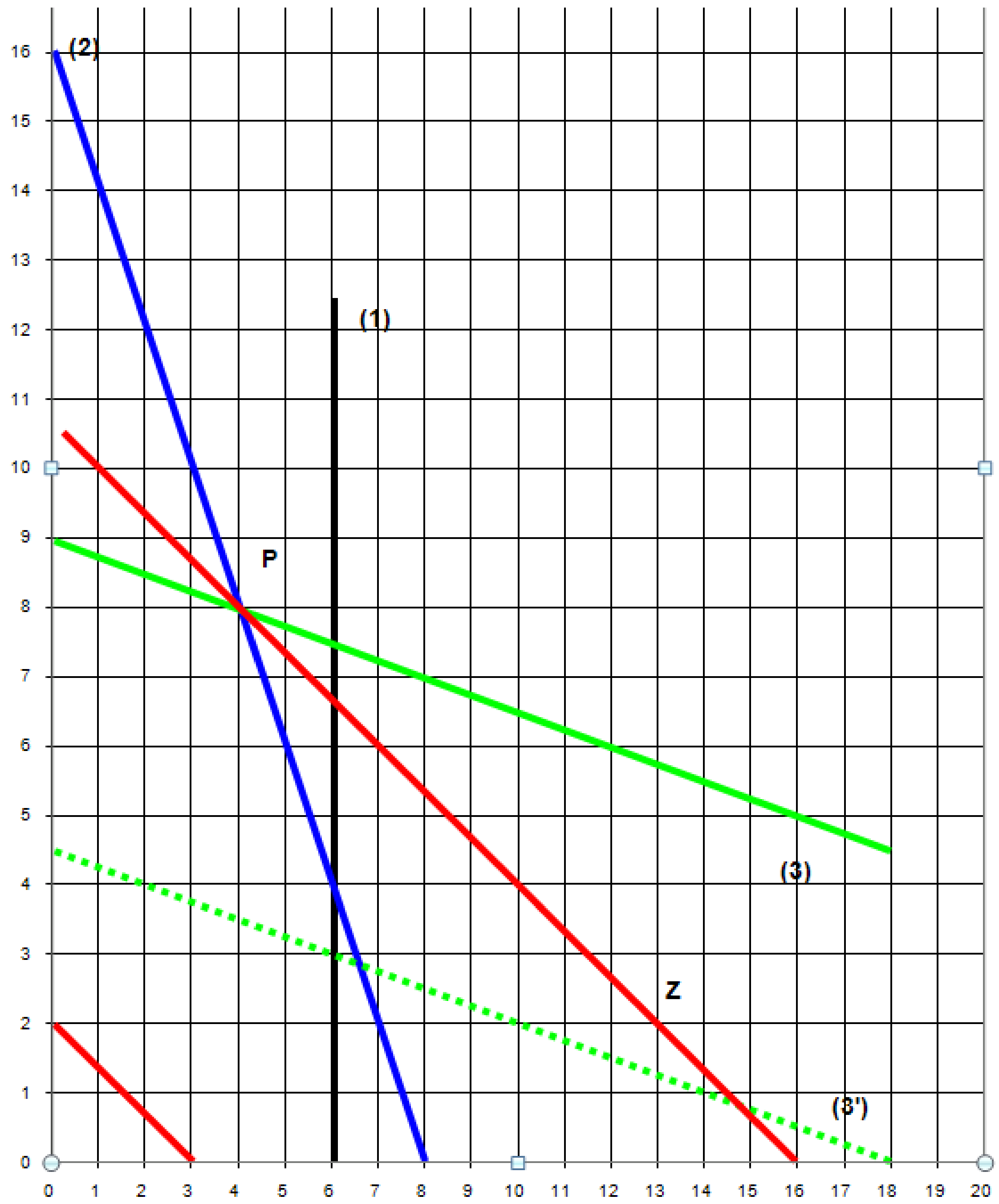
$$\frac{x_1}{\frac{Z}{2.000}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3.000}} = 1$$

Gibt man z. B. Z=18.000 vor, so erhält man

$$\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Gegenüber der oben praktizierten Verwendung der Normalform mit Z=0 dürfte diese Vorgehensweise den Vorteil einer höheren Genauigkeit haben.


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20



(1)
(2)
(3)
(3')
P
Z

Beispiel 4:

Gegeben ist das LOP

Z: Min $z=3x_1+4x_2$

NB:
$$2x_1+5x_2\geq 25$$
$$4x_1+4x_2\geq 32$$
$$6x_1+2x_2\geq 24$$

NNB: $x_1,x_2\geq 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}=1$$

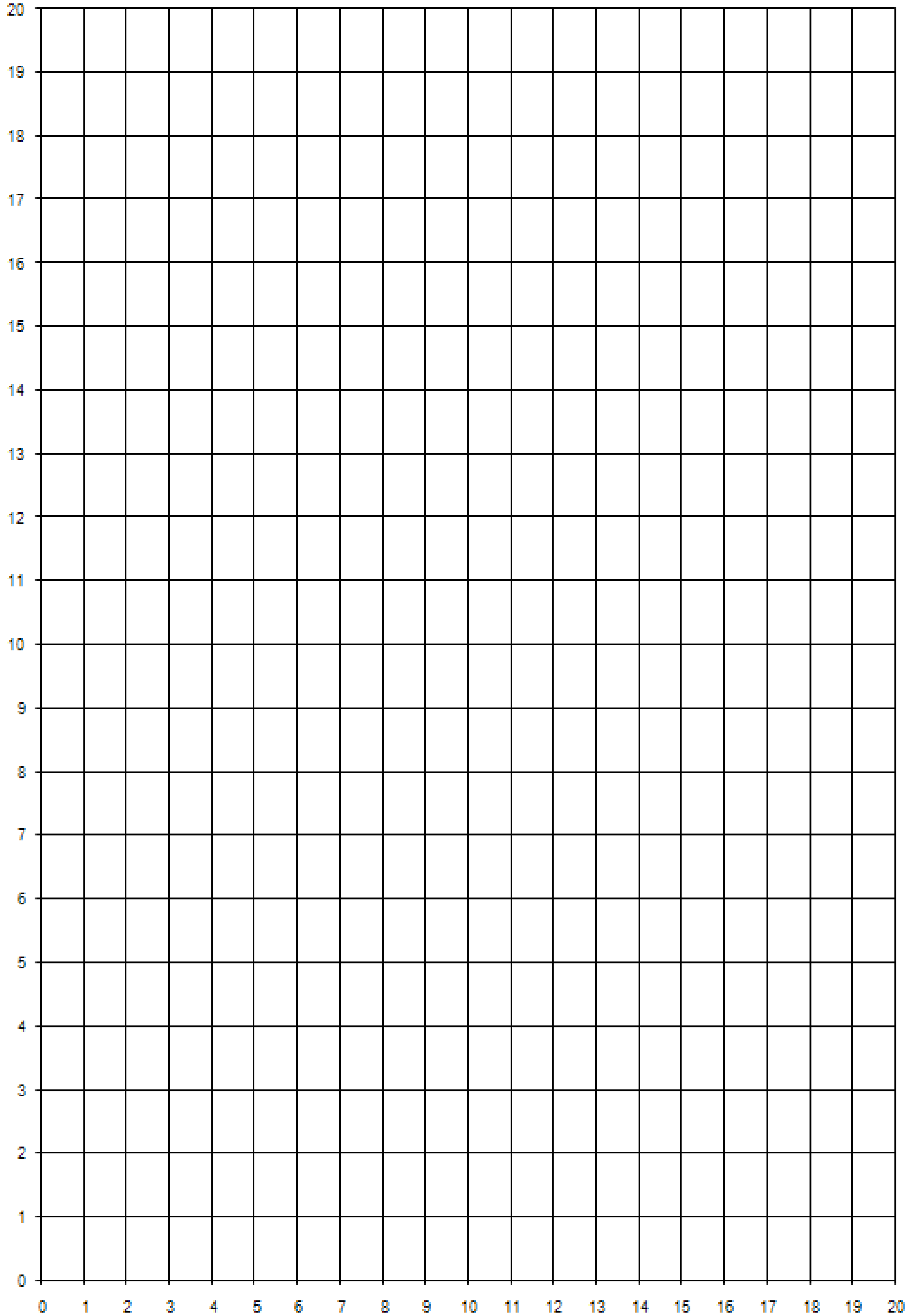
z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{3}}+\frac{x_2}{\frac{Z}{4}}=1$$

Lösung:

Der optimale Punkt ist P(5,3).

Dadurch ergibt sich für Z=27


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 5:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z = x_1 + 3x_2$

NB:
$$\begin{aligned} x_1 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\ge 4 \\ 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 + 4x_2 &\le 36 \end{aligned}$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

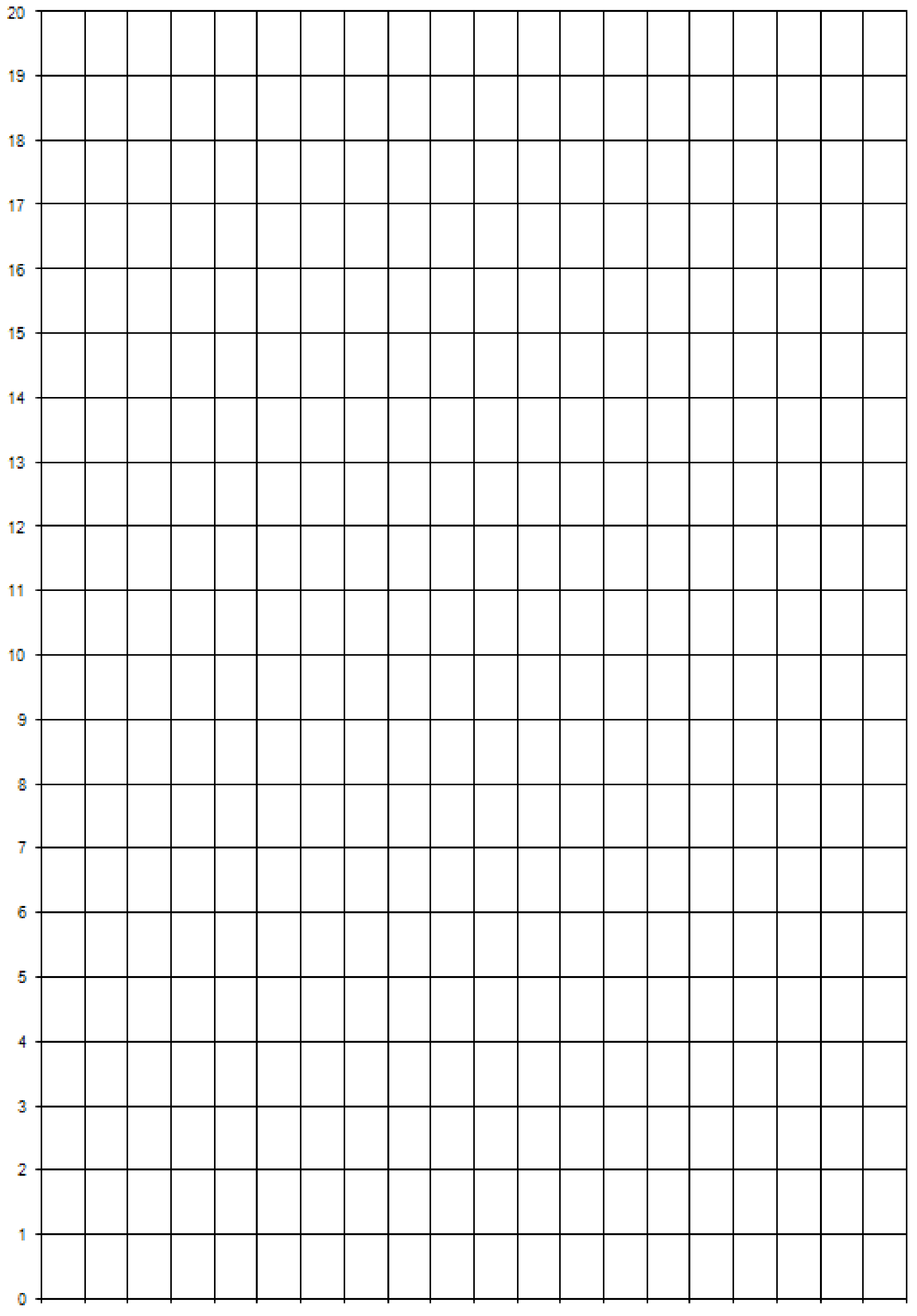
z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der optimale Punkt ist P(4,8).

