Lineare Gleichungssysteme lösen

Eine Gleichung, die nur eine Unbekannte hat, kann man (in allen euch bekannten Fällen) nach dieser Unbekannten auflösen und somit die Lösungsmenge bestimmen. Unter der Lösungsmenge sind alle Zahlen zu verstehen, die man für die Unbekannte einsetzen kann, so dass die Gleichung wahr ist, also "stimmt".

Manche Fragestellungen beinhalten jedoch zwei oder mehr Unbekannte, wobei man aber auch zwei oder mehr voneinander unabhängige Gleichungen aufstellen kann. Zum Beispiel eine kleine Textaufgabe:

Christina kauft vom Artikel A zehn Stück und zwölfmal Artikel B. Daniel dagegen kauft fünfzehn Stück von A, aber nur zwei von B. Christina bezahlt 38 Euro, Daniel 19,40 Euro.

Unbekannt sind die Einzelpreise von A und B. Da für beide Einkäufer die einzelnen Stückzahlen und der Gesamtpreis bekannt sind, kann man zwei Gleichungen aufstellen, die beschreiben, wie sich der jeweilige Gesamtpreis zusammensetzt. Der Einzelpreis von A wird hierbei durch die Variable a beschrieben und der Einzelpreis von B durch die Variable b:

$10a + 12b = 38$ (1) (Christinas Einkauf)

$15a + 2b = 19{,}4$ (2) (Daniels Einkauf)

Leider kann man hier keine der einzelnen Gleichungen für sich genommen so nach einer Variablen auflösen, dass man den Einzelpreis ablesen kann, denn man bekommt die andere Variable nicht weg.

Man weiß aber, dass die zu findenden Lösungen für a und b für beide Gleichungen gleichzeitig gelten müssen. Man hat hier dadurch ein System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Alle Verfahren, das Problem zu knacken, beruhen darauf, aus den n Gleichungen mit n Unbekannten (wobei mit n die Anzahl der Gleichungen und Variablen gemeint ist) nur noch **eine Gleichung mit einer Unbekannten** zu machen. Es gibt dabei im Wesentlichen neben dem Erraten und dem graphischen Lösungsverfahren vier algebraische Verfahren:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Eliminationsverfahren

Hat man mehr als zwei Gleichungen, dann führt in jedem Verfahren immer jeder einzelne Schritt zu einer Gleichung, die jeweils eine Variable weniger enthält.

Gleichsetzungsverfahren

Löst man die Gleichung (2) aus dem obigen Beispiel nach b auf, so erhält man:

b = -7,5a + 9,7.

Diese umgeformte Gleichung nennen wir sinnvollerweise (2').

Da auf der rechten Seite noch das a vorkommt, hängt b also von a ab. Immerhin kann man hier für jeden Wert von a sofort ein zugehöriges b berechnen.

b = -7,5a + 9,7 beschreibt eine lineare Funktion beschreibt mit der Steigung -7,5 und dem y-Achsenabschitt 9,7. Zu dieser Funktion kann man einen Graph zeichnen, der eine Gerade ist.

Dasselbe kann man auch mit der ersten Gleichung durchführen: Auflösen nach b und Zeichnen des zugehörigen Graphen

b = -5/6a + 19/6   (1').

Der Schnittpunkt beider Graphen ist der Punkt des gesuchten Lösungspaares (a|b), denn er liegt auf beiden Graphen, und seine Koordinaten (a|b) "passen" somit in beide Gleichungen. Wenn man einigermaßen genau zeichnet, kann man die Koordinaten und damit die Preise ablesen.

Den Schnittpunkt zweier linearer Funktionen berechnet man indem man die Funktionsterme gleich setzt. In unserem Beispiel sind die Funktionsterme

-7,5a + 9,7 und -5/6a + 19/6.

Man setzt sie also gleich und erhält dadurch eine Gleichung, die nur noch eine Unbekannte enthält. Man kann mit ihr also die Lösung für a bestimmen. Das ist das Gleichsetzungsverfahren:

II' = I'

-7,5a + 9,7 = -5/6·a + 19/6 | · 6

-45a + 58,2 = -5a + 19 | + 45a

58,2 = 40a + 19 | - 19

39,2 = 40a | : 40

0,98 = a

Mit diesem Wert kann man b leicht ausrechnen: Man muss nur in eine der beiden nach b umgeformten Gleichungen für a den Wert 0,98 einsetzen:

Einsetzen in (1'):

$b = -5/6 \cdot a + 19/6 = -5/6 \cdot 0{,}98 + 19/6 = 2{,}35$

Einsetzen in (2'):

$b = -7{,}5 \cdot a + 9{,}7 = -7{,}5 \cdot 0{,}98 + 9{,}7 = 2{,}35$

Man wählt sinnvollerweise die angenehmere Gleichung, was hier sicherlich (2') ist.

Definition 1:

Das Gleichsetzungsverfahren erfordert folgende Schritte:

- Löse beide Gleichungen nach der gleichen Variablen auf.
- Setze die anderen Seiten der Gleichungen einander gleich.
- Löse die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.
- Setze die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein und berechne so die andere Variable.

Beispiel 1:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

$45x+75y=58{,}5$ und

$20x+40y=29$

Lösung:

Beide Gleichungen werden nach y aufgelöst.

$$45x+75y=58{,}5 \quad |-45x$$
$$75y=-45x+58{,}5 \quad |:75$$
$$y=-45/75+58{,}5/75$$
$$y=-0{,}6x+0{,}78$$

und

$$20x+40y=29 \quad |-20x$$
$$40y=-20x+29 \quad |:40$$
$$y=-\tfrac{1}{2}x+29/40$$
$$y=-0{,}5x+0{,}725$$

Deshalb wenden wir das **Gleichsetzungsverfahren** an und setzen beide Gleichungen gleich und lösen sie nach x auf.

$$-0{,}6x+0{,}78=-0{,}5x+0{,}725 \quad |+0{,}6x$$
$$0{,}78=0{,}1+0{,}725 \quad |-0{,}725$$

$$0{,}055=0{,}1x \qquad |\bullet 10$$

$$x=0{,}55$$

Nun brauchen wir diesen x-Wert nur noch in eine der beiden aufgelösten Gleichungen einzusetzen und y berechnen.

$x=0{,}55$

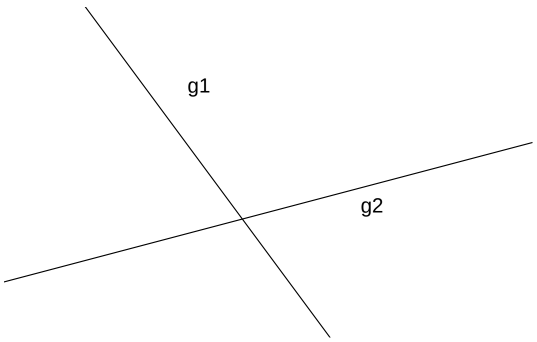
$y=0{,}45$

Fallunterscheidungen

Beim Gleichsetzungsverfahren gibt es 3 Fallunterscheidungen:

1. Möglichkeit /1. Fall:

Es gibt ein Schnittpunkt und die Aufgabe hat nur eine Lösung, bzw. die Geraden haben einen Schnittpunkt.



2. Möglichkeit / 2. Fall:

Es gibt keine Lösung, die Graphen laufen parallel.

3. Möglichkeit / 3. Fall:

Es gibt viele Lösungen, wenn überall ein Schnittpunkt ist, d.h. die Graphen und ihre Funktionsgleichungen sind identisch.

Das Einsetzungsverfahren

Gegeben sei das Gleichungssystem

$5 - 4x = y$ (1)

$7x - 3y = 51,5$ (2)

Wenn man eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst hat, so weiß man ihren Wert in Abhängigkeit von der anderen Variablen. In unserem Beispiel ist Gleichung (1) bereits nach y aufgelöst. Alle y, die Lösung des Gleichungssystems sein wollen, müssen gleich 5 - 4x sein.

Wenn man nun in der anderen Gleichung alle y durch diesen Term ersetzt, der nach der ersten Gleichung gleich y ist, so erhält man eine Gleichung, die nur noch x enthält:

(2): $7x - 3y = 51,5$

Für das y wird (5 - 4x) eingesetzt:

(1) in (2): $7x - 3(5 - 4x) = 51,5$

Achtung:

Man muss den Term in Klammern setzen, denn sonst würde man nicht das "komplette" y (also 5 - 4x) mal -3 nehmen, sondern nur die 5.

Nun kann man wie oben die Gleichung nach x auflösen und das Resultat in (1) einsetzen, um y zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
7x - 3(5 - 4x) &= 51,5 && \mid \text{Klammer auflösen}\\
7x - 15 + 12x &= 51,5 && \mid \text{Zusammenfassen}\\
19x - 15 &= 51,5 && \mid +15\\
19x &= 66,5 && \mid :19\\
x &= 3,5
\end{aligned}
$$

In (1): $y = 5 - 4x = 5 - 4 \cdot 3,5 = -9$

Definition 2:

Das Einsetzungsverfahren erfordert folgende Schritte:

- Löse eine der Gleichungen nach einer Variablen auf. (Eventuell liegt eine gegebene Gleichung schon passend vor. Verfahren Sie sonst so, dass Sie möglichst keine oder zumindest "einfache" Brüche erhalten.)
- Setze den Term für diese Variable in die andere Gleichung ein.
- Löse die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.

- Setze die Lösung in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 ein und berechne so die andere Variable.

Beispiel 2:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

(1) x=3y-2 und (2) 4x-9y=1

Lösung:

<u>1. Schritt:</u>

<u>Einsetzen von x in I</u>

4(3y-2)-9y=1

12y-8-9y=1 |+8

3y=9 |:3

y=3

<u>2. Einsetzen von y in I</u>

x=3 • 3-2=9-2=7

<u>3. Angabe der Lösungsmenge</u>

L={7; 3}

Additionsverfahren

Das Additionsverfahren dient dazu, ein "System" von zwei Gleichungen zu lösen, d.h. herauszubekommen, welche Zahlen man für die beiden vorkommenden Variablen einsetzen muss, damit die beiden Gleichungen aufgehen.

Zum Beispiel könnte man bei der Gleichung 4x + 3y = 10 für x=1 einsetzen und für y=2, und dann würde die Gleichung aufgehen.

