Manuskript

Mathematik II

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart

Campus Horb

Dozent

Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Inhaltsverzeichnis

Allgemeines

Einteilung der Unterrichtseinheiten

Vor jeder neuen Unterrichtseinheit stelle ich Aufgaben zur Wiederholung des in der letzten Unterrichtseinheit behandelten Themas. Der Umfang beträgt je nach Thema zwischen 20-40 Minuten.

Zu jedem Thema erhalten die Studenten „Hausaufgaben“ zum selbstständigen bearbeiten des behandelten Stoffs. Diese werden den Studenten anhand einer Aufgabensammlung zur Verfügung gestellt.

Parallel biete ich sogenannte Stützkurse an, um die Themen noch ausgiebig üben zu können.

In der Klausur dürfen die Studenten den ausgeteilten Taschenrechner und die Formelsammlung aus dem Projekt StudiStartUp verwenden. Diese Formelsammlung enthält leere Seiten, auf denen weitere für den einzelnen Studenten wichtige Formeln vermerkt werden dürfen. Es dürfen aber keine Beispiele eingetragen werden.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Mathematikvorlesung

Roland Geiger

Mathematik II 5 SWS (pro Woche)

Analysis:

- Trigonometrische Zusammenhänge
- Trigonometrische Funktionen
- Trigonometrische Gleichungen
- Differentialrechnung mit Funktionen einer Variablen (falls noch nicht im ersten Semester behandelt)
- Integralrechnung mit Funktionen einer Variablen

Unendliche Reihen:

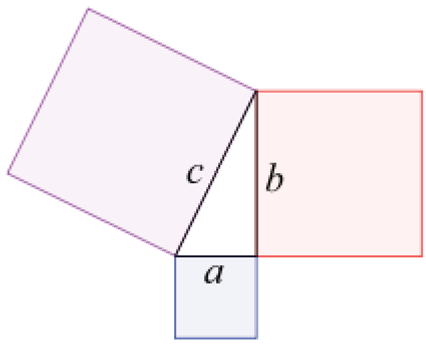
- mit Potenzreihen und Taylorreihen,
- Fourierreihen
- Funktionen mehrerer Variablen:
- Grundlagen,
- Schnittliniendiagramme,
- partielle Ableitung,
- lokale Extremwerte,
- Doppel- und Dreifachintegrale mit Anwendungen [Trägheitsmomente])

Differentialgleichungen:

- 1. Ordnung
- Lineare Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung
- Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

Trigonometrische Zusammenhänge

Satz des Pythagoras

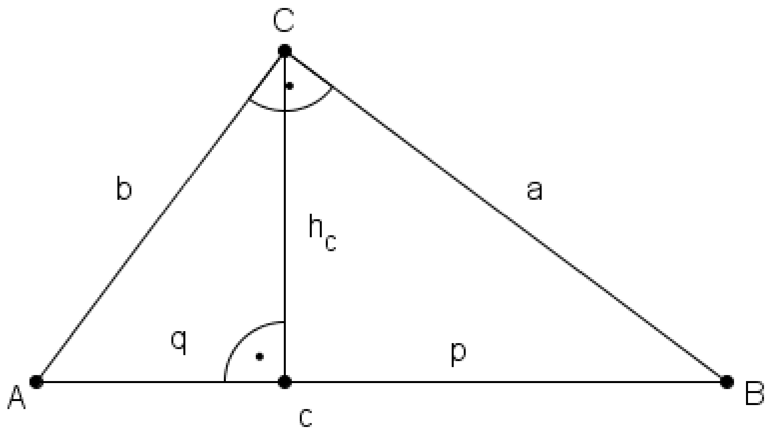


Definition 1:

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b sowie der Hypotenuse c ist die Summe der Kathetenquadrate a^2 und b^2 gleich dem Hypotenusenquadrat c^2.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Kathetensatz des Euklid



Definition 2:

$$a^2 = p \cdot c$$
$$b^2 = q \cdot c$$

Beispiel 1:

Bei der Konstruktion eines Gestells sind die Längen c und p bekannt. Die Längen a und b müssen nun noch bestimmt werden.

Gegeben: c = 5cm ; p = 2cm

Gesucht: a; b

Lösung:

$q = c - p$

$q = 5cm - 2cm$

$q = 3cm$

$a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 5cm \cdot 2cm$

$a^2 = 10cm^2$

$a = 3{,}16cm$

$b^2 = c \cdot q$

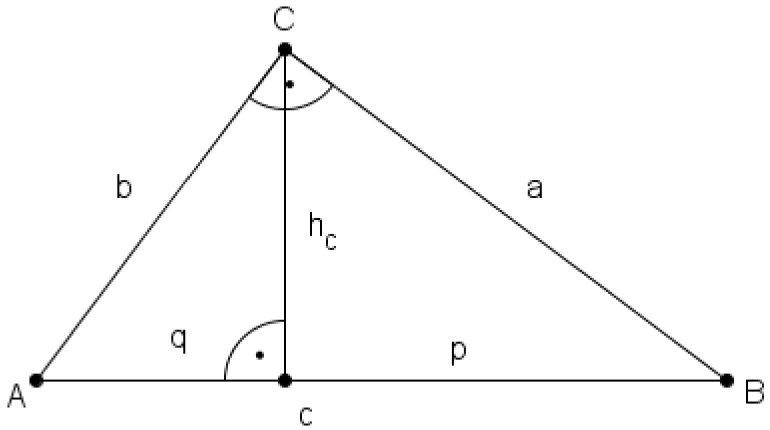
$b^2 = 5cm \cdot 3cm$

$b^2 = 15cm^2$

$b = 3{,}87cm$

Höhensatz des Euklid

Der Höhensatz des Euklid lehnt sich stark an den Kathetensatz an.



Definition 3:

$$h^2 = p \cdot q$$

Beispiel 2:

Die Länge p sei 2cm, die Länge q sei 3cm. Die Höhe soll bestimmt werden:

$p = 2cm$

$q = 3cm$

Lösung:

$h^2 = p \cdot q$

$h^2 = 2cm \cdot 3cm$

$h^2 = 6cm^2$ // Wurzel ziehen

$h = 2{,}45$ cm

Sinussatz

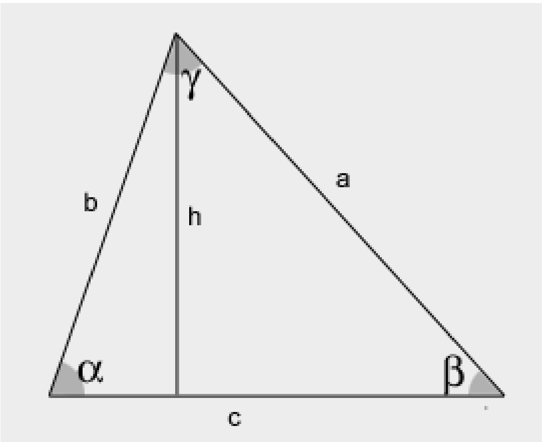
Der Sinussatz und der Kosinussatz sind zwei Erweiterungen der trigonometrischen Funktionen, die an sich ja nur in rechtwinkligen Dreiecken definiert sind, auf beliebige Dreiecke.

Der "Trick" dabei ist in beiden Fällen, das Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke zu "teilen". (Die Höhe steht senkrecht auf der Seite.)

Definition 4:

Der Sinussatz beschreibt das Verhältnis der Seitenlänge zu den gegenüberliegenden Winkeln im Dreieck.

Der Sinussatz kann dazu verwendet werden, um aus der Angabe von zwei Winkeln und einer Seite das Dreieck zu berechnen.



Definition 5:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Kosinussatz

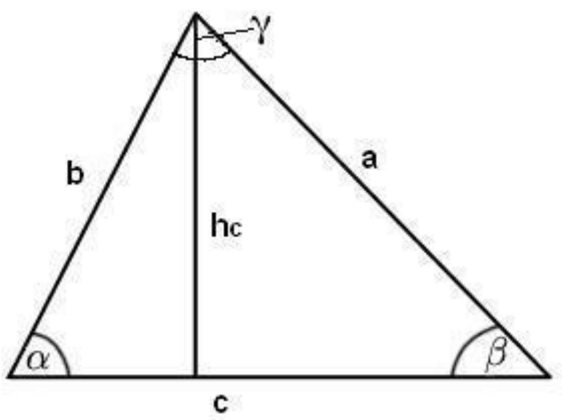
Der Kosinussatz wird auch als trigonometrischer Pythagoras bezeichnet. Das rührt daher, dass mit ihm wie beim Satz des Pythagoras eine fehlende Dreieckseite berechnet werden kann, allerdings im Gegensatz zum Pythagoras, der ja nur für rechtwinklige Dreiecke gilt, in jedem beliebigen Dreieck.

