Berufsbegleitende Studiengänge

Aufgabensammlung Mathematik

Dipl. Mathematiker (FH) Roland Geiger
Rosenstr. 23
72631 Aichtal
cs.geiger@t-online.de
www.cs-geiger.de

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Regeln

Keine Handys, Smartphones, Tablets, Notebooks, MP3-Player, und sonstige elektronischen Geräte.

(Sollten auch nicht auf dem Tisch liegen)

Sollten Sie unbedingt kommunizieren müssen, so gehen Sie freiwillig aus dem Raum oder Sie bekommen von mir eine Pause zugeteilt, in der Sie in Ruhe Ihre Kommunikation durchführen können.

Internet

Lösungen zu den Aufgaben

Internet

http://www.cs-geiger.de/bmathematik.htm

Computerseminare, Mathematik und Statistik

Bodensee Campus Konstanz

Berufsbegleitende Studiengänge - Vorlesung Mathematik

Mathematik

Skripte

Ausmultiplizieren von Ausdrücken
Bruchrechnen
Potenzgesetze
Wurzelgesetze
Binomische Formeln
Logarithmen
Polynomgleichungen
Matrizen
Determinanten
Lineare Gleichungssysteme
Lineare Optimierung

Formelsammlung

Formelsammlung für Mathematik

Aufgabensammlung

Übungsaufgaben Lösung

Tutorium

Aufgaben für das Tutorium Lösung

Klausuren

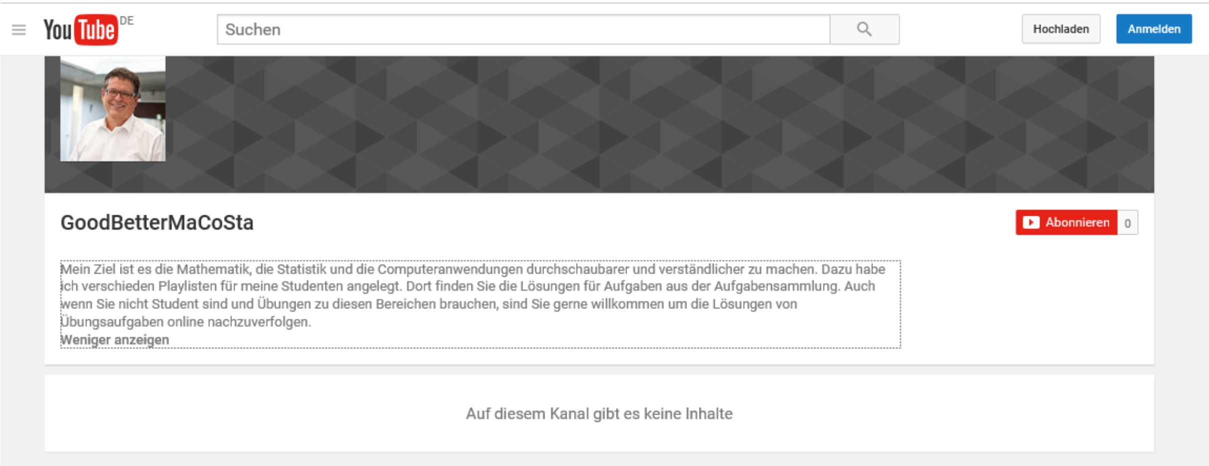
Siehe Aufgabensammlung

Roland Geiger - Rosenstr.23 - 72631 Aichtal
Fon 07127-960750 - Fax 07127-960751 - cs.geiger@t-online.de

QR-Code

YouTube

http://www.youtube.com/channel/UCro4ldWf20euH8u1SXU3l-g



Vorwissen für die Vorlesung

Ausmultiplizieren von Ausdrücken

Aufgabe 1:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$\left(\frac{2}{3}x - 2\right) \cdot (x + 3)$

Lösung:

$\left(\frac{2}{3}x - 2\right) \cdot (x + 3) = \frac{2}{3}x^2 + 2x - 2x - 6 = \frac{2}{3}x^2 - 6$

Aufgabe 2:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$5a(8a - 11b) - b(9a - 5b)$

Lösung:

$5a(8a - 11b) - b(9a - 5b) = 40a^2 - 55ab - 9ab + 5b^2 = 40a^2 - 64ab + 5b^2$

Aufgabe 3:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$(-5a) \cdot (10a - 12x) - (3a - 7ax)$

Lösung:

$(-5a) \cdot (10a - 12x) - (3a - 7ax) = -50a^2 + 60ax - 3a + 7ax = -50a^2 + 67ax - 3a$

Aufgabe 4:

Klammern Sie so viel wie möglich aus.

$45pq + 27p^2q^2$

Lösung:

$45pq + 27p^2q^2 = 9pq(5 + 3pq)$

Aufgabe 5:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$(2 - x) \cdot (3x - 4) - (x - 1) \cdot (2x + 3) - 5x(2 - x)$

Lösung:

$(2-x)\cdot(3x-4)-(x-1)\cdot(2x+3)-5x(2-x)$

$=6x-8-3x^2+4x-(2x^2+3x-2x-3)-10x+5x^2$

$=10x-8-3x^2-(2x^2+x-3)-10x+5x^2$

$=10x-8-3x^2-2x^2-x+3-10x+5x^2$

$=-x-5$

Bruchrechnen

Aufgabe 6:

Berechnen Sie folgenden Bruch in Dezimaldarstellung um.

$$7\frac{4}{5}$$

Lösung:

$$7\frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{35}{5} + \frac{4}{5} = \frac{39}{5}$$

Aufgabe 7:

Vergleichen Sie die folgenden Brüche ihrer Größe nach und schreiben es als a<b, a>b oder a=b.

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{5}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{10} > \frac{4}{10}$$

Aufgabe 8:

Addieren Sie folgende Brüche und kürzen Sie wenn es geht.

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{8}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{8 + 10}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Aufgabe 9:

Subtrahieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist. Schreiben Sie das Ergebnis als Bruch und als gemischten Bruch.

$$7\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}$$

Lösung:

$$7\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} = \frac{15}{2} - \frac{13}{4} = \frac{30}{4} - \frac{13}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

Aufgabe 10:

Multiplizieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist.

$$\left(-\frac{5}{9}\right) \cdot 3$$

Lösung:

$$\left(-\frac{5}{9}\right) \cdot 3 = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

Aufgabe 11:

Dividieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist.

$$3\frac{1}{4} : \frac{1}{4}$$

Lösung:

$$3\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = \frac{13}{4} : \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \cdot \frac{4}{1} = 13$$

Aufgabe 12:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{4}{21} : \frac{1}{7} - \frac{5}{12}$$

Lösung:

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{4}{21} : \frac{1}{7} - \frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{21} \cdot \frac{7}{1} - \frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{5}{12}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{9+8-5}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Aufgabe 13:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und Kürzen Sie möglich.

$$\left(2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-1\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

Lösung:

$$\left(2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-1\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{3}{3}\right)=-\frac{7}{3}$$

Aufgabe 14:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$1\frac{1}{3}:1\frac{13}{15}\cdot\left(6\frac{2}{3}-5\frac{4}{15}\right)$$

Lösung:

$$1\frac{1}{3}:1\frac{13}{15}\cdot\left(6\frac{2}{3}-5\frac{4}{15}\right)=\frac{4}{3}:\frac{28}{15}\cdot\left(\frac{20}{3}-\frac{79}{15}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{28}\cdot\left(\frac{100-79}{15}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{21}{12}\right)=\frac{15}{12}=1$$

Aufgabe 15:

Berechnen Sie folgenden Doppelbruch und kürzen Sie möglich.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$$

Aufgabe 16:

Addieren Sie folgende Brüche und kürzen Sie wenn es geht.

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{8}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{8+10}{16}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$$

Aufgabe 17:

Subtrahieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist. Schreiben Sie das Ergebnis als Bruch und als gemischten Bruch.

$$4\frac{1}{9} - 3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3}$$

Lösung:

$$4\frac{1}{9} - 3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3} = \frac{37}{9} - \frac{23}{6} - \frac{5}{3} = \frac{74}{18} - \frac{69}{18} - \frac{30}{18} = -\frac{25}{18} = -1\frac{7}{18}$$

Aufgabe 18:

Multiplizieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist.

$$\frac{(-7)}{8} \cdot \frac{(-8)}{7}$$

Lösung:

$$\frac{(-7)}{8} \cdot \frac{(-8)}{7} = 1$$

Aufgabe 19:

Dividieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist.

$$4\frac{5}{6} : 1\frac{2}{9}$$

Lösung:

$$4\frac{5}{6} : 1\frac{2}{9} = \frac{29}{6} : \frac{11}{9} = \frac{29}{6} \cdot \frac{9}{11} = \frac{29}{2} \cdot \frac{3}{11} = \frac{87}{22}$$

Aufgabe 20:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$\frac{5}{8} : \frac{1}{2} + 1\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4} - \frac{9}{14} : \frac{3}{7}$$

Lösung:

$$\frac{5}{8} : \frac{1}{2} + 1\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4} - \frac{9}{14} : \frac{3}{7} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{1} + \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{4} - \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{3} = \frac{10}{8} + \frac{84}{28} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{70 + 168 - 84}{56} = \frac{154}{56} = \frac{77}{28} = \frac{11}{4}$$

Aufgabe 21:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und Kürzen Sie möglich.

$$\left[6{,}1 + \left[\frac{1}{10} - \left(1{,}2 : \frac{1}{5} + 0{,}1\right)\right]\right] \cdot 10$$

Lösung:

$$\left[6{,}1+\left[\frac{1}{10}-\left(1{,}2:\frac{1}{5}+0{,}1\right)\right]\right]\cdot 10=\left[6{,}1+\left[\frac{1}{10}-\left(\frac{12}{10}\cdot\frac{5}{1}+\frac{1}{10}\right)\right]\right]\cdot 10$$

$$=\left[6{,}1+\left[\frac{1}{10}-\left(\frac{61}{10}\right)\right]\right]\cdot 10=\left[\frac{61}{10}-\frac{60}{10}\right]\cdot 10=\frac{1}{10}\cdot 10=1$$

Aufgabe 22:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$\frac{19}{21}:\left(5\frac{3}{7}+1\frac{5}{14}\right)+\frac{1}{5}\cdot 4\frac{1}{3}$$

Lösung:

$$\frac{19}{21}:\left(5\frac{3}{7}+1\frac{5}{14}\right)+\frac{1}{5}\cdot 4\frac{1}{3}=\frac{19}{21}:\left(\frac{38}{7}+\frac{19}{14}\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{3}=\frac{19}{21}:\left(\frac{76+19}{14}\right)+\frac{13}{15}$$

$$=\frac{19}{21}:\frac{95}{14}+\frac{13}{15}=\frac{19}{21}\cdot\frac{14}{95}+\frac{13}{15}=\frac{2}{15}+\frac{13}{15}=\frac{15}{15}=1$$

Aufgabe 23:

Berechnen Sie folgenden Doppelbruch und kürzen Sie möglich.

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{1}=\frac{5}{2}$$

Aufgabe 24:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$\left(2\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}\right):\left(1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}\right)$$

Lösung:

$$\left(2\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}\right):\left(1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{8}{3}-\frac{7}{6}\right):\left(\frac{7}{4}+\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{16-7}{6}\right):\left(\frac{14+20}{8}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{6}\right):\left(\frac{34}{8}\right)=\left(\frac{9}{6}\right)\cdot\left(\frac{8}{34}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{17}\right)=\frac{6}{17}$$

Aufgabe 25:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$7\frac{1}{7}-\frac{3}{4}:\left(2\cdot\frac{5}{8}-\frac{13}{16}\right)$$

Lösung:

$$7\frac{1}{7}-\frac{3}{4}:\left(2\cdot\frac{5}{8}-\frac{13}{16}\right)=\frac{50}{7}-\frac{3}{4}:\left(\frac{10}{8}-\frac{13}{16}\right)=\frac{50}{7}-\frac{3}{4}:\left(\frac{20}{16}-\frac{13}{16}\right)=\frac{50}{7}-\frac{3}{4}:\left(\frac{7}{16}\right)$$

$$=\frac{50}{7}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{16}{7}\right)=\frac{50}{7}-\frac{12}{7}=\frac{38}{7}$$

Aufgabe 26:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$\left[2{,}75 - 0{,}25 : \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{8}\right)\right] \cdot 1{,}6 + 0{,}4$$

Lösung:

$$\left[2{,}75 - 0{,}25 : \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{8}\right)\right] \cdot 1{,}6 + 0{,}4 = \left[\frac{11}{4} - \frac{1}{4} : \left(\frac{14 - 15}{24}\right)\right] \cdot \frac{16}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= \left[\frac{11}{4} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{24}\right)\right] \cdot \frac{16}{10} + \frac{4}{10} = \left[\frac{11}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{1}\right] \cdot \frac{16}{10} + \frac{4}{10} = \frac{35}{4} \cdot \frac{16}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= \frac{28}{2} + \frac{4}{10} = \frac{140 + 4}{10} = \frac{144}{10} = \frac{72}{5}$$

Aufgabe 27:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{7}{12} - 3\frac{5}{9} \cdot 3\frac{3}{8}$$

Lösung:

$$4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{7}{12} - 3\frac{5}{9} \cdot 3\frac{3}{8} = \frac{9}{2} \cdot \frac{43}{12} - \frac{32}{9} \cdot \frac{27}{8} = \frac{129}{8} - \frac{36}{3} = \frac{129}{8} - 12 = \frac{129 - 96}{8}$$

Potenzgesetze

Aufgabe 28:

Berechnen Sie folgenden Summenterm.

$a^2 + b^3 + c^3 + b^2 + c^2 + b^2$

Lösung:

$a^2 + b^3 + c^3 + b^2 + c^3 + b^2 = a^2 + 2b^2 + b^3 + c^2 + c^3$

$= a^2 + b^2 \cdot (2 + b) + c^2 \cdot (1 + c)$

Aufgabe 29:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{15x^5y^8}{21a^7b^5} : \frac{2x^3y^2}{35a^{10}b^6}$$

Lösung:

$$\frac{15x^5y^8}{21a^7b^5} : \frac{2x^3y^2}{35a^{10}b^6} = \frac{15x^5y^8}{21a^7b^5} \cdot \frac{35a^{10}b^6}{2x^3y^2} = \frac{15x^5y^8 \cdot 35a^{10}b^6}{21a^7b^5 \cdot 2x^3y^2} = \frac{25}{2} x^{5-3}y^{8-2}a^{10-7}b^{6-5}$$

$$= \frac{25}{2} x^2y^6a^3b$$

Aufgabe 30:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{z^n \cdot z^{m-n}}{z^m}$$

Lösung:

$$\frac{z^n \cdot z^{m-n}}{z^m} = \frac{z^{n+m-n}}{z^m} = \frac{z^m}{z^m} = 1$$

Aufgabe 31:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{2x^3y^2}{3a^2 \cdot 2b^3}\right)^2 : \left(\frac{x^2 \cdot 2y}{2a^2 \cdot 3b^2}\right)^3$$

Lösung:

$$\left(\frac{2x^3y^2}{3a^2 \cdot 2b^3}\right)^2 : \left(\frac{x^2 \cdot 2y}{2a^2 \cdot 3b^2}\right)^3 = \left(\frac{2x^3y^2}{3a^2 \cdot 2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2a^2 \cdot 3b^2}{x^2 \cdot 2y}\right)^3$$

$$= \left(\frac{4x^6y^4}{9a^4 \cdot 4b^6}\right) \cdot \left(\frac{8a^6 \cdot 27b^6}{x^6 \cdot 8y^3}\right) = 3a^{6-4}b^{6-6}x^{6-6}y^{4-3} = 3a^2y$$

Aufgabe 32:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n : \left(\frac{21a^2b^2c^4}{16x^6y^7z^8}\right)^n$$

Lösung:

$$\left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n : \left(\frac{21a^2b^2c^4}{16x^6y^7z^8}\right)^n = \left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n \cdot \left(\frac{16x^6y^7z^8}{21a^2b^2c^4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{7a^2b^3c^4 \cdot 16x^6y^7z^8}{8x^5y^7z^7 \cdot 21a^2b^2c^4}\right)^n = \left(\frac{2}{3}a^{2-2}b^{3-2}c^{4-4}x^{6-5}y^{7-7}z^{8-7}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2}{3}b \cdot x \cdot z\right)^n$$

Aufgabe 33:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{22x^5y^6 - 121x^4y^5 + 77x^6y^7}{11x^3y^4}$$

Lösung:

$$\frac{22x^5y^6 - 121x^4y^5 + 77x^6y^7}{11x^3y^4} = \frac{11x^4y^5 \cdot (2xy - 11 + 7x^2y^2)}{11x^3y^4}$$

$$= x \cdot y \cdot (2xy - 11 + 7x^2y^2)$$

Aufgabe 34:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$(r^6 - r^5) \cdot r^{n-4}$

Lösung:

$(r^6 - r^5) \cdot r^{n-4} = r^{6+n-4} - r^{5-n-4} = r^{n+2} - r^{1-n}$

Aufgabe 35:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{15x^9 \cdot 225y^9}{5x^6 \cdot 25by^6}$$

Lösung:

$$\frac{15x^9 \cdot 225y^9}{5x^6 \cdot 25by^6} = \frac{27x^{9-6}y^{9-6}}{b} = \frac{27x^3y^3}{b}$$

Aufgabe 36:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{y^{3n+1} - 2y^{3n} + y^{3n-1}}{y^{2n+1} - y^{2n-1}}$$

Lösung:

$$\frac{y^{3n+1} - 2y^{3n} + y^{3n-1}}{y^{2n+1} - y^{2n-1}} = \frac{y^{3n}(y^1 - 2 + y^{-1})}{y^{2n}(y^1 - y^{-1})} = \frac{y^n \cdot (y^1 - 2 + y^{-1})}{(y^1 - y^{-1})}$$

Aufgabe 37:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{x^2 - 4}{x^{2n+1}} - \frac{x - 1}{x^{2n-1}} - \frac{2x^5}{x^{2n+4}}$$

Lösung:

$$\frac{x^2 - 4}{x^{2n+1}} - \frac{x - 1}{x^{2n-1}} - \frac{2x^5}{x^{2n+4}} = \frac{(x^2 - 4) \cdot x^3 - x^5(x - 1) - 2x^5}{x^{2n+4}}$$

$$= \frac{x^5 - 4x^3 - x^6 + x^5 - 2x^5}{x^{2n+4}} = \frac{-4x^3 - x^6}{x^{2n+4}} = \frac{x^3(-4 - x^3)}{x^{2n+4}} = \frac{-4 - x^3}{x^{2n+1}} = -\frac{x^3 + 4}{x^{2n+1}}$$

$$= \frac{33}{8}$$

Aufgabe 38:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{8a^4y^2}{27a^5b}\right)^2 \cdot \left(\frac{9a^2x^{-2}}{4yb}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{x^3b^3}\right)^{-2}$$

Lösung:

$$\left(\frac{8a^4y^2}{27a^5b}\right)^2 \cdot \left(\frac{9a^2x^{-2}}{4yb}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{x^3b^3}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{8a^4y^2}{27a^5b}\right)^2 \cdot \left(\frac{9a^2x^{-2}}{4yb}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^3b^3}{a^{-2}}\right)^2$$

$$= \frac{8^2 \cdot a^8y^4 \cdot 9^3 \cdot a^6x^{-6} \cdot x^6b^6}{27^2a^{10}b^2 \cdot 4^3y^3b^3 \cdot a^{-4}} = \frac{2^6 \cdot a^8y^4 \cdot 3^6 \cdot a^6x^{-6} \cdot x^6b^6}{3^6a^{10}b^2 \cdot 2^6y^3b^3 \cdot a^{-4}} = \frac{a^8y^4a^6b^6}{a^{10}b^2y^3b^3 \cdot a^{-4}}$$

$$= a^{8+6-10+4}b^{6-2-3}y^{4-3} = a^8by$$

Aufgabe 39:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{12c^5 \cdot 15d^7}{36d^4 \cdot 5c^5}$$

Lösung:

$$\frac{12c^5 \cdot 15d^7}{36d^4 \cdot 5c^5} = c^{5-5}d^{7-4} = d^3$$

Wurzelgesetze

Aufgabe 40:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt[3]{24}$

Lösung:

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$

Aufgabe 41:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt{9a^3b^2}$

Lösung:

$\sqrt{9a^3b^2} = \sqrt{9a^2 \cdot a \cdot b^2} = 3ab \cdot \sqrt{a}$

Aufgabe 42:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$2a\sqrt{a} + 5\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} + 2\sqrt{a^3} - 2\sqrt{ab}$

Lösung:

$2a\sqrt{a} + 5\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} + 2\sqrt{a^3} - 2\sqrt{ab}$

$= 2a\sqrt{a} + 5\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} - 2\sqrt{ab}$

$= 4a\sqrt{a} + 3\sqrt{ab} - 3\sqrt{a}$

Aufgabe 43:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$3ab \cdot \sqrt{6bc} \cdot 4cd \cdot \sqrt{8de}$

Lösung:

$3ab \cdot \sqrt{6bc} \cdot 4cd \cdot \sqrt{8de}$

$= 12abcd \cdot \sqrt{48bcde}$

$= 12abcd \cdot 2\sqrt{12bcde}$

$= 24abcd \cdot \sqrt{12bcde} = 48abcd \cdot \sqrt{3bcde}$

Aufgabe 44:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt{45ax} : \sqrt{2a}$

Lösung:

$\sqrt{45ax} : \sqrt{2a} = \frac{\sqrt{45ax}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{45ax}{2a}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 9x}{2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{5x}{2}}$

Aufgabe 45:

Fassen Sie folgenden Ausdruck durch teilweises Wurzelziehen zusammen.

