Ausmultiplizieren von Ausdrücken

Gesetzmäßigkeiten

Kommutativgesetz der Addition (Vertauschungsgesetz)

In einer Summe können wir beliebig Summanden vertauschen, ohne dass sich ihr Wert ändert. Die Buchstaben a und b seien beliebige Zahlen, dann gilt immer:

$a + b = b + a$

Beispiel 1:

$47 + 84 = 84 + 47 = 131$

Das Kommutativgesetz gilt für eine beliebig große Anzahl von Summanden. Dies kann man auch nutzen, um in größeren Termen Rechenvorteile zu bekommen.

Kommutativgesetz der Subtraktion (Vertauschungsgesetz)

Das Kommutativgesetz gilt bei der Subtraktion nicht.

$a - b \neq b - a$

Kommutativgesetz der Multiplikation (Vertauschungsgesetz)

Auch in einem Produkt können wir beliebig Faktoren vertauschen. Allgemein schreiben wir das Gesetz wieder mit Buchstaben. Für diese Buchstaben kann man beliebige Zahlen einsetzen. Es seien a und b wieder beliebige Zahlen, dann gilt:

$a \cdot b = b \cdot a$

Ein einfaches Beispiel: $12 \cdot 8 = 8 \cdot 12 = 96$

Da auch das Kommutativgesetz der Multiplikation für eine beliebig große Anzahl von Faktoren gilt, können wir es nutzen, um durch gezieltes Vertauschen Vorteile zu erlangen.

Assoziativgesetz der Addition(Verbindungsgesetz)

In einer Summe aus drei oder mehr Summanden können wir beliebige Teile in Klammern setzen und damit zeigen, dass wir sie zuerst rechnen wollen. Andererseits, falls in einer Summe aus mehr als zwei Summanden Klammern stehen, können wir diese auch weglassen.

Wir zeigen ein beliebiges Beispiel, die Summe aus a + b + c. Es gilt:

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

Beispiel 2:

$54 + 23 + 77 = (54 + 23) + 77 = 54 + (23 + 77) = 154$

Assoziativgesetz der Subtraktion

Die Subtraktion ist grundsätzlich nicht assoziativ und das Assoziativgesetz der Subtraktion ist im Grunde eine Abwandlung des Assoziativgesetzes der Addition.

Wir müssen allerdings beachten, dass wenn wir beim Klammern ein Minus vor der Klammer haben, wir das Rechenzeichen umdrehen müssen, also plus zu minus und minus zu plus. Wenn wir 20 – 8 – 2 rechnen wollen, könnten wir 8 – 2 klammern. Hier haben wir dann aber den Fall, dass ein „–" vor der Klammer ist und müssen das Rechenzeichen umdrehen, also statt minus rechnen wir plus.

Beispiel 3:

$20 - 8 - 2$

$= 20 - (8 + 2)$

$= 20 - 10$

$= 10$

Assoziativgesetz der Multiplikation

Für beliebige reelle Zahlen x, y, z gilt

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

die **Reihenfolge** in der man Produkte berechnet, spielt also keine Rolle.

Beispiel 4:

$2 \cdot (3 \cdot 7) = (2 \cdot 3) \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Das Distributivgesetz ist im Grunde ein Gesetz zum **Ausmultiplizieren von Klammern**.

Das bedeutet, man hat ein Produkt (oder Quotienten) aus einer Zahl und einer Klammer – oder auch aus zwei Klammern. In diesen Klammern stehen Summen oder Differenzen. Das Distributivgesetz regelt die Verteilung des Faktors auf die Summanden.

Wir beginnen mit dem „Standard"-Fall, ein Faktor mal eine Summe in Klammern.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c = ab - ac$

Wir sehen, jeder Summand in der Klammer wird mit dem Faktor multipliziert, es ist, als ob man den Faktor in die Klammer reinzieht.

