Gesundheits- und Tourismusmanagement - GTM

Wirtschaftspsychologie – WPSY

Sport- und Eventmanagement - SEM

Alle dualen Studiengänge

Formelsammlung Mathematik

Dipl. Mathematiker (FH) Roland Geiger

Rosenstr. 23

72631 Aichtal

cs.geiger@t-online.de

www.cs-geiger.de

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

Zeichen	Bedeutung
<	kleiner als
≤	Kleiner oder gleich
>	größer als
≥	größer oder gleich
∞	unendlich
a^b	a hoch b (Potenz)
$\sqrt{\ }$	Quadratwurzel aus
$\sqrt[n]{\ }$	n-te Wurzel aus
$\log_a x$	Logarithmus x zur Basis a
lg x	Logarithmus x zur Basis 10
ln x	Logarithmus x zur Basis e
lb x	Logarithmus x zur Basis 2
A, B, M	Mengenbezeichnungen
{ c; d}	Menge mit den Elementen c und d
Ø { }	leere Menge
{ x | …}	Menge aller x, für die gilt: …
$A \cap B$	Durchschnittsmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
A \ B	Differenzmenge von A und B
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{D}$	Definitionsmenge
$\mathbb{L}$	Lösungsmenge

Griechische Symbole

Name des Symbols	Kleinbuchstabe	Großbuchstabe
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε oderϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ oder ϑ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mü	μ	M
Nü	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π oder ϖ	Π
Rho	ρ oder ϱ	P
Sigma	σ oder ς	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	φ oder ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Intervalle

Endliche Intervalle

$[a,b] = \{x|a \leq x \leq b\}$

$[a,b) = \{x|a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x|a < x \leq b\}$

$(a,b) = \{x|a < x < b\}$

Unendliche Intervalle

$[a,+\infty) = \{x|a \leq x \leq \infty\}$

$(a,+\infty) = \{x|a < x < \infty\}$

$(-\infty,b] = \{x|-\infty < x \leq b\}$

$(-\infty,b] = \{x|-\infty < x < b\}$

$(-\infty,0)$ oder $-\infty < x < 0$

$(0,+\infty)$ oder $0 < x < +\infty$

$(-\infty,\infty)$ oder $-\infty < x < +\infty$

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

Potenzgesetze

$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \ \ (n \text{ mal } a)$

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$

$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad b \neq 0$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

Wurzelgesetze:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} a \geq 0; b > 0$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$

$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n-m}}$

Rechenregeln Faktorenzerlegungen und Binomische Gesetze

Binomische Gesetze:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Binomischer Lehrsatz zum ausmultiplizieren beliebiger Terme:

Für die Potenzen $(a+b)^n$ ergibt sich für n=2, ... , 7.

$(a+b)^2 =$	$a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3 =$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4 =$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5 =$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$(a+b)^6 =$	$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
$(a+b)^7 =$	$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Rechenregeln für Brüche

Bruchgesetze:

Kehrwert einer Zahl (Zähler und Nenner werden vertauscht):

$$a \to \frac{1}{a};\ \frac{a}{b} \to \frac{b}{a}$$

Erweitern eines Bruches:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Kürzen eines gemeinsamen Faktors:

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot c}{k \cdot d} = \frac{c}{d}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y}$$

Division von einem oder zwei Brüchen:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

Allgemeine Rechenregeln

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz):

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot a)$$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Gleichungen mit einer Unbekannten

Äquivalenzumformungen

Vertauschungsregel

Man kann die beiden Seiten einer Gleichung vertauschen.

Additionsregel/Subtraktionsregel

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Zahl bzw. den gleichen Term addieren.

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Zahl bzw. den gleichen Term subtrahieren.

Multiplikationsregel/Divisionsregel

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl (≠0) bzw. dem gleichen Term (≠0) multiplizieren.

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl (≠0) bzw. dem gleichen Term (≠0) dividieren.