$\sqrt{63} + \sqrt{112}$

Lösung:

$\sqrt{63} + \sqrt{112} = \sqrt{9 \cdot 7} + \sqrt{16 \cdot 7} = 3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

Aufgabe 46:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt{3^4} + \left(-2\sqrt{3}\right)^4 + \left(\sqrt{3^2}\right)^3 - 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^3}$

Lösung:

$= 3^2 + 16 \cdot 3^2 + 3^3 - 5 \cdot 3^2 = 9 + 16 \cdot 9 + 27 - 45 = 135$

Aufgabe 47:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$

Lösung:

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Aufgabe 48:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und vereinfachen sie ihn. Ziehen Sie, falls möglich, teilweise die Wurzel! Bestimmen Sie den Wurzelwert, wenn er eine Rationale Zahl ist!

$\left(2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}\right)$

Lösung:

$\left(2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}\right)$

$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

$24 - 8 \cdot \sqrt{18} + 6 \cdot \sqrt{18} - 36 = -12 - 2 \cdot \sqrt{18}$

Aufgabe 49:

Fassen Sie folgenden Ausdruck durch teilweises Wurzelziehen zusammen.

$\sqrt{45} + \sqrt{20}$

Lösung:

$\sqrt{45} + \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 9} + \sqrt{5 \cdot 4} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Aufgabe 50:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$

Lösung:

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$

Aufgabe 51:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt{x^5 \cdot y^7}$

Lösung:

$\sqrt{x^5 \cdot y^7} = \sqrt{x^4 \cdot x \cdot y^6 \cdot y} = x^2y^3 \cdot \sqrt{xy}$

Aufgabe 52:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3\sqrt{5^2} - \left(4\sqrt{5}\right)^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3}$

Lösung:

$\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3\sqrt{5^2} - \left(4\sqrt{5}\right)^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3}$

$= 5\sqrt{5} + 3 \cdot 5 - 16 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 5\sqrt{5} - 40$

Aufgabe 53:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\left(\sqrt[4]{a^8b^0c^4}\right)$

Lösung:

$a^{\frac{8}{4}} \cdot b^{\frac{9}{4}} \cdot c^{\frac{4}{4}} = a^2c$

Aufgabe 54:

Vereinfachen sie folgenden Ausdruck

$12b^2c \cdot \sqrt{\frac{5a}{24b^2c}} \cdot \sqrt{30ac}$

Lösung:

$$12b^2c \cdot \sqrt{\frac{5a}{24b^2c}} \cdot \sqrt{30ac} = 12b^2c \cdot \sqrt{\frac{5a}{6 \cdot 4b^2c}} \cdot \sqrt{30ac} = \frac{12b^2c}{2b} \cdot \sqrt{\frac{5a}{6c}} \cdot \sqrt{30ac}$$

$$= 6bc \cdot \sqrt{\frac{5a}{6c} \cdot 30ac} = 6bc \cdot \sqrt{\frac{150a^2c}{6c}} = 6bc \cdot \sqrt{25a^2} = 30abc$$

Binomische Formeln

Aufgabe 55:

Bilden Sie aus dem folgenden Ausdruck eine Binomische Formel.

$16 - 8t + t^2$

Lösung:

$16 - 8t + t^2 = (4 - t)^2$

Aufgabe 56:

Berechnen Sie nach der dritten binomischen Formel.

$(x + 3)(x - 3)$

Lösung:

$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

Aufgabe 57:

Bilden Sie aus dem folgenden Ausdruck eine Binomische Formel.

$x^2 - 25$

Lösung:

$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Aufgabe 58:

Füllen Sie die Lücken aus.

$(d + \_\_)^2 = d^2 + \_\_\_ + f^2$

Lösung:

$(d + \ f\ )^2 = d^2 + \ 2df\ + f^2$

Aufgabe 59:

Füllen Sie die Lücken aus.

$(\_\_ - 2)^2 = d^2 - 4d + \_\_$

Lösung:

$(d - 2)^2 = d^2 - 4d + 4$

Logarithmen

Aufgabe 60:

Formen Sie folgende Gleichung in Logarithmusschreibweise um.

$2^x = 16$

Lösung:

$2^x = 16 \quad \rightarrow \quad \log_2 16 = x$

Aufgabe 61:

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner.

$\log_4 8$

Lösung:

$\log_4 8 = \frac{\ln(8)}{\ln(4)} = 1{,}5$

Aufgabe 62:

Fassen Sie folgenden Ausdruck zusammen.

$\log_{10}(2) + \log_{10}(13)$

Lösung:

$\log_{10}(2) + \log_{10}(13) = \log_{10}(2 \cdot 13) = \log_{10}(26)$

Aufgabe 63:

Schreiben Sie folgenden Term als einzelne Terme.

$\log_3(tx)$

Lösung:

$\log_3(tx) = \log_3(t) + \log_3(x)$

Aufgabe 64:

Formen Sie den folgenden Ausdruck mit Logarithmengesetzen um.

$\log_{11}(8)$

Lösung:

$\log_{11}(8) = \log_{11}(2^3) = 3 \cdot \log_{11}(2)$

Aufgabe 65:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\log_3(x + y) - \log_3 x$

Lösung:

$\log_3(x + y) - \log_3 x$

$\log_3\left(\frac{x + y}{x}\right) = \log_3\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

Aufgabe 66:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\log_4(x^2) + \log_4\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Lösung:

$\log_4(x^2) + \log_4\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2 \cdot \log_4(x) + \log_4(x^{-2})$

$= 2 \cdot \log_4(x) - 2 \cdot \log_4(x)$

$= 0$

Aufgabe 67:

Formen Sie den folgenden Ausdruck mit Logarithmen-Gesetzen um.

$\log_{11}(8)$

Lösung:

$\log_{11}(8) = \log_{11}(2^3) = 3 \cdot \log_{11}(2)$

Aufgabe 68:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\log_2(a) - \log_2(b)$

Lösung:

$\log_2(a) - \log_2(b) = \log_2\left(\frac{a}{b}\right)$

Aufgabe 69:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\frac{1}{2}\log_{10}(4) + 3 \cdot \log_{10}(6) - 2 \cdot \log_{10}(3 \cdot 2^2)$

Lösung:

$$\frac{1}{2}\log_{10}(4) + 3 \cdot \log_{10}(6) - 2 \cdot \log_{10}(3 \cdot 2^2)$$

$$= \frac{1}{2}\log_{10}(2^2) + 3 \cdot \log_{10}(2 \cdot 3) - 2 \cdot \log_{10}(3) + 2 \cdot \log_{10}(2^2)$$

$$= \frac{2}{2}\log_{10}(2) + 3 \cdot \log_{10}(2) + 3 \cdot \log_{10}(3) - 2 \cdot \log_{10}(3) + 4 \cdot \log_{10}(2)$$

$$= \log_{10}(3)$$

Aufgabe 70:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$$2 \cdot \log_5(x) + \frac{1}{2}\log_5(x^4) - \log_5(x^2)$$

Lösung:

$$2 \cdot \log_5(x) + \frac{1}{2}\log_5(x^4) - \log_5(x^2)$$

$$= 2 \cdot \log_5(x) + \frac{4}{2}\log_5(x) - 2 \cdot \log_5(x)$$

$$= 2 \cdot \log_5(x)$$

Aufgabe 71:

Wandeln Sie den folgenden Ausdruck mit Hilfe von Logarithmen-Gesetze in einzelne Logarithmen um.

$$\log_a\left(\frac{x^2 \cdot 2y}{\sqrt{z}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Lösung:

$$\log_a\left(\frac{x^2 \cdot 2y}{\sqrt{z}}\right)^{\frac{1}{3}} = \log_a\left(\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{6}}}\right) = \log_a\left(x^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) - \log_a\left(z^{\frac{1}{6}}\right)$$

$$= \log_a\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + \log_a\left(2^{\frac{1}{3}}\right) + \log_a\left(y^{\frac{1}{3}}\right) - \log_a\left(z^{\frac{1}{6}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\log_a(x) + \frac{1}{3}\log_a(2) + \frac{1}{3}\log_a(y) - \frac{1}{6}\log_a(z)$$

Polynomgleichungen

Aufgabe 72:

Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge, im Anschluss lösen Sie diese Gleichung und geben die Lösungsmenge an.

$3(2x + 5) - 4 = 18 - 2(6 - 3x)$

Lösung:

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$3(2x + 5) - 4 = 18 - 2(6 - 3x)$

$6x + 15 - 4 = 18 - 12 + 6x$

$6x + 11 = 6x + 6$

$11 = 6$

Hier haben wir einen Widerspruch, deshalb ist die Lösungsmenge leer.

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

Aufgabe 73:

Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge, im Anschluss lösen Sie diese Gleichung und geben die Lösungsmenge an.

$\frac{3}{8}x - 5 = 2 - \left(3 + \frac{5}{8}x\right)$

Lösung:

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\frac{3}{8}x - 5 = 2 - \left(3 + \frac{5}{8}x\right)$

$\frac{3}{8}x - 5 = 2 - 3 - \frac{5}{8}x \quad | + \frac{5}{8}x$

$x - 5 = -1 \quad | + 5$

$x = 4$

$\mathbb{L} = \{4\}$

Aufgabe 74:

Bestimmen Sie Lösung der folgenden Gleichung.

$x^2 + 2x + 1 = 0$

Lösung:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\mathbb{L} = \{-1\}$

Aufgabe 75:

Bestimmen Sie Lösung der folgenden Gleichung.

$x^2 + 4x = 0$

Lösung:

$x^2 + 4x = 0$

$x(x + 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -4$

$\mathbb{L} = \{-4; 0\}$

Aufgabe 76:

Bestimmen Sie für folgende Gleichung die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1}$$

Lösung:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

Hauptnenner: $(x + 1)(x - 1)$

$$\frac{(x+1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)} - \frac{(x-1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x^2}{(x^2-1)} \quad \cdot \mathrm{HN}$$

$(x + 1) \cdot (x + 1) - (x - 1) \cdot (x - 1) = x^2$

$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = x^2 \quad | - x^2$

$-x^2 + 4x = 0$

$x(-x + 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

$\mathbb{L} = \{4; 0\}$

Aufgabe 77:

Bestimmen Sie für folgende Gleichung die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2+4x+4}$$

Lösung:

$$\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{x+2}{x^2+4x+4}$$

$$\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$$

$$\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+2)}{(x+2)^2}$$

Hauptnenner: $(x+2)^2(x-2)$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2}\quad|\cdot\mathrm{HN}$$

$$(x-2)(x+2)=(x+2)(x-2)$$

$$0=0$$

$$\mathbb{L}=\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$$

Aufgabe 78:

Bestimmen Sie für folgende Gleichung die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

$$\frac{2}{x-2}-2=\frac{1}{4-2x}$$

Lösung:

$$\frac{2}{x-2}-2=\frac{1}{4-2x}$$

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$

$$\frac{2}{x-2}-2=\frac{1}{-2(x-2)}$$

Hauptnenner: $-2(x-2)$

$$\frac{2\cdot(-2)}{-2(x-2)}-\frac{2\cdot(-2)\cdot(x-2)}{-2(x-2)}=\frac{1}{-2(x-2)}\quad|\cdot HN$$

$-4+4x-8=1$

$4x-12=1\quad|+12$

$4x=13\quad|:4$

$$x=\frac{13}{4}$$

$$\mathbb{L}=\left\{\frac{13}{4}\right\}$$

Aufgabe 79:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$3x^3-10x^2+7x-12=0$

Lösung:

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$x=3\rightarrow 3\cdot 3^3-10\cdot 3^2+7\cdot 3-12=0\rightarrow \text{wahre Aussage}$

$$\begin{array}{l}
(3x^3-10x^2+7x-12):(x-3)=3x^2-x+4\\
\underline{-(3x^3-9x^2)}\\
\qquad -x^2\ +7x\\
\underline{\qquad -(-x^2\ +3x)}\\
\qquad\qquad 4x-13\\
\underline{\qquad\qquad -(4x-12)}\\
\underline{\qquad\qquad\quad -}
\end{array}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

Keine weiteren Lösungen mehr: $x_1 = 3$

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 80:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

Lösung:

$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 12 = 0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 2x^2 - 11x + 12) : (x - 1) = x^2 - x - 12 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad\quad -x^2 - 11x \\
\underline{\qquad -(-x^2 + x)} \\
\qquad\qquad\quad -12x + 12 \\
\underline{\qquad\qquad\quad -(-12x + 12)} \\
\underline{\qquad\qquad\qquad\quad =}
\end{array}
$$

$x^2 - x - 12 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

Weiteren Lösungen:

$$x_2 = \frac{1 + 7}{2} = 4$$

$$x_3 = \frac{1 - 7}{2} = -3$$

$\mathbb{L} = \{-3; 1; 4\}$

Aufgabe 81:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$2x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

Lösung:

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 = 0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$$
\begin{array}{l}
\quad (2x^3 - 6x^2 + 8) : (x - 2) = 2x^2 - 2x - 4 \\
\underline{-(2x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\qquad -2x^2 \qquad\quad + 8 \\
\underline{\qquad\quad -(-2x^2 + 4\,x)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -4x \ + 8 \\
\underline{\qquad\qquad\quad -(-4x \ + 8)} \\
\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -}
\end{array}
$$

$2x^2 - 2x - 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 6}{4}$$

Weiteren Lösungen:

$$x_2 = \frac{2 + 6}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{2 - 6}{4} = -1$$

$\mathbb{L} = \{-1; 2\}$

Aufgabe 82:

Bestimmen Sie für folgende Gleichung die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

$2x^2 + 16 = 12x$

Lösung:

$2x^2 + 16 = 12x \quad | - 12x$

$2x^2 - 12x + 16 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{12 + 4}{4} = 4$$

$$x_2 = \frac{12 - 4}{4} = 2$$

$\mathbb{L} = \{2; 4\}$

Aufgabe 83:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$$\frac{30}{x} - \frac{16}{x+1} = \frac{13}{x-2}$$

Lösung:

$$\frac{30}{x} - \frac{16}{x+1} = \frac{13}{x-2}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0; 2\}$

Hauptnenner: $x(x-2)(x+1)$

$$\frac{30 \cdot (x-2)(x+1)}{x(x-2)(x+1)} - \frac{16 \cdot x \cdot (x-2)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{13 \cdot x \cdot (x+1)}{x(x-2)(x+1)} \quad | \cdot \mathrm{HN}$$

$$30 \cdot (x-2)(x+1) - 16 \cdot x \cdot (x-2) = 13 \cdot x \cdot (x+1)$$

$$30(x^2 + x - 2x - 2) - 16x^2 + 32x = 13x^2 + 13x$$

$$30(x^2 - x - 2) - 16x^2 + 32x = 13x^2 + 13x$$

$$30x^2 - 30x - 60 - 16x^2 + 32x = 13x^2 + 13x$$

$$14x^2 + 2x - 60 = 13x^2 + 13x \quad | - 13x^2$$

$$x^2 + 2x - 60 = 13x \quad | - 13x$$

$$x^2 - 11x - 60 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 19}{2}$$

$$x_1 = \frac{11+19}{2} = 15$$

$$x_2 = \frac{11-19}{2} = -4$$

$\mathbb{L} = \{-4; 15\}$

Aufgabe 84:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$$\frac{4}{x} - \frac{x}{4} = \frac{8}{x} - \frac{3x}{4}$$

Lösung:

$$\frac{4}{x} - \frac{x}{4} = \frac{8}{x} - \frac{3x}{4}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Hauptnenner: $4x$

$$\frac{4 \cdot 4}{4x} - \frac{x \cdot x}{4x} = \frac{8 \cdot 4}{4x} - \frac{3x \cdot x}{4x} \quad | \cdot \mathrm{HN}$$

$16 - x^2 = 32 - 3x^2 \quad | + 3x^2$

$16 + 2x^2 = 32 \quad | - 16$

$2x^2 = 16 \quad |: 2$

$x^2 = 8 \quad |\sqrt{}$

$x_1 = 2\sqrt{2}$

$x_2 = -2\sqrt{2}$

$\mathbb{L} = \{2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$

Matrizenrechnung

Aufgabe 85:

Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Skalar λ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 11 & 15 & 21 \\ 27 & 30 & 34 \\ 35 & 36 & 40 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2$$

Lösung:

$$A * \lambda = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 18 \\ 22 & 30 & 42 \\ 54 & 60 & 68 \\ 70 & 72 & 80 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 86:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizenaddition ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 87:

Transponieren Sie die Matrix A zu A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 88:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizenaddition ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 89:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Addition A+B ist nicht erlaubt, da beiden nicht den gleichen Typ besitzen.

