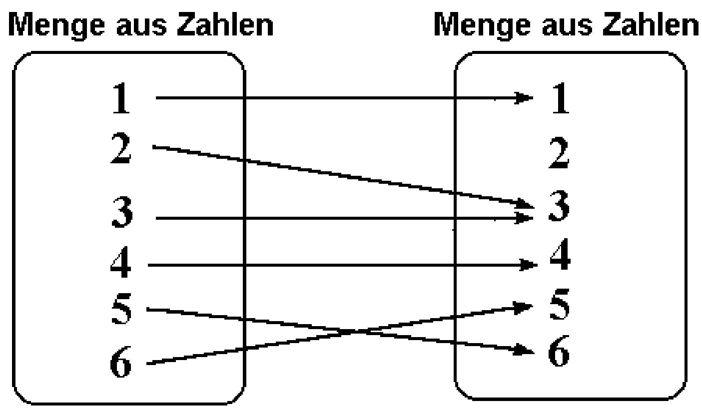
Determinanten

Wiederholung: Was ist eine Funktion?

Um das folgende zu verstehen, muss der Begriff der "Funktion" kurz wiederholt werden:

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnungsvorschrift die jedem Element einer Menge genau ein Element einer zweiten Menge zuordnet.

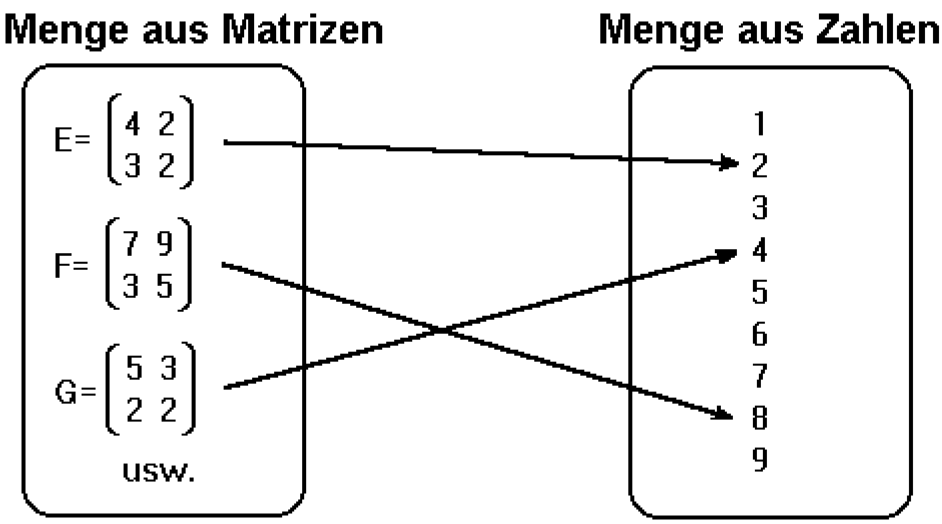
Bei einer "ganz normalen" Funktion wird also einer Zahl wieder eine Zahl zugeordnet. Das Bild zeigt eine solche Funktion:



Diese Funktion ordnet den Zahlen 1 bis 6 der linken Menge eindeutig eine Zahl zu, d.h. jeder Zahl der linken Menge wird genau eine Zahl der rechten Menge zugeordnet.

Die Determinantenfunktion

Man kann aber auch Funktionen definieren, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnen. Zu dieser Art von Funktionen gehört die Determinantenfunktion:



Determinanten

Die Determinantenfunktion ordnet Matrizen einen Funktionswert (Zahl) zu. Diesen Funktionswert nennt man "Determinanten".

Im vorigen Bild gilt z.B.:

Die Determinante der Matrix E ist die Zahl 2, die Determinante der Matrix F ist die Zahl 8 und die Determinante der Matrix G ist die Zahl 4.

Zweireihige Determinanten

Vorbemerkung zur Definition:

Auf der vorigen Seite hatten wir gesagt, das die Determinantenfunktion einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet.

Diese Zahl hatten wir den Namen Determinante gegeben.

Nun müssen wir natürlich noch definieren, welchen Wert diese Zahl hat. Zuerst definieren wir 2-reihige Determinanten:

Definition 1:

Matrix A:		**Determinante der Matrix A:**
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\rightarrow$	$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Die Determinantenfunktion ordnet nur quadratischen Matrizen eine Zahl zu. Für nichtquadratische Matrizen ist die Determinantenfunktion nicht definiert.

Natürlich ist die Determinantenfunktion wie jede andere Funktion eindeutig, d.h. jeder quadratischen Matrix wird genau eine Determinante (Zahl) zugeordnet.

Beispiel 1:

2-reihige Matrix berechnen. Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die Determinante nach oben genannter Formel:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 8 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 4$$

Lösung: Die Determinante ist die Zahl 4.