Man kann ja ein Dreieck eindeutig konstruieren, wenn man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben hat (Kongruenzsatz SWS). Also zum Beispiel die Seiten b und c und den Winkel α in diesem Dreieck:

Definition 6:

In der Trigonometrie drückt der Kosinussatz eine Beziehung zwischen den drei Seiten und einem Winkel im Dreieck aus.

Die Formeln zum Kosinussatz beziehen sich auf die folgende Grafik:



Definition 7:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Beispiel 3:

Gegeben sei a = 11, b = 10 und c = 13. Berechnet werden soll der Winkel α.

Lösung:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{11^2 - 10^2 - 13^2}{-2 \cdot 10 \cdot 13}$$
$$\cos(\alpha) = 0{,}57$$
$$\alpha = 55{,}25°$$

Bogenmaß

Das Bogenmaß ist ein Winkelmaß. Die dimensionslose Zahl trägt oft den Zusatz Radiant bzw. rad, um die Größe von Grad zu unterscheiden.

Umrechnung

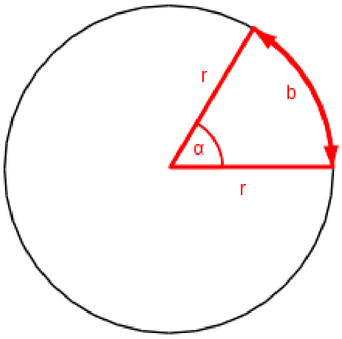
Definition 8:

Die Umrechnung eines Bogenmaßes in Grad erfolgt nach folgender Formel:

$$\text{Grad} = \frac{\text{Bogenmaß} \cdot 180}{\pi}$$

Umgekehrt lässt sich ein Bogenmaß nach der folgenden Formel bestimmen:

$$\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180}$$



Die Umrechnungsfunktion von Winkel im Gradmaß in das Bogenmaß heißt arc oder arcus (lat. Bogen). Somit ist arc(α) das Bogenmaß des in Grad angegebenen Winkels α.

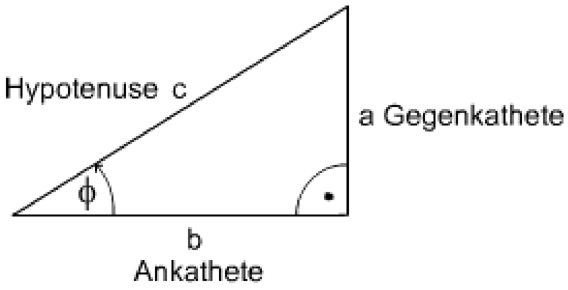
Die Angaben Bogenminute und Bogensekunde beziehen sich nicht auf das Bogenmaß, sondern sind Untereinheiten von Grad.

In vielen Berechnungen der Physik und der Mathematik ist das Bogenmaß das zweckmäßigste Winkelmaß. Für den Alltagsgebrauch ist es unpraktisch, da Werte im Bogenmaß recht unanschaulich sind (z. B. hat ein Winkel mit dem Bogenmaß 1 rad ein Gradmaß von ca. 57°). Daher wird in der Alltagspraxis stattdessen meist das Gradmaß verwendet.

Trigonometrische Funktionen

Definition des Sinus im Dreieck

Der Sinus eines Winkels kann mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks definiert werden (siehe Abbildung).

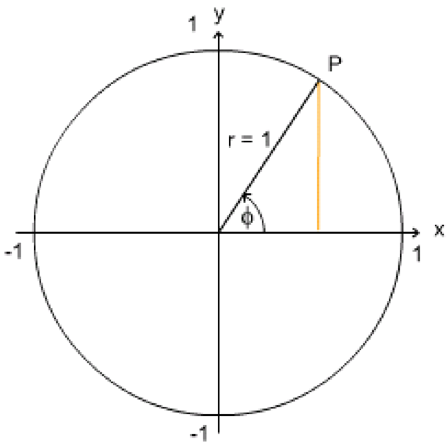


Definition 9:

Er ergibt sich aus dem Quotienten der Gegenkathete und der Hypotenuse. Der Wert, der sich daraus ergibt, ist unabhängig von der Größe des Dreiecks:

$$\sin(\phi) = \frac{a}{c}$$

Um die Funktion des Sinus zu gewinnen, wird das Dreieck in den Einheitskreis, der wiederum in ein xy-Koordinatensystem eingebettet ist, gesetzt (Abbildung).



Die Hypotenuse ist der Radius r des Kreises, der den Kreis im Punkt P schneidet. Die y-Koordinate von P ist dann gleich dem Sinus des Winkels ϕ, denn der Radius r des Einheitskreises ist 1 und damit gilt:

$$\sin(\phi) = \frac{y}{r} = y_0$$

Dies gilt für alle Punkte des Einheitskreises und damit für beliebige Winkel zwischen 0° und 360° (Gradeinteilung) und alle Werte zwischen 0 und 2π(Radeinteilung).

Der Einheitskreis

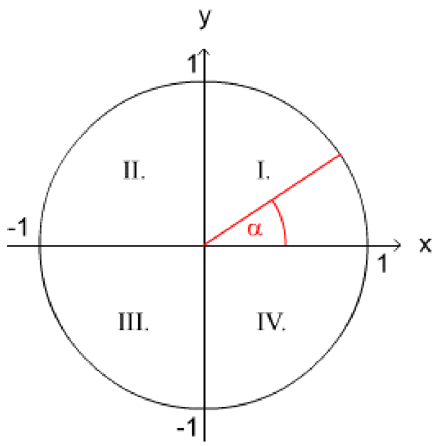
Der Einheitskreis wird benutzt, um die grundlegenden Funktionen, z.B. in der Trigonometrie, zu definieren. Er ist in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingebettet. Der Ursprung dieses Koordinatensystems fällt mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammen. Der Radius hat den Wert 1. Diese Tatsache erleichtert die Definition von Funktionen.

Genauso wie das Koordinatensystem nennt man die einzelnen Abschnitte des Kreises Quadranten. Der 1. Quadrant liegt im vollständig positiven Teil des Koordinatensystems. Die weiteren Quadranten werden gegen den Uhrzeigersinn gezählt.

Winkel im Einheitskreis werden durch einen Zeiger dargestellt, der seinen Ursprung im Mittelpunkt hat und am Kreisrand endet. Wenn der Zeiger auf der positiven x-Achse liegt, hat man den Anfangswinkel α_0. Wenn man mit dem Zeiger alle Quadranten abgefahren hat und wieder zum Ausgangspunkt zurückgekehrt ist, hat man einen vollen Winkel.

Es gilt weiterhin folgende Verabredung:

Wenn der Zeiger gegen den Uhrzeigersinn verläuft, dann werden die Winkel positiv gezählt, wenn der Zeiger mit dem Uhrzeigersinn läuft, wird er negativ gezählt.



Der Einheitskreis

Berechnung von Bogen- und Gradmaß

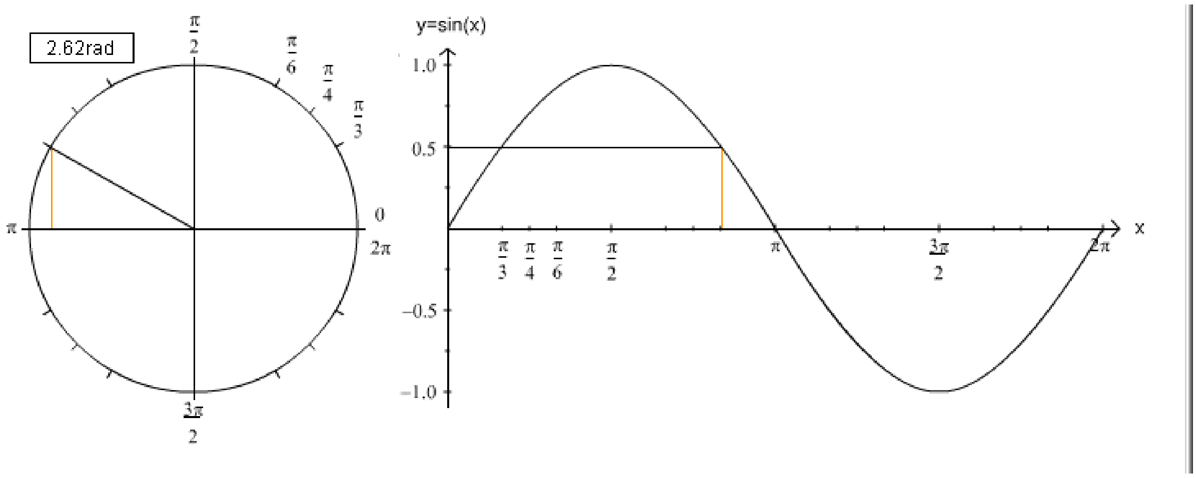
Winkel im Einheitskreis können auf zwei Arten, dem Gradmaß und dem Bogenmaß, gemessen werden. (vergleiche vorheriges Kapitel)

Die Sinusfunktion

Eine graphische Darstellung der Sinusfunktion

$$y = \sin(x)$$

gewinnt man, wenn man die Beziehung zwischen x und sin (x) in einem Koordinaten-system darstellt. Die y-Koordinate wird als Zeiger dargestellt. Dieser wandert in dem neuen Koordinatensystem entlang der x-Achse und zeichnet so die Sinusfunktion.