A: Typ(2,2)

B: Typ(2,3)

Aufgabe 90:

Führen Sie folgende Matrizensubtraktion A-B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Subtraktion überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizensubtraktion ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \\ -6 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 91:

Führen Sie folgende Matrizensubtraktion A-B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Subtraktion überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizensubtraktion ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 92:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

				0	1
				2	3
				2	4
5	1	-3		-4	-4
2	-2	5		6	16
0	2	7		18	34

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 16 \\ 18 & 34 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 93:

Führen Sie folgende Rechenoperation A^2 mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperation überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Bedingung:

$$\mathrm{Typ}(3{,}2) \cdot \mathrm{Typ}(3{,}2)$$

Kann nicht multipliziert werden.

Aufgabe 94:

Führen Sie folgende Rechenoperation A^2 mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperation überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Bedingung:

Typ(3,3) · Typ(3,3)

Kann multipliziert werden.

			1	2	3
			3	2	1
			2	3	1
1	2	3	13	15	8
3	2	1	11	13	12
2	3	1	13	13	10

Aufgabe 95:

Führen Sie folgende Rechenoperationen $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperationen überhaupt durchführbar sind.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Auch hier muss zuerst die Klammer berechnet werden.

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

		-2	1
		6	2
2	5	26	12
1	-1	-8	-1

		3	-3
		-2	-1
26	12	54	-90
-8	-1	-22	25

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

		3	-3
		-2	-1
-2	1	-8	5
6	2	14	-20

			-8	5
			14	-20
2	5		54	-90
1	-1		-22	25

Aufgabe 96:

Es sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Rechenoperationen:

a) $\quad A \cdot B$

b) $\quad A \cdot C$

c) $\quad B \cdot C$

d) $\quad B \cdot A$

e) $\quad C \cdot A$

f) $\quad C \cdot B$

Lösung:

a) $\quad A \cdot B$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5+0 & 1+6 \\ 10+0 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $A \cdot C$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2+9 \\ 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) $B \cdot C$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10+3 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

d) $B \cdot A$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5+2 & 15+4 \\ 0+4 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e) $C \cdot A$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{geht nicht} \end{matrix}$$

f) $C \cdot B$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{geht nicht} \end{matrix}$$

Aufgabe 97:

Es sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Rechenoperationen:

a) $A \cdot B$

b) $A \cdot C$

c) $B \cdot C$

d) $B \cdot A$

e) $C \cdot A$

f) $C \cdot B$

Lösung:

Gehen nicht außer

b) $\binom{11}{16}$

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 98:

Berechnen Sie die Matrizenprodukte AB, BA, $A^T A$, AA^T mit:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche besondere Eigenschaft besitzen die Matrizen $A^T A$ und AA^T?

Lösung:

$$AB = \begin{array}{c|c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad B & \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A & \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 \\ 15 & 3 & -3 \\ 26 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

z.B.: $5 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-8) = 16$

$$BA = \begin{array}{c|c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad A & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ B & \\ \hline \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 & 17 & 11 \\ 2 & 3 & 3 \\ -36 & -22 & -16 \end{pmatrix} \end{array}$$

z.B.: $(-8) \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -36$

$$A^TA= \quad \begin{array}{r|c} & A \\ & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^T & \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 42 & 23 & 9 \\ 23 & 13 & 6 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

z.B.: $3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 13$

$$AA^T= \quad \begin{array}{r|c} & A^T \\ & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ A & \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 38 & 3 & 26 \\ 3 & 2 & 4 \\ 26 & 4 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

z.B.: $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 20$

AA^T und A^TA sind symmetrische Matrizen.

Aufgabe 99:

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad c=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad d=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Differenzen:

a)	A+F	b)	E−A	c)	−d+c	d)	B+A
e)	A+N	f)	F−A	g)	A+2E	h)	d−c
i)	F+E	j)	A+B	k)	3c−2d	l)	c−B

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) Addition nicht möglich e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

j) Addition nicht möglich k) $\begin{pmatrix} -1 \\ 20 \end{pmatrix}$ l) Sub. nicht mögl.

Aufgabe 100:

Bestimmen Sie alle 2-reihigen Matrizen vom Typ $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dessen Matrizenprodukt mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sich kommutativ verhält ($A \cdot X = X \cdot A$)

Lösung:

17 Bestimmen Sie alle 2-reihigen Matrizen vom Typ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deren Matrizenprodukt mit der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sich *kommutativ* verhält ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$).

Wir berechnen zunächst die benötigten Matrizenprodukte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ und $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+0) & (b+0) \\ (-a+c) & (-b+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ (c-a) & (d-b) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & (0+b) \\ (c-d) & (0+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & b \\ (c-d) & d \end{pmatrix}$$

Somit müssen die noch unbekannten Elemente a, b, c und d die folgende Matrizengleichung erfüllen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ (c-a) & (d-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & b \\ (c-d) & d \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich entsprechender Elemente auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man vier Gleichungen mit folgender Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(I)} & a = a - b & \Rightarrow \quad b = 0, \quad a = \text{beliebig} \\ \text{(II)} & b = b & \Rightarrow \quad b = \text{beliebig} \\ \text{(III)} & c - a = c - d & \Rightarrow \quad d = a, \quad c = \text{beliebig} \\ \text{(IV)} & d - b = d & \Rightarrow \quad b = 0, \quad d = \text{beliebig} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = d = \text{beliebig}, \quad b = 0, \quad c = \text{beliebig}$$

Lösung: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Kontrollrechnung:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (-a+c) & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (c-a) & a \end{pmatrix} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (c-a) & a \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$$

Anwendungen zu der Matrizenrechnung

Aufgabe 101:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 wird das Material M1 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material 1 wird im ersten Quartal benötigt?

Lösung:

$$A_{(1,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_{(E,1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = 0*8 + 1*15 + 3*16 = 63$$

Es werden also im ersten Quartal 63 Einheiten des Materials 1 benötigt.

Aufgabe 102:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1, E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material wird im ersten Quartal benötigt?

Lösung:

$$A_{(M,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{T}{}_{(E,1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A * B^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0*8+1*15+3*16=63 \\ 1*8+1*15+1*16=39 \\ 2*8+0*15+4*16=80 \\ 1*8+3*15+1*16=69 \end{matrix}$$

Es werden somit im ersten Quartal folgende Einheiten der Materialien benötigt:

	Material1	Material2	Material3	Material4
Quartal1	63	39	80	69

Aufgabe 103:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

In den Quartalen des Jahres sollen folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16
Quartal 2	10	20	20
Quartal 3	12	24	25
Quartal 4	10	18	20

Wie viel Einheiten der 4 Materialien werden in den 4 Quartalen benötigt?

Lösung:

	Material1	Material2	Material3	Material4
Quartal 1	63	39	80	69
Quartal 2	80	50	100	90
Quartal 3	99	61	124	109
Quartal 4	78	48	100	84

Lösung:

$$A_{(M,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T_{(E,Q)} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 10 \\ 15 & 20 & 24 & 18 \\ 16 & 20 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A * B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 10 \\ 15 & 20 & 24 & 18 \\ 16 & 20 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Bei der Multiplikation zweier Matrizen wird jede Zeile der ersten Matrix mir jeder Spalte der zweiten Matrix multipliziert. Die Produkte werden addiert. Dabei geht man nach ff. Rechenschema vor:

			8	10	12	10
			15	20	24	18
			16	20	25	20
0	1	3	63	80	99	78
1	1	1	39	50	61	48
2	0	4	80	100	124	100
1	3	1	69	90	109	84

$$0*8+1*15+3+16=63 \qquad 0*10+1*20+3*20=80$$
$$1*8+1*15+1*16=39 \qquad 1*10+1*20+1*20=50$$
$$2*8+0*15+4*16=80 \qquad 2*10+0*20+4*20=100$$
$$1*8+3*15+1*16=69 \qquad 1*10+3*20+1*20=90$$

usw.

Es werden in den Quartal folgende Einheiten der Materialien benötigt:

	Material1	Material2	Material3	Material4
Quartal 1	63	39	80	69
Quartal 2	80	50	100	90
Quartal 3	99	61	124	109
Quartal 4	78	48	100	84

Aufgabe 104:

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus die Endprodukte P_1, P_2 und P_3 her.

Erstellen Sie folgende Matrizen.

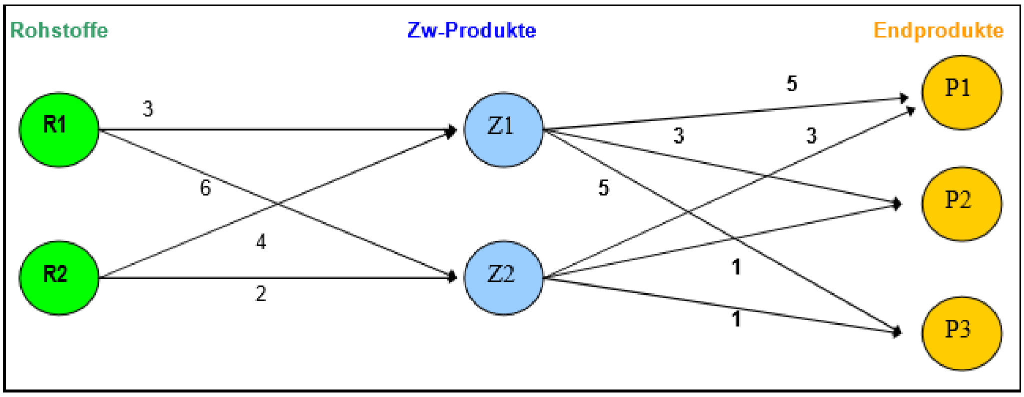
a) Die Rohstoff–Zwischenprodukt-Matrix

b) Die Zwischenprodukt–Endprodukt-Matrix

c) Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix

d) Ein Kunde bestellt 123 P_1, 345 P_2 und 234 P_3. Zusätzlich benötigt er noch 98 Z_1 und 114 Z_2. Wieviel Rohstoffe muss er bestellen um diesen Auftrag bearbeiten zu können?

e) Wie groß sind seine gesamten Ausgaben für diese Rohstoffe, wenn er R_1 für 13 Euro und R_2 für 21 Euro einkaufen kann?



Lösung:

a) Rohstoff–Zwischenprodukt-Matrix:

$$A_{R,Z} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

Zwischenprodukt–Endprodukt-Matrix:

$$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

Rohstoff-Endprodukt-Matrix:

$$C_{R,E} = A_{R,Z} \cdot B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 15 & 21 \\ 26 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

d)

$$\mathrm{C_{R,E}} \cdot \mathrm{D_{E,B}} = \begin{pmatrix} 33 & 15 & 21 \\ 26 & 14 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 345 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14148 \\ 13176 \end{pmatrix} = \mathrm{F_{R,B}}$$

$$\mathrm{A_{R,Z}} \cdot \mathrm{G_{Z,B}} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 98 \\ 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 978 \\ 620 \end{pmatrix} = \mathrm{H_{R,B}}$$

$$\mathrm{F_{R,B}} + \mathrm{H_{R,B}} = \begin{pmatrix} 14148 \\ 13176 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 978 \\ 620 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15126 \\ 13796 \end{pmatrix}$$

e)

$$15.126 \cdot 13 = 196.638$$

$$13.796 \cdot 21 = 289.716$$

$$\text{Kosten} = 196.638 + 289.716 = 486.354 \text{ Euro}$$

Ermittlung der Rohstoff-Endprodukt-Matrix auf dem Schaubild

	Endprodukte		
Rohstoffe	P1	P2	P3
R1	33	15	21
R2	26	14	22

Rohstoff-Zw-Prod.-Matrix auf dem Schaubild

	Zw-Produkte	
Rohstoffe	Z1	Z2
R1	3	6
R2	4	2

Zw-Prod.-Endprod.-Matrix

	Endprodukte		
Zw-Prod	P1	P2	P3
Z1	5	3	5
Z2	3	1	1

Rohstoff-Matrix x Zw-Produkt-Matrix

	Endprodukte		
Rohstoffe	P1	P2	P3
R1	33	15	21
R2	26	14	22

Aufgabe 105:

In einer Möbelfabrik werden aus Holz, Metall und Stoff Tische, Bänke und Stühle produziert, die einzeln bzw. als Sitzgruppen verkauft werden.

Für einen Tisch werden 12 Einheiten Holz und 3 Einheiten Metall,

für eine Bank 6 Einheiten Holz, 2 Einheiten Metall und 5 Einheiten Stoff,

für einen Stuhl 2 Einheiten Holz, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Stoff benötigt.

Eine Sitzgruppe A besteht aus einem Tisch und vier Stühlen,

eine Sitzgruppe B aus einem Tisch, einer Bank und drei Stühlen.

a) Geben Sie die Verflechtungsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Einzelprodukten und für den Zusammenhang von Einzelprodukten und Sitzgruppen an und bestimmen Sie aus diesen durch Matrizenmultiplikation die Verflechtungsmatrix für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Sitzgruppen!

b) Ein Kunde bestellt 40 Sitzgruppen A, 60 Sitzgruppen B und zusätzlich 10 Bänke. Ermitteln Sie unter Verwendung der Verflechtungsmatrizen aus a), welche Mengen der Ausgangsmaterialien benötigt werden!

Lösung:

a) Ausgangsmaterial – Einzelprodukte

	je Tisch	je Bank	je Stuhl
Holz	12	6	2
Metall	3	2	1
Stoff	0	5	2

Einzelprodukte – Sitzgruppen

	je Sitzgruppe A	je Sitzgruppe B
Tisch	1	1
Bank	0	1
Stuhl	4	3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ausgangsmaterial – Sitzgruppen: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 7 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 7 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2240 \\ 760 \\ 980 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2300 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix}$

Es werden 2300 Einheiten Holz, 780 Einheiten Metall und 1030 Einheitem Stoff benötigt.

Aufgabe 106:

Es liegt ein zweistufiger Produktionsprozess vor, bei dem folgende Bedingungen vorliegen:

1. Stufe: Rohstoffe R1, R2, R3, R4 –>Halbfabrikate H1, H2, H3

2. Stufe: Halbfabrikate H1, H2, H3 –>Endprodukte E1, E2

z. B.

Für 1 ME Endprodukt E_1 wird benötigt: 4 ME H_1, 2 ME H_2, 10 ME H_3
Für 1 ME Halbfabrikat H_2 wird benötigt: 3 ME R_1, 5 ME R_2, 0 ME R_3, 7 ME R_4

	H_1	H_2	H_3
R_1	1	3	0
R_2	10	5	8
R_3	2	0	1
R_4	3	7	1

	E_1	E_2
H_1	4	20
H_2	2	3
H_3	10	5

Wie viel Rohstoffe sind nötig, um 2000 ME E_1 und 10000 ME E_2 herzustellen?

Lösung:

Definieren entsprechende Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor

Berechnung der Verflechtungsbilanz (Menge nötiger Rohstoffe)

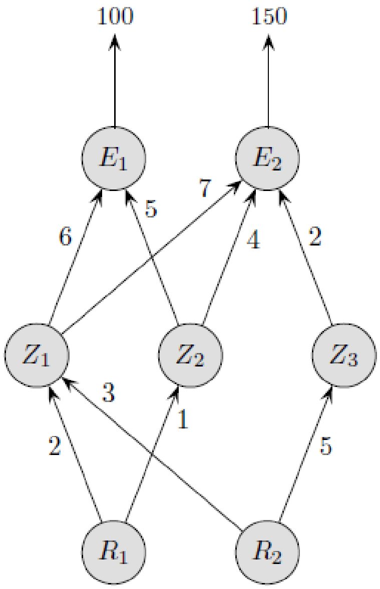
$$
\begin{aligned}
r &= A \cdot B \cdot p \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 29 \\ 130 & 255 \\ 18 & 45 \\ 36 & 86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310000 \\ 2810000 \\ 486000 \\ 932000 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Zur Herstellung von 2000 ME E_1 und 10000 ME E_2 sind Rohstoffe in folgender Menge nötig:

310000 ME R_1, 2810000 ME R_2, 486000 ME R_3, 932000 ME R_4

Aufgabe 107:

Wie viel Rohstoffe R_1 und R_2 werden benötigt um 100 Endprodukte E_1 und 150 Endprodukte E_2 herzustellen?



Lösung:

$$A_{R,Z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{R,Z} \cdot B_{Z,E}$:

			6	7
			5	4
			0	2
2	1	0	17	18
3	0	5	18	31

$$C_{R,E} = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

$$D_{E,S} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$C_{R,E} \cdot D_{E,S}$:

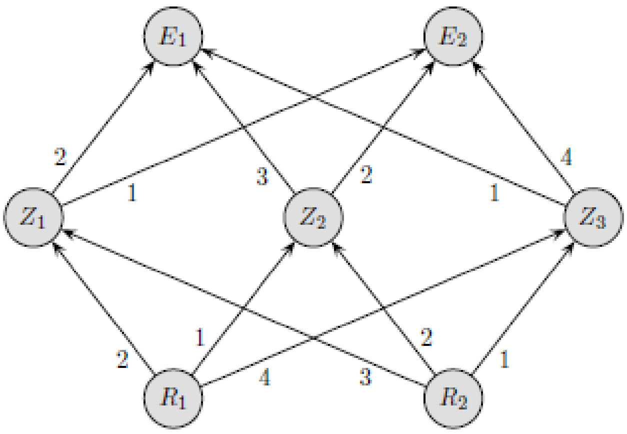
		100
		150
17	18	4400
18	31	6450

Man benötigt 4.400 von R_1 und 6.450 von R_2.

Aufgabe 108:

In einem Unternehmen mit einem mehrstufigen Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:

Es sollen 4 Mengeneinheiten (ME) von E_1 und 7 ME von E_2 produziert werden. Wie viel Rohstoffe sind nötig?



Lösung:

$$A_{R,Z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A_{R,Z} \cdot B_{Z,E}$:

			2	1
			3	2
			1	4
2	1	4	11	20
3	2	1	13	11

$$C_{R,E} = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$$

$$D_{E,S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

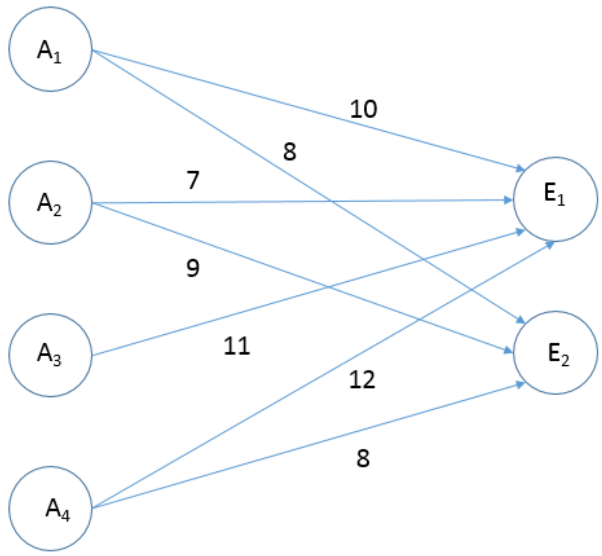
$C_{R,E} \cdot D_{E,S}$:

		4
		7
11	20	184
13	11	129

Man benötigt 184 von R_1 und 129 von R_2.