Dadurch ergibt sich für Z=28


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 6:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

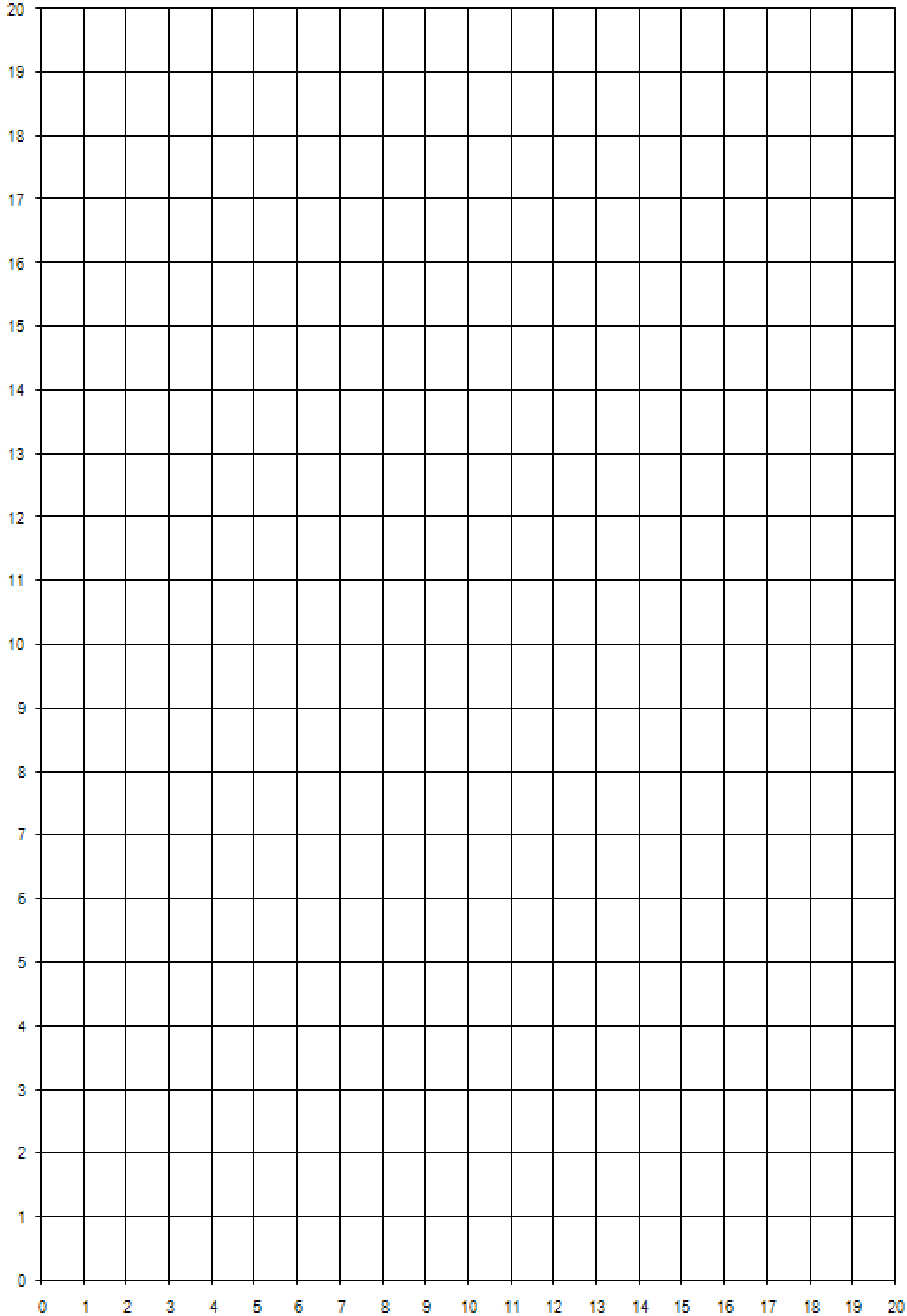
z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der optimale Punkt ist P(4,0).

Dadurch ergibt sich für Z=4


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 7:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