Man könnte aber auch für x=4 einsetzen und für y=-2, und es würde auch gehen. Es gibt bei einer Gleichung zumeist unendlich viele solcher Lösungen, wenn sie zwei Unbekannte hat.

Wenn die Lösung, also die Werte für x und y, allerdings noch eine zweite Gleichung erfüllen sollen, dann gibt es in den meisten Fällen nur eine einzige Möglichkeit. Solche zwei zusammengehörenden Gleichungen nennt man dann "Gleichungssystem".

Beispiel 3:

4x + 3y = 10

-5y = 2x - 19

Jetzt formt man erst mal beide Gleichungen so um, dass alle Variablen auf der linken Seite stehen, d.h. bei der zweiten Gleichung müssen die 2x auf die linke Seite gebracht werden:

$4x + 3y = 10$

$-5y = 2x - 19 \quad | -2x$

$4x + 3y = 10$

$-2x - 5y = -19$

Durch irgendein Verfahren muss nun aus diesen ZWEI Gleichungen, die jeweils BEIDE Variablen enthalten, eine einzige gemacht werden, die nur noch eine enthält. Beim Additionsverfahren werden beide Gleichungen entweder addiert oder voneinander subtrahiert, das kommt auf die Faktoren an. Dazu später mehr.

Beim Addieren zweier Gleichungen müssen die Faktoren vor den Variablen und die Zahlen getrennt behandelt werden:

Wenn man die beiden Gleichungen $4x + 3y = 10$ und $-2x - 5y = -19$ addiert, dann addiert man also die beiden Faktoren vor dem x getrennt:

$4 + (-2) = 4 - 2 = 2$

Für y sieht es so aus:

$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$;

und für die einzelnen Zahlen so:

$10 + (-19) = 10 - 19 = -9$.

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt damit:

$\quad 4x + 3y = 10$

$+ \quad -2x - 5y = -19$

$= \quad 2x - 2y = -9$

Damit ist aber, wie man sieht, keine Variable verschwunden, d.h. wir haben immer noch eine Gleichung mit zwei Unbekannten!

Das ganze sähe aber schon viel besser aus, wenn z.B. bei der zweiten Gleichung vor dem x eine -4 stehen würde, dann fiele nämlich das x heraus, denn $4 + (-4) = 4 - 4 = 0$!

Und so multipliziert man einfach die komplette zweite Gleichung mit 2:

$4x + 3y = 10$

$-2x - 5y = -19 \quad | \cdot 2$

$4x + 3y = 10$

$-4x - 10y = -38$

Addieren ergibt jetzt:

$$0x - 7y = -28$$

also: $-7y = -28$

Damit kann y bestimmt werden:

$$-7y = -28 \quad |:(-7)$$

$$y = 4$$

Jetzt wird dieser Wert in eine der ursprünglichen Gleichungen für y eingesetzt, und diese Gleichung wird nach x aufgelöst:

$$4x + 3y = 10$$

$$4x + 3 \cdot 4 = 10$$

$$4x + 12 = 10 \quad |-12$$

$$4x = -2 \quad |:4$$

$$x = -0{,}5$$

Zur Probe die herausgefundenen Werte in beide Gleichungen einsetzen und überprüfen, ob es stimmt:

1. Gleichung:

$4x + 3y = 10$

$4 \cdot (-0{,}5) + 3 \cdot 4 = 10$

$-2 + 12 = 10$ stimmt.

2. Gleichung:

$-2x - 5y = -19$

$-2 \cdot (-0{,}5) - 5 \cdot 4 = -19$

$1 - 20 = -19$ stimmt auch.

Beispiel 4:

$$3x + 4y = -12$$

$$4x - 7y = 21$$

Ein immer funktionierender Trick ist bei solchen Situationen, jede Gleichung mal den entsprechenden Faktor in der anderen Gleichung zu nehmen. Die erste Gleichung wird also mal 4 genommen, weil in der zweiten Gleichung 4x auftreten. Die zweite Gleichung wird mal 3 genommen, da in der ersten 3x auftreten:

$3x + 4y = -12 \quad \cdot 4$

$4x - 7y = 21 \quad \cdot 3$

$12x + 16y = -48$

$12x - 21y = 63$

Nun bringt Addieren in diesem Falle nichts, denn dadurch bekäme man 24x. Hier muss nun subtrahiert werden! Wir ziehen die zweite von der ersten Gleichung ab und erhalten:

Bei x: $12x - 12x = 0x$, x fällt also weg!

Bei y: $16y - (-21y) = 16y + 21y = 37y$

Bei den Zahlen: $-48 - 63 = -111$

also:

$12x + 16y = -48$

— $12x - 21y = 63$

= $37y = -111 \quad | :37$

$y = -3$

Einsetzen in zweite Gleichung:

$4x - 7y = 21$

$4x - 7\cdot(-3) = 21$

$4x + 21 = 21 \quad | -21$

$4x = 0 \quad | :4$

$x = 0$

Probe:

1. Gleichung:

$3x + 4y = -12$

$3\cdot 0 + 4\cdot(-3) = -12$

$0 - 12 = -12$ stimmt.

2. Gleichung:

$4x - 7y = 21$

$4\cdot 0 - 7\cdot(-3) = 21$

Definition 3:

Das Additionsverfahren erfordert folgende Schritte:

- Beide Gleichungen so umformen, dass die Variablen (mit ihren Faktoren) auf einer Seite (links) vom Gleichheitszeichen stehen und auf der anderen Seite (rechts) eine einzelne Zahl.
- Suche jeweils das kleinste gemeinsame Vielfache der Faktoren vor x und vor y.
- Wähle die Variable aus, bei der das kleinere kgV auftritt, und multipliziere beide Gleichungen so, dass vor dieser Variablen jeweils gleiche Faktoren stehen (das ist dann nämlich das kleinste gemeinsame Vielfache).
- Man kann auch ohne Umschweife die erste Gleichung mit dem Faktor vor dem x der zweiten Gleichung multiplizieren und umgekehrt.
- Falls die (betragsmäßig gleichen) Faktoren das selbe Vorzeichen haben, dann subtrahiere die Gleichungen voneinander. Wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben, dann addiere sie.
- Dies geschieht komponentenweise, d.h. die Faktoren vor x werden untereinander addiert, die Faktoren vor dem y (oder entsprechenden anderen Variablen), und die einzelnen Zahlen werden für sich behandelt.
- Dadurch entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen. Diese wird nun durch normale Äquivalenzumformungen nach der Variablen aufgelöst.

- Der erhaltene Wert wird in eine der ursprünglichen Gleichungen für die jeweilige Variable eingesetzt, wodurch wieder eine Gleichung entsteht, die nur noch eine Variable, nämlich die andere, enthält.
- Nach dieser auflösen!
- Probe machen, indem die Lösungen in beide Gleichungen eingesetzt werden. Die Lösungen stimmen nur dann, wenn beide Gleichungen "aufgehen".

Definition 4:

Der Grad gibt an, wie viele Gleichungen und wie viele Unbekannte das Gleichungssystem hat; im Falle 3 also drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

Beispiel 5:

$$3a - b = c$$

$$a + 2c = 4 - 4b$$

$$2b + c = 1$$

Es kommt relativ häufig vor, dass nicht in allen Gleichungen alle Variablen vorkommen. Hier fehlt z.B. in III das a. Man kann nun diese 3. Gleichung ausnutzen, um in I und II c zu eliminieren (eliminieren = auslöschen). Dazu lösen wir sie zunächst nach c auf, um sie dann in I und II einzusetzen:

III: $2b + c = 1 \quad | -2b$

III': $c = 1 - 2b$

in I: $3a - b = c$

$3a - b = 1 - 2b \quad | +2b$

$3a + b = 1$

in II: $a + 2c = 4 - 4b$

$a + 2(1 - 2b) = 4 - 4b$

$a + 2 - 4b = 4 - 4b \quad | +4b -2$

$a = 2$

Damit sind zwei Gleichungen mit insgesamt zwei Unbekannten (a und b) entstanden, also dieses Gleichungssystem:

$3a - b = 1 - 2b$

$a = 2$

Freundlicherweise kommt in der zweiten Gleichung gar kein b mehr vor, womit die Lösung für a schon bekannt ist und in die erste eingesetzt werden kann, um b zu berechnen:

$3a + b = 1$

$3 \cdot 2 + b = 1 \quad | -6$

$b = -5$

Mit den nunmehr bekannten Werten für a und b kann c berechnet werden. b allein reicht dafür auch schon aus, da in III' kein a vorkommt:

in III': $c = 1 - 2b$

$c = 1 - 2 \cdot (-5) = 1 + 10 = 11$

Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen oder ohne Lösung

Das folgende Gleichungssystem hat keine Lösung:

$x - z = 2y - 5$

$y - 4x + z = 6$

$2x + 3y = 3 - z$

I: $x - z = 2y - 5 \quad | +z$

I': $x = 2y + z - 5$

in II: $y - 4(2y + z - 5) + z = 6$

$-7y - 3z + 20 = 6 \quad | -20$

II': $-7y - 3z = -14$

in III: $2(2y + z - 5) + 3y = 3 - z$

$7y + 2z - 10 = 3 - z \quad | +z$

$7z + 3z - 10 = -3 \quad | \cdot(-1)$

$-7z - 3z + 10 = -3 \quad | -10$

III' $-7y - 3z = -13$

Vergleiche II' mit III'. Die linken Seiten sind identisch, die rechten jedoch nicht. Weiteres Gleichsetzen führt auf die falsche Aussage -14 = -13. In solchen Fällen existiert keine Lösung.

Wäre dagegen das Gleichungssystem so gegeben:

$x - z = 2y - 5$

$y - 4x + z = 7$

$2x + 3y = 3 - z$

dann bekommt man mit analogen Schritten

...

II': $-7y - 3z = -14$

...

III' $-7y - 3z = -14$

Also zwei identische Gleichungen. Man sagt in einem solchen Fall, die Gleichungen sind linear abhängig. Tatsächlich erhält man III, wenn man I+2·II bildet. Man hat demnach eigentlich nur zwei unabhängige Gleichungen mit drei Unbekannten und kann keine eindeutige Lösung ermitteln.

Man geht in diesen Fällen von einer freien Variablen aus, z.B. z, und beschreibt die übrigen in Abhängigkeit von ihr: $y = 2 - 3/7 \cdot z$, $x = 1/7 \cdot z - 1$.