Aufgabe 109:

Zwei Produkte E_1 und E_2 werden mit Hilfe von 4 Baugruppen A_1, A_2, A_3 und A_4 hergestellt. Die Beziehungen werden durch den folgenden Graphen dargestellt:



Ein Kunde bestellt 230 Stück von E_1 und 410 Stück von E_2. Wie viele Baugruppen braucht er dazu?

Lösung:

$$A_{B,\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 9 \\ 11 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

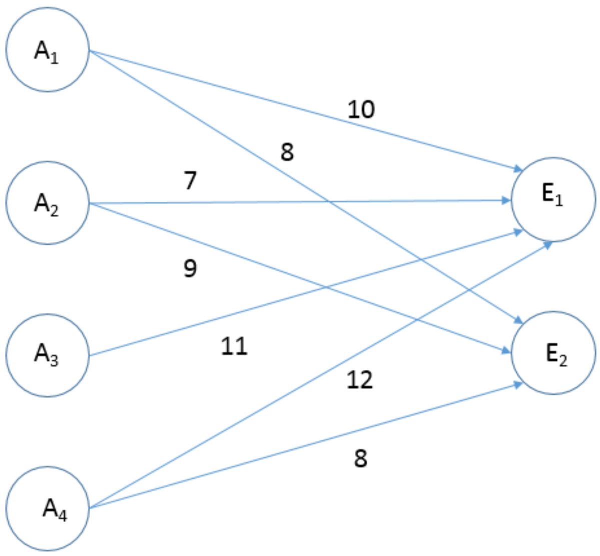
$$\mathrm{B}_{\mathrm{E,S}} = \begin{pmatrix} 230 \\ 410 \end{pmatrix}$$

$A_{B,\mathrm{E}} \cdot \mathrm{B}_{\mathrm{E,S}}$:

			230			
			410			
10	8		5580			
7	9		5300			
11	0		2530			
12	8		6040			

Aufgabe 110:

Zwei Produkte E_1 und E_2 werden mit Hilfe von 4 Baugruppen A_1, A_2, A_3 und A_4 hergestellt. Die Beziehungen werden durch den folgenden Graphen dargestellt:



Ein Kunde bestellt 230 Stück von E_1 und 410 Stück von E_2. Wie viele Baugruppen braucht er dazu?

Lösung:

$$A_{B,\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 9 \\ 11 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{E,S}} = \begin{pmatrix} 230 \\ 410 \end{pmatrix}$$

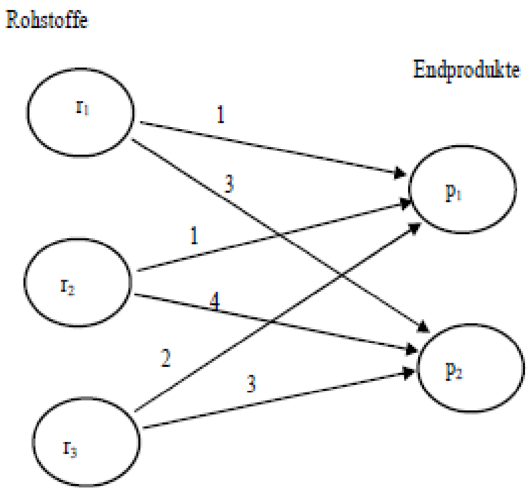
$A_{B,\mathrm{E}} \cdot \mathrm{B}_{\mathrm{E,S}}$:

		230
		410
10	8	5580
7	9	5300
11	0	2530
12	8	6040

Man benötigt 5.580 von A_1, 5.300 von A_2, 2.530 von A_3 und 6.400 von A_4.

Aufgabe 111:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Der folgende Graph gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in Euro werden durch den Vektor $\vec{K} = (5; 34; 23)$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert einer Bestellung von 6 ME P_1 und 3 ME P_2?

Lösung:

$$A_{R,P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ A^T_{P,R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B_{K,R} = (5 \quad 34 \quad 23);\ B^T_{R,K} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$A^T_{P,R} \cdot B^T_{R,K}$:

			5
			34
			23
1	1	2	85
3	4	3	220

$$C_{P,K} = \begin{pmatrix} 85 \\ 220 \end{pmatrix}$$

$$C^T_{K,P} = (85 \quad 220)$$

$$D_{P,M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

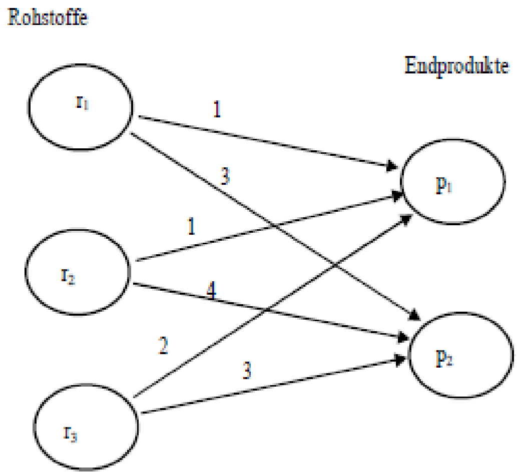
$$C^T_{K,P} \cdot D_{P,M}:$$

		6
		3
85	220	1170

Der Gesamtwert beträgt 1170 Euro.

Aufgabe 112:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Der folgende Graph gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in Euro werden durch den Vektor $\vec{K} = (5; 34; 23)$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert einer Bestellung von 6 ME P_1 und 3 ME P_2?

Lösung:

$$\mathrm{A}_{R,\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \mathrm{A}_{P,R}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{K,R}} = (5 \quad 34 \quad 23); \mathrm{B}_{\mathrm{R,K}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}_{P,R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}_{\mathrm{R,K}}^{\mathrm{T}}$:

			5
			34
			23
1	1	2	85
3	4	3	220

$$C_{P,K} = \begin{pmatrix} 85 \\ 220 \end{pmatrix}$$

$$C_{K,P}^{T} = \begin{pmatrix} 85 & 220 \end{pmatrix}$$

$$D_{P,M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{K,P}^{T} \cdot D_{P,M}:$$

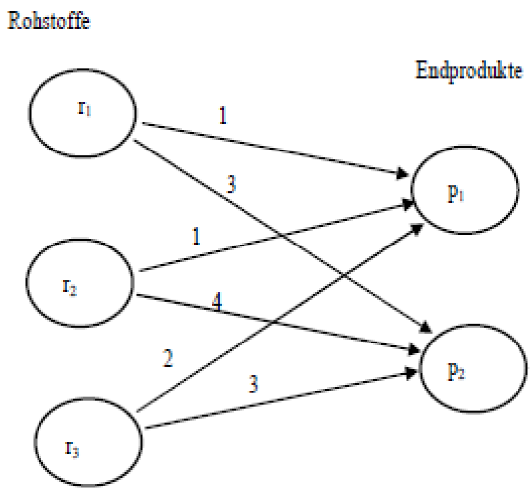
		6
		3
85	220	1170

Der Gesamtwert beträgt 1170 Euro.

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 113:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Der folgende Graph gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in Euro werden durch den Vektor $\vec{K} = (5; 34; 23)$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert einer Bestellung von 6 ME P_1 und 3 ME P_2?

Lösung:

$$A_{R,P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ A^T_{P,R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B_{K,R} = \begin{pmatrix} 5 & 34 & 23 \end{pmatrix};\ B^T_{R,K} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$A^T_{P,R} \cdot B^T_{R,K}$:

			5
			34
			23
1	1	2	85
3	4	3	220

$$C_{P,K} = \begin{pmatrix} 85 \\ 220 \end{pmatrix}$$

$$C^T_{K,P} = \begin{pmatrix} 85 & 220 \end{pmatrix}$$

$$D_{P,M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$C_{K,P}^{T} \cdot D_{P,M}$:

		6
		3
85	220	1170

Der Gesamtwert beträgt 1170 Euro.

Aufgabe 114:

In einem Unternehmen werden Zwischenprodukte (Z_j) zu Endprodukten (E_K) verarbeitet. Der Rohstoffbedarf für die Produktion der Zwischenprodukte und der Bedarf an Zwischenprodukten für die Endfertigung jeweils in Mengeneinheiten (ME) sind den folgenden Tabellen zu entnehmen.

Rohstoffbedarf

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	3	1	3
R_2	1	2	4
R_3	3	0	1
R_4	1	2	3

Zwischenproduktbedarf

	E_1	E_2	E_3	E_4
Z_1	1	2	1	0
Z_2	2	3	0	1
Z_3	1	2	1	2

Das Unternehmen hat Lieferverpflichtungen für die Endprodukte bei E_1 mit 175 ME, bei E_2 mit 175 ME, bei E_3 mit 125 ME und bei E_4 mit 125 ME.

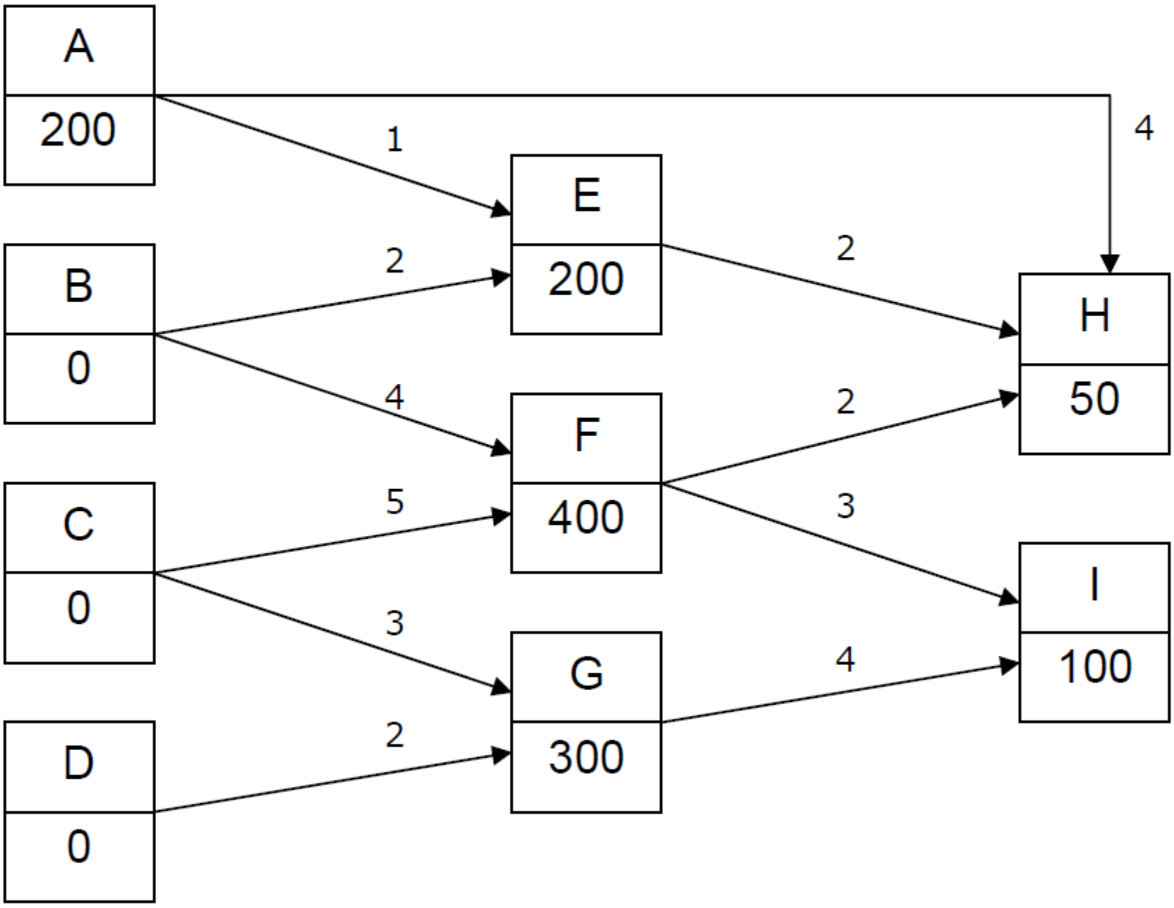
Welche Mengen der Rohstoffe (R_x) werden für die Lieferverpflichtungen benötigt?

Lösung:

			1	2	1	0			
			2	3	0	1			
			1	2	1	2	Summe	Anz. Endp.	Ergebnis
3	1	3	8	15	6	7	36	175	6300
1	2	4	9	16	5	10	40	175	7000
3	0	1	4	8	4	2	18	125	2250
1	2	3	8	14	4	8	34	125	4250

Aufgabe 115:

Gegeben ist ein Gozintograph mit vier Werkstoffen (A, B, C und D), drei Zwischenprodukten (E, F und G) sowie zwei Endprodukten (H und I). Die Zahlen unter den Buchstaben stellen den aktuellen Lagerbestand dar:



Ermitteln Sie den Gesamtbedarf der Güterarten A, B, C und D.

Lösung:

Rohstoff-Zwischenprodukt:

$$A_{W,Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{W,Z} \cdot B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 12 \\ 10 & 27 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = C_{W,E} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 12 \\ 10 & 27 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Güterart A:

$6 + 0 = 6$

Güterart B:

$12 + 12 = 24$

Güterart C:

$10 + 27 = 37$

Güterart D:

$0 + 8 = 8$

Inverse Matrix

Aufgabe 116:

Berechnen sie die inverse Matrix von:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Schritt 1: Erweiterung der Matrix A um die passende Einheitsmatrix:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Zeilentransformationen ausgehend von (A | E) hin zu (E | A^{-1}):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad 0,5Z2 + Z1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0,5 \end{array}\right) \qquad Z2 * 0,5$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \end{array}\right) \qquad Z1 + (-3) * Z2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0,5 & -0,75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \end{array}\right) \qquad Ziel\ erreicht!$$

Schritt 3: Herausziehen der Inversen A^{-1} aus (E | A^{-1}):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,75 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Probe, ob $A^{-1} * A$ (= $A * A^{-1}$) = E (ist hier zutreffend)

Aufgabe 117:

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (1) mal 0,5 + (2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ (2) mal $(-\frac{2}{3})$ +(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ (1) geteilt 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ (2) mal $(\frac{2}{3})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 118:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 119:

Berechnen Sie Inverse Matrix zu A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

```
              M                          E

        3   5   1                   1   0   0
        2   4   5                   0   1   0
        1   2   2                   0   0   1

Vertausche die erste und die dritte Zeile

        1   2   2                   0   0   1
        2   4   5                   0   1   0
        3   5   1                   1   0   0

Subtrahiere das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten

        1   2   2                   0   0   1
        0   0   1                   0   1  -2
        3   5   1                   1   0   0

Subtrahiere das Dreifache der ersten Zeile von der dritten

        1   2   2                   0   0   1
        0   0   1                   0   1  -2
        0  -1  -5                   1   0  -3

Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit -1

        1   2   2                   0   0   1
        0   1   5                  -1   0   3
        0   0   1                   0   1  -2

Subtrahiere das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten

        1   0  -8                   2   0  -5
        0   1   5                  -1   0   3
        0   0   1                   0   1  -2

Addiere das Achtfache der dritten Zeile zur ersten

        1   0   0                   2   8  -21
        0   1   5                  -1   0   3
        0   0   1                   0   1  -2

Subtrahiere das Fünffache der dritten Zeile von der zweiten

        1   0   0                   2   8  -21
        0   1   0                  -1  -5   13
        0   0   1                   0   1   -2

            = E                       = M^-1
```

Aufgabe 120:

Berechnen Sie die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Aufgabe 121:

Wie lautet die Inverse der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}$$

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 122:

Bestimmen Sie die Inverse zur folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,15 & -0,25 & 0,05 \\ 0,05 & 0,25 & 0,35 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 123:

Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie hierzu ein Verfahren Ihrer Wahl.

Lösung:

Matrix A					Inverse Matrix			
1	3	1	2		0,3	0,3	1,0	-0,7
3	1	0	2		0,3	0,0	-0,3	0,0
1	0	1	2		1,0	-0,3	2,7	-1,3
2	2	2	5		-0,7	0,0	-1,3	1,0

Determinanten

Aufgabe 124:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-4) - 3 \cdot 2 = 12 - 6 = 6$$

Aufgabe 125:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8\,4 \\ -7\,2 \\ -3\,4 \end{matrix}$$

$$= 8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot (-7) \cdot 4 - (-3) \cdot 2 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 8 - 5 \cdot (-7) \cdot 4$$

$$= 80 - 48 - 84 + 18 - 128 + 140 = -22$$

Aufgabe 126:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 10 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 10 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 6 & 10 \\ -2 & 3 \end{matrix}$$

$$= (-2) \cdot 10 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 6 \cdot 2$$

$$-(-1) \cdot 10 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot 6 \cdot 3$$

$$= 20 - 20 - 18 - 20 + 15 + 24 = 1$$

Aufgabe 127:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür an den grau markierten Stellen Nullen. Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 7 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 3$$

$$= -2 + 105 + 20 - 25 - 56 + 3 = 45$$

Aufgabe 128:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür eine Zeile oder eine Spalte mit zwei Nullen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Geht nicht, da nicht quadratisch.

Aufgabe 129:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür eine Zeile oder eine Spalte mit zwei Nullen.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 13 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 13 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 13 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot (-5) - 4 \cdot 13 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= 6 + 195 - 40 + 25 - 104 - 18 = 64$$

Aufgabe 130:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür eine Zeile oder eine Spalte mit zwei Nullen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 12 & 10 \\ 10 & 10 \end{matrix} = 100 + 100 + 120 - 100 - 100 - 120 = 0$$

Aufgabe 131:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

In der vierten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die dritte Zeile festgesetzt.

Die dritte Zeile mal (-3) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile mal (2) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Vierte Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen.

$$= -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Alle Unterdeterminanten mit dem Faktor Null werden Null und fallen weg.

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -8 & -7 \\ 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{matrix}$$

$$= -1[(-8) \cdot (-1) \cdot 6 + (-7) \cdot (-2) \cdot 4 + (-8) \cdot 4 \cdot 8$$

$$-4 \cdot (-1) \cdot (-8) - 8 \cdot (-2) \cdot (-8) - 6 \cdot 4 \cdot (-7)]$$

$$= -1[48 + 56 - 256 - 32 - 128 + 168] = 144$$

Aufgabe 132:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

In der ersten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die zweite Zeile festgesetzt.

Die zweite Zeile mal (-2) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile mal (-7) und auf die dritte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 24 & -2 & -25 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile mal (1) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 24 & -2 & -25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Erste Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen. Unterdeterminanten mit dem Schnittpunktelement Null werden weggelassen. Siehe Aufgabe 9.

$$= -1 \begin{vmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 24 & -2 & -25 \\ -4 & -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 4 \\ 24 & -2 \\ -4 & -1 \end{matrix}$$

$= (-1)[10 \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot (-25) \cdot (-4) + 0 \cdot 24 \cdot (-1)$

$-(-4) \cdot (-2) \cdot 0 - (-1) \cdot (-25) \cdot 10 - 6 \cdot 24 \cdot 4]$

$= (-1)[-120 + 400 + 0 - 0 - 250 - 576] = 546$

Aufgabe 133:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

In der zweiten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die dritte Zeile festgesetzt.