Lineare Gleichungen

Allgemeine Form

$$a_1 x + a_0 = 0 \quad \rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \text{ mit } a_1 \neq 0$$

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \; (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösungsformel (p, q-Formel):

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

Die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ entscheidet über die Anzahl der Lösungen:

D>0: Zwei Lösungen

D=0: Eine Lösung

D<0: Keine Lösung

Lösungsformel (Mitternachtsformel):

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kubische Gleichungen:

Allgemeine Form:

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \;\; (a_3 \neq 0)$

Normalform:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Lösung über die Polynomdivision.

Biquadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

Es sind ausschließlich gerade Exponenten vorhanden.

Durch Substitution $u = x^2$ in quadratische Gleichung überführen.

Anschließend wieder Rücksubstitution.

$$a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0 \;\text{ oder }\; x^4 + ax^2 + b = 0 \;\; (a_4 \neq 0)$$

Logarithmengesetze:

$\mathrm{x} = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$ falls $\mathrm{a^x = b}$ mit $\mathrm{a, b} > 0$ *und* $a \neq 1$

$\log_a a = 1 \ \rightarrow a^1 = a$

$\log_a 1 = 0 \ \rightarrow a^0 = 1$

$\log_a a^n = n \cdot \log_a a = n$

$a^{(\log_a x)} \ = \log_a a^x = x$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a \sqrt[n]{b} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a b$

Berechnung eines beliebigen Logarithmus

$\log_a b = \frac{\log (b)}{\log (a)} = \frac{\ln (b)}{\ln (a)}$

Spezielle Logarithmen

Zehner-Logarithmus:

$\log_{10}(a) = \lg (a)$

Zweier-Logarithmen:

$\log_{12}(a) = \mathrm{lb}\ (a)$

Natürlicher Logarithmus:

$\log_e(a) = \ln (a)$

Verfahren zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen

Gleichsetzungsverfahren

1) Lösen sie beide Gleichungen nach der gleichen Variablen auf.

2) Setzen sie die anderen Seiten der Gleichungen einander gleich.

3) Lösen sie die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.

4) Setzen sie die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein und berechnen so die andere Variable.

Einsetzungsverfahren

1) Lösen sie eine Gleichungen nach einer Variablen auf. (Eventuell liegt eine bereits gegebene Gleichung schon passend vor. Darauf achten, dass so wenig wie möglich Brüche entstehen.)

2) Setzen sie den Term für diese Variable in die andere Gleichung ein.

3) Lösen sie die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.

4) Setzen sie die Lösung in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 ein und berechnen sie so die andere Variable.

Additionsverfahren

1) Multiplizieren der beiden Gleichungen mit Faktoren, so dass bei der Addition der beiden Gleichungen nur eine Variable übrigbleibt.

2) Lösen sie die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.

3) Setzen sie die Lösung in eine der Ausgangsgleichungen ein und berechnen sie so die andere Variable.

Gauß 'scher Algorithmus

Folgende Umformungen dürfen durchgeführt werden, ohne das sich dadurch die Lösung des LGS verändert:

Das Vertauschen zweier Zeilen

Das Multiplizieren einer Zeile mit einem Wert ungleich Null

Das Addieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Der Gauß 'scher-Algorithmus sagt uns in welcher Reihenfolge wir die elementaren Zeilenumformungen anwenden müssen. Befolgt man diesen Anweisungen, so erhält man automatisch eine Lösung des LGS, vorausgesetzt das LGS ist lösbar.

1) schreiben Sie das Lineare Gleichungssystem in Matrixform.

2) Vertauschen Sie die Zeilen eventuell so, dass in der ersten Zeile an erster Stelle keine Null steht.

3) Dividieren sie die erste Zeile durch die erste Zahl in dieser Zeile. Damit hat man an erster Stelle eine Eins stehen.