Beispiel 6:

Gleichungssystem mit vier Unbekannten lösen

I: $6p - q + m = 12n - 5$

II: $-2q - 8 = -6p + 8n - 2m$

III: $2m = 4n - 3p + 5$

IV: $3p = 9 + 4n + q$

Gleichung IV nach q auflösen:

$3p = 9 + 4n + q$

IV': $q = 3p - 4n - 9$

IV' in I:

$6p - q + m = 12n - 5$

$6p - (3p - 4n - 9) + m = 12n - 5$

$6p - 3p + 4n + 9 + m = 12n - 5 \quad | +5 -4n$

I': $3p + 14 + m = 8n$

IV' in II:

$-2q - 8 = -6p + 8n - 2m$

$-2(3p - 4n - 9) - 8 = -6p + 8n - 2m$

$-6p + 8n + 18 - 8 = -6p + 8n - 2m \quad | -8n +6p$

$10 = -2m \quad | :(-2)$

$-5 = m$ sehr schön!

in I':

$3p + 14 + (-5) = 8n$

$3p + 9 = 8n$

$p = 8/3n - 3$

III: $2m = 4n - 3p + 5$

$2(-5) = 4n - 3(8/3n - 3) + 5$

$-10 = 4n - 8n + 9 + 5$

$-10 = -4n + 14 \quad | -14$

-24 = -4n | :(-4)

6 = n

p = 8/3n - 3 (siehe oben)

p = 8/3·6 - 3

p = 13

IV': q = 3p - 4n - 9 = 3·13 - 4·6 - 9 = 6

Derartige Gleichungssysteme löst man systematischer mit dem ®Gaußschen Verfahren

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Gleichungen mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) y=3x+22 und y=5x+14 Lösung: L={4; 34}

b) y=3x+8 und y=0,5x+2 Lösung: $L = \left\{-\frac{12}{5}; \frac{4}{5}\right\}$

c) 4x+2y=18 und 7x-y=13 Lösung: $L = \left\{-\frac{4}{9}; \frac{37}{9}\right\}$

d) 8x-4y=-3 und 14x-2y=8,5 Lösung: $L = \left\{1; \frac{11}{4}\right\}$

Lösung:

a)

y=3x+22 und y=5x+14

3x+22=5x+14 |-14

3x+8=5x |-3x

8=2x | :2

x=4

3•4+22=12+22=34

L={4; 34}

b)

y=3x+8 und y=0,5x+2

3x+8=0,5x+2 |-2

3x+6=0,5x |-3x

6=-2,5x | :(-2,5)

x=-2 2/5

$3 \bullet (-2\frac{2}{5})+8=$ $-7\frac{1}{5}+8=\frac{4}{5}$

$L = \left\{-\frac{12}{5};\frac{4}{5}\right\}$

c)

4x+2y=18 und 7x-y=13

4x+2y=18 |-4x

2y=-4x+18 | :2

y=-2x+9

7x-y=13 |-7x

-y=-7x+13 |$\bullet$(-1)

y=7x-13

-2x+9=7x-13 |+13

-2x+22=7x |+2x

22=9x | :9

x= $2\frac{4}{9}$

$-2 \bullet 2\frac{4}{9}+9=-4\frac{8}{9}+9=4\frac{1}{9}$

$L = \left\{-\frac{4}{9};\frac{37}{9}\right\}$

d)

8x-4y=-3 und 14x-2y=8,5

8x-4y=-3 |-8x

-4y=-8x-3 | :(-4)

y=2x+ ¾

14x-2y=8,5 |-14x

-2y=-14x+8,5 | :(-2)

y=7x-4,25

2x+ ¾ =7x- $\frac{17}{4}$ |- ¾

2x=7x-5 |-7x

-5x=-5 | :(-5)

$x=1$

$2 \bullet 1+ \frac{3}{4} = 2 \frac{3}{4}$

$L = \left\{1; \frac{11}{4}\right\}$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

10x-7y+4=0 und 6x-5y=-2

Lösung: $L = \left\{-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$

Lösung:

1. Schritt: Auslösen der beiden Gleichungen nach y:

$10x-7y+4=0 \quad |-4$

$10x-7y=-4 \quad |-10x$

$-7y=-10x-4 \quad |:(-7)$

$y=1\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}$

$6x-5y=-2 \quad |-6x$

$-5y=-6x-2 \quad |:(-5)$

$y=1\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$

2. Gleichsetzen von I und II und Auflösen der Gleichung nach x:

$1\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}=1\frac{1}{5}x+\frac{2}{5} \quad |-\frac{4}{7}$

$1\frac{3}{7}x=1\frac{1}{5}x-\frac{6}{35} \quad |-1\frac{1}{5}x$

$\frac{8}{35}x=-\frac{6}{35} \quad |:\frac{8}{35}$

$x=-\frac{3}{4}$

3. Einsetzen von x in I

$y=\frac{10}{7} \bullet (-\frac{3}{4})+\frac{4}{7}=-\frac{30}{28}+\frac{16}{28}=-\frac{14}{28}=-\frac{1}{2}$

4. Angabe der Lösungsmenge

$L = \left\{-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$

Aufgabe 3:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

6y=9x-81 und 6x-4y=12

Lösung: L={}

Lösung:

1. Schritt:

Rechnung:

6y=9x-81 |:6

y=1 ½ x-13 ½

6x-4y=12 |-6x

-4y=-6x+12 |:(-4)

y=-1 ½ x-3

2. Gleichsetzen von I und II

1 ½ x-13 ½ =1 ½ x-3 |+13 ½

1 ½ x=1 ½ x+10 ½ |-1 ½ x

10 ½=0

3. Angabe der Lösungsmenge

L={}

Aufgabe 4:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen

4x-7y=41 und 5x+3y=63

Lösung: $L=\left\{\frac{3}{4};-\frac{38}{7}\right\}$

Lösung:

1. Schritt:

4x-7y=41 |-4x

-7y=-4x+41 |:(-7)

$y=\frac{4}{7}x+5\frac{6}{7}$

5x+3y=63 |-5x

3y=-5x+63 |:3

$y=-1\frac{2}{3}x+21$

2. Gleichsetzen von I und II

$$\frac{4}{7}x-5\frac{6}{7}=-1\frac{2}{3}x+21 \quad |+5\frac{6}{7}$$

$$\frac{4}{7}x=-1\frac{2}{3}x+26\frac{6}{7} \quad |+1\frac{2}{3}x$$

$$\frac{47}{21}x=\frac{168}{7} \quad |:\frac{47}{21}$$

$$x=\frac{3}{4}$$

3. Einsetzen von x in I

$$\frac{4}{7}\bullet\frac{3}{4}-5\frac{6}{7}=\frac{3}{7}-5\frac{6}{7}=-5\frac{3}{7}$$

4. Angabe der Lösungsmenge

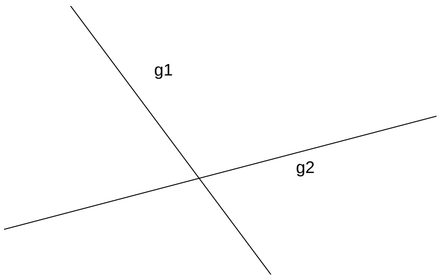
$$L=\left\{\frac{3}{4};-\frac{38}{7}\right\}$$

Fallunterscheidung mit Beispielen

Die 3 Fallunterscheidungen gibt es auch bei dem Gleichsetzungsverfahren. Hier möchte ich Ihnen die ganzen Fälle mit Beispielen zeigen

1. Möglichkeit:

Es gibt einen Schnittpunkt und die Gleichung hat nur eine Lösung.



Beispiel 7:

6x+14y+8=0 und 8y=x-9

1. Schritt:

Rechnung:

6x+14y+8=0 |-8

6x+14y=-8 |-6x

14y=-6x-8 | :14

$$y=-\frac{3}{7}x-\frac{4}{7}$$

8y=x-9 | :8

$$y=\frac{1}{8}x-1\frac{1}{8}$$

2. Gleichsetzen von I und II

$-\frac{3}{7}x-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}x-1\frac{1}{8} \quad |\bullet 56$

$-24x-32=7x-63 \quad |+32$

$-24x=7x-31 \quad |-7x$

$-31x=-31 \quad |:(-31)$

$x=1$

3. Einsetzen von x in I

$-\frac{3}{7}\bullet 1-\frac{4}{7}=-\frac{3}{7}-\frac{4}{7}=-1$

4. Angabe der Lösungsmenge

L={1; -1}

2. Möglichkeit:

Es gibt keine Lösung, die Graphen laufen parallel.

Die Lösungsmenge ist dann L={}.

Beispiel 8:

6y=9x-81 und 6x-4y=12

1. Schritt:

Rechnung:

6y=9x-81 |:6

y=1 ½ x-13 ½

6x-4y=12 |-6x

-4y=-6x+12 | :(-4)

y=1 ½ x-3

2. Gleichsetzen von I und II

1 ½ x-13 ½ =1 ½ x-3 |+13 ½

1 ½ x=1 ½ x+10 ½ |-1 ½ x

x=0

3. Angabe der Lösungsmenge

$L=\{\}$

Wenn die Funktionsgleichungen das gleiche m, aber ein unterschiedliches b haben, verlaufen die Graphen parallel.

3. Möglichkeit:

Es gibt viele Lösungen, wenn überall ein Schnittpunkt ist. D.h. die Graphen und ihre Funktionsgleichungen sind identisch. Und die Graphen „liegen aufeinander".

Die Lösungsmenge ist dann $L=\{(x;\ y)|y=8x+3;\ x \in R\}$

Beispiel 9:

$2x+\frac{2}{3}y=4$ und $10x+7{,}5y=20$

1. Schritt:

Rechnung:

$2x+\frac{2}{3}y=4 \quad |-2x$

$\frac{2}{3}y=-2x+4 \quad |:\frac{2}{3}$

$y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$

$10x+7{,}5y=20 \quad |-10x$

$7{,}5y=-10x+20 \quad |:7{,}5$

$y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$

2. Gleichsetzen von I und II

$-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3} \quad |+\frac{4}{3}x$

$\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

$L=\{(x;\ y)|y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}\}$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

$1{,}5x+2y=9$ und $4{,}5x+6y=30$

Lösung:

1. Schritt:

Rechnung:

1,5x+2y=9 und 4,5x+6y=30

1,5x+2y=9 |-1,5x

2y=-1,5x+9 | :2

y=- ¾ x+4,5

4,5x+6y=30 |-4,5x

6y=-4,5x+30 | :6

y=- ¾ x+5

2. Gleichsetzen von I und II

- ¾ x+4,5=- ¾ x+5 |+ ¾ x

4,5=5

3. Angabe der Lösungsmenge

L={}

Aufgabe 6:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Gleichungen.