Die dritte Zeile mal (3) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 17 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile mal (-6) und auf die zweite Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ -28 & 0 & -10 & 26 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 17 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile mal (-6) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -27 & 0 & -11 & 27 \\ -28 & 0 & -10 & 26 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 17 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Zweite Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen. Unterdeterminanten mit dem Schnittpunktelement Null werden weggelassen. Siehe Aufgabe 9.

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} -27 & -11 & 27 \\ -28 & -10 & 26 \\ 17 & 8 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} -27 & -11 \\ -28 & -10 \\ 17 & 8 \end{matrix}$$

$= -1 \cdot [(-27) \cdot (-10) \cdot (-13) + (-11) \cdot 26 \cdot 17 + 27 \cdot (-28) \cdot 8$

$-17 \cdot (-10) \cdot 27 - 8 \cdot 26 \cdot (-27) - (-13) \cdot (-28) \cdot (-11)$

$= -1 \cdot [-3.510 - 4.862 - 6.048 + 4.590 + 5.616 + 4004]$

$= 210$

Aufgabe 134:

Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Sarrus.

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix}4&2&1\\3&3&1\\2&4&1\end{vmatrix}\qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix}-1&1&2\\-2&2&3\\-3&3&1\end{vmatrix}\qquad \text{(c)}\ \begin{vmatrix}5&2&-3\\2&1&-2\\4&6&7\end{vmatrix}\qquad \text{(d)}\ \begin{vmatrix}2&2&0\\1&3&2\\k&1&0\end{vmatrix}$$

$$\text{(e)}\ \begin{vmatrix}k&3&1\\2k&2&5\\1&0&-2\end{vmatrix}\qquad \text{(f)}\ \begin{vmatrix}k&k&1\\1&2k&1\\-1&1&2\end{vmatrix}\qquad \text{(g)}\ \begin{vmatrix}1-k&k&1\\2&2&1\\4&1&-1\end{vmatrix}\qquad \text{(h)}\ \begin{vmatrix}0&k^2&-1\\1&1&-2\\3&0&k\end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix}4&2&1\\3&3&1\\2&4&1\end{vmatrix}\begin{matrix}4&2\\3&3\\2&4\end{matrix} = 12+4+12-6-16-6=0$$

$$\text{(b)}\ \begin{vmatrix}-1&1&2\\-2&2&3\\-3&3&1\end{vmatrix}\begin{matrix}-1&1\\-2&2\\-3&3\end{matrix} = -2-9-12+12+9+2=0$$

Wenn man schon weiß, daß diese Determinante den Wert 0 haben muß, weil die erste Spalte ein Vielfaches der zweiten ist, spart man sich die Rechnung.

$$\text{(c)}\ \begin{vmatrix}5&2&-3\\2&1&-2\\4&6&7\end{vmatrix}\begin{matrix}5&2\\2&1\\4&6\end{matrix} = 35-16-36+12+60-28=27$$

$$\text{(d)}\ \begin{vmatrix}2&2&0\\1&3&2\\k&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}2&2\\1&3\\k&1\end{matrix} = 4k-4$$

$$\text{(e)}\ \begin{vmatrix}k&3&1\\2k&2&5\\1&0&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}k&3\\2k&2\\1&0\end{matrix} = -4k+15-2+12k = 8k+13$$

$$\text{(f)}\ \begin{vmatrix}k&k&1\\1&2k&1\\-1&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}k&k\\1&2k\\-1&1\end{matrix} = 4k^2-k+1+2k-k-2k = 4k^2-2k+1$$

$$\text{(g)}\ \begin{vmatrix}1-k&k&1\\2&2&1\\4&1&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}1-k&k\\2&2\\4&1\end{matrix} = -2(1-k)+4k+2-8-(1-k)+2k = 9k-9$$

$$\text{(h)}\ \begin{vmatrix}0&k^2&-1\\1&1&-2\\3&0&k\end{vmatrix}\begin{matrix}0&k^2\\1&1\\3&0\end{matrix} = -6k^2+3-k^3$$

Aufgabe 135:

Für welche Werte von k hat diese Determinante der Wert 0 ?

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Lösung: Man erhält zwei Nullen, wenn man das Doppelte der ersten Zeile von der dritten subrtrahiert:

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ 2 & k & 2k \\ 1-2k & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} k & 3 \\ 2 & k \\ 1-2k & 0 \end{matrix}$$

$$= 6k(1-2k) - (1-2k)\cdot 4k = 6k - 12k^2 - 4k + 8k^2 = 2k - 4k^2$$

Nun setzt man die Bedingung D = 0 an:

$$D = 0 \Leftrightarrow 2k(1-2k) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0 \text{ oder } k_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 136:

Vereinfachen Sie durch Addition eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte so dass, möglichst eine oder zwei Nullen entstehen und berechnen dann:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Lösung:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+21 & 5-14 & 7 \\ 8+3 & 10-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & -9 & 7 \\ 11 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 25 & -9 \\ 11 & 8 \\ 0 & 0 \end{matrix} = -200 - 99 = -299$

(b) $\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45-90 & 36-36 & 18-36 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45-60 & 24-24 & 36-24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -45 & 0 & -18 \\ 30 & 12 & 12 \\ -15 & 0 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -45 & 0 \\ 30 & 12 \\ -15 & 0 \end{matrix}$

Hier wurde das Dreifache der 2. Zeile von der ersten subtrahiert und das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten.

$$= -45\cdot 12\cdot 12 - 15\cdot 12\cdot 18 = -9720$$

Man hätte hier vielleicht zuerst den Faktor 15 aus der ersten Spalte, 12 aus der 2. Spalte und 6 aus der dritten Spalte herausziehen sollen:

$$\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix} = 15\cdot 12\cdot 6\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1080\cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 1080\cdot(-9) = -9720$$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix} = -108 + 16 = -02$

Aufgabe 137:

Erzeugen Sie an den markierten Stellen zwei Nullen durch Addition der Vielfachen zweier Zeilen oder Spalten und berechnen dann:

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix}$

Lösung:

(d) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3-12 & 7+20 \\ 1 & 3-3 & -5+5 \\ 3 & 7-9 & 6+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -9 & 27 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 27 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} = -(-189+54) = 135$$

(e) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-4 & 3-12 & 7+20 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3-3 & 7-9 & 6+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 27 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 27 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} = 135$$

(f) $$\begin{vmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13+21 & 8+21 & 6-6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5+7 & 3+7 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 29 & 0 \\ 7 & 7 & -2 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = +2\cdot\begin{vmatrix} 34 & 29 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot(340-58) = 564$$

(g) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2+20 & 3-12 & 4 \\ 5-5 & -3+3 & -1 \\ 1+15 & 1-9 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 22 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 16 & -8 & 3 \end{vmatrix} = +1\cdot 7\cdot\begin{vmatrix} 22 & -9 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} = -224$$

(h) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3-2 & 4-6 \\ 5 & -3-5 & -1-15 \\ 1 & 1-1 & 3-3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = -224$$

(i) $$\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k-k & 2+3k \\ 2k & 1 & -3 \\ 4-6k & 3-3 & 2+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 0 & 3k+2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4-6k & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 3k+2 \\ 4-6k & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 11\left(3-2k^2\right) - (4-6k)(3k+2) = 33-22k^2 - \left(12k-18k^2+8-12k\right) = -4k^2+25$$

(j) $$\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k & 2+3k \\ 2k-2k & 1 & -3+3 \\ 4-6k & 3 & 2+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k & 3k+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4-6k & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 3k+2 \\ 4-6k & 11 \end{vmatrix} = \text{(i)}$$

(k) $$\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot \begin{vmatrix} 1+6 & -12+9 & 1-1 \\ 9+12 & 5+18 & 2-2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 12\cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 21 & 23 & 0 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 21 & 23 \end{vmatrix} = -12(161+63) = -2688$$

(l) $$\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9-9 & 5+108 & 2-9 \\ 6-6 & 9+72 & -1-6 \end{vmatrix} =$$

$$= 12\cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 0 & 113 & -7 \\ 0 & 81 & -7 \end{vmatrix} = 12\cdot \begin{vmatrix} 113 & -7 \\ 81 & -7 \end{vmatrix} = 12\cdot(-7)\cdot \begin{vmatrix} 113 & 1 \\ 81 & 1 \end{vmatrix} = -84\cdot(113-81) = -2688$$

Aufgabe 138:

Vereinfachen Sie zuerst durch Ausklammern von Faktoren, erzeugen Sie dann zwei Nullen und berechnen den Wert der Determinante.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 21 & 14 & 21 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 55 & 7 & -22 \\ 10 & 6 & -8 \\ 35 & -9 & -14 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2k & 9 & 12 \\ 4k & 3 & 7 \\ k^2 & 12 & 14 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 44 & 22 & -22 \\ 7 & 6 & 5 \\ 15 & -12 & 18 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 24 & 5 & 14 \\ 12 & 6 & 7 \\ -18 & 20 & 21 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3 & 4k & 5 \\ 3k & 4 & 2 \\ 6 & 2k & 1 \end{vmatrix}$

Lösung:

(a) $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 21 & 14 & 21 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 21\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 5 & -4-10 & -2-15 \\ 3 & 2-6 & 3-9 \end{vmatrix} = 21\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -14 & -17 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 21\cdot \begin{vmatrix} -14 & -17 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 21\cdot(84-68) = 336$$

(b) $$\begin{vmatrix} 55 & 7 & -22 \\ 10 & 6 & -8 \\ 35 & -9 & -14 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 11 & 7 & -11 \\ 2 & 6 & -4 \\ 7 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 7 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -2960$$

Hier wurde die erste Spalte zur dritten addiert.

(c) $$\begin{vmatrix} 2k & 9 & 12 \\ 4k & 3 & 7 \\ k^2 & 12 & 14 \end{vmatrix} = 3k\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 7 \\ k & 4 & 14 \end{vmatrix} = 3k\cdot \begin{vmatrix} 2-12 & 3-3 & 12-21 \\ 4 & 1 & 7 \\ k-16 & 4-4 & 14-28 \end{vmatrix} = 3k\begin{vmatrix} -10 & 0 & -9 \\ 4 & 1 & 7 \\ k-16 & 0 & -14 \end{vmatrix}$$

$$= 3k\begin{vmatrix} -10 & -9 \\ k-16 & -14 \end{vmatrix} = 3k\left(140+9(k-16)\right) = 3k(9k-4) = 27k^2-12k$$

(d) $$\begin{vmatrix} 44 & 22 & -22 \\ 7 & 6 & 5 \\ 15 & -12 & 18 \end{vmatrix} = 22\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 66\cdot \begin{vmatrix} 2-2 & 1-1 & -1 \\ 7+10 & 6+5 & 5 \\ 5+12 & -4+6 & 6 \end{vmatrix} = 66\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 17 & 11 & 5 \\ 17 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 66\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} = -66\cdot(34-187) = 10098$$

(e) $$\begin{vmatrix} 24 & 5 & 14 \\ 12 & 6 & 7 \\ -18 & 20 & 21 \end{vmatrix} = 6\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 42\cdot \begin{vmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 42\cdot(-7)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 2646$$

(f) $$\begin{vmatrix} 3 & 4k & 5 \\ 3k & 4 & 2 \\ 6 & 2k & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2k & 5 \\ k & 2 & 2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 1-10 & 2k-5k & 5-5 \\ k-4 & 2-2k & 2-2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} -9 & -3k & 0 \\ k-4 & 2-2k & 0 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot \begin{vmatrix} -9 & -3k \\ k-4 & 2-2k \end{vmatrix} = 6\cdot\left(-18+18k+3k^2-12k\right) = 18k^2+36k-108$$

Aufgabe 139:

Für welche Werte von k hat die Determinante den Wert 0?

(a) $\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 4 \\ 5 & 1 & k \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & 2k & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 2k & k & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Lösung:

In dieser Lösung werden die Determinanten einmal mit der Sarrus-Regel berechnet. Die Ergebnisse müssen auch bei anderen Berechnungsverfahren gleich sein!

(a) $D = \begin{vmatrix} 1-k & 2 & 4 \\ 5 & 1 & k \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-k & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} = 1-k+6k+80-12-4k(1-k)-10$

$D = 1-k+6k+80-12-4k+4k^2-10 = 4k^2+k+59$

Die Bedingung D = 0 führt auf die quadratische Gleichung

$$4k^2+k+59=0.$$

Die allgemeine Lösungsformel $k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ liefert

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 59}}{8} \notin \mathbf{R}$$

d.h. Für keinen reellen Wert von k nimmt diese Determinante den Wert 0 an.

(b) $D = \begin{vmatrix} 5 & 2k & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2k \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{matrix} = -20+12k+6k-6k-10+24k = 36k-30$

Die Bedingung D = 0 führt auf die Gleichung

$$36k-30=0 \Rightarrow 36k=30 \Rightarrow k=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

(c) $D = \begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 2k & k & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} k & 1 \\ 2k & k \\ 2 & 1 \end{matrix} = 3k^2+2+6k-6k-k-6k = 3k^2-7k+2$

Die Bedingung D = 0 führt auf die quadratische Gleichung

$$3k^2-7k+2=0$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ergebnis: D wird für k = 2 oder für $k = \frac{1}{3}$ Null.

Aufgabe 140:

Erzeugen Sie zuerst Nullen und berechnen dann durch Entwickeln:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -12 & 3 & 12 \\ 34 & 8 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der zweiten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 2. Zeile!

(b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 15 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der ersten Spalte zwei Nullen und entwickle dann nach der 1. Spalte!

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -9 & -6 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der dritten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 3. Zeile!

Lösung:

(a) $$\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -12 & 3 & 12 \\ 34 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+28 & 7 & -5+6 \\ -12+12 & 3 & 12-12 \\ 34+32 & 8 & 12+34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 66 & 8 & 46 \end{vmatrix} =$$

Hier wurde zuerst die erste Spalte zur dritten addiert, dann das vierfache der zweiten Spalte zur ersten. Ich entwickle jetzt nach der 2. Zeile:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 34 & 1 \\ 66 & 46 \end{vmatrix} = 3 \cdot (34 \cdot 46 - 66) = 4494$$

(b) $$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 15 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 17 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 306$$

2. Determinante: Die 2. Spalte wird zur ersten addiert.

(c) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -9 & -6 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 54 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 54 \cdot (-5) = -270$$

In der 2. Determinante wurde die 2. Zeile zur 3. addiert !

Aufgabe 141:

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 7 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 7 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$ (1) + (4) und an die (4) Spalte schreiben

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 7 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$ Zeile (3) mal (-3)+(4) an die (4) Zeile schreiben

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 7 & 1\\ -5 & -14 & -22 & 0\end{pmatrix}$$ nach Element a_{34} entwickeln

$$-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ -5 & -14 & -22\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ -5 & -14\end{matrix}=(-1)\cdot(22-30+14-5+42-44)=1$$

Aufgabe 142:

Rechnen Sie die folgenden Aufgaben nach eigener Vorstellung.

(d) $\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & 6 & 2\\ -4 & -4 & 2\end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 10\\ 1 & 4 & 5\\ 9 & 8 & 7\end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix}5 & 8 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 8\end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ 2 & a & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix}22 & 24 & 26\\ 20 & 22 & 24\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix}13 & 3 & 5\\ 11 & 1 & 5\\ 17 & 7 & 5\end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix}1-k & 1 & k\\ 2-k & 2 & k\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix}k & k & 2k\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 5 & -5\end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}$

Lösung:

(d) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2 & 3+2 & 1 \\ 1+4 & 6+4 & 2 \\ -4+4 & -4+4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 70$$

Ich habe das Doppelte der 3. Spalte zur ersten und zweiten Spalte addiert und dann die Determinante nach der 3. Zeile entwicklelt.

(e) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 10 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 8 \end{array}\right. = 56 + 80 - 360 - 80 = -304$$

Die Null hat mich verleitet, die Sarrus-Regel anzuwenden. Das geht rasch.

(f) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 8 & 0 & 5 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right. = 40 + 24 - 5 + 128 = 187$$

(g) $$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2\left(a^2 - 2\right) = 2a^2 - 4$$

Es wurde die erste Spalte von der dritten subtrahiert.

(h) $$\begin{vmatrix} 22 & 24 & 26 \\ 20 & 22 & 24 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 20 & 22 & 24 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Subtraktion der 2. Zeile von der ersten entstand dort dieselbe Zeile wie die dritte. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(i) $$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 5 \\ 17 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 5 \\ 10 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Subtraktion der 2. Spalte von der ersten entstand dort dieselbe Spalte wie die dritte. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(j) $$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & k \\ 2-k & 2 & k \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & k \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Addition der 3. Spalte zur ersten entstand dort dieselbe Spalte wie die zweite. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(k) $$\begin{vmatrix} k & k & 2k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4k$$

2. Determinante: Das Doppelte der erste Zeile wurde von der 2. subtrahiert.

(l) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right. = 6 + 6 + 6 - 1 + 8 + 27 = 52$$

Aufgabe 143:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{2} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{-6} +$$

$$+ (-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{-4} - 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{4} =$$

$$= 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-4) - 4 \cdot 4 =$$

$$= 2 + 12 + 12 - 16 = 10$$

Aufgabe 144:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{123} + (-5) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}_{57} - 10 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}_{9} =$$

$$= 1 \cdot 123 - 5 \cdot 57 - 10 \cdot 9 = 123 - 285 - 90 = -252$$

Aufgabe 145:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Wir entwickeln die Determinante zweckmäßigerweise nach der 2. *Zeile*, da diese zwei Nullen enthält $(a_{21} = a_{23} = 0)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = \\ &= 0A_{21} + 12A_{22} + 0A_{23} + 1A_{24} = 12A_{22} + A_{24} = \\ &= 12 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{9} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{-6} = \\ &= 12 \cdot 9 + 1 \cdot (-6) = 108 - 6 = 102 \end{aligned}$$

Aufgabe 146:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Durch Entwicklung nach den Elementen der 4. Spalte erhalten wir:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} + = \\ &= 0A_{14} + 3A_{24} + 0A_{34} + 0A_{44} = 3A_{24} = \\ &= 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}_{2} = 3 \cdot 2 = 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 147:

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \\ \text{mit der Kästchenregel folgt} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) \cdot ((-2) \cdot 5 - 11 \cdot (-8)) \\ &= 78 \end{aligned}$$

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 148:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D_{12} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{\textit{Entwicklung nach der 5. Zeile}} = \underbrace{-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\textit{Entwicklung nach der 4. Zeile}} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 89$$

Aufgabe 149:

Für welche $x \in R$ ist die folgende Determinante Null?

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3x-5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3x-5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} &= -2\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3x-5 & 4 & 0 \\ x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2(x-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (3x-5)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - (x-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -52(x-3) - 12(3x-5) + 8(x-3) \\ &= -80x + 192 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Aufgabe 150:

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Zweite Zeile festsetzen.

Zweite Zeile mal (-2) und auf die vierte Zeile addieren.

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Dritte Spalte festsetzen und nach Laplace entwickeln.

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 10 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -7 \\ 2 & 3 \\ 1 & 10 \end{matrix} = 1 \cdot (45 - 7 + 60 - 9 - 30 + 70) = -129$$

Aufgabe 151:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & 7 & 9 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 12 & 10 \end{vmatrix}$$

Lösung:

-5608

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 152:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Gleichungen nach dem Einsetzungsverfahren.