Beispiel 5:

$5 \cdot (5 + 15) = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 15 = 25 + 75 = 100$

$5 \cdot (5 - 15) = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 15 = 25 - 75 = -50$

Vom Kommutativgesetz der Multiplikation her wissen wir, dass wir bei den ersten beiden Fällen Klammer und Faktor vertauschen dürften, also

$$(\mathrm{b}+\mathrm{c}) \cdot \mathrm{a} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a} + \mathrm{c} \cdot \mathrm{a} = \mathrm{ab} + \mathrm{ac}$$
$$(\mathrm{b}-\mathrm{c}) \cdot \mathrm{a} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a} - \mathrm{c} \cdot \mathrm{a} = \mathrm{ab} - \mathrm{ac}$$

Beispiel 6:

$$(5+15) \cdot 5 = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 15 = 25 + 75 = 100$$
$$(5-15) \cdot 5 = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 15 = 25 - 75 = -50$$

Da dieses Vertauschen für die Division nicht zulässig ist, nehmen wir für den nächsten Fall die Buchstaben d, e und f. Das soll zeigen, dass es sich um andere Zahlen handelt.

$$(\mathrm{d}+\mathrm{e}) : \mathrm{f} = \mathrm{d} : \mathrm{f} + \mathrm{e} : \mathrm{f}$$
$$(\mathrm{d}-\mathrm{e}) : \mathrm{f} = \mathrm{d} : \mathrm{f} - \mathrm{e} : \mathrm{f}$$

Beispiel 7:

$$(12+4) : 3 = 12 : 3 + 4 : 3 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

ist anders als

$$3 : (12+4) = 3 : 16 = \frac{3}{16}$$

Nur eine Klammer

Jedes Glied der Summe bzw. der Differenz in der Klammer muss mit dem Faktor vor(oder hinter!) der Klammer multipliziert werden.

Wenn eine Zahl mit einer Klammer, in der Summe oder Differenz steht, muss jeder Summand bzw. sowohl Minuend als auch der Subtrahend mit dieser Zahl multipliziert werden.

Entsprechend geht man vor, wenn eine Variable oder ein längerer Term mit einer solchen Klammermultipliziert werden soll.

$$\mathrm{a} \cdot (\mathrm{b}+\mathrm{c}) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{c} = \mathrm{ab} + \mathrm{ac}$$

Beispiel 8:

$$18 \cdot (\mathrm{x}+\mathrm{y}) = 18 \cdot \mathrm{x} + 18 \cdot \mathrm{y} = 18\mathrm{x} + 18\mathrm{y}$$

Beispiel 9:

$$(-18) \cdot (\mathrm{x}+\mathrm{y}) = -18 \cdot \mathrm{x} - 18 \cdot \mathrm{y} = -18\mathrm{x} - 18\mathrm{y}$$

Klammer mal Klammer

Wenn der Term, mit dem die Klammer multipliziert werden soll, selbst eine Klammer mit einer Summe oder Differenz ist, muss jedes Glied der ersten Summe bzw. Differenz mit jedem Glied der zweiten Summe bzw. Differenz multipliziert werden.

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = ac + ad + bc + bd$

Beispiel 10:

$(3a + 2b) \cdot (5x - 10y) = 15ax - 30ay + 10bx - 20by)$

Beispiel 11:

$(-2a - 3c) \cdot (-3b - 4d) = +6ab + 8ad + 9bc + 12cd$

Produkt in der Klammer

Wenn in der Klammer ein Produkt steht (anstatt einer Summe oder Differenz), darf man nicht jeden Faktor des Produkts in der Klammermultiplizieren, sondern nur einen (welcher ist egal).

$a \cdot (x \cdot y) = axy$

Beispiel 12:

$2 \cdot (x + y) = 2x + 2y$ aber

$2 \cdot (x \cdot y) = 2xy$ aber nicht $2x \cdot 2z = 4xy$

Beispiel 13:

$0{,}5 \cdot (x \cdot 12y) = 6xy$

Die Klammer kann laut Assoziativgesetz weggelassen werden.

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Die Faktoren dürfen nach dem Kommutativgesetz vertauscht werden.

$a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c) = c \cdot (a \cdot b)$