Beispiel 2:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 45 + 6 = 51$

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 = 0$

(e) $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8$

Zusatzfrage: Wann ist diese Determinante 0 ? Ergebnis: für $k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

(f) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Schreibweisen:

Auf der vorigen Seite hatten wir die Determinantenfunktion definiert, und zwar für den Fall einer 2-reihigen Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Der Zahl "rechts vom Pfeil" hatten wir Determinante D genannt, die der Matrix A zugeordnet wurde.

Wir nennen die Zahl deshalb auch det A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{det\ A}$$

Oft schreibt man stattdessen auch |A|:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}|$$

Eine Variante dieser Bezeichnungsart ist folgende, bei der nochmals alle Elemente aufgezählt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Sprechweisen

Ich berechne die Determinante |A| heißt, ich berechne welcher Wert der Matrix A durch die Determinantenfunktion zugewiesen wird.

3-reihige Determinanten

Definition 2:

Auf der vorigen Seite hatten wir die Determinantenfunktion für 2-reihige Matrizen definiert. Jetzt wollen wir das gleiche für 3-reihige Matrizen machen. Die Definition lautet:

$$\mathbf{A} \qquad\qquad |\mathbf{A}| = \mathbf{D} = \det \mathbf{A}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

mit $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Beispiel 3:

Als Beispiel sei folgende Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinantenfunktion ordnet der Matrix A die Determinante |A| zu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Will man nun die Determinante berechnen, so muss man die obige Definition benutzen:

$|A| = 0\cdot5\cdot1 + 2\cdot4\cdot3 + 5\cdot6\cdot2 - 3\cdot5\cdot5 - 2\cdot4\cdot0 - 1\cdot6\cdot2 = 0+24+60-75-0-12 = -3$

Die Determinante |A| hat also den Wert -3.

Sarrus-Regel

Was ist die Sarrus-Regel?

Die auf der vorigen Seite gelernte Definition für 3-reihige Determinanten kann man sich mit der Regel von Sarrus merken. Sie ist also keine neue Definition, sondern eine simple Merkhilfe.

Erklärung der Regel:

Zuerst schreiben wir die zwei ersten Spalten der Determinante |A| nochmals rechts neben dieselbe:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Die drei im folgenden Bild eingezeichneten Diagonalen nennt man die Hauptdiagonalen. Das Produkte je einer Hauptdiagonalen nennt man Hauptdiagonalenprodukt. Wir haben also drei Hauptdiagonalenprodukte (kurz HP's):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$1.\text{HP} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$
$$2.\text{HP} = a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$
$$3.\text{HP} = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

Die drei Hauptdiagonalen

Die anderen drei Diagonalen nennt man Nebendiagonalen bzw. ihre Produkte die Nebendiagonalen-Produkte.

Die drei Nebendiagonalen

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$1.\text{NP} = a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$
$$2.\text{NP} = a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$
$$3.\text{NP} = a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Addiert man die drei Hauptdiagonalen-Produkte und subtrahiert davon die drei Nebendiagonalen-Produkte, so erhält man die von der Vorseite bekannte Formel für |A|:

$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$

Beispiel 4:

Gegeben sei die folgende Determinante, deren Wert noch nicht bestimmt ist. Wir benutzen das Lösungsschema der vorigen Seite.

Zuerst schreiben wir die zwei ersten Spalten der Determinante |A| nochmals rechts neben dieselbe:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

Jetzt bestimmen wir die drei Hauptdiagonalenprodukte (HP's):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

1.HP= $0 \cdot 5 \cdot 1 = 0$

2.HP= $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

3.HP= $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$

$\boxed{\text{Die drei Hauptdiagonalen}}$

Danach bestimmen wir die drei Nebendiagonalenprodukte (NP's):

$\boxed{\text{Die drei Nebendiagonalen}}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

1.NP= $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$

2.NP= $2 \cdot 4 \cdot 0 = 0$

3.NP= $1 \cdot 6 \cdot 2 = 12$

Schließlich addieren wir die drei Hauptdiagonalen-Produkte, subtrahieren davon die drei Nebendiagonalen-Produkte und erhalten die Determinante |A|:

|A| = 0+24+60-75-0-12 = -3

Beispiel 5:

(a) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 2\cdot 2\cdot 5+3\cdot 2\cdot(-1)+1\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 1-1\cdot 2\cdot 2-5\cdot 3\cdot 3$$

$$= 20-6+3+2-4-45=-30$$

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 2 & -2 \end{matrix} = -3+16+0-(-30)-(-4)-0=47$$

(c) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{matrix} = 32+90-10-(-12)-100-24=0$$

Eigenschaften von Dreier-Determinanten

Die folgenden Eigenschaften muß man im Unterricht nicht zwingend beweisen. Es kann genügen, einen Beweis zu führen und die Gültigkeit der anderen an Beispielen zu demonstrieren. Gemäß dem Grundsatz, daß die Unterrichtszeit nicht ausreicht, um alles zu tun, kann man hier sinnvoll Zeit einsparen.