10x-7y+4=0 und 6x-5y=-2

Lösung:

1. Schritt: Auslösen der beiden Gleichungen nach y:

10x-7y+4=0 |-4

10x-7y=-4 |-10x

-7y=-10x-4 | :(-7)

$$y=1\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}$$

6x-5y=-2 |-6x

-5y=-6x-2 | :(-5)

$$y=1\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$$

2. Gleichsetzen von I und II und Auflösen der Gleichung nach x:

$$1\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}=1\frac{1}{5}x+\frac{2}{5} \quad |-\frac{4}{7}$$

$$1\frac{3}{7}x=1\frac{1}{5}x-\frac{6}{35} \quad |-1\frac{1}{5}x$$

$$\frac{8}{35}x=-\frac{6}{35} \quad |:\frac{8}{35}$$

$$x=-\frac{3}{4}$$

3. Einsetzen von x in I

$$y=\frac{10}{7}\bullet(-\frac{3}{4})+\frac{4}{7}=-\frac{30}{28}+\frac{16}{28}=-\frac{14}{28}=-\frac{1}{2}$$

4. Angabe der Lösungsmenge

$$L=\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right\}$$

Aufgabe 153:

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Gleichungen mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) y=3x+22 und y=5x+14

b) y=3x+8 und y=0,5x+2

c) 4x+2y=18 und 7x-y=13

d) 8x-4y=-3 und 14x-2y=8,5

Lösung:

a)

y=3x+22 und y=5x+14

3x+22=5x+14 |-14

3x+8=5x |-3x

8=2x | :2

x=4

$3 \cdot 4+22=12+22=34$

L={4; 34}

b)

y=3x+8 und y=0,5x+2

3x+8=0,5x+2 |-2

3x+6=0,5x |-3x

6=-2,5x | :(-2,5)

x=-2 2/5

$3 \cdot (-2\frac{2}{5})+8= -7\frac{1}{5}+8=\frac{4}{5}$

$$L = \left\{-\frac{12}{5}; \frac{4}{5}\right\}$$

c)

4x+2y=18 und 7x-y=13

4x+2y=18 |-4x

2y=-4x+18 | :2

y=-2x+9

7x-y=13 |-7x

-y=-7x+13 | $\cdot$(-1)

y=7x-13

-2x+9=7x-13 |+13

-2x+22=7x |+2x

22=9x | :9

x= $2\frac{4}{9}$

$-2 \bullet 2\frac{4}{9}+9=-4\frac{8}{9}+9=4\frac{1}{9}$

$L = \left\{\frac{22}{9};\frac{37}{9}\right\}$

d)

8x-4y=-3 und 14x-2y=8,5

8x-4y=-3 |-8x

-4y=-8x-3 | :(-4)

y=2x+ ¾

14x-2y=8,5 |-14x

-2y=-14x+8,5 | :(-2)

y=7x-4,25

2x+ ¾ =7x- $\frac{17}{4}$ |- ¾

2x=7x-5 |-7x

-5x=-5 | :(-5)

x=1

2 $\bullet$ 1+ ¾ =2 ¾

$L = \left\{1;\frac{11}{4}\right\}$

Aufgabe 154:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen nach dem Additionsverfahren.

6y=9x-81 und 6x-4y=12

Lösung:

1. Schritt:

Rechnung:

6y=9x-81 |:6

y=1 ½ x-13 ½

6x-4y=12 |-6x

-4y=-6x+12 |:(-4)

y=-1 ½ x-3

2. Gleichsetzen von I und II

1 ½ x-13 ½ =1 ½ x-3 |+13 ½

1 ½ x=1 ½ x+10 ½ |-1 ½ x

10 ½=0

3. Angabe der Lösungsmenge

L={}

Aufgabe 155:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Additionsverfahrens

$$\begin{array}{cccccc} 5x & + & 3y & = & 50 \\ 4x & - & 3y & = & 13 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} 5x & + & 3y & = & 50 \\ 4x & - & 3y & = & 13 \end{array}$$

Beide Gleichungen addieren.

$$9x = 63 \quad |:9$$

$$x = 7$$

In die erste Gleichung einsetzen.

$$5x + 3y = 50 \quad | - 5x$$

$$3y = 50 - 5x = 50 - 5 \cdot 7 = 15 \quad |:15$$

$$y = 3$$

$$\mathbb{L} = \{(7;5)\}$$

Aufgabe 156:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Einsetzungsverfahren.

$$\begin{array}{cccccc} 2{,}5x & - & y & = & 28 \\ 5x & + & 3y & = & 41 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} 2{,}5x & - & y & = & 28 \\ 5x & + & 3y & = & 41 \end{array}$$

Erste Gleichung nach y auflösen.

$$2{,}5x - y = 28 \quad | - 2{,}5x$$

$$-y = 28 - 2{,}5x \quad | \cdot (-1)$$

$$y = 2{,}5x - 28$$

In die zweite Gleichung einsetzen.

$$5x + 3y = 41$$

$$5x + 3(2{,}5x - 28\,) = 41$$

$$5x + 7{,}5x - 84 = 41 \quad | + 84$$

$$12{,}5x = 125 \quad |:12{,}5$$
$$x = 10$$

Das Ergebnis in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen:

$$y = 2{,}5x - 28 = 2{,}5 \cdot 10 - 28 = -3$$
$$y = -3$$

$$\mathbb{L} = \{(10; -3)\}$$

Aufgabe 157:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gleichsetzungsverfahren.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 7y & = & 40 \\ x & + & 6y & = & -5 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 7y & = & 40 \\ x & + & 6y & = & -5 \end{array}$$

Beide Gleichungen nach x auflösen.

$$3x + 7y = 40 \quad | - 7y$$
$$3x = 40 - 7y \quad |:3$$
$$x = \frac{40}{3} - \frac{7}{3}y$$

$$x + 6y = -5 \quad | - 6y$$
$$x = -5 - 6y$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen.

$$\frac{40}{3} - \frac{7}{3}y = -5 - 6y \quad | + 6y$$
$$\frac{40}{3} + \frac{11}{3}y = -5 \quad | - \frac{40}{3}$$
$$\frac{11}{3}y = -\frac{55}{3} \quad |: \frac{11}{3}$$
$$y = -5$$

Das Ergebnis in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen:

$$x = -5 - 6y = -5 - 6 \cdot (-5)$$
$$x = 25$$

$$\mathbb{L} = \{(25; -5)\}$$

Aufgabe 158:

Bestimme die Lösungsmenge des LGS mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

I $x-3y+2z=-4$

II $-2y+5z=7$

III $-5y+4{,}5z=-6{,}5$

Lösung:

I $x-3y+2z=-4$

II $-2y+5z=7 \quad | \cdot 5$

III $-5y+4{,}5z=-6{,}5 \quad | \cdot 2$

I $x-3y+2z=-4$

II $-2y+5z=7$

III $16z=48$

$16z=48 \quad | :16$

$z=3$

III in II :

$-2y+5 \cdot 3=7 \quad |-15$

$-2y=-8 \quad | :(-2)$

$y=4$

y=4 und z=3 in I

$x-3 \cdot 4+2 \cdot 3=-4$

$x-12+6=-4 \quad |+6$

$x=2$

Angabe der Lösungsmenge

L={2; 4; 3}

Aufgabe 159:

Bestimme die Lösungsmenge des LGS mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

I $3x-y+4z=12$

II $x-2y+z=5$

III $6x-4y+3z=16$

Lösung:

I $3x-y+4z=12 \quad | \cdot (-2)$

II x-2y+z=5 | • (-3)

III 6x-4y+3z=16

I 3x-y+4z=12

II 5y+z=-3 | • 2

III -2y-5z=-8 | • 5 +

I 3x-y+4z=12

II 5y+z=-3

III -23z=-46

-23z=-46 | :(-23)

z=2

III in II :

5y+2=-3 |-2

5y=-5 | :5

y=-1

y=-1 und z=2 in I

3x-(-1)+4 • 2=12 |-9

3x=3 |:3

x=1

Angabe der Lösungsmenge

L={1; -1; 2}

Aufgabe 160:

Bestimme die Lösungsmenge des LGS mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

I x-y+z=4

II 3x-y+4z =12

III x-4y+5z=15

Lösung:

I x-y+z=4 | • (-3)

II 3x-y+4z =12

III x-4y+5z=15 | • (-3)

I 2y+z=0

II 3x-y+4z=12 +

III x-4y+5z=15 | • (-3)

I   2y+z=0 |•11

II   3x-y+4z=12

III   11y-11z=-33 |• (-2)

III in I:

2y+2=0 |-2

2y=-2 |:2

y=-1

y=-1 und z=2 in II

3x-(-1)+4•2=12 |-9

3x=3 |:3

x=1

Angabe der Lösungsmenge

L={1; -1; 2}

Aufgabe 161:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 5z & = & 8 \\ 6x & + & y & + & z & = & 7 \\ -3x & + & 2y & + & 5z & = & 2 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 5z & = & 8 \\ 6x & + & y & + & z & = & 7 \\ -3x & + & 2y & + & 5z & = & 2 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-2) und auf die Zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 5z & = & 8 \\ & - & 3y & - & 9z & = & -9 \\ -3x & + & 2y & + & 5z & = & 2 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 5z & = & 8 \\ & - & 3y & - & 9z & = & -9 \\ & + & 4y & + & 10z & = & 10 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (4) und die dritte Gleichung mal (3)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 5z & = & 8 \\ & - & 3y & - & 9z & = & -9 \\ & & & - & 6z & = & -6 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$$-6z = -6$$
$$z = 1$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$$-3y - 9z = -9$$
$$-3y = -9 + 9z = -9 + 9 = 0$$
$$y = 0$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$3x + 2y + 5z = 8$$
$$3x = 8 - 2y - 5z = 8 - 2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = 3$$
$$x = 1$$

$$\mathbb{L} = \{(1; 0; 1)\}$$

Aufgabe 162:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 16y & - & 2z & = & -1 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & = & 22 \\ 6x & + & 14y & - & 8z & = & 2 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 16y & - & 2z & = & -1 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & = & 22 \\ 6x & + & 14y & - & 8z & = & 2 \end{array}$$

Erste Gleichung mal (3), die zweite Gleichung mal (2) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 16y & - & 2z & = & -1 \\ & - & 36y & + & 2z & = & 41 \\ 6x & + & 14y & - & 8z & = & 2 \end{array}$$

Erste Gleichung mal (3) und zur dritten Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 16y & - & 2z & = & -1 \\ & - & 36y & + & 2z & = & 41 \\ & - & 34y & - & 14z & = & -1 \end{array}$$

Die Zweite Gleichung mal (-34), die zweite Gleichung mal (36) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 16y & - & 2z & = & -1 \\ & - & 36y & + & 2z & = & 41 \\ & & & - & 572z & = & -1430 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$-572z = -1430 \quad |:-572$$

$$z = 2{,}5$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$-36y + 2z = 41 \quad | - 2z$$

$$-36y = 41 - 2z = 41 - 2 \cdot 2{,}5 = 36 \quad |: -36$$

$$y = -1$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$-2x - 16y - 2z = -1$$

$$-2x = -1 + 16y + 2z = -1 + 16 \cdot (-1) + 2 \cdot 2{,}5 = -12 \quad |: (-2)$$

$$x = 6$$

$$\mathbb{L} = \{(6; -1; 2{,}5)\}$$

Aufgabe 163:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

a) I: $4x - 2y + z = 15$

II: $-x + 3y + 4z = 15$

III: $5x - y + 3z = 26$

b) I: $2x - 3y + z = 10$

II: $x + y - 2z = -6$

III: $3x - y - 4z = -5$

c) I: $x + y + z = 1$

II: $17x + y - 7z = 9$

III: $4x + 2y + z = 3$

d) I: $3y - z = 7$

II: $2x - 3y + 2z = -21$

III: $3x + y = -21$

e) I: $2x + 7y - z = 13$

II: $17x - 3y + 4z = -9$

III: $3x - 2y + z = -5$

f) I: $3x - 4y - 6z = 42$

II: $-x - 2y + 3z = -6$

III: $7x + 10y + 6z = 0$

Lösungen:

a) (2 / -1 / 5)

b) (0,7 / -2,1 / 2,3)

c) unendlich viele Lösungen

d)(-8 / 3 / 2)

e) L = { }

f) (6 / -3 / -2)

Aufgabe 164:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & + & 2z & = & 16 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 21 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & + & 2z & = & 16 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 21 \end{array}$$

Erste Gleichung mal (2) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 6y & + & 4z & = & 22 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 21 \end{array}$$

Erste Gleichung mal (3), die zweite Gleichung mal (2) und addieren.

Die Zweite Gleichung mal (-7), die dritte mal (6) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 6y & + & 4z & = & 22 \\ & & & + & 38z & = & 152 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$38z = 152 \quad |:38$$

$$z = 4$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$6y + 4z = 22 \quad | - 4z$$

$$6y = 22 - 4z = 22 - 4 \cdot 4 = 6$$

$$y = 1$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$-2x + 3y + z = 3$$

$$-2x = 3 - 3y - z = 3 - 3 \cdot 1 - 4 = -4$$

$$x = 2$$

$$\mathbb{L} = \{(2; 1; +4)\}$$

Aufgabe 165:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 4x & - & 4y & + & 2z & = & 16 \\ 3x & - & 2y & + & 3{,}5z & = & 21 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 4x & - & 4y & + & 2z & = & 16 \\ 3x & - & 2y & + & 3{,}5z & = & 21 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (2) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 2y & + & 4z & = & 22 \\ 3x & - & 2y & + & 3{,}5z & = & 21 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal(3), die dritte mal (2) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 2y & + & 4z & = & 22 \\ & + & 5y & + & 10z & = & 51 \end{array}$$

Die Zweite mal (-5), die dritte mal (2) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 2y & + & 4z & = & 22 \\ & & & & 0 & = & -8 \end{array}$$

In der letzten Zeile entsteht ein Wiederspruch, damit hat das LGS keine Lösung.

Aufgabe 166:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & + & 2z & = & 14 \\ 3x & + & 3y & + & 3{,}5z & = & 20{,}5 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & + & 2z & = & 14 \\ 3x & + & 3y & + & 3{,}5z & = & 20{,}5 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (2) und auf die zweite addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 6y & + & 4z & = & 20 \\ 3x & + & 3y & + & 3{,}5z & = & 20{,}5 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (3), die dritte mal (2) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 6y & + & 4z & = & 20 \\ & + & 15y & + & 10z & = & 50 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (-15), die dritte Gleichung mal (6) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 6y & + & 4z & = & 20 \\ & & & + & & = & \end{array}$$

Eine Gleichung fällt weg, daher erhält man eine Parameterlösung.

Wähle $z = t$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$6y + 4z = 20 \quad | - 4z$$

$$6y = 20 - 4z = 20 - 4 \cdot t \quad |: 6$$

$$y = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}t$$

Aus der ersten Gleichung folgt.

$$-2x + 3y + z = 3$$

$$-2x = 3 - 3y - z = 3 - 3\left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3}t\right) - t = 3 - 10 + 2t - t = t - 7 \quad |: (-2)$$

$$x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}t$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}t; \frac{10}{3} - \frac{2}{3}t; t\right)\right\}$$

Aufgabe 167:

Lösen Sie lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

a)

(a) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Zur Berechnung einer Zeilenstufenform subtrahieren wir das 4-fache der 1.Zeile von Zeile 2 und das 2-fache von Zeile 3. Die Matrix wird überführt in:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

Nun subtrahieren wir von Zeile 3 die Zeile 2 und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Die Matrix entspricht dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= -13 \\ 0x_4 &= 5 \Rightarrow 0 \neq 5 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

b)

(b) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array}\right)$$

Subtrahieren wir von Zeile 2 das 2-fache der Zeile 1 und von Zeile 3 die Zeile 1, so erhalten wir die Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Jedoch sehen wir, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Der Rang der erweiterten Systemmatrix ($r = 3$) stimmt nicht mit dem Rang der Systemmatrix ($r = 2$) überein.

c)

(c) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Von Zeile 2 ziehen wir das 2-fache der ersten Zeile ab und von Zeile 3 ziehen wir das 3 fache der Zeile 1 ab. Wir haben die Matrix überführt in:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \end{array}\right)$$

Von Zeile 3 subtrahieren wir das 4/3-fache der Zeile 2 und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist in Zeilenstufenform, sie entspricht dem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -3x_2 - 3x_3 &= -3 \\ -4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} x_3 &= -\tfrac{1}{4} \\ -3x_2 - 3\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) &= -3 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = \tfrac{5}{4} \\ x_1 + 2\cdot\tfrac{5}{4} + 3\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) &= 1 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Als Vektor geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

d)

(d) Die zugehörige erweiterte Matrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Mit dem Gauß Algorithmus berechnet man analog zu Aufgabenteil a) – c) die Zeilenstufenform zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix hat den Rang r =2. Pivotvariablen sind x_1 und x_2, Variable x_3 kann als Parameter frei gewählt werden. Es existieren also unendlich viele Lösungen.

Man erhält die Lösungen:

$$-5x_2 + 11x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{5}x_3$$

$$x_1 + 2(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{5}x_3) - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \tfrac{2}{5} - \tfrac{7}{5}x_3$$

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 168:

Lösen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem mit Hilde der Cramer’schen Regel.