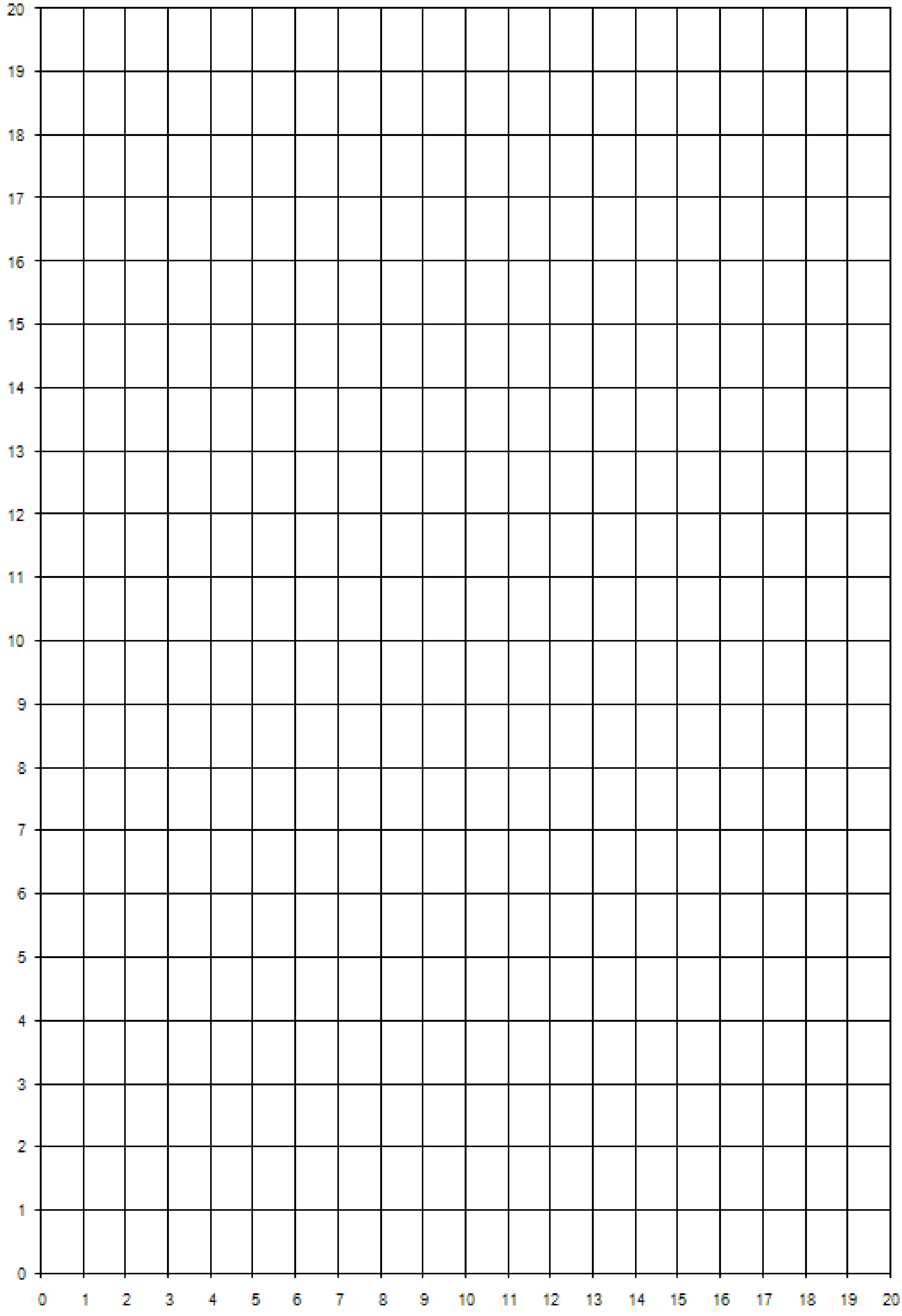
$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der Bereich der zulässigen Lösungen besteht nur aus einem Geradenstück.

Der optimale Punkt ist P(4,8).

Dadurch ergibt sich für Z=28



Beispiel 8:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

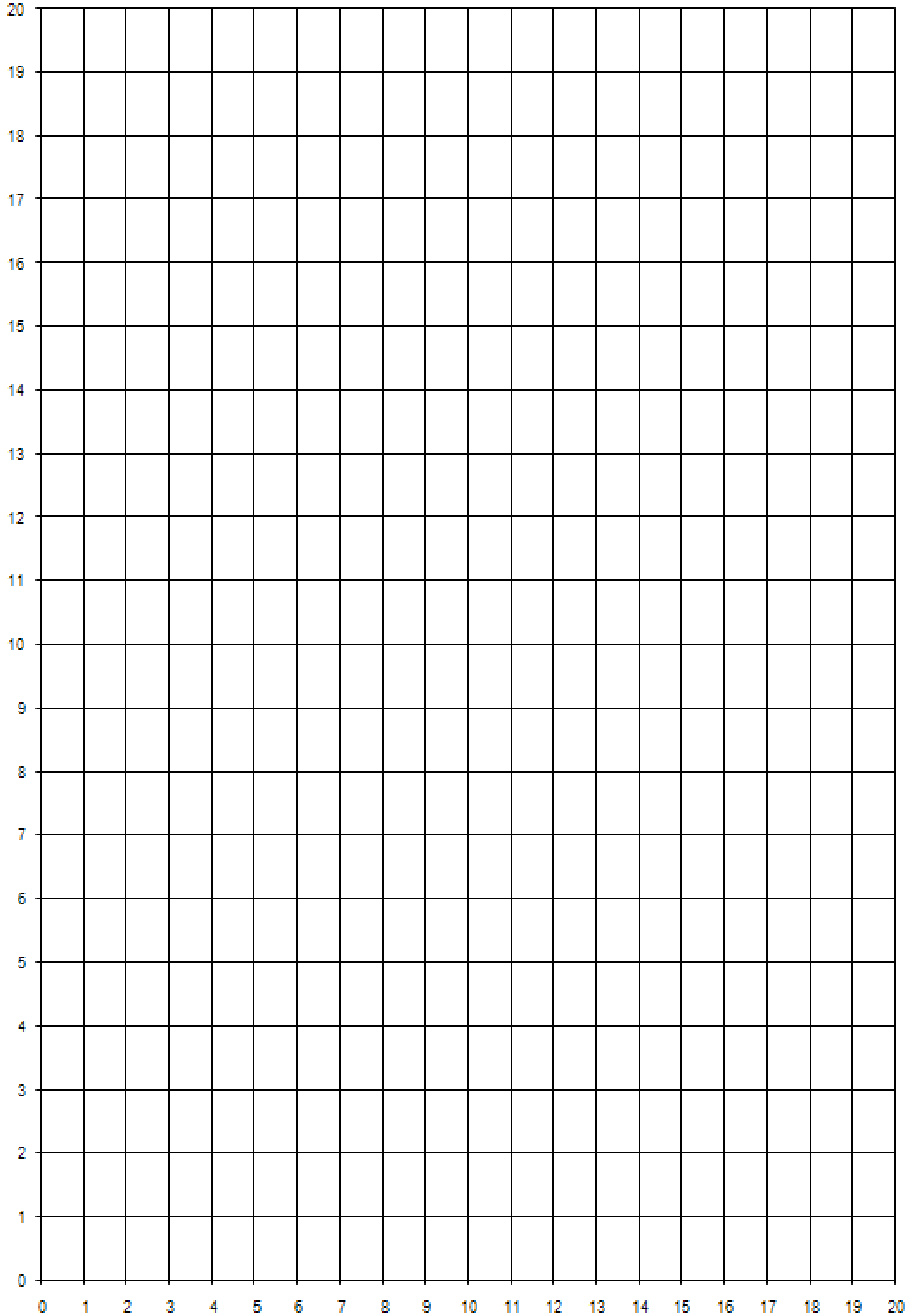
$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der Bereich der zulässigen Lösungen besteht nur aus einem Geradenstück.