(1) Eine Determinante, die eine Zeile oder Spalte mit lauter Nullen enthält, hat selbst den Wert 0.

Zum Beweis schreibt man die Sarrus-Regel an und fülle eine Zeile oder Spalte mit Nullen:

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{matrix} = 0$$

Man erkennt, daß jede absteigende und jede aufsteigende Diagonale dann eine Null enthält, wodurch alle 6 Produkte 0 werden.

(2) Enthält eine Determinante zwei gleiche Zeilen oder Spalten, dann hat sie den Wert 0.

Auch dies ist leicht zu beweisen:
Wir sehen uns den Fall an, in dem die erste und zweite Spalte identisch sind.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{matrix} = a_1a_2c_3+a_1a_3c_2+a_2a_3c_1-a_2a_3c_1-a_1a_3c_2-a_1a_2c_3=0$$

Je zwei dieser Produkte heben sich auf, also ist das Ergebnis Null.
Jeder andere Fall geht genauso.

(3)	Enthält eine Determinante eine Zeile, die ein Vielfaches einer anderen Zeile ist, dann hat sie den Wert 0. Dasselbe gilt für Spalten.

Wir sehen uns den Fall an, in dem die zweite Spalte das k-fache der ersten ist:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} ka_1 & a_1 \\ ka_2 & a_2 \\ ka_3 & a_3 \end{matrix} = ka_1a_2c_3 + ka_1a_3c_2 + ka_2a_3c_1 - ka_2a_3c_1 - ka_1a_3c_2 - ka_1a_2c_3 = 0$$

Je zwei dieser Produkte heben sich auf, also ist das Ergebnis Null.
Jeder andere Fall geht genauso.

Für die nächste Eigenschaft benötigen wir den Begriff einer **Linearkombination.** Darunter versteht man die Summe aus zwei Vielfachen, etwa das Doppelte der ersten Zeile zum Dreifachen der zweiten Zeile addiert.

(4)	Ist eine Zeile oder Spalte eine Linearkombination der beiden anderen, dann hat die Determinante den Wert Null.

Dazu sehen wir uns nur ein Beispiel an, das wir gemeinsam konstruieren wollen.

Wir geben in einer Determinante nur die beiden oberen Zeilen vor und erzeugen die dritte Zeile als Linearkombination der beiden anderen, sagen wir das r-fache der ersten Zeile plus das s-fache der zweiten Zeile:

$$\left|\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2r+s & -r+2s & 3r+4s \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2r+s & -r+2s \end{matrix} =$$

$$= 4(3r+4s) - 4(2r+s) + 3(-r+2s) - 6(2r+s) - 8(-r+2s) - (2r+4s)$$
$$= 12r + 16s - 8r - 4s - 3r + 6s - 12r - 6s + 8r - 16s - 2r - 8s = 0.$$

Oder dieses Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Determinante ist null, weil die dritte Spalte eine Linearkombination aus den beiden ersten ist: Die erste Spalte minus die zweite Spalte ergibt die dritte.

(5)	Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert. Analoges gilt für Spalten.

$$\text{Beispiel 1:} \quad \begin{vmatrix} 15 & 12 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -8 \end{vmatrix}$$

Wenn man erkennt, daß die beiden ersten Zahlen der ersten Zeile das dreifache der Zahlen darunter sind, kann man so vorgehen: Man addiert zur 1. Zeile das (-3)-fache der zweiten Zeile bzw. man subtrahiert von der 1. Zeile das 3-fache der 2. Zeile:

$$\begin{vmatrix} 15 & 12 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -9 \end{vmatrix}$$

Jetzt haben wir zwei Nullen in der ersten Zeile. Dies erleichtert die Berechnung ganz erheblich:

(6)	Einen gemeinsamen Faktor einer Zeile oder Spalte kann man als Faktor vor die ganze Determinante schreiben.

Damit kenn man Determinanten oftmals rasch zu kleinen Zahlen verhelfen:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 9 & -9 & 18 \\ 7 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Die weitere Berechnung ist nun deutlich einfacher geworden.

Nun gibt es auch die Möglichkeit, eine Determinante so zu verändern, daß sie andere Zahlen enthält, sich aber ihr Wert nicht verändert. Warum das sinnvoll ist ? Weil man eine Determinante schneller berechnen kann, wenn sie viele Nullen enthält.

$$\begin{vmatrix} 15 & 12 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -9 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \\ 6 & 1 \end{matrix} = 5 - 24 = -19$$

Die Sarrus-Regel erforderte jetzt nur noch die Berechnung zweier Diagonalen-produkte. Eine große Vereinfachung also, mit wenig Aufwand!