4) Subtrahieren Sie von der zweiten Zeile ein Vielfaches der ersten Zeile so, dass als Ergebnis in zweiten Zeile die erste Zahl zu Null wird. Wiederholen sie das Gleiche mit erster und dritter, erster und vierter, erster und n-ten Zeile.
Nach diesem Schritt, steht in der ersten Spalte oben eine Eins und die restlichen Einträge sind Null.

5) Denkt man sich die erste Spalte und die erste Zeile weg, so erhält man ein kleineres LGS. Wenden sie jetzt den Algorithmus von vorne auf das kleinere LGS an.
Das Ergebnis ist eine Treppenform der Matrix, insbesondere stehen unter der Diagonale nur Nullen.

5) Wenden sie die oberen Schritte von vorne an, mit der rechten unteren anstatt linken oberen Zahl als Startpunkt.

6) Berechnen Sie von unter her die die einzelnen Variablen mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens.

Cramersche Regel

siehe bei Determinanten

Lineare Optimierung (LOP)

Grafische Lösung

Vorgehensweise

- Bestimmung der Variablen.
- Handelt es sich um ein Minimum- oder ein Maximum-Problem.
- Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem einzeichnen. Dabei Verwendung des vorgegebenen Koordinatensystems oder das zeichnen eines eigenen Koordinatensystems.
- Halbebenen für jede Nebenbedingung schraffieren.
- Die Schnittmenge aller Halbebenen einzeichnen. Nur in dieser Schnittmenge kann die gesuchte Lösung noch liegen.
- Die Zielfunktion in die Achsenabschnittsform bringen.
- Einen Z* wählen um eine Z-Bedingung einzeichnen zu können (Alle Z-Bedingungen sind immer parallel). Es sollten dabei nur ganze Zahlen als Ergebnis herauskommen
- Die Z*-Bedingung in Richtung Minimum oder Maximum verschieben, bis der letzte Punkt der Schnittmenge der Halbebenen erreicht ist.
- Den gefundenen Punkt ablesen und in die Zielfunktion einsetzen. Daraus ergibt sich dann das gesuchte Minimum oder Maximum.

Grundlegende Ableitungsregeln

Basisableitungen

	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$f(x) = n \cdot x^{n-1}$
	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
	$f(x) = a^x; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
Exponentialfunktionen	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = a^x; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
Wurzelfunktion	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Regeln für das Differenzieren

Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot g(x); a \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = a \cdot g'(x)$$

Summenregel:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \qquad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Produktregel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x)) \qquad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Kurvendiskussion

Definitionsmenge:

In der Definitionsmenge müssen alle Werte ausgeschlossen werden, die eine nicht erlaubte mathematische Berechnung nach sich ziehen würden.

Gebrochenrationale Funktion

Der Nenner muss ungleich Null sein.

Wurzel-Funktion

Der Term unter der Wurzel muss größer oder gleich Null sein.

Logarithmusfunktion

Das Argument des Logarithmus muss größer als Null sein.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 0$ mit $N_x(x|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = y$ mit $N_y(0|y)$

Symmetrieeigenschaften:

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$-f(-x) = f(x)$

Symmetrie zu einer beliebigen Achse

Symmetrisch zu einer Geraden mit der Gleichung x=u.

$f(u - x) = f(u + x)$ oder $f(x) = f(2u - x)$

Symmetrie zu einem beliebigen Punkt

Symmetrisch zum Punkt P(a|b).

$f(a + x) - b = -f(a - x) + b$ oder $f(x) = 2b - f(2a - x)$

Extremwerte:

$f'(x) = 0$

Mit

$f''(x_E) > 0 \;\; \rightarrow \;\; \text{relatives Minimum(Tiefpunkt)}$

$f''(x_E) < 0 \;\; \rightarrow \;\; \text{relatives Maximum (Hochpunkt)}$

$f''(x_E) = 0 \;\; \rightarrow \;\; \text{Vorzeichenwechsel muss durchgeführt werden.}$

Für $f''(x) = 0$ kann entweder ein Minimum, ein Maximum oder gar kein Extremwert vorliegen.