Der optimale Punkt ist P(0,9).

Dadurch ergibt sich für Z=27


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 9:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=8x_1+4x_2$

NB:
$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2 &\leq 32 \\ 4x_1+4x_2 &\leq 32 \\ 5x_1+2x_2 &\leq 28 \end{aligned}$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{8}}+\frac{x_2}{\frac{Z}{4}}=1$$

z. B. Vorgabe Z=24

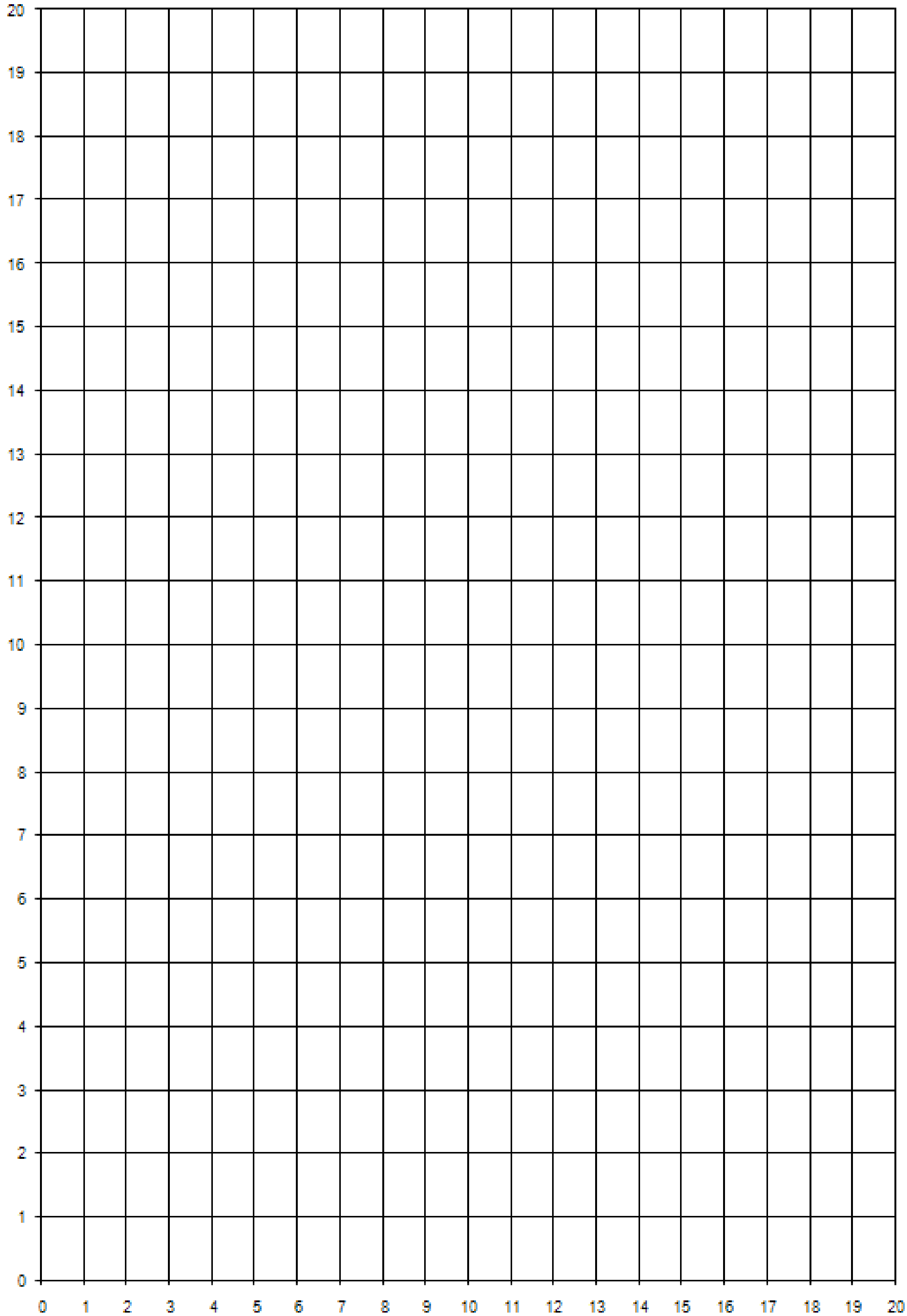
$$\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{6}=1$$

Lösung:

Dieses LOP unterscheidet sich von den vorangehenden dadurch, dass sich in einem Punkt mehr als zwei Geraden (hier alle zu den drei Restriktionen gehörenden Geraden) schneiden. Solche Probleme werden als **ausgeartet, entartet** oder **degeneriert** bezeichnet.

Der optimale Punkt ist P(4,4).

Dadurch ergibt sich für Z=48


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 10:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=2x_1+3x_2$

NB:
$$6x_2 \le 30$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 36$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 38$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{2}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Verschiebt man nach Ermittlung des zulässigen Bereichs und Eintragung einer ersten Zielfunktion, diese in Richtung der Grenzen des Lösungsbereichs nach rechts oben, so stellt man folgendes fest.

Es existiert nicht genau ein Punkt, in dem die parallel verschobene Zielfunktion den Lösungsbereich gerade noch berührt; vielmehr überdeckt die Zielfunktion exakt eine der Begrenzungslinien des Lösungsbereichs. Damit stellen alle Punkte zwischen den Eckpunkten P und Q einschließlich dieser beiden Punkte eine Optimallösung dar, d. h. die Optimallösung ist mehrdeutig.