Die Sinusfunktion für beliebige Amplituden, Perioden und Phasen kann durch die Formel

$$y = A \cdot \sin(bx + c)$$

beschrieben werden.

Definition 10:

Die y-Koordinate ist in dieser Formel nicht nur von der x-Koordinate bzw. vom Winkel Φ abhängig, sondern auch von der **AMPLITUDE A**, der **PERIODE b** und der **PHASE c**.

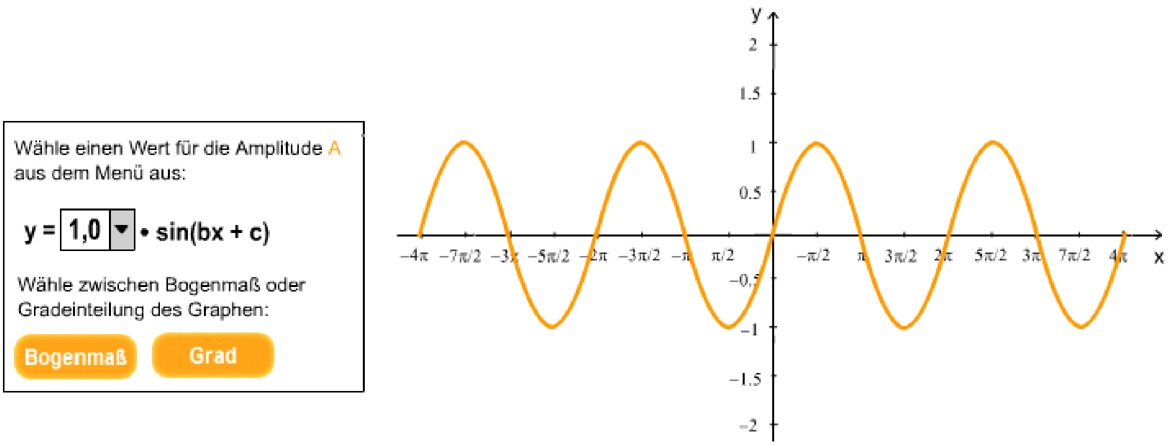
Die Amplitude der Sinusfunktion

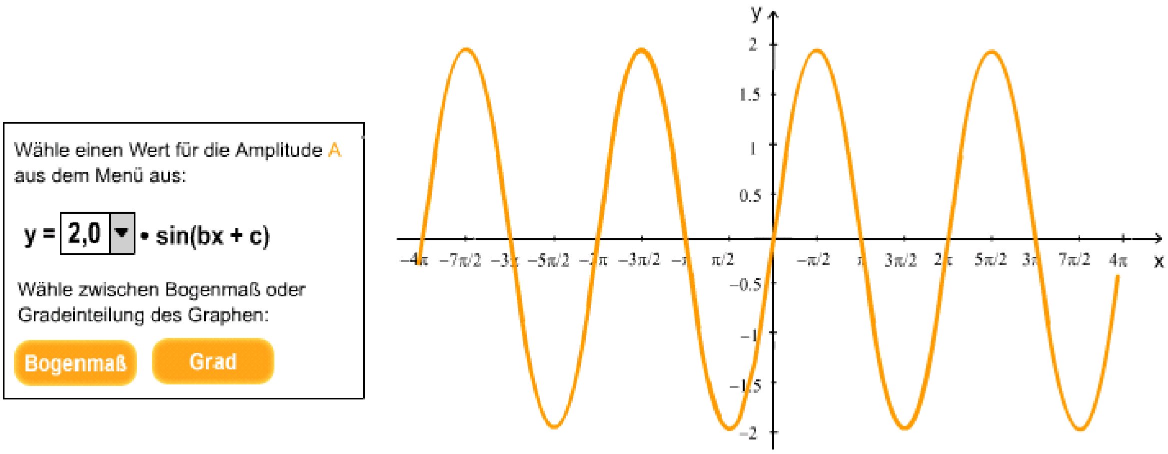
Die Sinusfunktion nimmt mindestens den Wert -1 und höchstens den Wert +1 an. Multipliziert man die Sinusfunktion mit einem konstanten Faktor **A**, so erhält man eine Funktion, die den gleichen periodischen Charakter hat. Die Nullstellen verändern sich nicht, aber deren Maxima bzw. deren Minima nehmen den Wert **A** bzw. **-A** an.

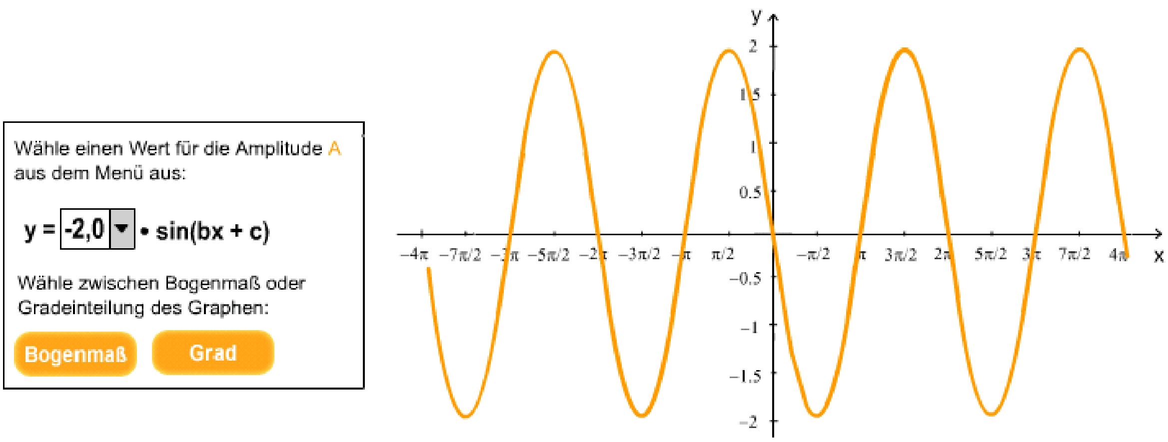
Definition 11:

Die Amplitude ist der Faktor A in der Funktion $y = A \cdot \sin{(bx + c)}$

Beispiel 4:







Periode der Sinusfunktion

Definition 12:

Wenn das Argument x in der Gleichung

$y = A \cdot \sin(bx + c)$

mit einem konstanten Faktor **b** multipliziert wird, dann spricht man von einer Änderung der Periode der Sinusfunktion.

Die Periode sagt etwas darüber aus, wie oft eine Schwingung in einem bestimmten Wertebereich (wie z.B. -4π bis +4π) oszilliert.

Für die Physik ist auch interessant, wie oft eine Schwingung in einem bestimmten Zeitintervall vollzogen wird. Dort trifft man auch häufig auf die Notation:

$$y = \sin(\omega t)$$

Statt der Konstanten **b**, steht hier das Symbol ω. Dies ist die Kreisfrequenz oder die Anzahl der Schwingungen im Zeitintervall $2\pi \sec$. t hat in obigen Gleichung häufig die Bedeutung der Zeit.