Vorzeichenwechsel

Man überprüft, ob die erste Ableitung an der Stelle x_E ihr Vorzeichen wechselt.

Dazu setzt man auch oft geringfügig abweichende Werte (wie z.B. ± 0,01) links und rechts der fragwürdigen Stelle x_E in f'(x) ein und vergleicht die Vorzeichen der beiden errechneten Werte.

Es gilt schließlich für alle x_E, bei denen $f''(x_E) = 0$:

Ändert sich das Vorzeichen von $f(x_E \pm h)$ bei x_E von negativ zu positiv, so liegt ein Minimum vor.

Ändert sich das Vorzeichen von $f(x_E \pm h)$ bei x_E von positiv zu negativ, so liegt ein Maximum vor.

Wendepunkte:

Man nennt einen Punkt auf dem Funktionsgraphen Wendepunkt, wenn an diesem Punkt die Krümmung vom Positiven ins Negative umschlägt, oder vom Negativen ins Positive. Extremwerte sind keine Wendepunkte, da dort die Krümmung sowohl vorher also auch nachher positiv (Minima), bzw. negativ (Maxima) ist.

$f''(x) = 0$ und

$f'''(x) \neq 0$

Terassenpunkt oder Sattelpunkt

Ist an einem so berechneten Wendepunkt ist zusätzlich noch die Bedingung

$f'(x_W) = 0$

also die Tangente an der Stelle x_W eine Waagrechte, so spricht man von einer speziellen Art von Wendepunkt, dem Terrassenpunkt.

Da sich an einem Terassenpunkt nach wie vor das Vorzeichen von f''(x) ändert, sind Terassenpunkte natürlich nach wie vor auch Wendepunkte.

Polypol

Im Marktmodell mit vollständiger Konkurrenz (Polypol) ist der Preis p konstant. Dadurch kann die

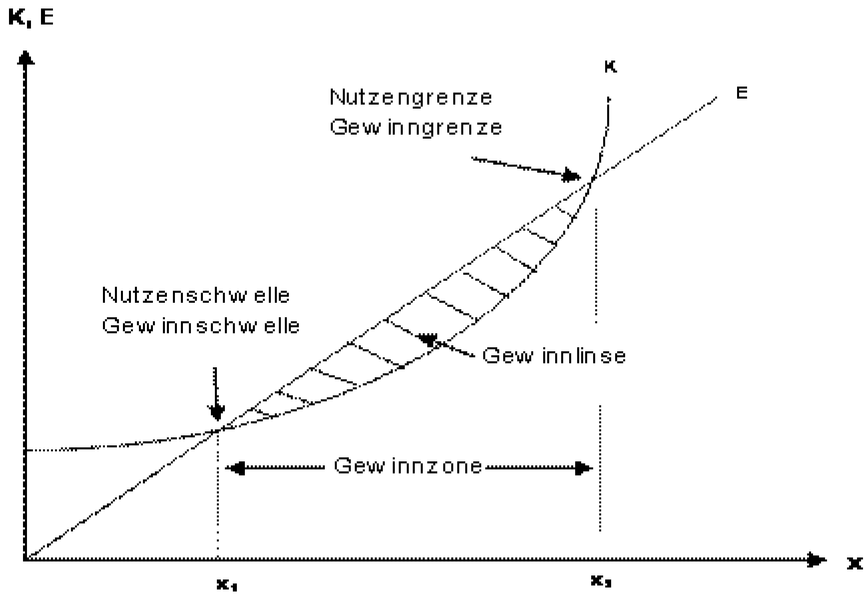
Erlösfunktion

$$E(x) = p \cdot x$$

Berechnet werden.

Die Gesamtkosten eines Betriebs beschreibt die Kostenfunktion K(x).