3x+4y=8 und 7,5x+10y=20

Lösung:

1. Schritt:

Rechnung:

3x+4y=8 |-3x

4y=-3x+8 | :4

y=- ¾ x+2

7,5x+10y=20 |-7,5x

10y=-7,5x+20 | :10

y=- ¾ x+2

2. Gleichsetzen von I und II

- ¾ x+2=- ¾ x+2 |+ ¾ x

2=2

3. Angabe der Lösungsmenge

L={(x; y)|y=- ¾ x+2; $x \in R$}

Aufgabe 7:

Geben Sie die Lösungsmenge des Systems an.

I 2x+9y=25 und II 8x-9y=10

Lösung:

Wenn 2x+9y=25

und 8x-9y=10

dann ist auch (2x+9y)+(8x-9y)=25+10

und dann ist: 10x =35

x=3,5

I 2x+9y=25

II 8x-9y=10

I 2x+9y=25

I+II 10x+0y=10

I 2x+9y=25

I+II x=3,5 Hier können wir ablesen, welche Zahl für x eingesetzt werden muss.

I 2•3,5+9y=25 Hier setzen wir für x in Gleichung I die Zahl 3,5 ein und lösen nach y auf

I y=2

I+II x=3,5

L={3,5; 2}

Aufgabe 8:

Geben Sie die Lösungsmenge des Systems an.

x+y=57

x-y=9

Lösung: L={33; 24}

Lösung:1. Schritt:Rechnung:Auflösen von I und IIx+y=57 |-x y=-x+57x-y=9 |-x -y=-x+9 |(-1) y=x-92. Gleichsetzen von I und II-x+57=x-9 |-57 -x=x-66 |-x -2x=66 |:2 x=333. Einsetzen von x in I-33+57=244. Angabe der LösungsmengeL={33; 24}**Merkregeln zur Anwendung der einzelnen Verfahren**

I 4x-7y=28

II 2x-12=2y

Am besten geeignet ist das Einsetzungsverfahren, weil man die II Gleichung nur noch durch 2 dividieren muss.

I $6x+11y=31$

II $-2x-7y=12$

Am besten geeignet ist das Additionsverfahren, weil man die II Gleichung nur noch mit 3 multiplizieren muss.

I $3x+40=y$

II $y=12-5x$

Am besten geeignet ist das Gleichsetzungsverfahren, weil man die beiden Gleichungen gleichsetzen kann, sie sind schon nach y umgeformt.

I $y=4x-7$

II $2x-12y=9$

Am besten geeignet ist das Einsetzungsverfahren, weil man y gleich in die II Gleichung einsetzen kann.

I $4x-9y=3$

II $-8x-4y=12$

Am besten geeignet ist das Additionsverfahren, weil man die I Gleichung nur noch mit –2 multiplizieren muss.

I $x=-4y+9$

II $-7y-8=x$

Am besten geeignet ist das Gleichsetzungsverfahren, weil man die Gleichung gleichsetzen kann.

I $-7x-9y=4$

II $7x-8y=12$

Am besten geeignet ist das Additionsverfahren, weil man y gleich auflösen kann.

I $9x-4y=8$

II $-18y-4x=7$

Am besten geeignet ist das Gleichsetzungsverfahren, weil man die Gleichungen gleichsetzen kann.

Allgemeines zu Linearen Gleichungssystemen

Beispiel: (Verflechtungsbilanz)

Es werden die Produkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ hergestellt. Für herzustellende Produkte werden einzelne andere Produkte benötigt. Dadurch entsteht eine innerbetriebliche Verflechtung. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind die Herstellungsmengen und $W_1, W_2, \ldots, W_n$ die

Absatzmengen. Der Verflechtungskoeffizient a_{iJ} sagt aus, wie viele Einheiten von P_i für die Herstellung einer Einheit P_J benötigt werden.

$$W_1 = X_1 - a_{12} * X_2 - a_{13} * X_3 - \dots - a_{1n} * X_n$$
$$W_2 = X_2 - a_{21} * X_1 - a_{23} * X_3 - \dots - a_{2n} * X_n$$

$$W_n = X_n - a_{n2} * X_1 - a_{n2} * X_2 - \dots - a_{n,n-1} * X_{n-1}$$

Es entsteht also ein System von linearen Gleichungen.

$$\begin{array}{l} \quad\quad X_1 - a_{12} * X_2 - a_{13} * X_3 - \dots . - a_{1n} * X_n = W_1 \\ -a_{21} * X_1 \quad + \quad X_2 - a_{23} * X_3 - \dots . - a_{2n} * X_n = W_2 \\ \quad \dots . \quad\quad\quad \dots .. \quad\quad\quad \dots .. \quad\quad\quad \dots . \\ -a_{n1} * X_1 - a_{n2} * X_2 - a_{n3} * X_3 \quad \dots . \quad + \quad X_n = W_n \\ ges.: X_1; X_2; \dots .; X_n \end{array}$$

Matrizenschreibweise: $(E - A) * X = W$

A: Matrix der Verflechtungskoeffizienten

X: Produktionsvektor

W: Absatzvektor

Ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{l} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2n} * x_n = b_2 \\ \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \\ a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + \dots + a_{mn} * x_n = b_m \\ A * x = b \end{array}$$

heißt ein lineares Gleichungssystem

A: Koeffizientenmatrix;

b: Vektor der rechten Seite;

x: Vektor der Unbekannten

Spezialfall: Homogenes Gleichungssystem: b=0 (Nullvektor)

Sonst: Inhomogenes Gleichungssystem $b \neq 0$

Jeder Vektor x, der das Gleichungssystem erfüllt, heißt eine Lösung des Gleichungssystems

Die Gesamtheit aller Lösungen ergibt die Lösungsmenge

Die Lösungsmenge ändert sich nicht bei folgenden Operationen:

- beim Vertauschen von Gleichungen

- bei der Multiplikation mit einem Faktor ungleich Null
- bei der Addition bzw. Subtraktion von Gleichungen
- wenn das Vielfache einer Gleichung zu einer anderen addiert wird

Durch diese Prinzipien wird die Basis für die direkten Lösungsverfahren für Gleichungssysteme gelegt.

Der Gauß'sche Algorithmus

Dieses Verfahren dient zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Es eignet sich zur Bestimmung einer speziellen Lösung als auch zur Angabe der gesamten Lösungsmannigfaltigkeit.

Durch moderne Rechneranlagen lässt sich das Gauß'sche Eliminationsverfahren sehr gut durchführen und hat deshalb an Bedeutung gewonnen.

Seine Idee besteht darin, aus einem System von m linearen Gleichungen mit n Variablen m-1 Gleichungen so umzuformen, dass eine der Variablen, etwa x_1, in diesen m-1 Gleichungen nicht mehr vorkommt, also eliminiert wird.

Aus m-2 von diesen m-1 neuen Gleichungen lässt sich nun z.B. x_2 entfernen. Indem man so fortfährt, erhält man schließlich eine einfach zu lösende Gleichung, die nur noch eine Variable x_n aufweist.

Das Gleichungssystem lässt sich dann einfach nach allen anderen Variablen auflösen, da immer nur eine unbekannte Variable vorhanden ist.

Rechenschema:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \quad (2)\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \quad (3)\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \quad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1')\\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \quad (2')\\
a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 &= b'_3 \quad (3')\\
a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 &= b'_4 \quad (4')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1'')\\
x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \quad (2'')\\
a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \quad (3'')\\
a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 &= b''_4 \quad (4'')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1''')\\
x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \quad (2''')\\
x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \quad (3''')\\
x_4 &= b'''_4 \quad (4''')
\end{aligned}
$$

Im allgemeinen Teil wird ein Gleichungssystem mit 4 Variablen veranschaulicht:

(1') erhalten wir durch Division von (1) durch a_{11} (Vor. $a_{11} \neq 0$)

Dann multiplizieren wir (1') mit a_{21} und subtrahieren von (2) und erhalten (2').

Dann multiplizieren wir (1') mit a_{23} und subtrahieren von (3) und erhalten (3').

Entsprechend erhält man (4')

Anschließend wird (2') zu (2'') vereinfacht und zur Umformung von (3') in (3'') und von (4') in (4'') verwendet.

Dies wird analog bis (4''') fortgesetzt, so dass man nach der Variablen auflösen kann.

Beispiel 10:

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad\quad 2x_3 + \quad x_4 &= 11 \qquad (1)\\
4x_1 + \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 23 \qquad (2)\\
3x_1 + 2x_2 + \ x_3 - \quad x_4 &= 6 \qquad (3)\\
x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ 2x_4 &= 14 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	11
4	1	3	2	23
3	2	1	-1	6
1	1	1	2	14

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	11
0	1	-5	-2	-21
0	2	-5	-4	-27
0	1	-1	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	11
0	1	-5	-2	-21
0	0	5	0	15
0	0	4	3	24

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	11
0	1	-5	-2	-21
0	0	1	0	3
0	0	0_4	3	12

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	11
0	1	-5	-2	-21
0	0	1	0	3
0	0	0	1	4

$1 * x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 4$

$1 * x_3 + 0 * x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = 3$

$1 * x_2 - 5 * x_3 - 2 * x_4 = -21 \Rightarrow x_2 = 2$

$1 * x_1 + 0 * x_2 + 2 * x_3 + 1 * x_4 = 11 \Rightarrow x_2 = 1$

Sonderfälle:

Unlösbare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad\; + 4x_3 + 2x_4 &= 14 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	0	4	2	14
4	1	3	2	15
3	2	1	−1	10
1	1	1	−1	10

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	7
0	1	−5	−2	−13
0	2	−5	−4	−11
0	1	−1	−2	3

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	7
0	1	−5	−2	−13
0	0	5	0	15
0	0	4	0	16

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	7
0	1	−5	−2	−13
0	0	1	0	3
0	0	0	0	4

$0 = 4 \Rightarrow \textit{Widerspruch} \rightarrow \textit{Gleichungssystem unlösbar}$

- Entsteht bei einer Umformung ein Widerspruch, so ist das Gleichungssystem unlösbar.
- Handelt es sich bei dem Gleichungssystem um ein homogenes System (rechte Seite = 0), so kann dieser Fall nicht auftreten.