Es gilt:

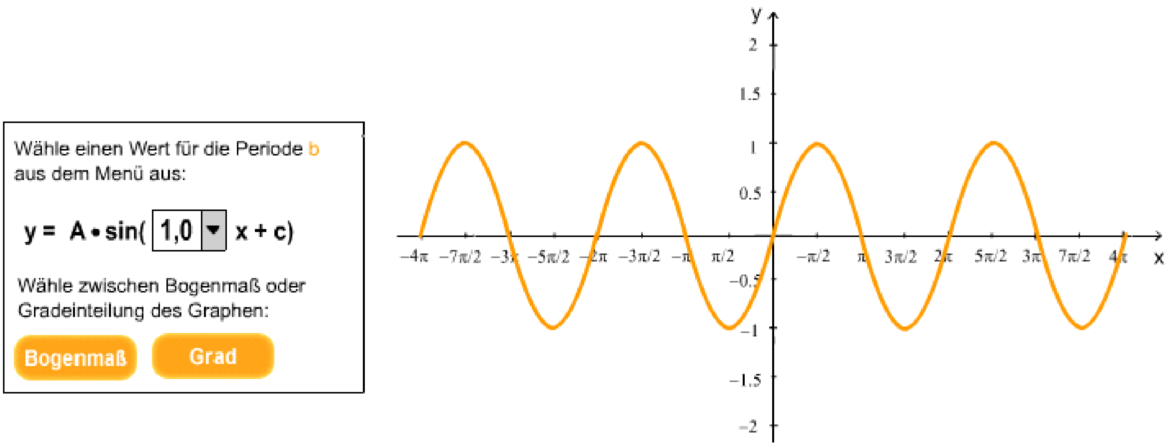
$$\omega = 2\pi\nu$$

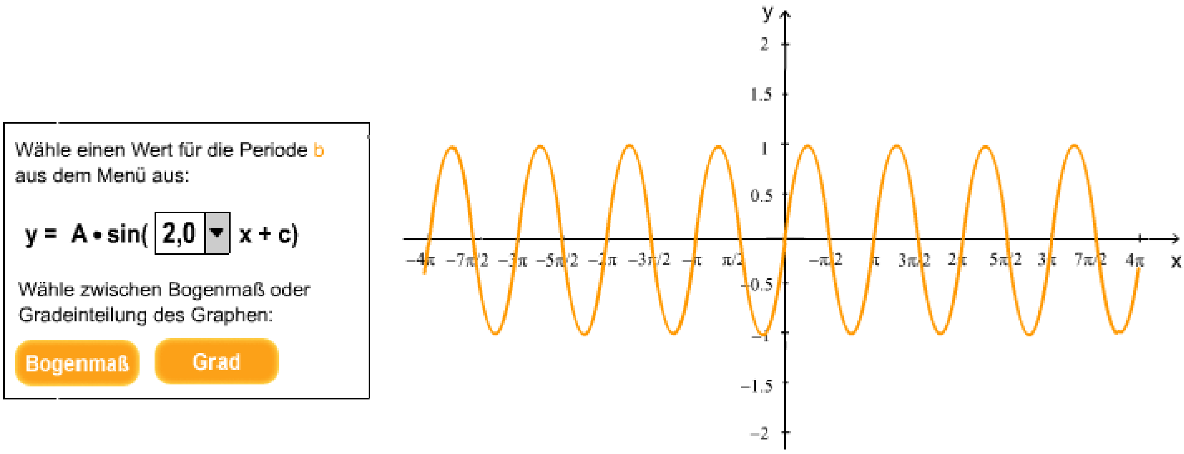
Die Frequenz ν ist die Zahl der Schwingungen im Zeitintervall 1 sec.

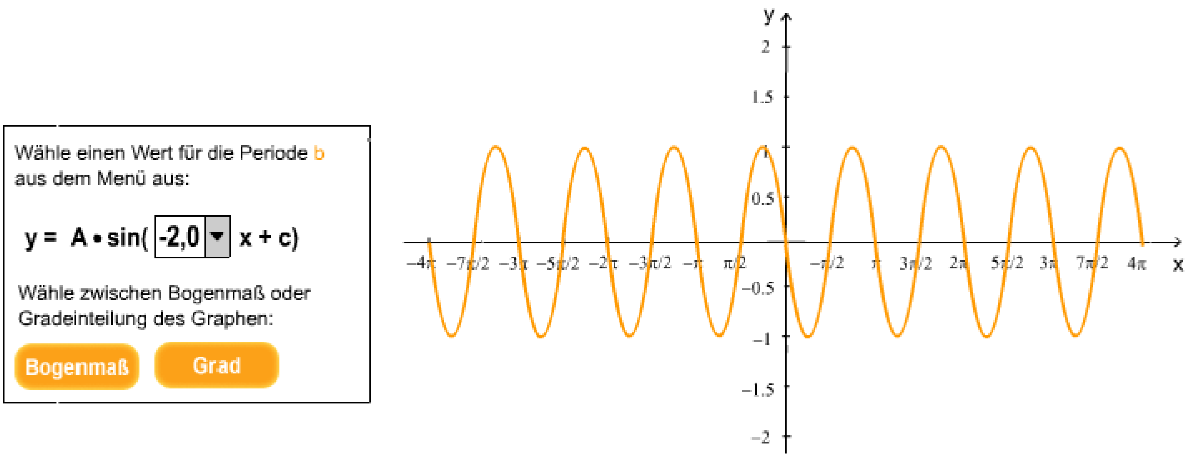
Bemerkung 1:

Allgemein lässt sich für jede Notation sagen, dass, wenn die Periode b groß ist, mehr Schwingungen durchgeführt werden und wenn b klein ist, dass weniger Schwingungen vollzogen werden.

Beispiel 5:


Wähle einen Wert für die Periode b aus dem Menü aus:
y = A • sin(1,0 x + c)
Wähle zwischen Bogenmaß oder Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad
y
x


Wähle einen Wert für die Periode b aus dem Menü aus:
y = A • sin(2,0 x + c)
Wähle zwischen Bogenmaß oder Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad
y
x


Wähle einen Wert für die Periode b aus dem Menü aus:
y = A • sin(-2,0 x + c)
Wähle zwischen Bogenmaß oder Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad
y
x

Die Phase der Sinusfunktion

Definition 13:

Hier soll die Bedeutung der Konstanten **c** in der Gleichung

$$y = A \cdot \sin{(bx + c)}$$

diskutiert werden. Dem Argument der Sinusfunktion ist eine additive Konstante zugefügt.

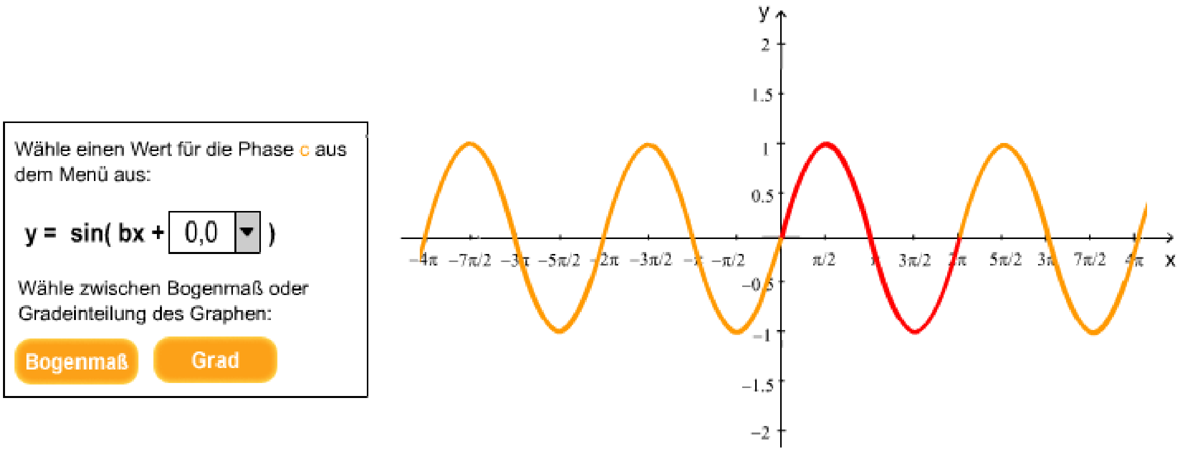
Das heißt, mit Hilfe der Phase wird der Nulldurchgang entweder nach links oder nach rechts verschoben.