An der Grafik erkennt man, dass ein Betrieb einen Gewinn erzielt, wenn das Schaubild der Erlösfunktion oberhalb des Schaubilds der Kostenfunktion verläuft. Die Schnittstellen der beiden Schaubilder werden als Nutzenschwelle und Nutzengrenze, der Bereich dazwischen als Gewinnzone oder Gewinnlinse bezeichnet.



Rechenregeln für Ungleichungen

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

Additive Elementarumformungsregel:

$a + b < c \quad \Leftrightarrow a < c - b$

Multiplikative Elementarumformungsregel:

$a \cdot b < c \;\Leftrightarrow a < \frac{c}{b}\;$ (wenn $b > 0$)

$a \cdot b < c \;\Leftrightarrow a > \frac{c}{b}\;$ (wenn $b < 0$)

Diese Regeln gelten auch, wenn man < durch $\leq$ und > durch $\geq$ ersetzt bzw. < durch > und > durch <.

Äquivalente Umformungen für Ungleichungen:

Vertauschungsgesetz:

Die beiden Seiten einer Ungleichung dürfen vertauscht werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen zwischen den beiden Seiten umgedreht wird.

Additionsregel/Subtraktionsregel

Auf beiden Seiten der Ungleichungen darf ein beliebiger Term addiert oder subtrahiert werden.

Multiplikationsregel/Divisionsregel

Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen Term T (T>0) multipliziert oder dividiert werden.
Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen Term T (T<0) multipliziert oder dividiert werden, dabei muss aber das Relationszeichen gedreht werden.

Der Betrag

Definition des Betrages:

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $|x| = \begin{cases} x & \textit{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$ der Betrag von x.

Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}, a > 0$ gelten

Rechenregeln für den Betrag

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $y \neq 0$

$|a \pm b| \leq |a| + |b|$

$|a| - |b| \leq |a| - |b|$

Ermittlung der verschiedenen Asymptoten

Senkrechte Asymptoten oder Polstellen

Es treten Definitionslücken in der Funktion auf

Hebbare Polstellen

Wenn sich eine gebrochenrationale Funktion auf eine ganzrationale Funktion zurückführen lässt, dabei verschwindet der Nenner und damit natürlich auf die Definitionslücken.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = x_0$

Waagrechte Asymptoten

Sie entstehen nur bei Betrachtungen für unendlich große x-Werte. Formal bedeutet dieses, einen Grenzwert für eine Funktion im unendlichen zu finden.

Schiefe oder schräge Asymptoten

Sie besitzen eine Funktion in der Form einer Geraden als Grenzwert im unendlichen. Formal bedeutet dieses, einen Grenzwert für eine Funktion im unendlichen zu finden.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = mx + b$

Extremwertaufgaben

Bestimmung der Maximal- oder Minimalwerte

Übersetzen Sie den Aufgabentext in eine mathematische Fragestellung!

Finden Sie eine Formel für die zu optimierende Größe (die sog. Zielfunktion)!

Falls die Zielfunktion von mehreren Variablen abhängt, so suchen Sie Gleichungen (die sog. Nebenbedingungen), die die Anzahl der Variablen in der Zielfunktion reduzieren, bis möglichst nur noch eine übrig bleibt!

Fertigen Sie ggfs. eine Skizze mit den entsprechenden Größen an.

Legen Sie für diese Variable den Gültigkeitsbereich (den sog. zulässigen Bereich) fest!

Formulieren Sie die mathematische Fragestellung für die veränderte Zielfunktion unter Einbeziehung des Gültigkeitsbereichs!

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Zielfunktion im zulässigen Bereich!

Bestimmen Sie das absolute Extremum der Zielfunktion für die verbliebene Variable durch Vergleich der Zielfunktionswerte:

Die Kandidaten sind die relativen Extrema und die Randwerte des zulässigen Bereiches!

Berechnen Sie alle übrigen relevanten Größen!