Beispiel 6:

Im nächsten Beispiel ziehen wir zuerst zwei Faktoren vor die Determinante, um kleinere Zahlen zu erhalten:

$$\begin{vmatrix} 12 & 24 & 48 \\ 5 & 10 & -5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 60 \cdot \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & 2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{matrix}$$

$=60(40+10)=3000$

Hier wurde am Ende die erste Zeile von der 2. subtrahiert, was die beiden Nullen ergeben hat.

Beispiel 7:

$$\begin{vmatrix} k & 12 & 3 \\ 2k & 6 & 1 \\ k & 6 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 6k \cdot (2-1) = 6k$$

Hier wurde am Ende die 2. Spalte von der dritten subtrahiert.

Beispiel 8:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Hier entdeckt man keine einfache Methode, die einem auf einmal zwei Nullen beschert. Aber in zwei Schritten kann man an den markierten Stellen Nullen erzeugen.

1. Schritt: Addiere das Dreifache der 1. **Spalte** zur 2. Spalte
2. Schritt: Addiere das (-4)-fache der 1. **Spalte** zur 3. Spalte:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3+3 & 4-4 \\ 2 & 5+6 & -3-8 \\ 7 & 2+21 & -5-28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & -11 \\ 7 & 23 & -33 \end{vmatrix}$$

Nun kann man noch den Faktor (-11) aus der letzten Spalte herausziehen:

$$= -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 7 & 23 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 11 \\ 7 & 23 \end{matrix} = -11 \cdot (33-23) = -110$$

n-reihige Determinanten

Anmerkung

Genauso wie für 2- und 3-reihige Determinanten müssten wir auch für 4-, 5-, 6-, ... , n-reihige Determinanten eine Formel angeben, mit der man sie berechnen kann.

Dabei stößt man aber schnell an Grenzen, denn schon eine Determinante mit 5 Reihen hat eine Lösungsformel mit 120 Summanden! Das ist zu viel Arbeit!

Wir werden aber bald eine Definition (=Lösungsformel) der Determinantenfunktion kennen lernen, die wesentlich kürzer und eleganter ist.

Da die Berechnung von Determinanten mit mehr als 3 Reihen sehr aufwendig aber doch Routinearbeit ist, werden sie oft mit Computerprogrammen oder Taschenrechnern berechnet!

Einreihige Determinanten

Bis jetzt haben wir noch keine einreihigen Determinanten definiert.

Die Definition der "Einreihigen Determinante" ist kurz und simpel.

Definition 3:

Eine einreihige Determinante hat den gleichen Wert wie ihr (einziges) Element. Die Formel dazu:

$|a_{11}| = a_{11}$

Beispiel

Welchen Wert hat die Determinante |4711| ?

Antwort: Die Determinante hat den Wert 4711.

Schnittpunktelement

Definition 4:

Streicht man in einer Determinante eine beliebige Zeile i und außerdem eine beliebige Spalte k, so nennt man das Element a_{ik} das Schnittpunktelement.

Das Schnittpunkt-Element a_{ik} ist also genau das Element, dass sowohl in der gestrichenen Zeile als auch in der gestrichenen Spalte steht.

Beispiel 9:

Als Beispiel sei eine 3-reihige Determinante gegeben:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

Als Beispiel streichen wir die dritte Zeile und die zweite Spalte:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Das Schnittpunkt-Element ist dann das Element a_{32}:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \textbf{Schnittpunkt-Element} \\ \textbf{ist das Element } a_{32} \end{array}$$

Unterdeterminante

Definition 5:

Streicht man in einer Determinante eine beliebige Zeile i und eine beliebige Spalte k, so nennt man die übrig bleibenden Elemente die Unterdeterminante D_{ik}.

Beispiel 10:

Gegeben sei eine dreireihige Determinante |A|:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nun streichen wir eine Zeile i und eine Spalte k.

Als Beispiel streichen wir die 3.Zeile und die 2.Spalte:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Es bleiben vier Elemente übrig die nicht gestrichen wurden.

Diese vier Elemente bilden die so genannte Unterdeterminante D_{32}:

$$D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Beachte:

Hat die Determinante n Reihen, so haben alle Unterdeterminanten n-1 Reihen.

Vorzeichen-Faktor

Vorbemerkung zur Definition

Man kann eine Funktion definieren, die jeder Unterdeterminante D_{ik} einen Vorzeichenfaktor zuordnet.

Der Vorzeichenfaktor kann den Wert (+1) oder (-1) haben.

Die Funktion nennen wir die "Vorzeichenfunktion".