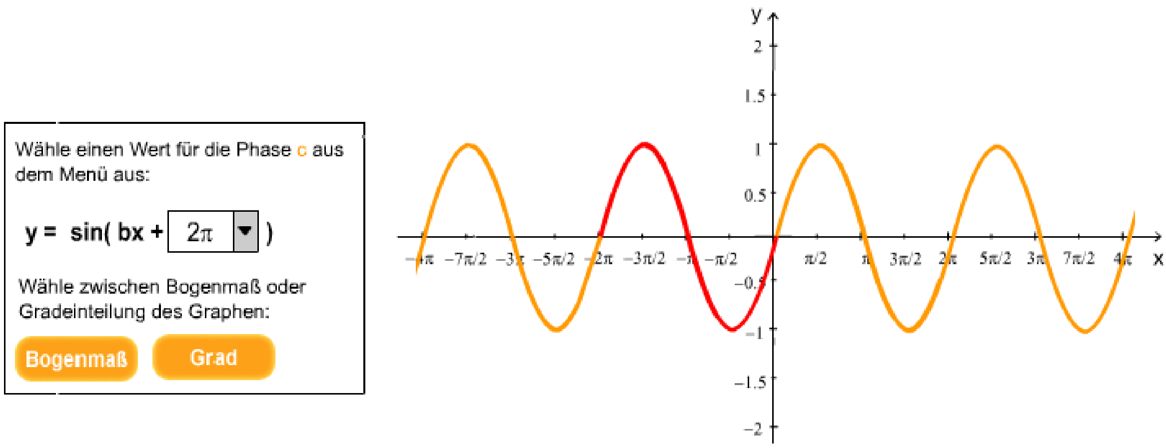
Wenn die Phase c einen positiven Wert hat, wird die Sinusfunktion nach links vom Koordinatenursprung aus gesehen verschoben und wenn c einen negativen Wert hat, wird die Sinusfunktion nach rechts verschoben.

Die Phase ist eine additive Konstante im Argument der Sinus-Funktion

$$y = A \cdot \sin{(bx + c)}$$

Beispiel 6:



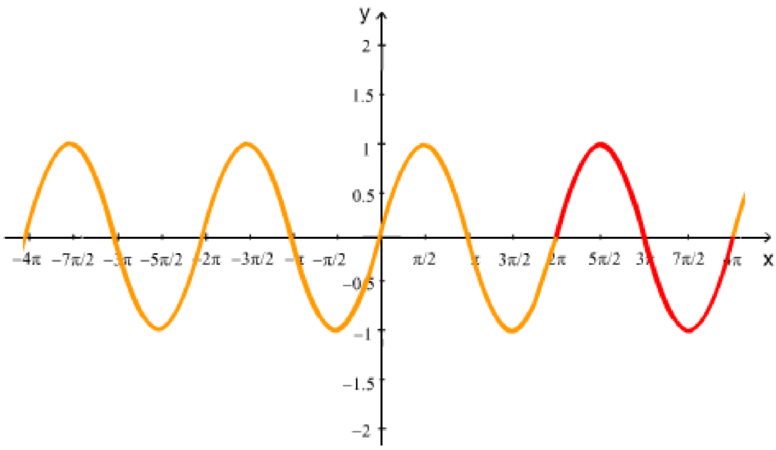


Wähle einen Wert für die Phase c aus dem Menü aus:

y = sin(bx + -2π)

Wähle zwischen Bogenmaß oder Gradeinteilung des Graphen:

Bogenmaß **Grad**

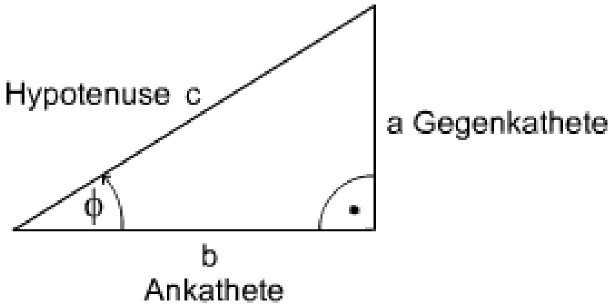


Definition des Kosinus im Dreieck

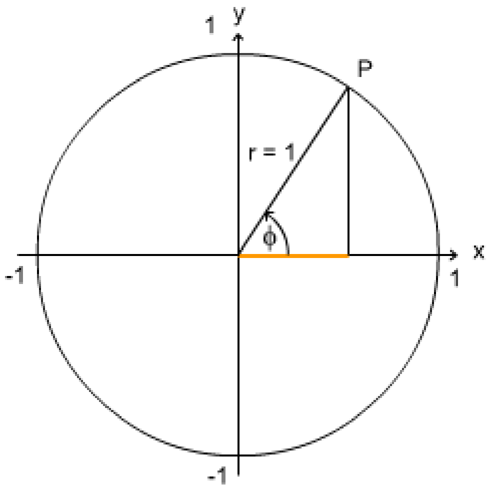
Definition 14:

Geometrisch ist der Kosinus definiert als Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck (siehe Abbildung):

$$\cos(\Phi) = \frac{b}{c}$$



Genauso wie bei der Sinusfunktion wird das Dreieck in den Einheitskreis gesetzt (Abbildung).



Die Hypotenuse wird zum Radius r des Kreises und schneidet den Kreis im Punkt P. Der Kosinus des Winkels Φ ist der x-Achsenabschnitt zum entsprechenden Punkt P.

Definition 15:

Der Kosinus eines Winkels Φ ist gleich der x-Komponente des zu Φ gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.

Deswegen kann man schreiben:

$$x = \cos(\Phi)$$

da r = 1 ist.

Normalerweise wird x immer als die Variable benutzt, für die immer andere Werte gesetzt werden.

Definition der Kosinusfunktion

Genauso wie bei der Herleitung der Sinusfunktion geht man bei der Herleitung der Kosinusfunktion vor:

$y = \cos x$

Von dem Schnittpunkt des Zeigers mit dem Einheitskreis wird ein Lot gefällt und der dazugehörige x-Achsenabschnitt bestimmt. Dieser Wert wird der Kosinusfunktion im Graphen als y-Achsenabschnitt zugeordnet.

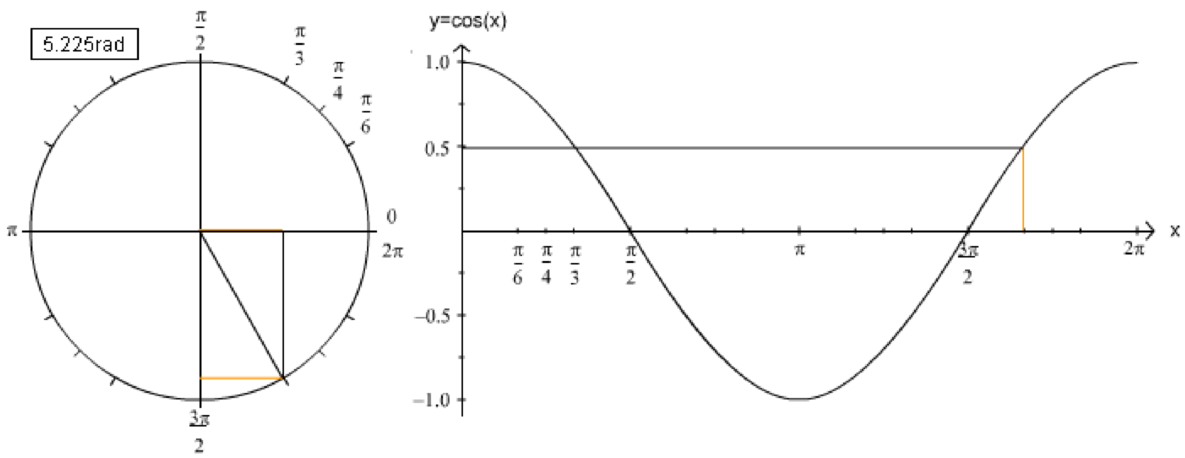
Die Kosinusfunktion für beliebige Amplituden, Perioden und Phasen kann durch die Formel

$y = A \cdot \cos(bx + c)$

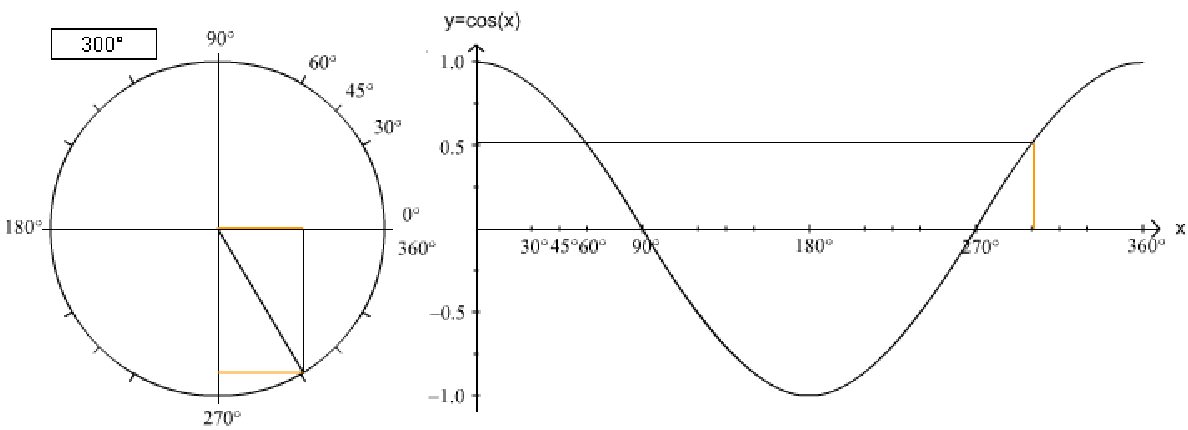
dargestellt werden.