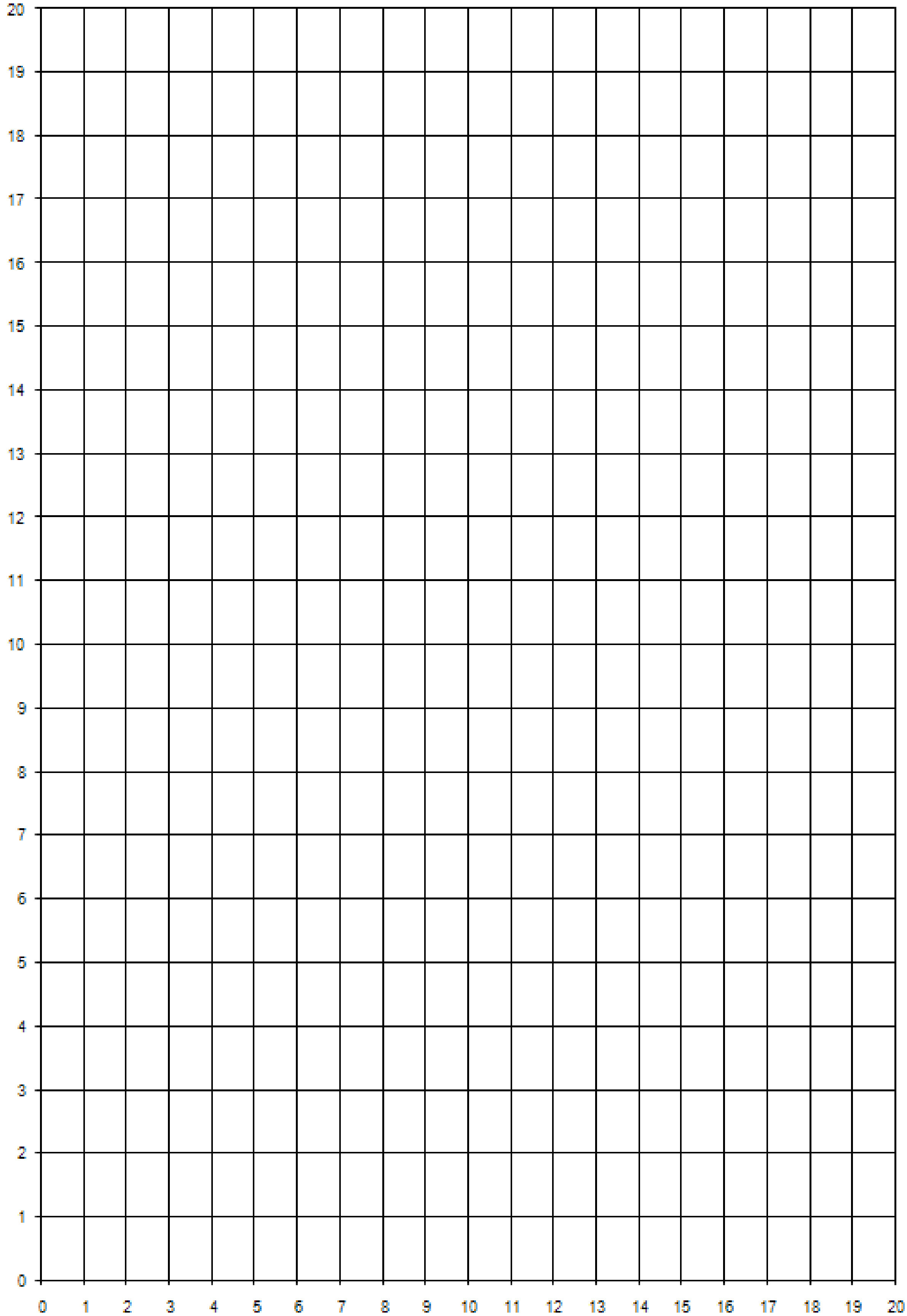
Der optimale Punkt ist P(2,5).

Dadurch ergibt sich für Z=19

bis

Der optimale Punkt ist Q(5,3).

Dadurch ergibt sich für Z=19


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 11:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1 - x_2 \geq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \geq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{4}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Lösung:

Man erkennt, dass der Bereich der zulässigen Lösungen gleich der leeren Menge ist. Grund dafür ist, dass ein Widerspruch zwischen den Restriktionen vorliegt. Den Widerspruch erkennt man deutlicher, wenn man die dritte Restriktion mit (-1) multipliziert.