Definition 6:

Der Unterdeterminante D_{ik} wird durch die Vorzeichenfunktion

der Vorzeichenfaktor V_{ik} zugeordnet. Dieser berechnet sich so:

$D_{ik} \rightarrow V_{ik} = (-1)^{i+k}$

Beispiel 11:

Nehmen wir an, wir streichen in einer Determinante z.B. die 3.Zeile und die 2.Spalte, so dass die Unterdeterminante D_{32} entsteht:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Der Unterdeterminante D_{32} wird dann der Vorzeichenfaktor V_{32} zugeordnet, der sich nach obiger Definition berechnen lässt:

$V_{ik} = (-1)^{i+k} = (-1)^{3+2} = (-1)^5 = (-1)$

Anmerkung

Das Produkt aus Vorzeichenfaktor V_{ik} und Unterdeterminante D_{ik} nennt man auch "algebraisches Komplement" A_{ik}:

$A_{ik} = V_{ik} \cdot D_{ik}$

Entwicklungsformel

Jetzt definieren wir eine n-reihige Determinante durch ihre Unterdeterminanten.

Die Formel nennen wir Entwicklungsformel. Auf den nächsten Seiten werden wir dann sehen, wozu diese Formel zu gebrauchen ist.

Definition 7:

Gegeben sei eine n-reihige-Determinante, im Beispiel eine 3-reihige:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Hat die Determinante n-Reihen, so schreiben wir sie n-mal nebeneinander, d.h. in unserem Beispiel 3-mal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nun streichen wir in allen Determinanten die erste Reihe, sowie in der n-ten Determinante die n-te Spalte:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Es entstehen n Unterdeterminanten (im Beispiel entstehen drei):

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Diese Unterdeterminanten addieren wir: $D_{11}+D_{12}+D_{13}+\ldots+D_{1n}$

Jetzt multiplizieren wir noch jede Unterdeterminante mit dem gleichnamigen Vorzeichenfaktor und Schnittpunkt-Element:

$V_{11}a_{11}D_{11} + V_{12}a_{12}D_{12} + \ldots + V_{1n}a_{1n}D_{1n}$

Schließlich definieren wir, dass diese Formel gleich der gegebenen Determinante D sein soll:

$D = V_{11}a_{11}D_{11} + V_{12}a_{12}D_{12} + \ldots + V_{1n}a_{1n}D_{1n}$

Meist schreibt man die Entwicklungsformel mit dem $\sum$-Zeichen:

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^{n} V_{1k} \cdot a_{1k} \cdot D_{1k}$$

Beispiel zur Entwicklungsformel

Beispiel 12:

Als Beispiel sei eine 3-reihige-Determinante gegeben:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Laut Definition müssen wir die Determinante 3x aufschreiben:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Dann müssen wir die erste Zeile streichen und je eine der Spalten:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Es entstehen drei Unterdeterminanten:

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \; \mathbf{D}_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \; \mathbf{D}_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Jetzt addieren wir diese drei Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Jede Unterdeterminante multiplizieren wir mit ihrem gleichnamigen Vorzeichenfaktor und Schnittpunktelement:

$$V_{11} \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + V_{12} \cdot 9 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + V_{13} \cdot 8 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Die drei Vorzeichenfaktoren müssen wir noch berechnen:

$V_{11} = (-1)^{1+1} = 1$ $\quad V_{12} = (-1)^{1+2} = -1$ $\quad V_{13} = (-1)^{1+3} = 1$

Die 3-reihige Determinante D, ausgedrückt durch 2-reihige Unterdeterminanten, lautet somit:

$$\mathbf{D} = 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -123$$

Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Sarrus.

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 2k & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 1-k & k & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 0 & k^2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & k \end{vmatrix}$

Lösung: a)0; b)0; c)27; d)4k-4; e)8k-13; f)$4k^2$-2k+1; g)9k-9; h)-$6k^2$+3-k^3

Lösung:

(a) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right. = 12+4+12-6-16-6=0$

(b) $\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right. = -2-9-12+12+9+2=0$

Wenn man schon weiß, daß diese Determinante den Wert 0 haben muß, weil die erste Spalte ein Vielfaches der zweiten ist, spart man sich die Rechnung.

(c) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 4 & 6 \end{array}\right. = 35-16-36+12+60-28=27$

(d) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ k & 1 & 0 & k & 1 \end{array}\right. = 4k-4$

(e) $\left|\begin{array}{ccc|cc} k & 3 & 1 & k & 3 \\ 2k & 2 & 5 & 2k & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right. = -4k+15-2+12k=8k-13$

(f) $\left|\begin{array}{ccc|cc} k & k & 1 & k & k \\ 1 & 2k & 1 & 1 & 2k \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right. = 4k^2-k+1+2k-k-2k=4k^2-2k+1$

(g) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1-k & k & 1 & 1-k & k \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right. = -2(1-k)+4k+2-8-(1-k)+2k=9k-9$

(h) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & k^2 & -1 & 0 & k^2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & k & 3 & 0 \end{array}\right. = -6k^2+3-k^3$

Aufgabe 2:

Für welche Werte von k hat diese Determinante der Wert 0 ?