Die Kosinusfunktion ist zudem, wie die Sinusfunktion auch, von der AMPLITUDE A, der PERIODE b und der PHASE c abhängig.

In Bogenmaß:

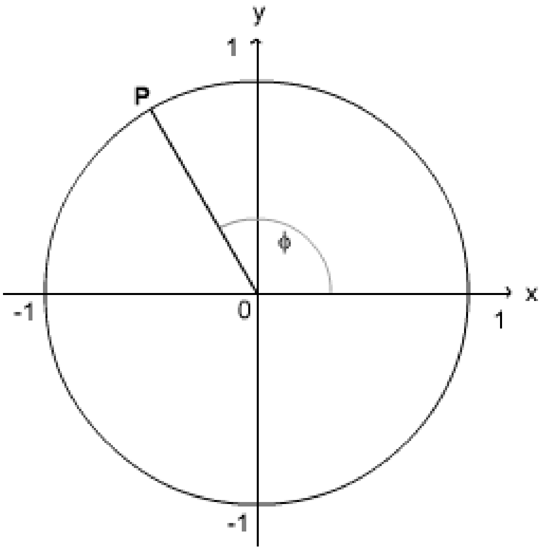


In Grad:

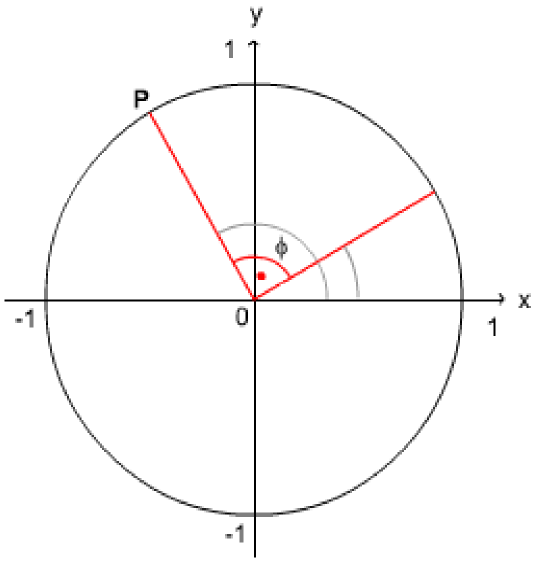


Zusammenhang zwischen Sinus- und Kosinusfunktion

Aus der Graphik kann man entnehmen, dass die Strecke zwischen 0 und P zusammen mit der x-Achse den Winkel ϕ bildet.

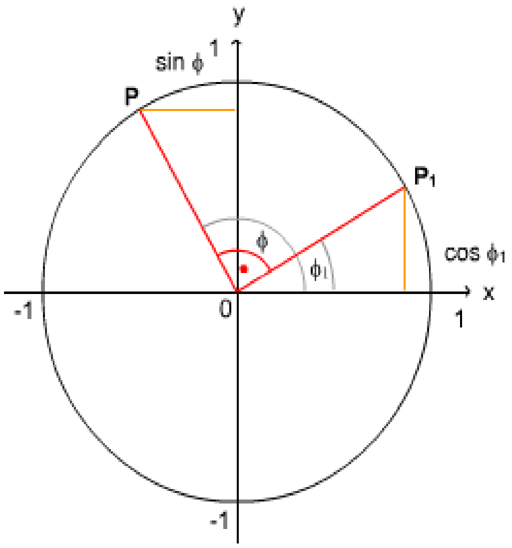


Der Punkt P_1 geht dadurch hervor, dass von ϕ ein rechter Winkel abgezogen wird.



Dann gilt:

$$\Phi_1 = \Phi - \frac{\pi}{2}$$



Aus der Grafik ist weiterhin zu entnehmen, dass

Definition 16:

$$\sin\,(\Phi = \cos(\Phi_1) = \cos\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

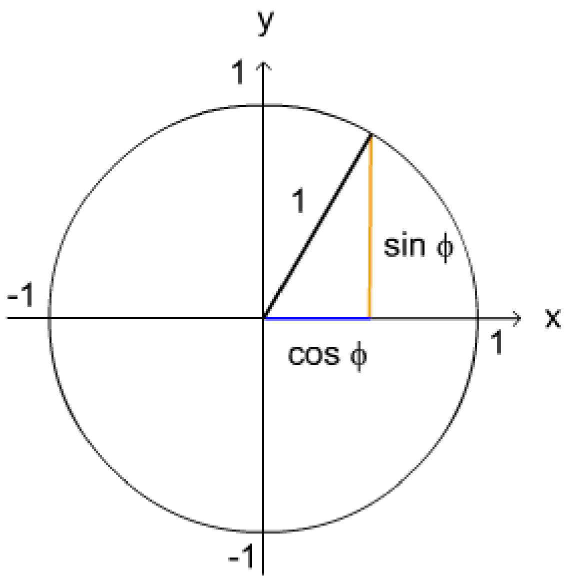
Durch Umformung erhält man dann auch folgenden Zusammenhang:

$$\cos(\Phi) = +\sin\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Man kann also sagen, dass die Kosinusfunktion eine um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinusfunktion ist.

Umgekehrt kann man auch sagen, dass die Sinusfunktion eine um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschobene Kosinusfunktion ist.

Wendet man den Satz von Pythagoras auf das das rechtwinklige Dreieck in der Abbildung an,



so ergibt sich

Definition 17:

$$\sin^2(\Phi) + \cos^2(\Phi) = 1$$

Durch Umformung und Wurzelziehen erhält man dann die folgenden Ausdrücke, die oft benutzt werden:

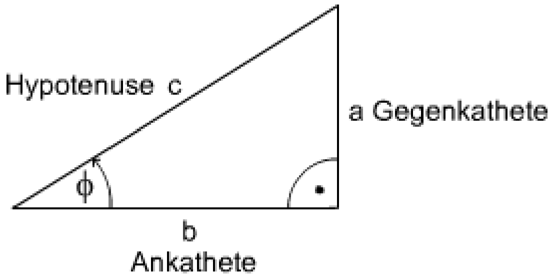
$$\sin(\Phi) = +\sqrt{1 - \cos^2(\Phi)}$$

und

$$\cos(\Phi) = +\sqrt{1 - \sin^2(\Phi)}$$

Definition des Tangens

Der Tangens eines Winkels Φ kann geometrisch definiert werden als Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete



Definition 18:

$$\tan(\Phi) = \frac{a}{b}$$

Aus den vorhergehenden Abschnitten ist bekannt, dass als Definition für die anderen beiden trigonometrischen Funktionen gilt

$$\sin(\Phi) = \frac{a}{c}$$

und

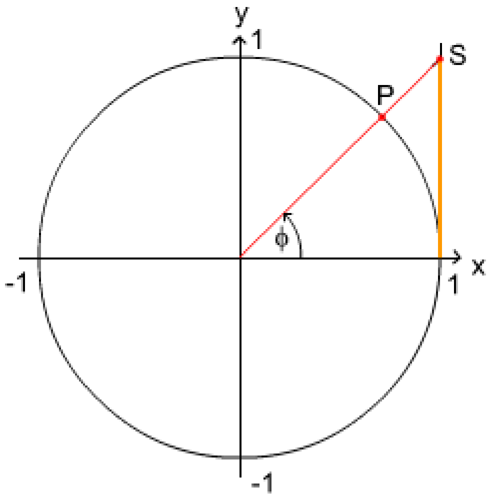
$$\cos(\Phi) = \frac{b}{c}$$

Damit findet sich dann folgender Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

Definition 19:

$$\tan(\Phi) = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\Phi)}{\cos(\Phi)}$$

Die Funktion des Tangens selber lässt sich ebenfalls wie beim Kosinus und beim Sinus auch am Einheitskreis herleiten (Abbildung).