Summenzeichen

Summe gleicher Summanden

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x + x + \cdots + x = n \cdot x$$

Multiplikation einer Summe mit einem konstanten Faktor

$$c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = c \cdot x + c \cdot x + \cdots + c \cdot x = c \cdot (x + +x + \cdots + x) = c \cdot n \cdot x$$

Aufspalten einer Summe

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_a + \cdots + x_{a+1} + \cdots + x_b + \cdots + x_{b+1} + \cdots + x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{a} x_i + \sum_{i=a+1}^{b} x_i + \sum_{i=b+1}^{n} x_i$$

Produktzeichen

Schreibweise

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Rechenregeln

$$\prod_{i=m}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(n-m+1)-\text{mal}} = a^{n-m+1}$$

$$\prod_{i=1}^{n} c^{a_i} = c^{a_1} \cdot c^{a_1} \cdot c^{a_1} \cdot \ldots \cdot c^{a_n}$$

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} (c \cdot b_i) = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} c = c^n$$

Grundlagen Matrizen

Addition von Matrizen

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{22} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \ldots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \ldots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \ldots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12}.x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22}.x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix

$$A_{m,n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to A^T_{m,n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(ABC \dots)^{-1} = \cdots C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Grundlagen Determinanten

Determinantenberechnung

Zweireihige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Berechnungsvorschrift

$$D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dreireihige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Berechnungsvorschrift

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Transponierte

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Vorzeichentabelle für Entwicklungsatz nach Laplace

	1	2	3	…
1	+	−	+	…
2	−	+	−	…
3	+	−	+	…
…	…	…	…	…

Cramersche Regel

$$\begin{array}{llll} a_1x_1 & +b_1x_2 & +c_1x_3 & = d_1 \\ a_2x_1 & +b_2x_2 & +c_2x_3 & = d_2 \\ a_3x_1 & +b_3x_2 & +c_3x_3 & = d_3 \end{array}$$ Lineares Gleichungssystem

Nennerdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Zählerdeterminaten

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Lösungen

$$x_1 = \frac{D_1}{D};\ \ x_2 = \frac{D_2}{D}; x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kathetensatz (oder Satz des Euklid)

$$a^2 = cp \ \text{ und } \ b^2 = cq$$

Höhensatz

$$h^2 = pq$$

Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Dreieck

$$A = \frac{gh}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad mit \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Quadrat

$$A = a^2 \qquad d = a\sqrt{2}$$

Parallelogramm

$$A = gh$$

Trapez

$$A = \frac{a+c}{2} h = mh$$

Kreis

$$u = 2r\pi \qquad A = r^2 \pi$$

Kreisbogen

$$b = \frac{\pi r \alpha}{180°} \quad Einheitskreis: \quad x = \frac{\pi \alpha}{180°} = arc\alpha$$

Kreissektor

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{r^2 x}{2} = \frac{r \cdot b}{2}$$

Kreissegment

$$A = \left(\frac{\pi \alpha}{180°} - \sin \alpha \right) \frac{r^2}{2} = (x - \sin \alpha) \frac{r^2}{2}$$

Stereometrie

	Volumen V	Oberfläche A	Mantelfläche M	
Würfel	$V = a^3$	$A = 6a^2$		
Quader	$V = abc$	$A = 2(ab + ac + bc)$		a,b,c Seiten
Prisma	$V = Gh$			G Grundfläche h Höhe
Pyramide	$V = \frac{Gh}{3}$			
Pyramidenstumpf	$V = \frac{h}{3}(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$			G_1 Grundfläche G_2 Deckfläche
Zylinder	$V = Gh = r^2 \pi h$		$M = 2\pi r h$	
Kegel	$V = \frac{Gh}{3} = \frac{r^2 \pi h}{3}$		$M = \pi r s$	s Mantellinie
Kegelstumpf	$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$		$M = \pi s (r_1 + r_2)$	
Kugel	$V = \frac{4\pi}{3} r^3$	$A = 4\pi r^2$		