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Lösung: 0 und 0,5

Lösung:

Lösung: Man erhält zwei Nullen, wenn man das Doppelte der ersten Zeile von der dritten subrtrahiert:

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ 2 & k & 2k \\ 1-2k & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} k & 3 \\ 2 & k \\ 1-2k & 0 \end{matrix}$$

$$= 6k(1-2k) - (1-2k) \cdot 4k = 6k - 12k^2 - 4k + 8k^2 = 2k - 4k^2$$

Nun setzt man die Bedingung D = 0 an:

$$D = 0 \iff 2k(1-2k) = 0 \iff k_1 = 0 \text{ oder } k_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 3:

Vereinfachen Sie durch Addition eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte so dass, möglichst eine oder zwei Nullen entstehen und berechnen dann:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Lösung: a)-299; b)-9720; c)-92

Lösung:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+21 & 5-14 & 7 \\ 8+3 & 10-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 25 & -9 & 7 & 25 & -9 \\ 11 & 8 & 1 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right. = -200-99 = -299$

(b) $\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45-90 & 36-36 & 18-36 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45-60 & 24-24 & 36-24 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} -45 & 0 & -18 & -45 & 0 \\ 30 & 12 & 12 & 30 & 12 \\ -15 & 0 & 12 & -15 & 0 \end{array}\right.$

Hier wurde das Dreifache der 2. Zeile von der ersten subtrahiert und das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten.

$$= -45\cdot 12\cdot 12 - 15\cdot 12\cdot 18 = -9720$$

Man hätte hier vielleicht zuerst den Faktor 15 aus der ersten Spalte, 12 aus der 2. Spalte und 6 aus der dritten Spalte herausziehen sollen:

$$\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix} = 15\cdot 12\cdot 6\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1080\cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right. = 1080\cdot(-9) = -9720$$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 4 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & -9 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right. = -108+16 = -02$

Aufgabe 4:

Erzeugen Sie an den markierten Stellen zwei Nullen durch Addition der Vielfachen zweier Zeilen oder Spalten und berechnen dann:

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix}$

Lösung: d)135; e)135; f)564; g)-224; h)-224; i)-4k²+25; j)-4k²+25; k)-2688; l)-2688

Lösung:

(d) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3-12 & 7+20 \\ 1 & 3-3 & -5+5 \\ 3 & 7-9 & 6+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -9 & 27 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 27 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} = -(-189+54) = 135$$

(e) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-4 & 3-12 & 7+20 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3-3 & 7-9 & 6+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 27 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 27 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} = 135$$

(f) $$\begin{vmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13+21 & 8+21 & 6-6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5+7 & 3+7 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 29 & 0 \\ 7 & 7 & -2 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = +2\cdot\begin{vmatrix} 34 & 29 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot(340-58) = 564$$

(g) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2+20 & 3-12 & 4 \\ 5-5 & -3+3 & -1 \\ 1+15 & 1-9 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 22 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 16 & -8 & 3 \end{vmatrix} = +1\cdot 7\cdot\begin{vmatrix} 22 & -9 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} = -224$$

(h) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3-2 & 4-6 \\ 5 & -3-5 & -1-15 \\ 1 & 1-1 & 3-3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = -224$$

(i) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k-k & 2+3k \\ 2k & 1 & -3 \\ 4-6k & 3-3 & 2+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 0 & 3k+2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4-6k & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 3k+2 \\ 4-6k & 11 \end{vmatrix}$

$= 11(3-2k^2) - (4-6k)(3k+2) = 33 - 22k^2 - (12k - 18k^2 + 8 - 12k) = -4k^2 + 25$

(j) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k & 2+3k \\ 2k-2k & 1 & -3+3 \\ 4-6k & 3 & 2+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k & 3k+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4-6k & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 3k+2 \\ 4-6k & 11 \end{vmatrix} =$ (i)

(k) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1+6 & -12+9 & 1-1 \\ 9+12 & 5+18 & 2-2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix}$

$= 12 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 21 & 23 & 0 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 21 & 23 \end{vmatrix} = -12(161+63) = -2688$

(l) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9-9 & 5+108 & 2-9 \\ 6-6 & 9+72 & -1-6 \end{vmatrix} =$

$= 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 0 & 113 & -7 \\ 0 & 81 & -7 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 113 & -7 \\ 81 & -7 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} 113 & 1 \\ 81 & 1 \end{vmatrix} = -84 \cdot (113-81) = -2688$

Aufgabe 5:

Vereinfache zuerst durch Ausklammern von Faktoren, erzeuge dann zwei Nullen und berechne den Wert der Determinante.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 21 & 14 & 21 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 55 & 7 & -22 \\ 10 & 6 & -8 \\ 35 & -9 & -14 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2k & 9 & 12 \\ 4k & 3 & 7 \\ k^2 & 12 & 14 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 44 & 22 & -22 \\ 7 & 6 & 5 \\ 15 & -12 & 18 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 24 & 5 & 14 \\ 12 & 6 & 7 \\ -18 & 20 & 21 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3 & 4k & 5 \\ 3k & 4 & 2 \\ 6 & 2k & 1 \end{vmatrix}$

Lösung: a)336; b)-2960; c)$27k^2$-12k; d)10098; e)2646; f)$18k^2$+36k-108

Lösung:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 21 & 14 & 21 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 21\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 5 & -4-10 & -2-15 \\ 3 & 2-6 & 3-9 \end{vmatrix} = 21\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -14 & -17 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}$

$= 21\cdot \begin{vmatrix} -14 & -17 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 21\cdot(84-68) = 336$

(b) $\begin{vmatrix} 55 & 7 & -22 \\ 10 & 6 & -8 \\ 35 & -9 & -14 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 11 & 7 & -11 \\ 2 & 6 & -4 \\ 7 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 7 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -2960$

Hier wurde die erste Spalte zur dritten addiert.

(c) $\begin{vmatrix} 2k & 9 & 12 \\ 4k & 3 & 7 \\ k^2 & 12 & 14 \end{vmatrix} = 3k\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 7 \\ k & 4 & 14 \end{vmatrix} = 3k\cdot \begin{vmatrix} 2-12 & 3-3 & 12-21 \\ 4 & 1 & 7 \\ k-16 & 4-4 & 14-28 \end{vmatrix} = 3k \begin{vmatrix} -10 & 0 & -9 \\ 4 & 1 & 7 \\ k-16 & 0 & -14 \end{vmatrix}$

$= 3k \begin{vmatrix} -10 & -9 \\ k-16 & -14 \end{vmatrix} = 3k\left(140+9(k-16)\right) = 3k(9k-4) = 27k^2-12k$

(d) $\begin{vmatrix} 44 & 22 & -22 \\ 7 & 6 & 5 \\ 15 & -12 & 18 \end{vmatrix} = 22\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 66\cdot \begin{vmatrix} 2-2 & 1-1 & -1 \\ 7+10 & 6+5 & 5 \\ 5+12 & -4+6 & 6 \end{vmatrix} = 66 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 17 & 11 & 5 \\ 17 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

$= 66\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} = -66\cdot(34-187) = 10098$

(e) $\begin{vmatrix} 24 & 5 & 14 \\ 12 & 6 & 7 \\ -18 & 20 & 21 \end{vmatrix} = 6\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 42\cdot \begin{vmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 42\cdot(-7)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 2646$

(f) $\begin{vmatrix} 3 & 4k & 5 \\ 3k & 4 & 2 \\ 6 & 2k & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2k & 5 \\ k & 2 & 2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 1-10 & 2k-5k & 5-5 \\ k-4 & 2-2k & 2-2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} -9 & -3k & 0 \\ k-4 & 2-2k & 0 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6\cdot \begin{vmatrix} -9 & -3k \\ k-4 & 2-2k \end{vmatrix} = 6\cdot\left(-18+18k+3k^2-12k\right) = 18k^2+36k-108$

Aufgabe 6:

Für welche Werte von k hat die Determinante den Wert 0 ?

(a) $\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 4 \\ 5 & 1 & k \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & 2k & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 2k & k & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Lösung: a)keine Lösung; b) $\frac{5}{6}$; c)2 oder $\frac{1}{3}$

Lösung:

In dieser Lösung werden die Determinanten einmal mit der Sarrus-Regel berechnet. Die Ergebnisse müssen auch bei anderen Berechnungsverfahren gleich sein!

(a) $D = \begin{vmatrix} 1-k & 2 & 4 \\ 5 & 1 & k \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-k & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} = 1-k+6k+80-12-4k(1-k)-10$

$D = 1-k+6k+80-12-4k+4k^2-10 = 4k^2+k+59$

Die Bedingung D = 0 führt auf die quadratische Gleichung

$$4k^2+k+59=0.$$

Die allgemeine Lösungsformel $k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ liefert

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 59}}{8} \notin \mathbf{R}$$

d.h. Für keinen reellen Wert von k nimmt diese Determinante den Wert 0 an.

(b) $D = \begin{vmatrix} 5 & 2k & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2k \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{matrix} = -20+12k+6k-6k-10+24k = 36k-30$

Die Bedingung D = 0 führt auf die Gleichung

$$36k-30=0 \Rightarrow 36k=30 \Rightarrow k=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

(c) $D = \begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 2k & k & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} k & 1 \\ 2k & k \\ 2 & 1 \end{matrix} = 3k^2+2+6k-6k-k-6k = 3k^2-7k+2$

Die Bedingung D = 0 führt auf die quadratische Gleichung

$$3k^2-7k+2=0$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ergebnis: D wird für k = 2 oder für $k=\frac{1}{3}$ Null.