Dazu wird im Punkt (0;1) eine Tangente am Einheitskreis errichtet. Der Zeiger, der vom Mittel- bzw. Nullpunkt des Kreises bzw. des Koordinatensystems bis zum Punkt P reicht, wird über den Punkt P verlängert, bis er die Tangente im Punkt S schneidet. Der y-Achsenabschnitt auf der Tangente (hier in dem Beispiel orange gekennzeichnet) ist dann jeweils der Tangens.

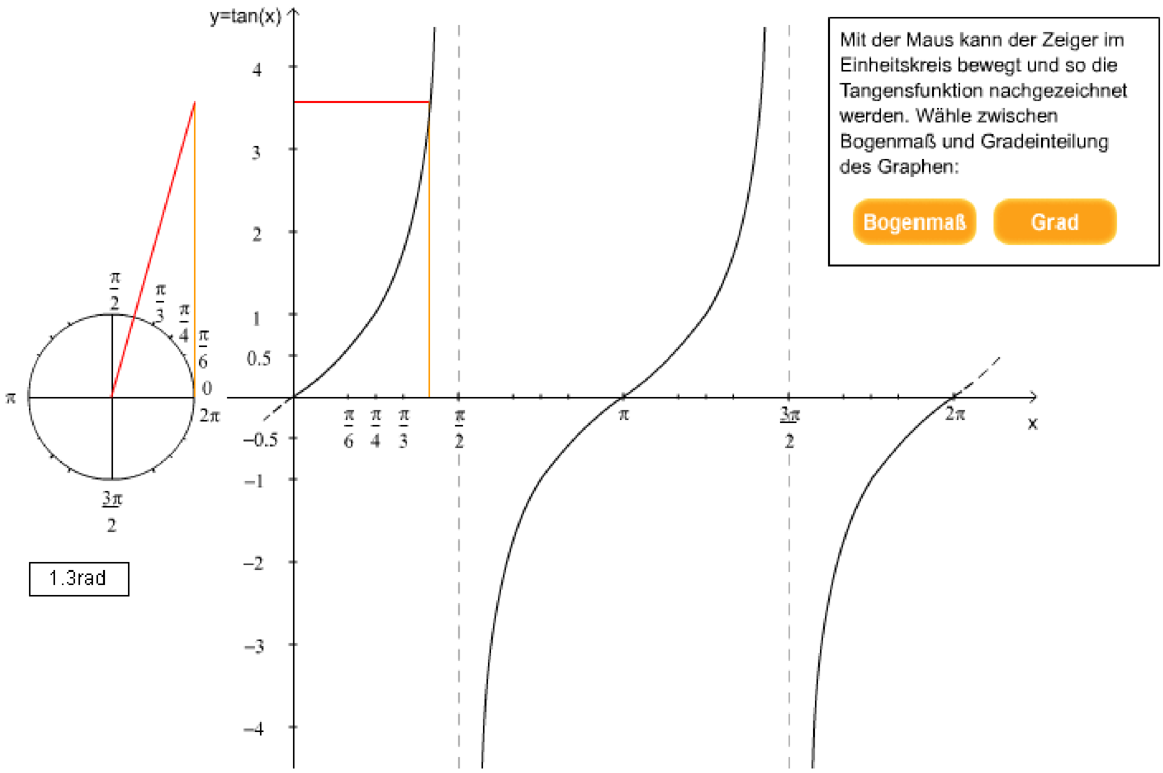
Definition 20:

Der Tangens eines Winkels Φ ist gleich der y-Komponente des Schnittpunktes S der Tangente, die am Einheitskreis anliegt.

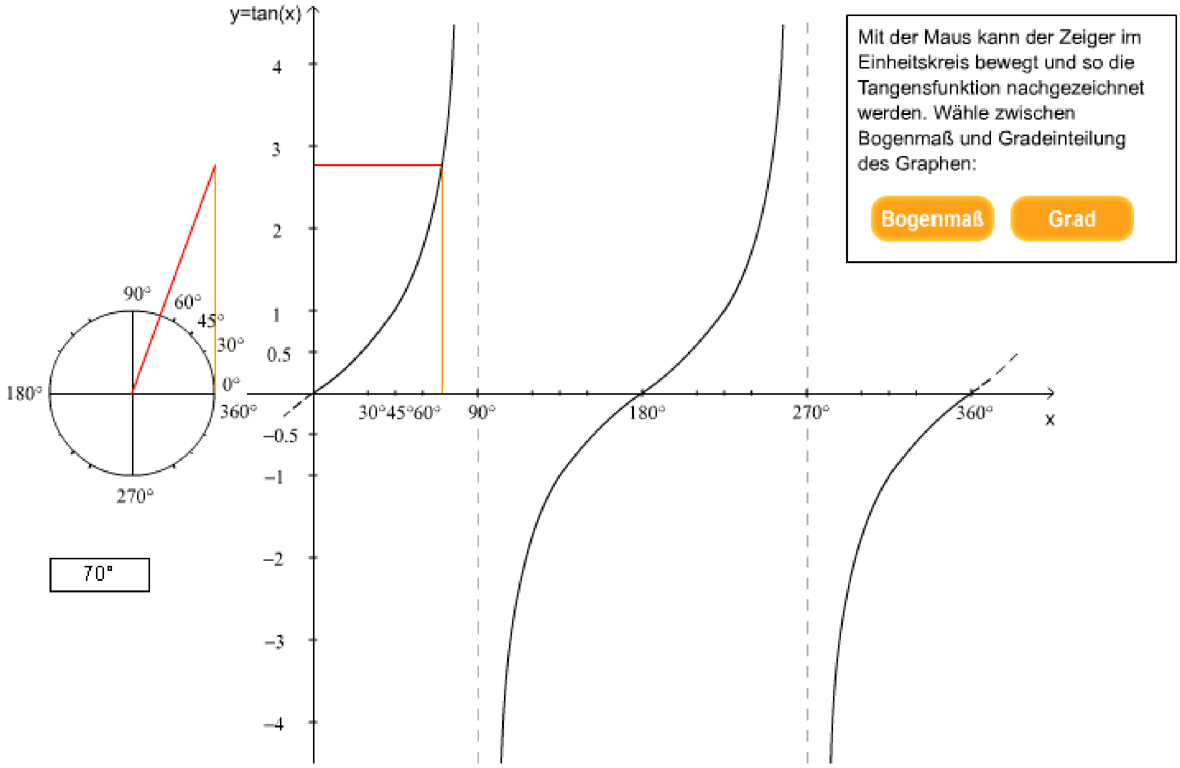
Definition der Tangensfunktion

Die Funktion des Tangens wird wieder am Einheitskreis definiert.

Im Bogenmaß:

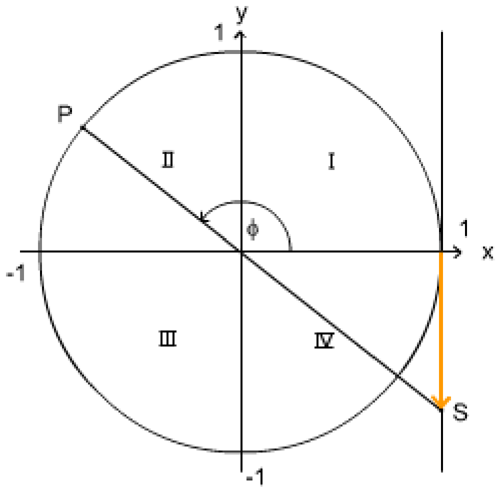


In Grad:



y=tan(x)
4
3
2
1
0.5
−0.5
−1
−2
−3
−4
90°
60°
45°
30°
0°
180°
360°
270°
30° 45° 60°
90°
180°
270°
360°
x
70°
Mit der Maus kann der Zeiger im Einheitskreis bewegt und so die Tangensfunktion nachgezeichnet werden. Wähle zwischen Bogenmaß und Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad

Wie im Abschnitt Definition der Tangensfunktion im Dreieck angesprochen, wird im Punkt (1;0) eine Tangente angelegt (Abbildung).



Der Zeiger, der vom Nullpunkt des Einheitskreises ausgeht, schneidet zuerst den Einheitskreis und dann die Tangente und bildet somit ihr den y-Achsenabschnitt, der den Wert für den Tangens liefert.

Nähert sich der Wert von Φ zum Beispiel dem Wert $\frac{\pi}{2}$, dann wächst der Wert für den Tangens über alle Grenzen, ins Unendliche. Wenn nun der Zeiger in den 2.Quadranten (90°-180°) des Einheitskreises wandert, wird auch hier der Zeiger zur Tangente hin verlängert, so dass der Schnittpunkt S an der Tangente einen negativen y-Achsenabschnitt liefert.