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$
$$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

Lösung:

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$
$$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$D := \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$ $\quad D = 3 \quad$ Es existiert eine eindeutige Lösung

$D1 := \left|\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$ $\quad D1 = 3 \quad x_1 := \frac{D1}{D} \quad x_1 = 1$

$D2 := \left|\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -5 & -5 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$ $\quad D2 = 6 \quad x_2 := \frac{D2}{D} \quad x_2 = 2$

$D3 := \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$ $\quad D3 = 9 \quad x_3 := \frac{D3}{D} \quad x_3 = 3$

Aufgabe 169:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 5y & + & 5z & = & 30 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 5y & + & 5z & = & 30 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Die erste und die zweite Gleichung vertauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 5x & + & 5y & + & 5z & = & 30 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (5) und auf die zweite addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & + & 10y & & & = & 20 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (2) und auf die dritte addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & + & 10y & & & = & 20 \\ & + & 3y & + & 3z & = & 15 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (3), die dritte Gleichung mal (-10) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & + & 10y & & & = & 20 \\ & & & - & 30z & = & -90 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$$-30z = -90 \quad |:(-30)$$

$$z = 3$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$$10y = 20 \quad |:10$$

$$y = 2$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$-x + y - z = -2$$

$$x = y - z + 2 = 2 - 3 + 2 = 1$$

$$x = 1$$

$$\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}$$

Aufgabe 170:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 21 \\ 2x & & & + & z & = & 8 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 21 \\ 2x & & & + & z & = & 8 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (3), die zweite Gleichung mal (2) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 7y & + & 11z & = & 51 \\ 2x & & & + & z & = & 8 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 7y & + & 11z & = & 51 \\ & + & 3y & + & 2z & = & 11 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (3), die dritte Gleichung mal (-7) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 7y & + & 11z & = & 51 \\ & & & + & 19z & = & 76 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$$19z = 76 \quad |:19$$

$$z = 4$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$$7y + 11z = 51 \quad | - 11z$$

$$7y = 51 - 11z = 51 - 11 \cdot 4$$

$$7y = 7 \quad |:7$$

$$y = 1$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$-2x + 3y + z = 3$$

$$-2x = 3 - 3y - z = 3 - 3 \cdot 1 - 4$$

$$-2x = -4 \quad |:(-2)$$

$$x = 2$$

$$\mathbb{L} = \{(2; 1; 4)\}$$

Aufgabe 171:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die zweite Gleichung tauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-2) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ & - & 21y & + & 8z & = & -8 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ & - & 21y & + & 8z & = & -8 \\ & + & 11y & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (11), die dritte Gleichung mal (21) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ & - & 21y & + & 8z & = & -8 \\ & & & + & 46z & = & -46 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$$46z = -46 \quad |:46$$

$$z = -1$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$$-21y + 8z = -8 \quad | - 8z$$

$$-21y = -8 - 8z = -8 - 8 \cdot (-1) = 0$$

$$y = 0$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$x + 10y - 3z = 5$$

$$x = 5 - 10y + 3z = 5 - 10 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2$$

$$x = 2$$

$$\mathbb{L} = \{(2; 0; -1)\}$$

Lineare Optimierung

Aufgabe 172:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 173:

Gegeben ist das LOP

Z: Min $z=3x_1+4x_2$

NB:
$$2x_1 + 5x_2 \ge 25$$
$$4x_1 + 4x_2 \ge 32$$
$$6x_1 + 2x_2 \ge 24$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 174:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 175:

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 176:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 177:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 178:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=8x_1+4x_2$

NB:
$$3x_1 + 5x_2 \le 32$$
$$4x_1 + 4x_2 \le 32$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 28$$

Aufgabe 179:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=2x_1+3x_2$

NB:
$$6x_2 \le 30$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 36$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 38$$

Aufgabe 180:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1-x_2\geq 6$$
$$x_1-x_2\leq 1$$
$$-2x_1+x_2\geq 3$$

NNB: $x_1,x_2\geq 0$

Aufgabe 181:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1-x_2\leq 6$$
$$x_1-x_2\leq 1$$
$$-2x_1+x_2\leq 3$$

NNB: $x_1,x_2\geq 0$

Aufgabe 182:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=-3x_1+2x_2$

NB:
$$x_1-x_2\leq 3$$
$$-x_1+x_2\leq 4$$
$$-2x_1+x_2\leq 3$$

NNB: $x_1,x_2\geq 0$

Aufgabe 183:

Lösen Sie folgendes LOP.

a) Max. $F(x,y) = 4x + 3y$

$$\begin{array}{rcl} x + 3y & \leq & 9 \\ -x + 2y & \geq & 2 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

b) Max. $F(x,y) = x + y$

$$\begin{array}{rcl} 5x + y & \leq & 10 \\ x + 2y & \leq & 6 \\ x - y & \geq & 1 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

c) Max. $F(x,y) = x - y$

$$\begin{array}{rcl} 2x - y & \leq & 0 \\ x + 2y & \leq & 1 \\ 2x + y & \geq & 2 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

d) Max. $F(x,y) = 2x + y$

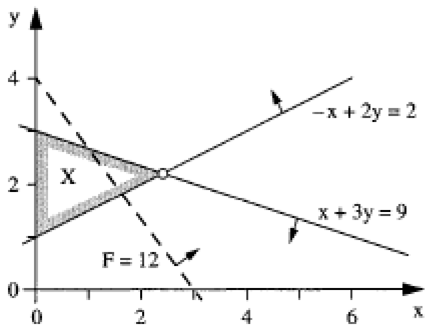
$$\begin{array}{rcl} -x + y & \leq & 1 \\ x + 3y & \geq & 6 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

Lösung:

a) Optimale Lösung:

$x^* = 2.4,\ y^* = 2.2$

$F^* = 16.2$

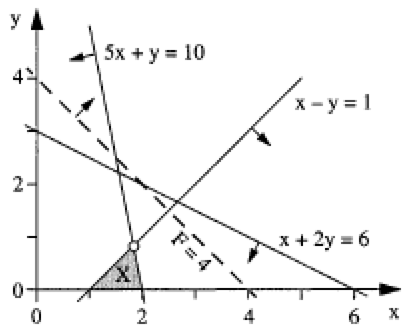


b) Optimale Lösung:

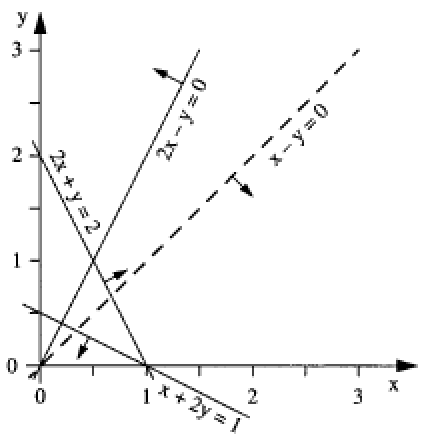
$x^* = 11/6 = 1.833$

$y^* = 5/6 = 0.833$

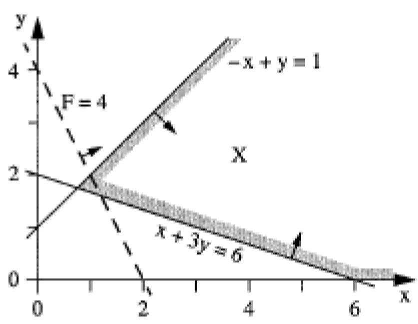
$F^* = 8/3 = 2.67$



c) Es existiert keine zulässige Lösung.



d) Der zulässige Bereich ist unbeschränkt. Der Zielfunktionswert lässt sich beliebig steigern; somit ist keine optimale Lösung angebbar.



Aufgabe 184:

Ein Gärtner möchte einen 100 qm großen Garten mit Rosen und/oder Nelken bepflanzen.

Er möchte max. 720 Euro an Arbeits- und Materialkosten investieren und höchstens 60qm für Nelken reservieren.

Folgende Tabelle enthält weitere Daten des Problems.

	Rosen	Nelken
Arbeits- und Materialkosten (in Euro/qm)	6	9
Gewinn	1	2

Wie viele qm sollen mit jeder Sorte bepflanzt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird?

Lösung:

x1: mit Rosen zu bepflanzende Fläche

x2: mit Nelken zu bepflanzende Fläche

Damit erhalten wir folgendes Modell

Max Z=x1+2x2

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$6x_1 + 9x_2 \leq 720$$
$$x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zielfunktion umgeformt

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

P(30,60) Z=150

Aufgabe 185:

Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten.

Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 Euro je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 Euro je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 Euro für die Zelte ausgeben.

Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?

Lösung:

Diese Aufgabenstellung ist in zwei Teile unterteilt:

Zunächst erfahren wir Bedingungen, die die Lösung beeinflussen, danach wird das Ziel bestimmt. Um die Lösung übersichtlicher zu gestalten ordnen wir zunächst den beiden Zelten Variablen zu, nämlich

x = 10-Personenzelte

y = 15-Personenzelte

Der nächste Schritt besteht in dem Umformen der Bedingungen in mathematische Formeln. Dadurch erhalten wir folgende Ungleichungen:

x >= 0

y >= 0

(da von beiden Zelten ja eine Anzahl größer null oder auch gar keines gekauft wird)

x <= 5

y <= 4

(da höchstens 5 bzw. 4 Zelte gekauft werden können)

Außerdem wissen wir, dass der Jugendgruppe nur 1800 Euro zur Verfügung stehen und dass die Zelte 200 Euro bzw. 400 Euro kosten.

Daraus ergibt sich folgende Ungleichung:

200x+400y<=1800

Diese Bedingung formen wir zur besseren Handhabung in

x+2y<=9 um.

Um diese Voraussetzungen in ein Koordinatensystem einzufügen, werden sie zunächst in Gleichungen umgewandelt:

x=0

y=0

x=5

y=4

x+2y=9

Graphische Lösung

In einem Koordinatensystem sieht das dann folgendermaßen aus:

Dadurch erhalten wir die hier gelb gefärbte, denn nur die Punkte dieses Bereiches erfüllen die Bedingungen.

Von diesen zulässigen Lösungen muss nun das Wertepaar (x/y) bestimmt werden, mit dem die Jugendgruppe die meisten Personen unterbringen kann.

Dafür stellen wir zunächst die sog. Zielfunktion auf:

10*x+15*y=Z

(wobei Z die Menge der Personen ist)

Durch Umstellen dieser Zielfunktion mit drei Variablen erhalten wir die Formel

$$\frac{x}{\frac{Z}{10}} + \frac{y}{\frac{Z}{15}} = 1$$

Wählen von Z=60

die wir in das Koordinatensystem einfügen.

Jetzt geben wir beliebige Werte für Z ein, bis eine Funktion nur noch einen Punkt mit der Menge der zulässigen Lösungen gemeinsam hat. Dieser Punkt kennzeichnet das Wertepaar, mit dem die meisten Personen untergebracht werden können (siehe roter Kreis).

Das hier abzulesende Ergebnis P(5,2) (5 Zehnpersonenzelte und 2 Fünfzehnpersonenzelte) lässt sich auch rechnerisch überprüfen, indem man die Probe macht:

5*200 Euro+2*400 Euro=1800 Euro

Aufgabe 186:

Eine kleine Motoradfabrik baut und verkauft die beiden Typen Mofa und Lofa. Während die Produktionskosten für ein Mofa 5.000 Euro betragen, belaufen sie sich bei der Lofa nur auf 3.000 Euro pro Stück. Insgesamt können pro Tag nicht mehr als 30.000 Euro für die Produktion ausgegeben werden.

Für die Fertigung der Mofas rechnet die Arbeitsvorbereitung mit einer Arbeitszeit von 30 Stunden, für die der Lofas setzt sie hingegen 60 Stunden an. Pro Tag stehen maximal 480 Arbeitsstunden zur Verfügung. Vom Mofa sollen pro Tag maximal 3 Stück gefertigt werden.

Marktanalysen zeigen, dass pro Tag mindestens 4 Lofas abgesetzt werden müssen und unbegrenzt Mofas abgesetzt werden können. Der Verkaufspreis der Lofas liegt bei 5.000 Euro, der der Mofas bei 10.000 Euro pro Stück.

Wie viel Mofas und Lofas sollen täglich produziert werden, um das Umsatzmaximum zu erreichen? Wie groß ist dieser maximale Umsatz?

Lösung:

Zielfunktion:		$Z = 10.000\,M + 5.000\,L$	$\rightarrow$ Max.	
Nebenbedingungen:				
Produktionskosten	I	$5.000\,M + 3.000\,L \leq 30.000$	$\rightarrow$	$L \leq 10 - \frac{5}{3} M$
Arbeitsstunden	II	$30\,M + 60\,L \leq 480$	$\rightarrow$	$L \leq 8 - \frac{1}{2} M$
max. Produktion	III	$M \leq 3$	$\rightarrow$	$M \leq 3$
Mindestverkauf	IV	$L \geq 4$	$\rightarrow$	$L \geq 4$
Nichtnegat.-bed.:	V / VI	$M , L \geq 0$		

<u>Errechnen des Gewinnmaximums:</u> Schnittpunkt der Geraden I und III

$M = 3$ $\qquad L = 10 - \frac{5}{3}M$

$L = 10 - 5 = 5$

<u>Ermitteln des Gewinns:</u>

$$\begin{aligned} \mathbf{Z\,(M,\,L)} &= \mathbf{10.000\,M + 5.000\,L} \quad \rightarrow \mathbf{Max.} \\ &= 10.000 \cdot 3 + 5.000 \cdot 5 \\ &= 55.000 \end{aligned}$$

Aufgabe 187:

Eine Tischlerei erhält einen Auftrag, für den unterschiedliche Holzplatten mit der folgenden Stückzahl zu verwenden sind:

10 Platten der Größe A,

12 Platten der Größe B,

8 Platten der Größe C,

4 Platten der Größe D.

Die Tischlerei bezieht dazu aus einem Sägewerk zwei Holzplattentypen I und II, die auf vorgegebene Weise (Abbildung 1) zu zerschneiden sind.

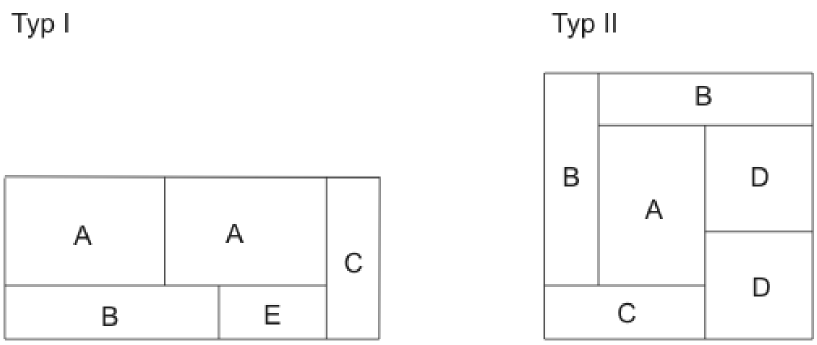


Abbildung 1: Zerlegung der Holzplattentypen.

Der Preis einer Platte des Typs I beträgt 300 Euro und der einer Platte des Typs II 200 Euro. Aus Lager- und Verkaufsgründen sollten nicht mehr als 16 Platten der Größe D und nicht mehr als 5 Platten der Größe E gelagert werden.

Es ist zu ermitteln, wie viel Platten I und II gekauft werden müssen, damit der Auftrag ausgeführt werden kann und der Gesamteinkaufspreis der Platten so gering wie möglich ausfällt.

Lösung:

Das gegebene Problem ist dergestalt, dass wir es graphisch in der Ebene lösen können. Dazu werden zuerst kalkülmäßig die Zielfunktion und die Nebenbedingungen formuliert. Die Nebenbedingungen sind Ungleichungen. Die graphische Veranschaulichung der Nebenbedingungen ergibt Schnitte von Halbebenen, deren Ergebnis im vorliegenden Fall ein begrenztes Gebiet ist, der so genannte **zulässige Bereich** (Abbildung 2). Der zulässige Bereich enthält alle Punkte der Ebene, deren Koordinaten die Nebenbedingungen erfüllen. Als Repräsentation der Zielfunktion wird eine

Optimierungsgerade eingeführt. Diese wird so lange parallel in Optimierungsrichtung verschoben (der Absolutwert der verschobenen Gerade muss kleiner werden, weil die Zielfunktion minimiert werden soll), bis die Optimierungsgerade eben noch den zulässigen Bereich tangiert. Dieser "letzte" Berührungspunkt der Optimierungsgerade mit dem zulässigen Bereich ist der optimale Punkt, seine Koordinaten sind die gesuchten Werte x und y.

Lineare Funktionen besitzen die Eigenschaft der Konvexität. Daher können wir den Sachverhalt nutzen, dass der "letzte" gemeinsame Punkt der Optimierungsgerade mit dem zulässigen Bereich ein Eckpunkt ist. Es reicht demzufolge aus, die Gerade in alle Eckpunkte parallel zu verschieben und dabei den Absolutwert der Gerade, die Ordinate des Schnittpunktes mit der Ordinatenachse, zu betrachten (Abbildung 2).

Es bezeichne x die Anzahl der einzukaufenden Platten des Typs I, es bezeichne y die Anzahl der einzukaufenden Platten des Typs II.

Modellieren wir die im Aufgabentext angegebenen Aussagen in Formeln, entsteht das folgende Optimierungsproblem. Die zugehörige Zielfunktion lautet:

$G = 300x + 200y = Min!$ (1)

Als Nebenbedingungen ergeben sich die Ungleichungen

(A) $2x + y \geq 10$

(B) $x + 2y \geq 12$

(C) $x + y \geq 8$

(D) $2y \geq 4$

(D') $2y \leq 16$

(E) $x \leq 5$

(N) $x, y \geq 0$, x, y ganzzahlig

Zur besseren graphischen Darstellbarkeit wird (1) und (2) umgeformt, es entsteht als Zielfunktion

$y = -3/2x + G^*$

Als Nebenbedingungen entstehen die Ungleichungen für ganze x und y

(A) $y \geq -2x + 10$

(B) $y \geq -0{,}5x + 6$

(C) $y \geq -x + 8$

(D) $y \geq 2$

(D') $y \leq 8$

(E) $0 \leq -x + 5$

(N) $x, y \geq 0$.

Durch den Eintrag in ein Koordinatensystem in der Ebene gelangen wir nun zum zulässigen Bereich durch den Schnitt der Halbebenen, die in (4) definiert sind (Abbildung 2).

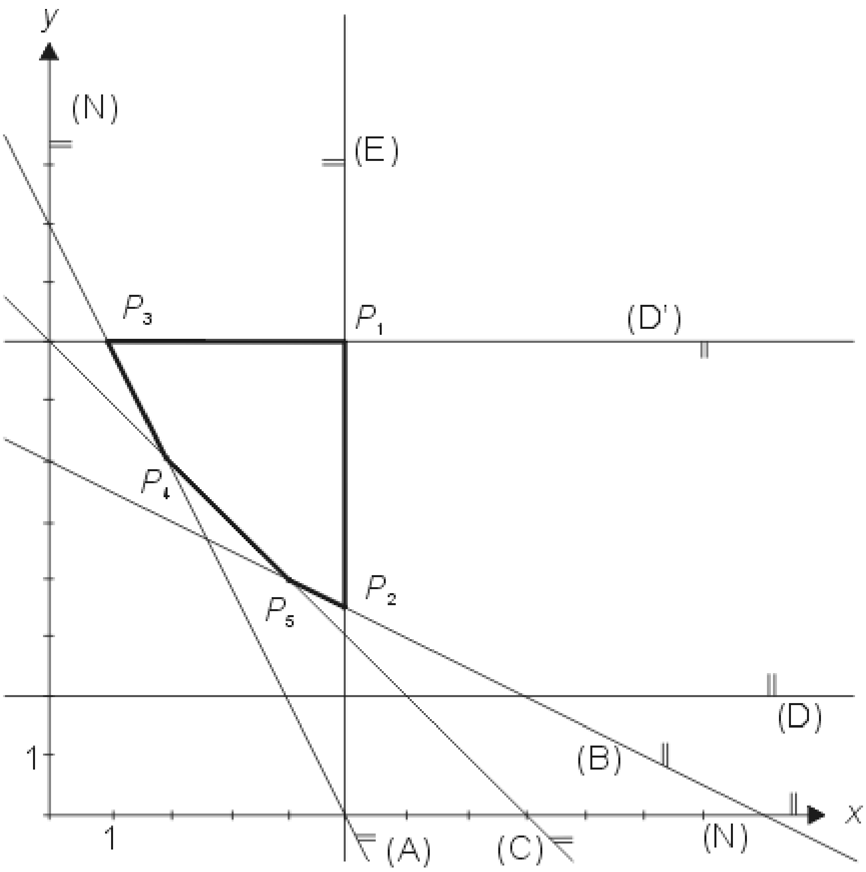


Abbildung 2: Ermittlung des zulässigen Bereichs.

Als Eckpunkte des zulässigen Bereiches ergeben sich die Koordinatentupel P_1=(5, 8), P_2=(5, 3.5), P_3=(1, 8), P_4=(2, 6) und P_5=(4, 4). Da an eine Lösung des Optimierungsproblems die Forderung der Ganzzahligkeit gestellt wird, werden die Eckpunkte mit nichtganzzahligen Koordinaten (im Beispiel P_2) nicht weiter berücksichtigt.