Aufgabe 7:

Erzeugen Sie zuerst Nullen und berechnen dann durch Entwickeln:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -12 & 3 & 12 \\ 34 & 8 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der zweiten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 2. Zeile!

(b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 15 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der ersten Spalte zwei Nullen und entwickle dann nach der 1. Spalte!

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -9 & -6 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der dritten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 3. Zeile!

Lösung: a)4494; b)306; c)-270

Lösung:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -12 & 3 & 12 \\ 34 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+28 & 7 & -5+6 \\ -12+12 & 3 & 12-12 \\ 34+32 & 8 & 12+34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 66 & 8 & 46 \end{vmatrix} =$

Hier wurde zuerst die erste Spalte zur dritten addiert, dann das vierfache der zweiten Spalte zur ersten. Ich entwickle jetzt nach der 2. Zeile:

$3 \cdot \begin{vmatrix} 34 & 1 \\ 66 & 46 \end{vmatrix} = 3 \cdot (34 \cdot 46 - 66) = 4494$

(b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 15 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 17 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 306$

2. Determinante: Die 2. Spalte wird zur ersten addiert.

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -9 & -6 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 54 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 54 \cdot (-5) = -270$

In der 2. Determinante wurde die 2. Zeile zur 3. addiert !

Aufgabe 8:

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\-1&-1&3&1\\2&5&7&-1\\1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

Lösung: 1

Lösung:

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\-1&-1&3&1\\2&5&7&-1\\1&1&-1&2\end{pmatrix}$$ (1) + (4) und an die (4) Spalte schreiben

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&-1&3&0\\2&5&7&1\\1&1&-1&3\end{pmatrix}$$ Zeile (3) mal (-3)+(4) an die (4) Zeile schreiben

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&-1&3&0\\2&5&7&1\\-5&-14&-22&0\end{pmatrix}$$ nach Element a_{34} entwickeln

$$-1\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&-1&3\\-5&-14&-22\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\-1&-1\\-5&-14\end{matrix}=(-1)\cdot(22-30+14-5+42-44)=1$$

Aufgabe 9:

Rechne Sie die folgenden Aufgaben nach eigener Vorstellung.

(d) $\begin{vmatrix}4&3&1\\1&6&2\\-4&-4&2\end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix}2&0&10\\1&4&5\\9&8&7\end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix}5&8&0\\-2&1&1\\3&1&8\end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix}a&1&a\\2&a&2\\1&2&3\end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix}22&24&26\\20&22&24\\2&2&2\end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix}13&3&5\\11&1&5\\17&7&5\end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix}1-k&1&k\\2-k&2&k\\5&4&-1\end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix}k&k&2k\\2&2&3\\1&5&-5\end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix}-2&-3&1\\-3&1&-2\\1&-2&-3\end{vmatrix}$

Lösung: d)70; e)-304; f)187; g)$2a^2$-4; h)0; i)0; j)0; k);-4k l)52

Lösung:

(d)
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2 & 3+2 & 1 \\ 1+4 & 6+4 & 2 \\ -4+4 & -4+4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 70$$

Ich habe das Doppelte der 3. Spalte zur ersten und zweiten Spalte addiert und dann die Determinante nach der 3. Zeile entwicklelt.

(e)
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 9 & 8 \end{matrix} = 56 + 80 - 360 - 80 = -304$$

Die Null hat mich verleitet, die Sarrus-Regel anzuwenden. Das geht rasch.

(f)
$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 8 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 40 + 24 - 5 + 128 = 187$$

(g)
$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2\left(a^2 - 2\right) = 2a^2 - 4$$

Es wurde die erste Spalte von der dritten subtrahiert.

(h)
$$\begin{vmatrix} 22 & 24 & 26 \\ 20 & 22 & 24 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 20 & 22 & 24 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Subtraktion der 2. Zeile von der ersten entstand dort dieselbe Zeile wie die dritte. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(i)
$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 5 \\ 17 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 5 \\ 10 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Subtraktion der 2. Spalte von der ersten entstand dort dieselbe Spalte wie die dritte. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(j)
$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & k \\ 2-k & 2 & k \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & k \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Addition der 3. Spalte zur ersten entstand dort dieselbe Spalte wie die zweite. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(k)
$$\begin{vmatrix} k & k & 2k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4k$$

2. Determinante: Das Doppelte der erste Zeile wurde von der 2. subtrahiert.

(l)
$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 6 + 6 + 6 - 1 + 8 + 27 = 52$$