Das Gleichungssystem hat mehrere Lösungen

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	0	4	2	14
4	1	3	2	15
3	2	1	−1	10
1	1	1	−1	6

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	7
0	1	−5	−2	−13
0	2	−5	−4	−11
0	1	−1	−2	−1

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	7
0	1	−5	−2	−13
0	0	5	0	15
0	0	4	0	12

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	1	7
0	1	−5	−2	−13
0	0	1	0	3
0	0	0	0	0

$0 = 0 \rightarrow x_4 \, ist \;\; frei\; wählbar$

$x_4 = p$

$x_3 = 3$

$x_2 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot p = -13$

$x_2 = 2 + 2p$

$x_1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot p = 7$

$x_1 = 1 - p$

- Gleichungen, die auf beiden Seiten 0 sind, können gestrichen werden. Reichen die verbleibenden Gleichungen nicht aus zur Auflösung, so sind eine oder mehrere Variablen frei wählbar.

Lineare Systeme von 3 Gleichungen mit 3 Variablen

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie die Lösung dieses LGS.

I $x+y+z=6$

II $y+z=3$

III $z=1$

Lösung: L={3; 2; 1}

Lösung:

III in II :

$y+1=3 \quad |-1$

$y=2$

$y=2$ und $z=1$ in I

$x+2+1=6 \quad |-3$

$x=3$

Angabe der Lösungsmenge

L={3; 2; 1}

Determinantenverfahren nach Cramer

Gabriel Cramer (1704 - 1752, von Beruf Mönch) entwickelte ein stark formalisiertes Lösungsverfahren für LGS.

(Bedingung: Gleichviel Variablen und Gleichungen)

Ein Zahlenschema der Form:

$$\det(A) = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \blacksquare & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \blacksquare & \blacksquare & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \blacksquare & a_{n,n} \end{pmatrix}\right| \quad \text{mit allen} \quad a_{i,j} \in R$$

heißt Determinante (n-reihig).

Die Entwicklung von Determinanten

(Wie rechnet man den Wert einer Determinante aus?)

Eine 2-reihige Determinante wird folgendermaßen berechnet:

$$\det(A) = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right| = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$$

Hauptdiagonale (links oben nach rechts unten)

Nebendiagonale (links unten nach rechts oben)"

Eine beliebige Determinante wird nun nach einer Zeile oder Spalte entwickelt.

Am Beispiel: (Entwicklung nach der 1. Zeile)

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = 3 \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| - 7 \cdot \left|\begin{pmatrix} 10 & 9 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| + 4 \cdot \left|\begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}\right| - 6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

Man nimmt die Elemente der 1. Zeile als Faktoren vor Unterdeterminanten, die entstehen, wenn man die Zeile und Spalte streicht, in der der jeweilige Faktor steht. Die Produkte aus Faktor und Unterdeterminante wird addiert oder subtrahiert. Das Vorzeichen wird nach Zeilennummer/Spaltennummer bestimmt. Man addiert die Zeilen- und Spaltennummer: Ergebnis gerade: +, ungerade: -

(Ein Beispiel: Entwicklung nach der 6. Zeile: Das erste Element steht in der 6. Zeile, 1. Spalte, 6+1=7, ungerade, also wird mit - begonnen.)

Das gleiche Beispiel nach der 2. Zeile entwickelt:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| + 5 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| - 9 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}\right| + 6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

Eine dieser Unterdeterminanten kann dann weiter entwickelt werden, z. B.:

$$\left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\right| - 4 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\right| + 6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

Die entstandenen 2-reihigen Determinanten lassen sich mit obiger Methode berechnen, z. B.:

$$\left|\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot 9 - 2 \cdot 8$$

Obiges Beispiel im letzten Entwicklungsschritt:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -10 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 9 - 2 \cdot 8) \,..$$

Insgesamt werden zwölf 2-reihige Determinanten berechnet!

Wer das Beispiel nachrechnen möchte:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -2516$$

Für die Berechnung von 3-reihigen Determinanten kann man die **Regel von Sarrus** heranziehen, die die Entwicklung der 3-reihigen und anschließende Berechnung von 2-reihigen Determinanten bereits enthält:

Bsp.:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \cdot 6 + 8 \cdot 0 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0 \cdot 0 = -137$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{matrix}$$

Die ersten zwei Spalten rechts danebenschreiben, dann:

Hauptdiagonalen - Nebendiagonalen

Die Cramersche Regel

(1) Bilde die Koeffizientendeterminante:

Ist D≠0, so hat das LSG eine eindeutige Lösung.

(Ist D=0 und alle D_i=0, so gibt's eine Parameterlösung.

Ist D=0 und ein D_i≠0, so gibt's keine Lösung.)

$$D = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot \\ a_{2,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right|$$

(2) Bilde alle Formdeterminanten D_i:

$$D1 = \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & \cdot \\ b_2 & a2,2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right|$$

Die 1. Spalte wird durch die rechte Seite (die b_s) ersetzt.

Die 2. Spalte wird durch die rechte Seite ersetzt.

$$D2 = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 & \cdot \\ a_{2,1} & b_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right|$$

usw.

(3) Berechne die Lösungen:

$$x_1 = \frac{D1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D2}{D}$$

...

$$x_n = \frac{Dn}{D}$$

Beispiel 11:

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$

$$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$D := \left| \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$D = 3$

Es existiert eine eindeutige Lösung

$$D1 := \left|\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$D1 = 3$

$$x_1 := \frac{D1}{D}$$

$x_1 = 1$

$$D2 := \left|\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -5 & -5 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$D2 = 6$

$$x_2 := \frac{D2}{D}$$

$x_2 = 2$

$$D3 := \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$D3 = 9$

$$x_3 := \frac{D3}{D}$$

$x_3 = 3$

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerschen Regel.

a) I: $4x - 2y + z = 15$

II: $-x + 3y + 4z = 15$

III: $5x - y + 3z = 26$

b) I: $2x - 3y + z = 10$

II: $x + y - 2z = -6$

III: $3x - y - 4z = -5$

c) I: $x + y + z = 1$

II: $17x + y - 7z = 9$

III: $4x + 2y + z = 3$

d) I: $3y - z = 7$

II: $2x - 3y + 2z = -21$

III: $3x + y = -21$

e) I: $2x + 7y - z = 13$

II: $17x - 3y + 4z = -9$

III: $3x - 2y + z = -5$

f) I: $3x - 4y - 6z = 42$

II: $-x - 2y + 3z = -6$

III: $7x + 10y + 6z = 0$

Lösungen:

a) (2 / -1 / 5)

b) (0,7 / -2,1 / 2,3)

c) unendlich viele Lösungen

d)(-8 / 3 / 2)

e) L = { }

f) (6 / -3 / -2)

Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

$3x_1 - 2x_2 = 5$

$-2x_1 + 4x_2 = 2$

Lösung: $x_1=3$; $x_2=2$

Lösung:

Bsp.:

$$3x_1 - 2x_2 = 5 \quad \mathrm{I}$$
$$-2x_1 + 4x_2 = 2 \quad \mathrm{II}$$

aus I: $x_2 = \frac{1}{2} \cdot (3x_1 - 5)$ in II einsetzen: $-2x_1 + 4\left[\frac{1}{2} \cdot (3x_1 - 5)\right] = 2$

vereinfachen: $4 \cdot x_1 - 10 = 2$

auflösen: $x_1 = \frac{12}{4} = 3$ in I einsetzen $x_2 = \frac{1}{2} \cdot (3 \times 3 - 5)$

$x_2 = 2$

Aufgabe 12:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme.

a) I:$4x + 3y = 14$

II: $2x - y = 12$

b) I: $-4x - y = 40$

II: $x + 5y = 9$

c) I: $2x - 6y = 6$

II: $5x + 3y = 42$

d) I: $4x + 2y = 4$

II: $-6x + 3y = 33$

e) I: $12x + 11y = 18$

II: $16x - 7y = -2$

f) I: $3x - 10y = 3$

II: $-9x + 24y = -10$

g) I: $14x - 8y = 10$

II: $-21x + 15y = 60$

h) I: $18x + 24y = -132$

II: $27x - 40y = 676$

i) I: $11x - 10y = 13$

II: $-8x + 7y = -7$

Lösungen:

a) (5 / -2)

b) (-11 / 4)

c) (7,5 / 1,5)

d) $(-2{,}25 / 6{,}5)$

e) $(0{,}4 / 1{,}2)$

f) $(^{14}/_{9} / ^{1}/_{6})$

g) $(15 / 25)$

h) $(8 / -11{,}5)$

i) $(-7 / -9)$

Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme.

a) I: $2x + 3y + 5 = 5x + 6y - 1$
II: $x - 4y - 2 = 2x - 2y$

b) I: $3(x + 5) = 2(2y - 1)$
II: $4(3x - 6) = 3(y + 4)$

c) I: $5(2x + y) = 4(3y - 5x) + 13$
II: $6(8x - 2y + 6) = 4(2y - 3x) - 4$

d) I: $2(2x + 3y) = 3(3x - y) + 5$
II: $4(3x - 4y) = 2(x + y) - 10$

e) I: $(x + 5)(y + 1) = (x + 8)(y - 3)$
II: $(x - 3)(y - 1) = (x - 1)(y + 3)$

f) I: $(x + 2)(y - 3) = (x - 3)(y + 4)$
II: $(x - 6)(y + 9) = (x + 4)(y - 5)$

Lösungen:

a) $(6 / -4)$

b) $(5 / 8)$

c) $(3 / 11)$

d) unendlich viele Lösungen

e) $(-2 / 7)$

f) $L = \{ \}$

Aufgabe 14:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

I $x+y+z=6$

II $y+z=3$

III $z=1$

Lösung: L={3; 2; 1}

Lösung:

III in II :

y+1=3 |-1

y=2

y=2 und z=1 in I

x+2+1=6 |-3

x=3

Angabe der Lösungsmenge

L={3; 2; 1}

Aufgabe 15:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

I x-3y+2z=-4

II -2y+5z=7

III -5y+4,5z=-6,5

Lösung: L={2; 4; 3}

Lösung:

I x-3y+2z=-4

II -2y+5z=7 |• 5

III -5y+4,5z=-6,5 |• 2

I x-3y+2z=-4

II -2y+5z=7

III 16z=48

16z=48 | :16

z=3

III in II :

-2y+5 • 3=7 |-15

-2y=-8 | :(-2)

y=4

y=4 und z=3 in I

x-3 • 4+2 • 3=-4

x-12+6=-4 |+6

x=2

Angabe der Lösungsmenge

L={2; 4; 3}

Aufgabe 16:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

I 3x-y+4z=12

II x-2y+z=5

III 6x-4y+3z=16

Lösung: L={1; -1; 2}

Lösung:

I 3x-y+4z=12 |• (-2)

II x-2y+z=5 |• (-3)

III 6x-4y+3z=16

I 3x-y+4z=12

II 5y+z=-3 |•2

III -2y-5z=-8 |•5 +

I 3x-y+4z=12

II 5y+z=-3

III -23z=-46

-23z=-46 | :(-23)

z=2

III in II :

5y+2=-3 |-2

5y=-5 | :5

y=-1

y=-1 und z=2 in I

3x-(-1)+4•2=12 |-9

3x=3 |:3

x=1

Angabe der Lösungsmenge

L={1; -1; 2}

Aufgabe 17:

Bestimme die Lösungsmenge des Systems.