Man erhält dann

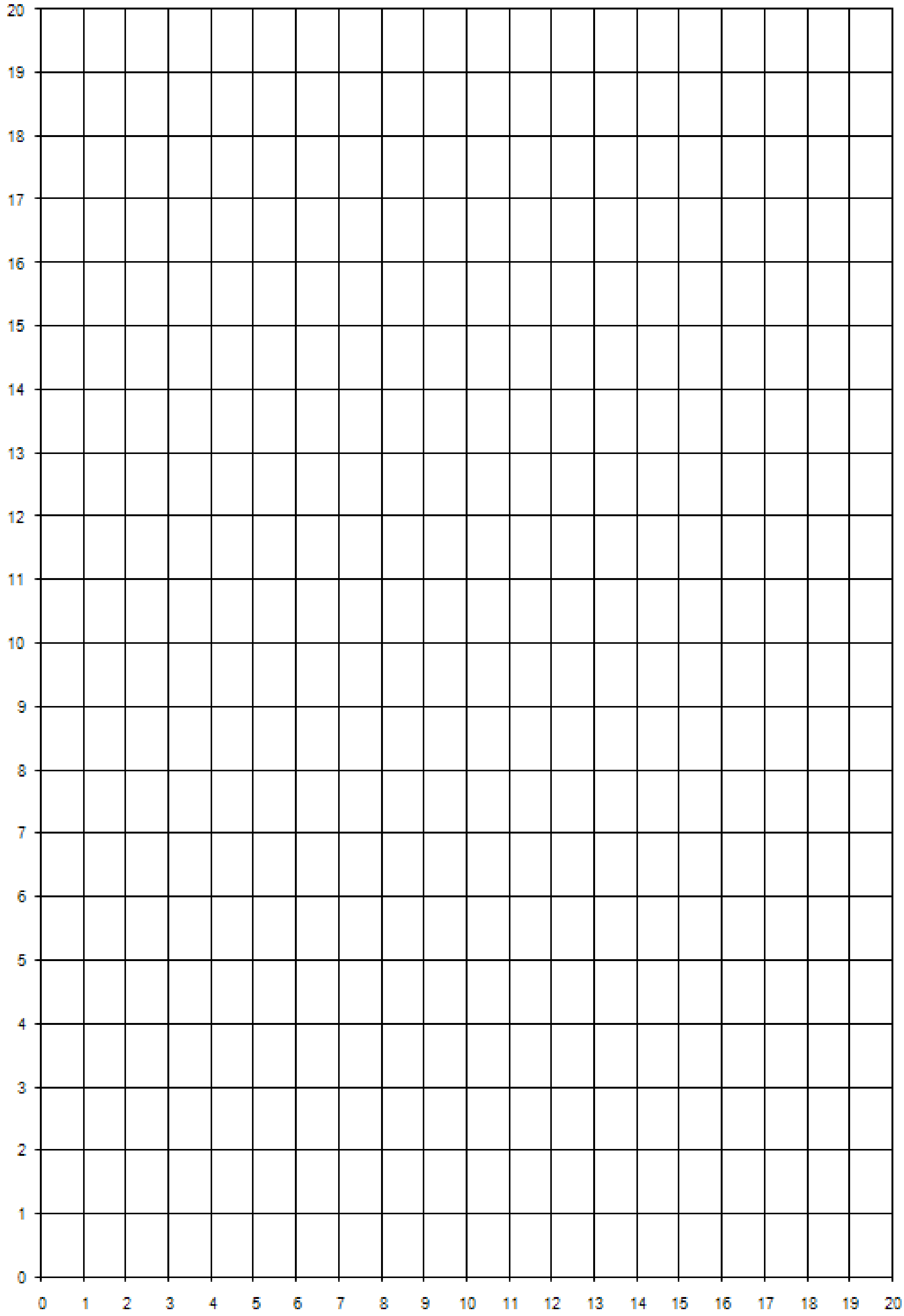
$$2x_1 - x_2 \leq -3$$

was der ersten Restriktion

$$2x_1 - x_2 \geq 6$$

widerspricht.

Da die Lösungsmenge dieses LOP leer ist, existiert natürlich auch keine Optimallösung.


20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 12:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1 - x_2 \le 6$$
$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$-2x_1 + x_2 \le 3$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

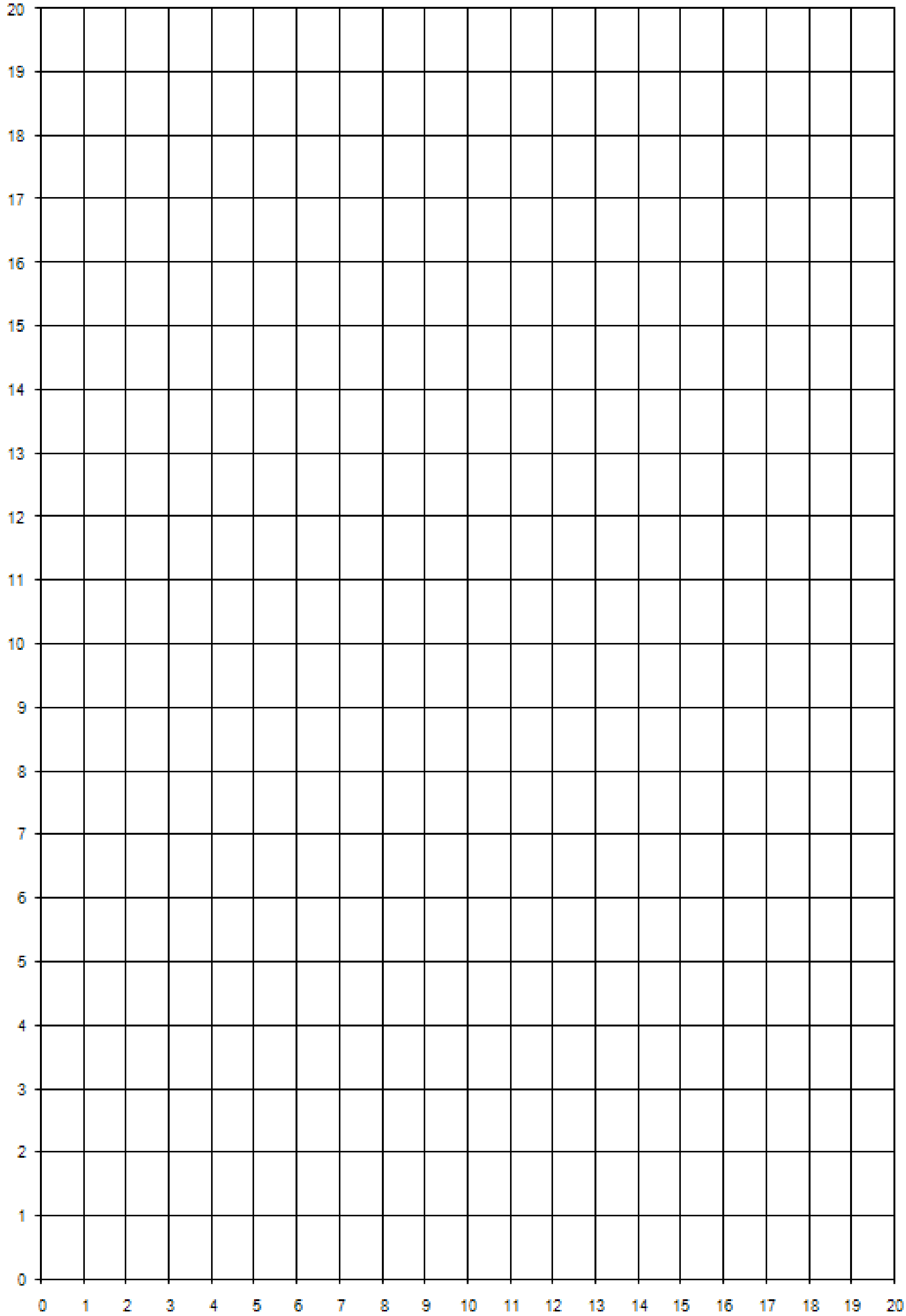
$$\frac{x_1}{\frac{Z}{4}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Lösung:

Hier ist der Bereich der zulässigen Lösungen nicht leer. Da sich aber die Geraden (1) und (3) nicht schneiden, ist er ("nach oben") unbeschränkt. D a er unbeschränkt ist, existieren unendlich viele Lösungen. Da die Zielfunktion zu maximieren ist, existiert jedoch keine Optimallösung.