Finanzmathematik

Prozentwert:

$$P = \frac{p}{100} \cdot G$$

Grundwert:

$$G = P \cdot \frac{100}{p}$$

Prozentsatz:

$$p = 100 \cdot \frac{P}{G}$$

Vermehrter Grundwert:

$$G^{+} = p^{+} \cdot G$$

Vermehrter Prozentwert:

$$p^{+} = 1 + \frac{p}{100}$$

Verminderter Grundwert:

$$G^{-} = p^{-} \cdot G$$

Verminderter Prozentwert:

$$p^{-} = 1 - \frac{p}{100}$$

Zinssatz

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{p}}{100}$$

Einfache Verzinsung (Endwert):

$$\mathrm{K_n} = \mathrm{K_0} \cdot (1 + \mathrm{n} \cdot \mathrm{i})$$

Einfache Verzinsung (Barwert):

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + \mathrm{n} \cdot \mathrm{i})}$$

Einfache unterjährige Verzinsung (Endwert):

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{n}{360} \cdot i\right)$$

Laufzeit bei einfacher Verzinsung:

$$n = \frac{K_n - K_0}{i \cdot K_0}$$

Zinssatz bei einfacher Verzinsung:

$$i = \frac{K_n - K_0}{n \cdot K_0}$$

Zinsbetrag bei unterjähriger einfacher Verzinsung:

$$Z = K_0 \cdot \left(1 + \frac{n}{360} \cdot i\right) - K_0$$

Aufzinsungsfaktor:

$$q = 1 + i$$

Endkapital (Zinseszins):

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Anfangskapital (Zinseszins):

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

Laufzeit (Zinseszins):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(q)} = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Anfangskapital (Zinseszins):

$$K_0 = \frac{K_n}{(q)^n} = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Zinsfaktor (Zinseszins):

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

Zinssatz (Zinseszins):

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$$

Relativer unterjähriger Zinssatz (Zinseszins):

$$i_m = \frac{i}{m}$$

Endkapital unterjährig (Zinseszins):

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot (1 + i_m)^n$$

Äquivalenten Zinssatz

$$q = \sqrt[n]{1 + \frac{p}{100}} \text{ oder } q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Vorschüssige Renten:

Endwert einer vorschüssigen Rente:

$$E_v = R \cdot q \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

Rate eines vorschüssigen Rente-Endwertes

$$R = E_v \cdot \left(\frac{q - 1}{q \cdot (q^n - 1)} \right)$$

Laufzeit eines vorschüssigen Renten-Endwertes

$$n = \frac{\ln\left(\left(\frac{E_v \cdot (q - 1)}{R \cdot q} \right) + 1 \right)}{\ln (q)}$$

Barwert einer vorschüssigen Rente

$$B_v = R \cdot \frac{1}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rate eines vorschüssigen Renten-Barwertes

$$R = B_v \cdot q^{n-1} \left(\frac{q - 1}{(q^n - 1)} \right)$$

Laufzeit eines vorschüssigen Renten-Barwertes

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R \cdot q}{R \cdot q - \left(B_v \cdot \frac{p}{100}\right)}\right)}{\ln(q)}$$

Nachschüssige Renten:

Endwert einer nachschüssigen Rente:

$$E_n = R \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

Rate eines nachschüssigen Rente-Endwertes

$$R = E_n \cdot \left(\frac{q - 1}{(q^n - 1)}\right)$$

Laufzeit eines nachschüssigen Rente-Endwertes

$$n = \frac{\ln\left(\left(\frac{E_n \cdot (q - 1)}{R}\right) + 1\right)}{\ln\,(q)}$$

Barwert einer nachschüssigen Rente

$$B_n = R \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rate eines nachschüssigen Renten-Barwertes

$$R = B_n \cdot q^n \left(\frac{q - 1}{(q^n - 1)}\right)$$

Laufzeit eines nachschüssigen Renten-Barwertes

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R - B_n \cdot \frac{p}{100}}\right)}{\ln(q)}$$