I $\quad x-y+z=4$

II $\quad 3x-y+4z=12$

III $\quad x-4y+5z=15$

Lösung: L={1; -1; 2}

Lösung:

I $\quad x-y+z=4 \quad |\cdot(-3)$

II $\quad 3x-y+4z=12$

III $\quad x-4y+5z=15 \quad |\cdot(-3)$

I $\quad 2y+z=0$

II $\quad 3x-y+4z=12 \quad +$

III $\quad x-4y+5z=15 \quad |\cdot(-3)$

I $\quad 2y+z=0 \quad |\cdot 11$

II $\quad 3x-y+4z=12$

III $\quad 11y-11z=-33 \quad |\cdot(-2)$

III in I:

$2y+2=0 \quad |-2$

$2y=-2 \quad |:2$

$y=-1$

y=-1 und z=2 in II

$3x-(-1)+4\cdot 2=12 \quad |-9$

$3x=3 \quad |:3$

$x=1$

Angabe der Lösungsmenge

L={1; -1; 2}

Aufgabe 18:

Die Differenz zweier Zahlen beträgt 3. Subtrahiere ich vom Neunfachen der größeren Zahl das Fünffache der kleineren Zahl, so erhalte ich 71. Bestimme die beiden Zahlen.

Lösung: (14;11)

Lösung:

Gleichung:

$9x-5(x-3)=71$

<-> 9x-5x+15=71

<-> 4x+15 = 71

<-> 4x = 56

<-> x = 14

x-3 = 14-3 = 11

Aufgabe 19:

Tick, Trick und Track sind zusammen 123 Jahre alt. Trick ist 32 Jahre älter als Tick, Track ist 26 Jahre älter als Trick.

Bestimme das jeweilige Alter der drei.

Lösung: (11; 43; 69)

Lösung:

Gleichung:

x+(x+32)+(x+32)+26 = 123

<-> x+x+32+x+32+26 = 123

<-> 3x + 90 = 123

<-> 3x = 33

<-> x = 11

x+32 = 11+32=43

43+26 = 69

Aufgabe 20:

Ein Grundstück wird unter drei Familien aufgeteilt, Familie Weber erhält ein Drittel, Familie Schulz drei Achtel und Familie Schmidt den Rest des Grundstückes. Der Anteil der Familie Schmidt ist 350 qm groß.

Bestimme die Größe (genauer: den Flächeninhalt) des gesamten Grundstückes vor seiner Aufteilung.

Lösung: 350 qm

Lösung:

Gleichung:

x = (1/3)x+(3/8)x+350qm

<-> x = (17/24)x+350 qm

<-> (7/24)x=350 qm

<-> x = 1200 qm

Aufgabe 21:

Bestimme die zwei Zahlen, deren Summe 2 und deren Differenz 8 ist.

Lösung: Die gesuchten Zahlen lauten 5 und -3.

Lösung:

I: $x+y=2$ II: $x-y=8$

$L=\{(5;-3)\}$

Antwort: Die gesuchten Zahlen lauten 5 und -3.

Aufgabe 22:

Bestimme die beiden Zahlen, die die Summe 32 ergeben und bei denen die Differenz doppelt so groß ist wie die kleiner der beiden Zahlen.

Lösung: Die gesuchten Zahlen lauten 8 und 24

Lösung:

I: $x+y=32$ II: $x-y=2y$

$L=\{24;8)\}$

Antwort: Die gesuchten Zahlen lauten 8 und 24.

Aufgabe 23:

Die absolut identischen Hansen-Zwillinge und die Schulz-Drillinge wiegen zusammen 348 kg 750 g. Stellt sich jedoch nur ein Hansen-Zwilling mit zwei der Schulz-Drillinge auf die Waage, so zeigt diese lediglich 210 kg an.

Fragestellung: Wie viel wiegen die einzelnen Zwillinge?

Lösung: Ein Hansen-Zwilling wiegt 67,5 kg, ein Schulz-Drilling wiegt 71,25 kg.

Lösung:

I: $2x+3y=348{,}75$ kg II: $x+2y=210$ kg

$L=\{(67{,}5 \text{ kg} ; 71{,}25 \text{ kg})\}$

Antwort: Ein Hansen-Zwilling wiegt 67,5 kg, ein Schulz-Drilling wiegt 71,25 kg.

Aufgabe 24:

Bei einem Rechteck beträgt der Umfang 19,4 cm, die eine Seite ist um 3,3 cm länger als die andere. Bestimme den Flächeninhalt des Rechteckes!

Lösung: Das Rechteck mit den Seitenlängen 6,5 cm und 3,2 cm hat einen Flächeninhalt von 20,8 cm^2.

Lösung:

Variabeln: a und b für die Seitenlängen.

I: $2a+2b=19{,}4$ cm II: $a=b+3{,}3$ cm

$L=\{(6{,}5 \text{ cm}; 3{,}2 \text{ cm})\}$

Flächeninhalt: $a\cdot b=6{,}5cm\cdot 3{,}2cm=20{,}8cm2$

Antwort: Das Rechteck mit den Seitenlängen 6,5 cm und 3,2 cm hat einen Flächeninhalt von 20,8 cm^2.

Aufgabe 25:

Lösen Sie lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 5x_1-2x_2+x_3&=4 \\ x_1-x_2+2x_3&=5 \\ 2x_1+3x_2-x_3&=5 \\ 3x_1+x_2+5x_3&=20 \end{aligned}$$

Lösung:

a) keine Lösung

b) keine Lösung

c)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

d)

$$x_2 = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{5} x_3$$
$$x_1 = \tfrac{2}{5} - \tfrac{7}{5} x_3$$

e)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a)

(a) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Zur Berechnung einer Zeilenstufenform subtrahieren wir das 4-fache der 1.Zeile von Zeile 2 und das 2-fache von Zeile 3. Die Matrix wird überführt in:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

Nun subtrahieren wir von Zeile 3 die Zeile 2 und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Die Matrix entspricht dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= -13 \\ 0x_4 &= 5 \Rightarrow 0 \neq 5 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

b)

(b) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array}\right)$$

Subtrahieren wir von Zeile 2 das 2-fache der Zeile 1 und von Zeile 3 die Zeile 1, so erhalten wir die Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Jedoch sehen wir, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Der Rang der erweiterten Systemmatrix (r = 3) stimmt nicht mit dem Rang der Systemmatrix (r = 2) überein.

c)

(c) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Von Zeile 2 ziehen wir das 2-fache der ersten Zeile ab und von Zeile 3 ziehen wir das 3 fache der Zeile 1 ab. Wir haben die Matrix überführt in:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \end{array}\right)$$

Von Zeile 3 subtrahieren wir das 4/3-fache der Zeile 2 und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist in Zeilenstufenform, sie entspricht dem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -3x_2 - 3x_3 &= -3 \\ -4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten die eindeutige Lösung:

$$x_3 = -\tfrac{1}{4}$$

$$-3x_2 - 3\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \tfrac{5}{4}$$

$$x_1 + 2\cdot\tfrac{5}{4} + 3\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\tfrac{3}{4}$$

Als Vektor geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

d)

(d) Die zugehörige erweiterte Matrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Mit dem Gauß Algorithmus berechnet man analog zu Aufgabenteil a) – c) die Zeilenstufenform zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix hat den Rang r =2. Pivotvariablen sind x_1 und x_2, Variable x_3 kann als Parameter frei gewählt werden. Es existieren also unendlich viele Lösungen.

Man erhält die Lösungen:

$$-5x_2 + 11x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{5}x_3$$

$$x_1 + 2\left(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{5}x_3\right) - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \tfrac{2}{5} - \tfrac{7}{5}x_3$$

e)

(e) Die zugehörige Matrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 20 \end{array}\right)$$

Zum einfacheren Rechnen tauschen wir Zeile 1 mit Zeile 2. Von Zeile 2 subtrahieren wir das 5-fache der Zeile1, von Zeile 3 das 2-fache der Zeile 1 und von Zeile 4 das 3-fache der Zeile 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & -21 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Wir subtrahieren von Zeile 3 das -5/3-fache der Zeile 2 und von Zeile 4 das 4/3-fache der Zeile 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & -21 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right)$$

Von Zeile 4 subtrahieren wir das 11/10-fache der Zeile 3 und erhalten die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & -21 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die eindeutige Lösung erhält man durch rekursives Einsetzen:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ 3x_2 &= -21 + 9 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \\ x_1 &= 5 + 2 - 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \end{aligned}$$

Zusatz: Auch diese Matrix kann man weiter in eine Normalform transformieren, so dass die Pivotelemente 3 und 10 zu 1 werden und die Zeileneinträge -1 bzw. -9 und 2 oberhalb der Pivotelemente zu 0 werden:

Division der Zeile 2 durch 3 und der Zeile 3 durch 10 liefert die Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Addieren wir Zeile 2 zu Zeile 1 und danach das 3-fache der Zeile 3 zu Zeile 2 und subtrahieren von Zeile 1 das 2-fache der Zeile 3, so erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösung liest man hier direkt ab (Vektorschreibweise):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26:

Christa und Julia haben sich verabredet. Sie starten beide um 15 Uhr mit ihren Fahrrädern in ihren 14 km voneinander entfernten Heimatorten. Christa schafft in jeder Stunde 12, Julia 16 km. Wie weit von Christas Heimatort entfernt treffen sie sich?