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Beispiel 13:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=-3x_1+2x_2$

NB:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 3 \\ -x_1 + x_2 &\le 4 \\ -2x_1 + x_2 &\le 3 \end{aligned}$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{-\frac{Z}{3}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

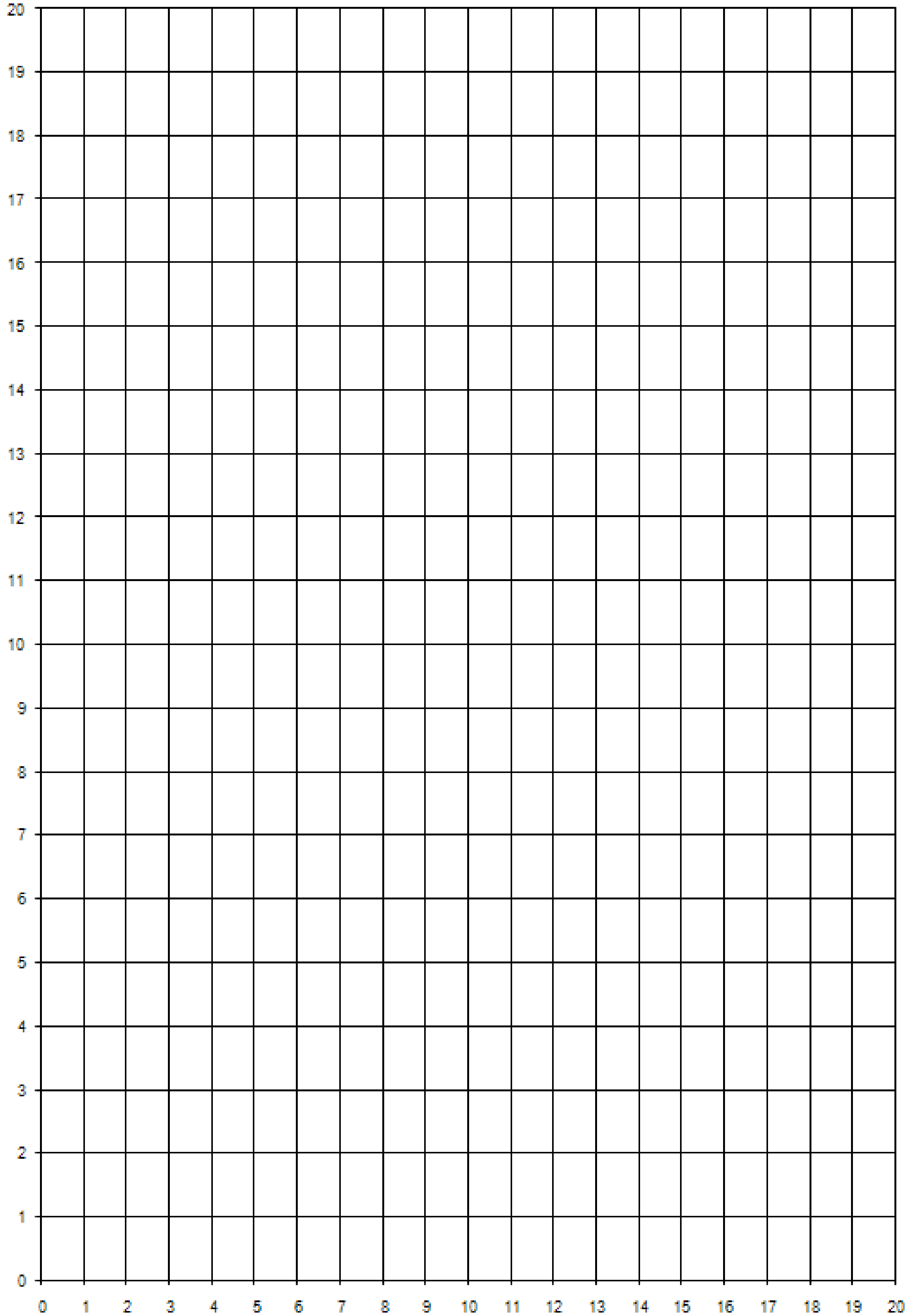
z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{-4} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Lösung:

Hier ist der Bereich der zulässigen Lösungen zwar ebenfalls unbeschränkt, aber man erkennt, dass mit dem Punkt P eine eindeutige Lösung existiert

P (1,5) Z=7



Definition 5:

Die besondere Bedeutung der Eckpunkte erkennt man ebenfalls an den vorangegangenen Beispielen: falls eine Optimallösung existiert, so liegt sie in einem Eckpunkt, falls mehrere optimale Lösungen existieren, so liegen sie zwischen zwei Eckpunkten (einschließlich dieser beiden Punkte).

Allgemeine Vorgangsweise beim graphische Lösen von linearen Optimierungsaufgaben:

Definition 6:

- Festlegen der Variablen
- Nebenbedingungen als Ungleichungen formulieren
- Zielfunktion aufstellen
- Koordinatensystem zeichnen (geeigneter Maßstab)
- Alle Restriktionen (Begrenzungen) in das Koordinatensystem eintragen
- Zulässigen Bereich markieren
- Zielfunktion eintragen
- Parallel verschieben der Zielfunktion nach rechts (Maximierung), bis der letzte Punkt des zulässigen Bereichs erreicht ist → Koordination dieses Punktes: optimale Kombination von x und y
- Berechnen des optimalen Zielfunktionswerts durch Einsetzen der in obern Punkt gefundenen Koordination in die Zielfunktion.

Bemerkung 2:

- Die optimale Lösung eines linearen Optimierungsproblems liegt immer in einer Ecke des zulässigen Bereichs.
- Falls die Zielfunktion parallel zu einer der den zulässigen Bereich abgrenzenden Restriktionen liegt, so gibt es mehr als ein Optimum, aber unter diesen Optima ist auch mindestens eine Ecke.
- Es gilt daher auf jeden Fall: sofern ein lineares Optimierungsproblem überhaupt ein Optimum besitzt, so wird dieses in einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen. Dies nutz der Simplex-Algorithmus aus.
- Mit dem Simplex-Algorithmus durchwandert mit höherem Zielfunktionswert so lange, bis es keine Nachbarecke mit höherem Zielfunktionswert mehr gibt. Dann hat man das Optimum erreicht.