Zeichnen wir im Koordinatensystem eine Schar von Parallelen, die verschiedenen G^* entsprechen, so dass jeweils die (ganzzahligen!) Eckpunkte des zulässigen Bereichs auf den Geraden liegen (Abbildung 3), ergeben sich die Absolutwerte der Geraden mit G_1^* = 15.5; G_3^* = 9.5; G_4^* = 9 und G_5^* = 10.

Betrachten wir aufgrund der Minimierung von G^* die **Optimierungsrichtung** in Richtung der negativen y-Achse, erkennen wir, dass G^* den Minimalwert annimmt und gerade noch den zulässigen Bereich in dem Eckpunkt (x, y) = (2, 6) tangiert, wenn G^* = G_4^* = 9 gilt.

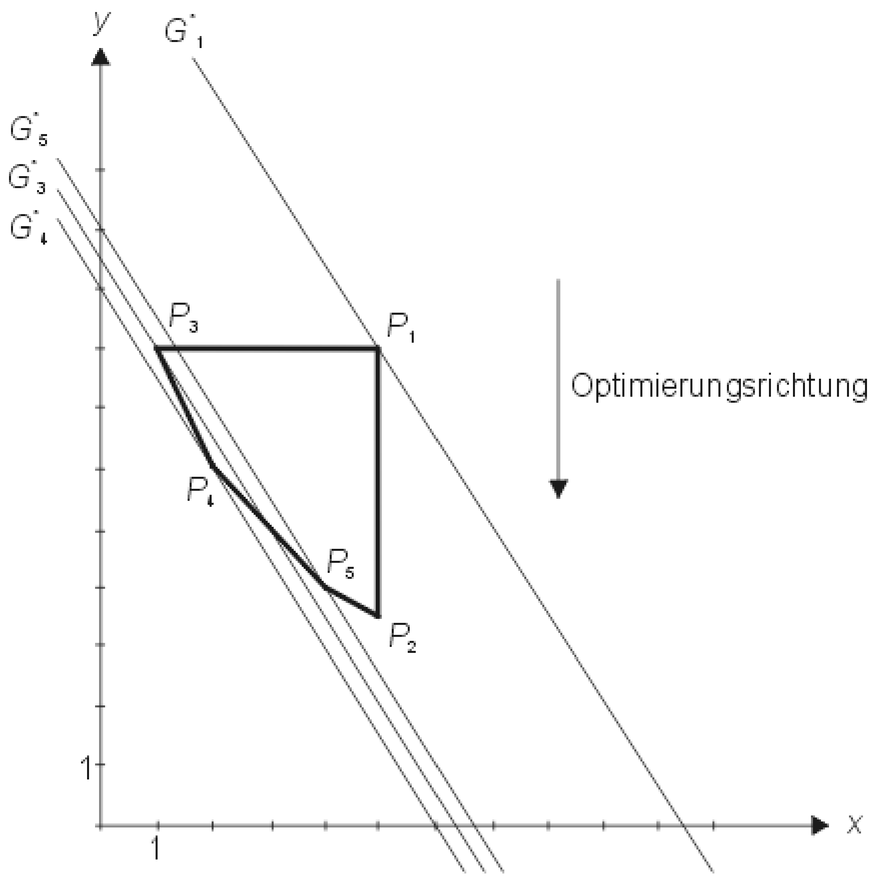


Abbildung 3: Suchen der Optimalstelle durch Minimierung.

Also besitzt das lineare Optimierungsproblem folgende Lösung: Es sind genau 2 Platten des Typs I und 6 Platten des Typs II einzukaufen, der Einkaufswert beträgt G = 1800 DM.

Graphische Lösungen bieten sich bei zweidimensionalen Problemen aber auch an, wenn nur die Nebenbedingungen linear sind und die Zielfunktion beispielsweise quadratisch auftritt. Nicht unerwähnt bleiben soll das graphische Lösen dreidimensionaler linearer Optimierungsprobleme. Einfache räumliche Aufgaben unterstreichen die Komplexität der mathematischen Optimierung, schulen das Vorstellungsvermögen und sind in komplizierterer Form ein hervorragender Einstieg in vieldimensionale Problematiken, hinarbeitend auf die Simplexmethode.

Aufgabe 188:

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit zwei tiermehlfreien Futtersorten A und B (z.B. Rüben und Heu). Die Tagesrationen eines Rindes müssen die Nährstoffe 1,2 und 3 im Umfang von mindestens 6,12 bzw. 4 g enthalten.

Die Nährstoffgehalte in g pro kg und Preise in GE pro kg der beiden Sorten zeigt die folgende Tabelle:

	Sorte A	Sorte B	Tagesbedarf
Nährstoff 1	2	1	6
Nährstoff 2	2	4	12
Nährstoff 3	0	4	4
Preis in GE/kg	5	7	

Wie viele kg von Sorte A bzw. B muss jede Tagesration enthalten, wenn sie unter Einhaltung der Nährstoffbedingungen die Kosten minimal sein sollten.

Lösung:

Mit den Variablen

x_1: kg von Sorte A pro Tagesration

x_2: kg von Sorte B pro Tagesration

lautet das Optimierungsproblem

Min $Z=5x_1+7x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$2x_1+x_2 \geq 6$$
$$2x_1+4x_2 \geq 12$$
$$4x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Umformung der Zielfunktion

$$Z=5x_1+7x_2$$

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{5}}+\frac{x_2}{\frac{Z}{7}}=1$$

P(2,2), Z=24 GE

Aufgabe 189:

Ein Hersteller produziert zwei Sortimente eines Artikels, der aus Teilen besteht, die geschnitten, zusammengebaut und fertig gestellt werden müssen.

Der Unternehmer weiß, dass er so viele Artikel verkaufen kann, wie er produziert. Sortiment 1 benötigt 25 Minuten zum Zerschneiden, 60 Minuten zum Zusammenbau und 68 Minuten, um es verkaufsfertig zu machen. Es erzielt 30 Euro Gewinn. Für Sortiment 2 braucht man 75 Minuten zum Schneiden, 60 Minuten für den Zusammenbau und 34 Minuten, zur Fertigstellung. Dieses Sortiment erzielt einen Gewinn von 40 Euro. Es stehen nicht mehr als 450 Minuten zum, Zerschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau und 476 Minuten zum Fertigstellen pro Tag zur Verfügung.

Nun stellt sich dem Unternehmer die Frage, wie viele Artikel von jedem Sortiment jeden Tag produziert werden müssen, um den Gewinn zu maximieren.

Lösung:

Als erstes müssen wir wieder die Angaben in Ungleichungen umändern und Variablen verteilen.

Es seien x die Anzahl der Artikel aus Sortiment 1 und y die Anzahl der Artikel aus Sortiment zwei.

Die Werte für x und y können nicht negativ sein, sondern nur Beträge größer oder gleich null annehmen:

x >= 0

y >= 0

Die Zuschneide-, Zusammenbau- und Fertigstellungszeiten führen zu folgenden Ungleichungen:

25x+75y <= 450	x+3y<=18
60x+60y <= 480	x+y<=8
68x+34y <= 476	2x+y<=14

Graphische Lösung:

In einer Grafik repräsentieren diese drei Ungleichungen die Flächen unterhalb den vorgegebenen Linien, während die ersten beiden Ungleichungen genau auf den Achsen liegen, und damit die Fläche abgrenzen:

Das Problem besteht nun darin, Werte für x und y zu finden, die alle Randbedingungen erfüllen und den Gewinn maximieren. Um dies zu erreichen müssen wir zunächst wieder die Zielfunktion aufstellen:

30*x+40*y = Z

Nun wird diese Funktion in eine Form umgeschrieben, die in ein Koordinatensystem eingetragen werden kann.

$\frac{x}{\frac{Z}{30}}+\frac{y}{\frac{Z}{40}}=1$ Man wählt z=120

Jetzt gibt man wieder beliebige Werte für Z ein, bis eine der entstehenden Funktionen den möglichen Bereich nur noch in einem Punkt schneidet. Dieser Punkt kennzeichnet das Wertepaar, mit dem eine optimale Anzahl an Sortimenten hergestellt wird.

Dieses Ergebnis (3 / 5) lässt sich wieder mit der Probe überprüfen:

3*30 Euro+5*40 Euro=290 Euro. Der Unternehmer sollte also drei Artikel aus Sortiment 1 und fünf Artikel aus Sortiment 2 herstellen, um die Arbeitszeit optimal auszunutzen und den Gewinn dabei zu maximieren.

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 190:

Ein Unternehmen gewinnt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) zwei Mineralien (M_1,M_2). Eine Tonne M_1 wird aus 6 Tonnen R_1, 4 Tonnen R2 und 4 Tonnen R3 hergestellt; eine Tonne M_2 ergibt sich aus 3 Tonnen R_1, 4 Tonnen R_2 und 12 Tonnen R_3. Pro Woche stehen maximal 60 Tonnen R_1, 44 Tonnen R_2 und 84 Tonnen R_3 zur Verfügung. Eine Tonne M_1 bzw. M_2 wirft einen Gewinn von 200 € bzw. 300 € ab.

a) Lösen Sie dieses Problem grafisch. (6,5)

b) Was würde sich für das Optimum ergeben, wenn zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen verlangt würde, dass von M_2 mindestens 8 Tonnen erzeugt werden müssten?

Lösung:

Das entsprechende lineare Optimierungsproblem lautet in Grundform:

Max $Z = 200x_1+300x_2$

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{200}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{300}} = 1$$

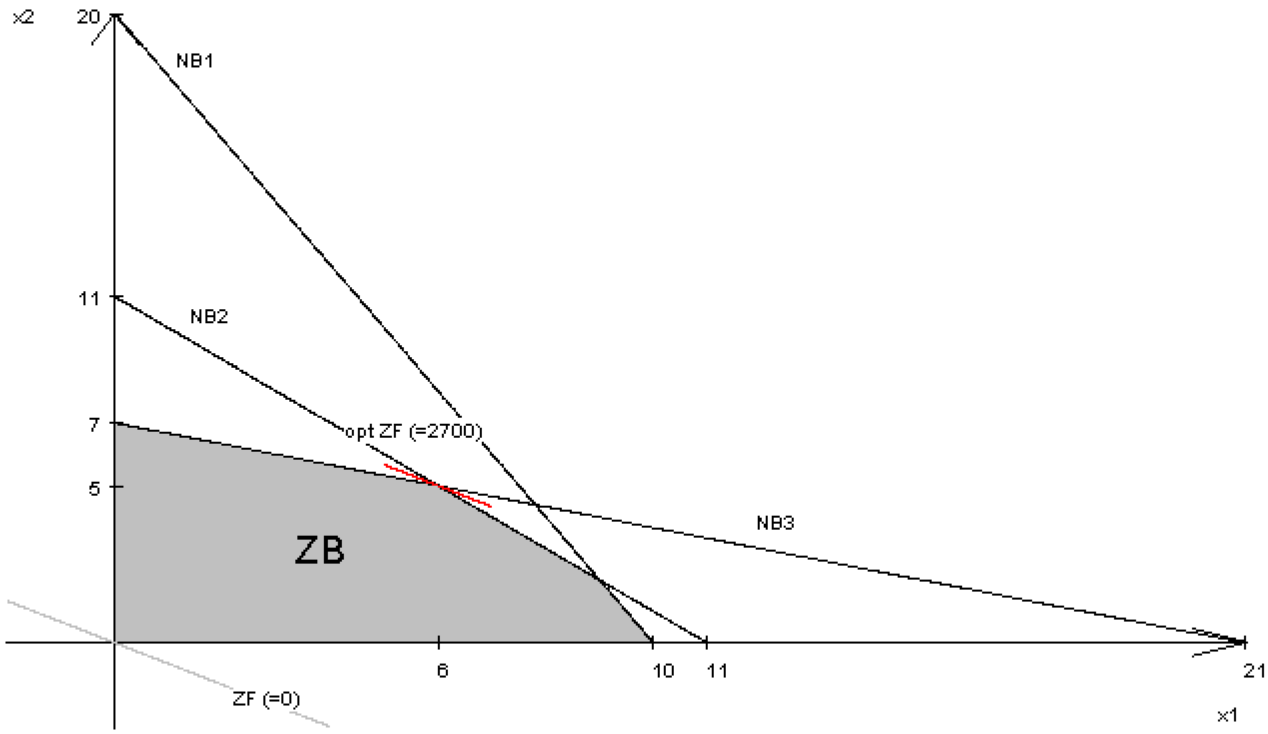
$6x_1+3x_2<60$

$4x_1+4x_2<44$

$4x_1+12x_2<84$

$x_1,x_2>=0$

Grafische Lösung für a)



Der Grafik entnimmt man, dass der Optimalpunkt in dieser Aufgabe eindeutig der Schnittpunkt der zweiten und der dritten Nebenbedingungsgeraden ist. Diesen bestimmt man als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &= 44 \\ 4x_1 + 12x_2 &= 84 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die optimale Lösung x* = (x_1*, x_2*) = (6,5).

D.h. es ist unter den beschriebenen Bedingungen gewinnmaximal 6 Tonnen des Minerals 1 und 5 Tonnen des Minerals 2 herzustellen.

Der maximaleGewinnbeträgt G* = 200[€/to]×6[to] + 300[€/to]×5[to] = 2700,-€. Die Rohstoffe R_2 und R_3 werden bei dieser Produktion vollständig verbraucht. (geometrisch: das Optimum ist der Schnittpunkt von NB2 und NB3), während von Rohstoff 1 noch Restkapazität verbleibt.

Lösung für b)

Die Nebenbedingungen widersprechen sich.

Dies führt dazu, dass der zulässige Bereich leer ist.

Aufgabe 191:

Bestimmen Sie für folgendes LOP-Problem die minimale Lösung. Verwenden Sie hierzu die grafische Lösung. Zeichnen Sie dort die gefundene Lösung ein. Die x_1-Werte und die x_2-Werte brauchen Sie für die minimale Lösung nicht zu bestimmen.

Z:

$2x_1 - x_2 \rightarrow \text{Min}$

NB:

$2x_1 + 6x_2 \leq 10$

$-x_1 - x_2 \leq 2$

$3x_1 - 6x_2 \leq 9$

$-4x_1 + 5x_2 \leq 6$

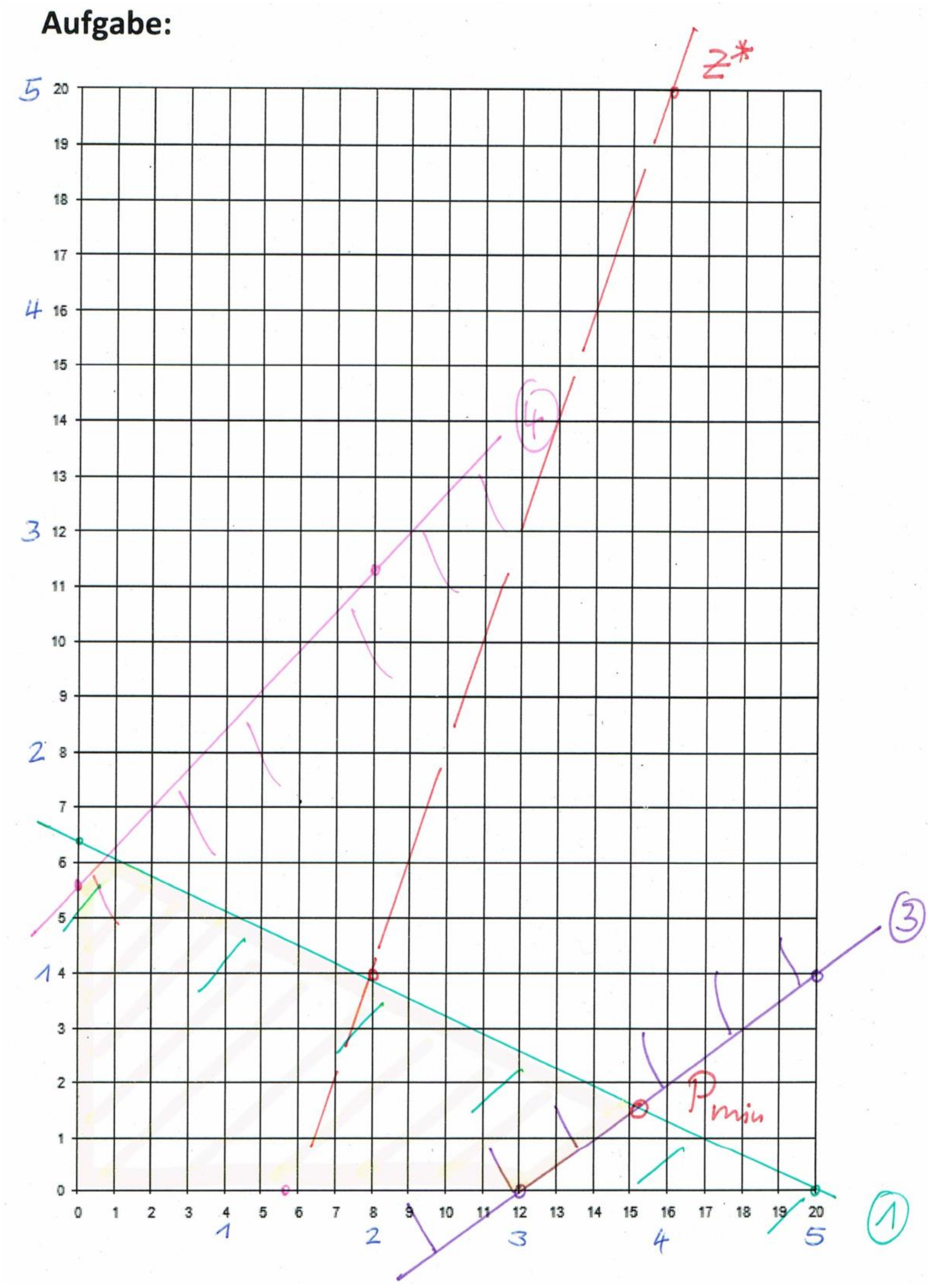
NNB:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

Die zweite Bedingung spielt für die Lösung keine Rolle.

Aufgabe:



Aufgabe 192:

Eine Schulklasse mit 29 Schülern und 6 Begleitpersonen (mit Führerschein) möchte einen Ausflug machen. Um zu ihrem Ausflugsziel zu kommen, können sie Kleinbusse mit 8 Sitzplätzen bzw. Autos mit 5 Sitzplätzen mieten, die von den Begleitpersonen gefahren werden sollen. Die Busse kosten 50 € am Tag, die Autos 20 € am Tag.

Wie viele Busse bzw. Autos müssen die Schüler mieten, um möglichst preisgünstig den Ausflug machen zu können?

Lösung:

x: Anzahl Busse

y: Anzahl PKW

Z:

$50x + 20y \rightarrow \mathrm{Min}$

NB:

$8x + 5y \geq 35$

$x + y \leq 6$

NNB:

$x, y \geq 0$

$P(2|4)$

$Z = 180$

Aufgabe 193:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der grafischen Lösungsvariante.

$Z: x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

Nebenbedingungen:

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

$5x_1 + 5x_2 \geq 25$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

a)