Lösung:

Gegeben:

$s = 14\text{km}$

$v_C = 12\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_J = 16\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Wenn die beiden Freundinnen sich treffen sind sie gleich lange unterwegs.

Es gilt:

$t_C = t_J$

Für die bis zum Treffpunkt zurückgelegten Strecken gilt:

$s_C = 14 - s_J$

Mit $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ erhält man:

$\frac{s_C}{v_C} = \frac{s_J}{v_J}$

$\frac{s_C}{12} = \frac{s_J}{16}$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lll}
 & \frac{s_C}{12} = \frac{s_J}{16} & \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow & 16s_C = 12s_J & \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow & s_C = \frac{3}{4}s_J & \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow & 14 - s_J = \frac{3}{4}s_J & \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow & 4 \cdot (14 - s_J) = 3s_J & \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow & 56 - 4s_J = 3s_J & \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow & 56 = 7s_J & \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow & s_J = 8 & \wedge\ s_C = 14 - 8 \\
\Leftrightarrow & s_J = 8 & \wedge\ s_C = 6 \\
 & L=\{(6|8)\} &
\end{array}
$$

Die beiden Freundinnen treffen sich 8km von Julias bzw. 6 km von Christas Heimatort entfernt.

Aufgabe 27:

Zwei Autofahrer starten gleichzeitig in 55 km voneinander entfernten Ortschaften. Der erste legt 75, der zweite 90 km pro Stunde zurück. Wie weit vom Startort des ersten Fahrers entfernt treffen sie sich?

Lösung:

Gegeben:

$s = 55km$

$v_A = 75\frac{km}{h}$

$v_B = 90\frac{km}{h}$

Wenn die beiden Autofahrer sich treffen sind sie gleich lange unterwegs.

Es gilt:

$t_A = t_B$

Für die bis zum Treffpunkt zurückgelegten Strecken gilt:

$s_A = 55 - s_B$

Mit $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ erhält man:

$$\frac{s_A}{v_A} = \frac{s_B}{v_B}$$

$$\frac{s_A}{75} = \frac{s_B}{90}$$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lll}
 & \frac{s_A}{75} = \frac{s_B}{90} & \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow & 90s_A = 75s_B & \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow & s_A = \frac{5}{6}s_B & \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow & 55 - s_B = \frac{5}{6}s_B & \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow & 6 \cdot (55 - s_B) = 5s_B & \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow & 330 - 6s_B = 5s_B & \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow & 330 = 11s_B & \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow & s_B = 30 & \wedge\ s_A = 55 - 30 \\
\Leftrightarrow & s_B = 30 & \wedge\ s_A = 25 \\
 & L=\{(30|25)\} &
\end{array}
$$

Die beiden Autofahrer treffen sich 30km bzw. 25 km von ihren Startorten entfernt.

Aufgabe 28:

Onkel Josef möchte seine Nichte Carmen besuchen. Er kommt im 36 km von Carmens Heimatdorf entfernten Bahnhof an und ruft seine Nichte an, um von ihr abgeholt zu werden. Die setzt sich sofort in ihr Auto und fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 km/h zum Bahnhof. Da Onkel Josef nicht warten will, gehr er Carmen entgegen. er schafft 3 km pro Stunde. Wie weit muss der Onkel gehen, bis er von seiner Nichte getroffen wird?

Lösung:

Gegeben:

$s = 36\text{km}$

$v_J = 3\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_C = 45\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Wenn die Beiden sich treffen sind sie gleich lange unterwegs.

Es gilt:

$t_C = t_J$

Für die bis zum Treffpunkt zurückgelegten Strecken gilt:

$s_C = 36 - s_J$

Mit $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ erhält man:

$$\frac{s_C}{v_C} = \frac{s_J}{v_J}$$

$$\frac{s_C}{45} = \frac{s_J}{3}$$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll}
 & \frac{s_C}{45} = \frac{s_J}{3} & \wedge\ s_C = 36 - s_J \\
\Leftrightarrow & 3s_C = 45s_J & \wedge\ s_C = 36 - s_J \\
\Leftrightarrow & s_C = 15s_J & \wedge\ s_C = 36 - s_J \\
\Leftrightarrow & 36 - s_J = 15s_J & \wedge\ s_C = 36 - s_J \\
\Leftrightarrow & 36 = 16s_J & \wedge\ s_C = 36 - s_J \\
\Leftrightarrow & s_J = 2{,}25 & \wedge\ s_C = 36 - 2{,}25 \\
\Leftrightarrow & s_J = 2{,}25 & \wedge\ s_C = 33{,}75
\end{array}$$

$L=\{(2{,}25|33{,}75)\}$

Die Beiden treffen sich, wenn Onkel Josef 2,25 km und Carmen 33,75 km zurückgelegt haben.

Aufgabe 29:

Alex und Fred wohnen in den 42 km voneinander entfernten Orten A und F. Die beiden haben sich verabredet und fahren jeweils mit dem Fahrrad einander entgegen. Alex fährt um 14 Uhr mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 18 km/h los. 10 Minuten später startet Fred in F. Er schafft 21 km pro Stunde. Wie weit von A entfernt treffen sie sich?

Lösung:

Gegeben:

$s = 42\text{km}$

$v_A = 18\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_F = 21\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Wenn die beiden Freunde sich treffen, ist Axel 10 Minuten, also $\frac{1}{6}$h länger unterwegs als Fred.

Es gilt:

$t_A - \frac{1}{6} = t_F$

Für die bis zum Treffpunkt zurückgelegten Strecken gilt:

$s_A = 42 - s_F$

Mit $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ erhält man:

$\frac{s_A}{v_A} - \frac{1}{6} = \frac{s_F}{v_F}$

$\frac{s_A}{18} - \frac{1}{6} = \frac{s_F}{21}$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lll}
 & \frac{s_A}{18} - \frac{1}{6} = \frac{s_F}{21} & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & \frac{s_A}{18} - \frac{3}{18} = \frac{s_F}{21} & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & \frac{s_A - 3}{18} = \frac{s_F}{21} & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & \frac{42 - s_F - 3}{18} = \frac{s_F}{21} & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & \frac{39 - s_F}{18} = \frac{s_F}{21} & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & 21 \cdot (39 - s_F) = 18 \cdot s_F & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & 819 - 21s_F = 18s_F & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & 819 = 39s_F & \wedge\ s_A = 42 - s_F \\
\Leftrightarrow & s_F = 21 & \wedge\ s_A = 42 - 21 \\
\Leftrightarrow & s_F = 21 & \wedge\ s_A = 21 \\
 & L=\{(21|21)\} &
\end{array}
$$

Die beiden Freunde treffen sich genau in der Mitte der Gesamtstrecke.

Beispiel 12:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
\text{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & |\cdot(-2) \\
\text{II} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 15x_4 & = & 6 & \\
\text{III} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 6 & \\
\text{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & \\
\hline
\text{I} & -4x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & - & 24x_4 & = & 12 & \\
\text{II} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 15x_4 & = & 6 & |\text{I}+\text{II} \\
\text{III} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 6 & |\text{I}+\text{III} \\
\text{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & \\
\hline
\text{I} & -4x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & - & 24x_4 & = & 12 & |:(-2) \\
\text{II} & & - & 9x_2 & + & 9x_3 & - & 9x_4 & = & 18 & |\cdot(-\frac{15}{9}) \\
\text{III} & & - & 15x_2 & + & 12x_3 & - & 18x_4 & = & 18 & \\
\text{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & |\cdot 5 \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\text{II} & & & 15x_2 & - & 15x_3 & + & 15x_4 & = & -30 & |:15 \\
\text{III} & & - & 15x_2 & + & 12x_3 & - & 18x_4 & = & 18 & |\text{II}+\text{III} \\
\text{IV} & & - & 15x_2 & + & 25x_3 & - & 10x_4 & = & 70 & |\text{II}+\text{IV} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\text{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\text{III} & & & & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -12 & |\cdot\frac{10}{3} \\
\text{IV} & & & & & 10x_3 & + & 5x_4 & = & 40 & \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\text{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\text{III} & & & & - & 10x_3 & - & 10x_4 & = & -40 & |:(-10) \\
\text{IV} & & & & & 10x_3 & + & 5x_4 & = & 40 & |\text{III}+\text{IV} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\text{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\text{III} & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 4 & \\
\text{IV} & & & & & & - & 5x_4 & = & 0 & |:(-5) \\
\hline
\text{IV} & & & & & & & x_4 & = & 0 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_4 \text{ eingesetzt in III:}} & \\
& & & & & x_3 & & & = & 4 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_3 \text{ und } x_4 \text{ eingesetzt in II:}} & \\
& & & x_2 & - & 4 & & & = & -2 & |+4 \\
& & & x_2 & & & & & = & 2 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_2,\ x_3 \text{ und } x_4 \text{ eingesetzt in I:}} & \\
& 2x_1 & + & 6\cdot 2 & - & 3\cdot 4 & & & = & -6 & |:2 \\
& x_1 & & & & & & & = & -3 &
\end{array}
$$

Beispiel 13:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & 7x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 & |3\cdot\text{II}+(-7)\cdot\text{I} \\
\text{III} & -x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & = & -5 & |3\cdot\text{III}+\text{I} \\
\hline
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & - & 5x_2 & - & 17x_3 & = & -13 & \\
\text{III} & & - & 10x_2 & - & 34x_3 & = & -14 & |(-\frac{1}{2})\cdot\text{III}+\text{II} \\
\hline
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & - & 5x_2 & - & 17x_3 & = & -13 & \\
\text{III} & & & & & 0 & = & 6 & \\
\hline
\end{array}
$$

Durch Anwendung von Gauß erhält man in der letzten Gleichung einen Widerspruch, d.h. das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

$$L = \{\}$$

Beispiel 14:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & 4x_1 & - & 12x_2 & + & 8x_3 & = & 4 & |\text{II}+(-2)\cdot\text{I} \\
\text{III} & 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 & |2\cdot\text{III}+(-3)\cdot\text{I} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 & \\
\text{III} & & & 17x_2 & - & 13x_3 & = & 9 & |2\cdot\text{III}+17\cdot\text{II} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 & \\
\text{III} & & & & & 8x_3 & = & -16 & \\
\hline
\end{array}
$$

Man erhält mit Gauß eine Dreiecksform, d.h. das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung:

$$L = \{(2;-1;-2)\}$$

Beispiel 15:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 & \\
\text{II} & 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 5 & |\text{II}+(-3)\cdot\text{I} \\
\text{III} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 7 & |\text{III}+(-2)\cdot\text{I} \\
\text{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 & \\
\text{II} & & & 7x_2 & - & 14x_3 & = & -7 & |:7 \\
\text{III} & & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 & |\text{III}+(-\frac{1}{7})\cdot\text{II} \\
\text{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 & \\
\text{II} & & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 & \\
\text{III} & & & & & 0 & = & 0 &
\end{array}$$

Durch Anwendung von Gauß ensteht eine Nullzeile und man erhält eine Trapezform. Das Gleichungssystem besteht aus 2 Gleichungen und 3 Unbekannten, d.h. das lineare Gleichungssystem hat unendlichviele Lösungen. In dem Fall wählt man eine Unbekannte fest und löst die anderen Unbekannten auf dem üblichen Weg:

$$\begin{aligned}
x_3 &= k, \quad k \in \mathbb{R} \\
x_2 &= -1+2k \\
x_1 &= 2+k \\
L &= \left\{(2+k; -1+2k; k) \,\middle|\, k \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 30:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Wählen Sie selbst einen Lösungsweg!

a) $4y-19 = y+20$
$5x+2y = 126$

b) $20x-50 = 29y$
$2x+5y = 8y$

c) $3x+50 = 6x+5y$
$2y+10 = 3x+2y$

d) $x = 8y-6$
$x = 3y+4$

e) $y = 2x-3y+4$
$x = 2x-3y+4$

f) $3(2y+3) = 2x+7y$
$4(x+2) = 5x-3y$

g) $\frac{25x-3}{12} - \frac{20y-1}{18} = 2x-y$
$\frac{x+4}{9} = \frac{y+3}{5}$

h) $\frac{x+y}{2} + \frac{4y}{3} = 10$
$5-y = \frac{x+y}{2}$

i) $\frac{7(x-y)}{11} + \frac{x}{4} = 4.8$
$\frac{7(x-y)}{11} - \frac{3x}{4} = 2.4$

Lösung:

a) (20/13), b) (75/50), c) (10/3 /8), d) (10/2), e) (2/2), f) (5/–1), g) (5/2), h) (–35/15), i) (2.4/–4.2).

Aufgabe 31:

a) Suchen Sie zwei Zahlen, deren Summe 34 und deren Differenz 16 ist.

b) Eine Zahl ist um 8 grösser als eine andere, aber nur halb so groß wie deren Dreifaches. Um welche beiden Zahlen handelt es sich?

c) Gibt es zwei natürliche Zahlen mit dem Mittelwert 17, von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere.

Lösung: *9, 25, b) 16, 24, c) nein*

Aufgabe 32:

Die Summe zweier gesuchter Zahlen ist zehnmal so gross wie ihre Differenz, die Summe ihrer reziproken Werte aber zehnmal so groß wie das Produkt ihrer reziproken Werte.

Lösung: *4.5, 5.5*

Aufgabe 33:

Zwei Ziffern bilden eine natürliche Zahl, die viermal so groß ist wie ihre Quersumme und um 9 kleiner als ihre Spiegelzahl. Bestimmen Sie die Zahl!

Lösung: 12

Aufgabe 34:

Vor 5 Jahren war der Vater 5mal so alt wie der Sohn. In 3 Jahren wird er 3mal so alt sein wie der Sohn. Wie alt sind die beiden jetzt?

Lösung: 13 J. und 45 J

Aufgabe 35:

Marie ist jetzt 24 Jahre alt, doppelt so alt wie Anna war, als Marie so alt war, wie Anna jetzt ist. Wie alt ist Anna jetzt und wann war Marie gerade so alt?

Lösung: Anna ist 18 J

Aufgabe 36:

An einer Tombola kostet ein blaues Los Fr. 3.–, ein rotes, mit der 4fachen Gewinnchance, Fr 10.–.

Am Nachmittag werden für diese Lose Fr 278.– eingenommen. Am Abend werden 51 blaue Lose weniger verkauft, dafür aber 49 mehr von den roten. Damit ergaben sich an diesem Tag aus der Tombola Einnahmen von Fr 893.–. Wie viele rote und blaue Lose wurden am Nachmittag verkauft?

Lösung: *mehrere Lösungen z.B. 56 blaue, 11 rote Lose*

Aufgabe 37:

Ein Kapital wird zu 4% verzinst, ein anderes zu 5%. Dies Summe der beiden Jahreszinsen beträgt Fr 1410.–. Wird nach einem Jahr jeder Zins zu seinem Kapital geschlagen, so werden die beiden Kapitalien gleich groß. Wie groß waren sie am Anfang?

Lösung: *Fr 15'750.– und Fr 15'600.–*

Aufgabe 38:

Ein Kaufmann mischt zwei Kaffeesorten. Nimmt er von der billigeren Sorte doppelt so viel wie von

der teuren, so kommt das Kilo auf Fr 17.10 zu stehen, im umgekehrten Fall auf Fr 18.50. Berechnen

Sie die Kilopreise der beiden Sorten.

Lösung: *Fr 15.70 und Fr 19.90*

Aufgabe 39:

Zwei Radfahrer fahren auf einer 400 m langen Rennbahn mit praktisch konstanten Geschwindigkeiten.

Der zweite startet 10 Sekunden nach dem ersten, 45 Sekunden später holt er ihn zum ersten Mal ein und weitere 225 Sekunden später zum zweiten Mal. Wie schnell fahren die beiden?

Lösung: *8 m/s und 9.8 m/s.*

Aufgabe 40:

In ein 10 m langes und 5 m breites quaderförmiges Wasserbecken münden zwei Zuleitungen. Sind beide während einer Stunde geöffnet, so steigt der Wasserspiegel um 1.08 m. ist aber die erste nur 50 min lang geöffnet und die zweite dafür 70 min lang, so steigt er um 1.05 m. Wie viele Liter liefert jede Leitung pro Minute?

Lösung: *375 l/min und 525 l/min.*

Aufgabe 41:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $x+y+z = 9$
$x-y+z = 3$
$x+y-z = 1$

b) $x+y-z = 7$
$2x-y+z = 8$
$3x+2y-z = 20$

c) $x+4y-5z = 21$
$2x+3y+4z = -1$
$x-6y-8z = -3$

d) $2x+3y+4z = 1.4$
$3x-2y-z = 1.2$
$5x+4y+3z = 1.4$

e) $z = 3x-4y-2$
$z = 2x+3y-13$
$z = 5x-9y+2$

f) $x+y+z = 14$
$2x = 5z$
$6y = 7z$

g) $x+y = 11$
$x+z = 12$
$y+z = 13$

h) $2.4x-2.5y = 26$
$1.6x+0.9z = -3$
$0.5y-1.2z = 38$

i) $2x-(3y+4z) = -1$
$4x-(5-6y) = 8z-3$
$9y-(x+2z) = 2$

j) $2x+3(y-z) = 2$
$3(y+x)-2(z+x) = 4$
$5(y-z)-3(x-y) = -42$

k) $3(x-6)-4(y+z) = -18$
$5x-8(z+2y) = 0$
$4(y+z)-5(x-1) = 5$

l) $3r-4s+2t = 10$
$5r-3s+4t = 3$
$-2r+5s-3t = -7$

Lösung:

a) (2/3/4), b) (5/3/1), c) (–1/3/–2), d) (0.3/–0.4/0.5), e) (3/2/–1), f) (7.5/3.5/3), g) (5/6/7), h) (15/4/–30), i) (1/2 / 1/3 / 1/4), j) (10/6/12), k) (0/0/0), l) (2/–3/–4).

Aufgabe 42:

a) Suchen Sie drei Zahlen, sodass sich die Summen 10 bzw. 11 bzw. 12 ergeben, wenn man je zwei von ihnen addiert.

b) Bei drei Zahlen x, y und z kann man von jeweils zweien den Mittelwert bilden. Ist es möglich, dass sich dabei jedesmal der Wert 10 ergibt, obwohl die drei Zahlen x, y und z verschieden sind?

Lösung: *a) 4.5, 5.5, 6.5, b) nein.*

Aufgabe 43:

Ermitteln Sie die vierstellige Zahl mit folgenden Eigenschaften:

Die Quersumme beträgt 14.

Die Summe von Tausender- und Einerziffer ist gleich der Summe von Hunderter- und Zehnerziffer.

Die Summe von Tausender- und Hunderterziffer ist gleich der Summe von Zehner- und Einerziffer.

Die Tausenderziffer ist um 1 grösser als die Einerziffer.

Lösung: 4343

Aufgabe 44:

Eine Bergbahn verlangt für Berg- und Talfahrt zusammen Fr 30.–, für die Bergfahrt allein Fr 22.50 und für die Talfahrt allein Fr 15.–. An einem Sonntag fuhren im ganzen 680 Zahlende hinauf und 520 hinab. Es wurden Fr 19.650.– eingenommen. Wie viele Billette jeder Art wurden gelöst?

Lösung: 460 B&T, 220 B, 60

Aufgabe 45:

Ein Wasserbehälter kann durch drei Zuleitungen gefüllt werden, und zwar durch A und B zusammen in 60, durch A und C zusammen in 45 und durch B und C zusammen in 36 Minuten. In wie vielen Minuten wird der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch alle drei gemeinsam?

Lösung: 180 min, 90 min, 60 min, gemeinsam 30 min.

Aufgabe 46:

Ein Radfahrer hat eine Geschwindigkeit von 25 km/h auf ebenem Gelände, von 15 km/h bergaufwärts und von 30 km/h abwärts. Wie viel ebenen, ansteigenden und absteigenden Weg enthält unter diesen Voraussetzungen eine 100 km lange Straße, wenn der Radfahrer 4 h 24 min braucht um sie in der einen Richtung, und 4 h 36 min, um sie in der anderen Richtung zu durchfahren?

Lösung: 50 km eben, 22 km ansteigend, 28 km abfallend.