Der Kehrwert des Tangens wird als Kotangens bezeichnet. Er ist gegeben durch:

$$\cot(\Phi) = \frac{1}{\tan(\Phi)} = \frac{\cos(\Phi)}{\sin(\Phi)}$$

Trigonometrische Gleichungen

Grundlegende Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen können sehr kompliziert sein und sind oft nicht einmal analytisch lösbar. Es gibt aber einige grundlegende trigonometrische Gleichungen, wie

$\sin(x) = a,$

$\cos(x) = b,$

$\tan(x) = c$

die wesentlich einfachere Lösungen besitzen.

Solche Gleichungen haben im allgemeinen Fall entweder gar keine, oder unendlich viele Lösungen. Wenn man aber den Winkel *x* irgendwie begrenzt, gibt es endlich viele Lösungen.

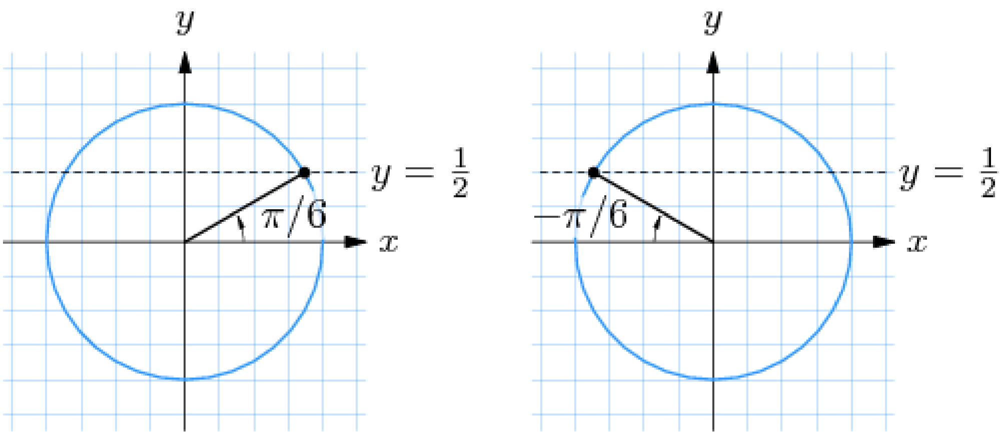
Beispiel 7:

Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Wir wollen alle Winkel finden, die den Sinus $\frac{1}{2}$ haben.

Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Sinus im ersten und im zweiten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.



Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

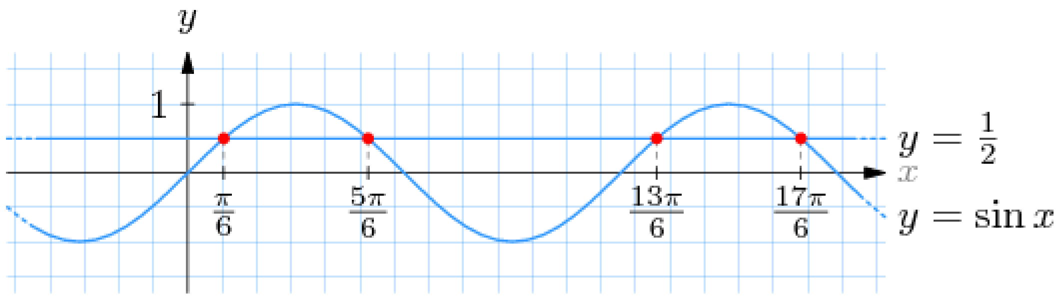
Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{5}{6}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

Dies nennt man dann auch die allgemeine Lösung der Gleichung.

Dies sieht man auch wenn man folgende Grafik betrachtet:

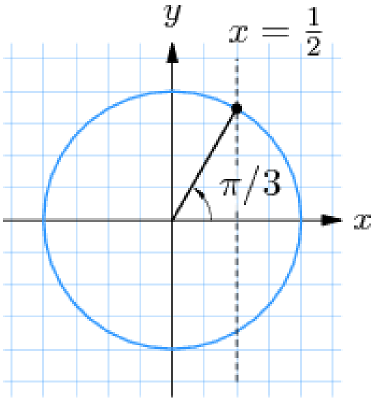


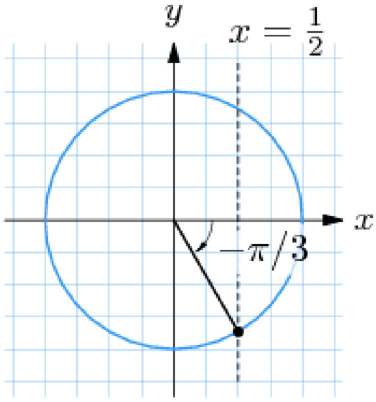
Beispiel 8:

Lösen Sie die Gleichung $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Wir betrachten den Einheitskreis. Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Kosinus im ersten und im vierten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.





Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{5}{3}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

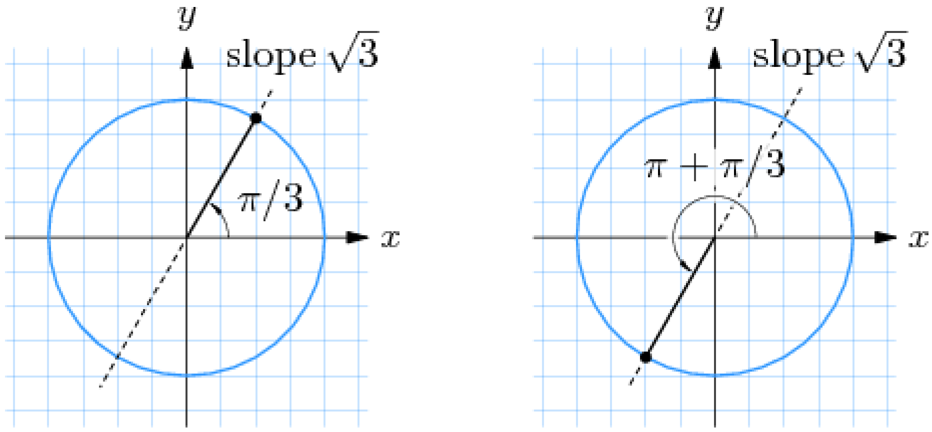
Beispiel 9:

Lösen Sie die Gleichung $\tan(x) = \sqrt{3}$

Wir betrachten den Einheitskreis.

Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Kosinus im ersten und im dritten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.



Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4}{3}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{4}{3}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

Komplexere Gleichungen

Komplexere Gleichungen löst man durch umformen mit Hilfe der Formelsammlung oder durch Substitution des Arguments der trigonometrischen Funktion.

Beispiel 10:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Lösung:

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Laut der Formelsammlung:

$$\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Daraus ergibt sich eine erste Lösung:

$$x_1 = \frac{1}{4}\pi$$

Im zweiten Feld ergibt sich eine weitere Lösung:

$$x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Im Definitionsbereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ ergeben sich weitere Lösungen:

$$x_3 = x_1 - 2\pi = \frac{1}{4}\pi - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$$

$$x_5 = x_1 + 2\pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$$

$$x_6 = x_2 + 2\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ \frac{1}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Beispiel 11:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

damit ergibt sich:

$$\cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus der Formelsammlung ergibt sich eine erste Lösung:

$$u_1 = \frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_1 = 1$$

Der Kosinus ist im vierten Feld positiv, also ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_2 = 11$$

Im positiven Bereich keine weiteren Lösung mehr.

Im negativen Bereich ergibt sich eine weiter Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$-\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_3 = -1$$

Im negativen Bereich auch keine weiteren Lösungen mehr.

$$\mathbb{L} = \{-1; 1; 11\}$$

Beispiel 12:

Lösen Sie folgende Gleichung

$$\cos(2x) - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$$

Im Bereich von $x \in [0: 2\pi]$

Wir verwenden aus der Formelsammlung:

$$\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$$

und setzen es ein.

$$2 \cdot \cos^2(x) - 1 - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$$

$$2 \cdot \cos^2(x) - 4 \cdot \cos(x) + 2 = 0 \quad |: 2$$

$$\cos^2(x) - 2 \cdot \cos(x) + 1 = 0$$

$$(\cos(x) - 1)^2 = 0$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn $\cos(x) = 1$ ist.

Wir wissen, dass der Kosinus im ersten und im vierten Feld positiv ist.

Damit erhalten wir folgende Lösungen:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2\pi$$

$$\mathbb{L} = \{0; 2\pi\}$$

Ökonomische Anwendungen der Differentiation

Zusammenhänge zwischen wirtschaftlichen Größen lassen sich im Allgemeinen durch Funktionen beschreiben. In der Praxis tritt häufig das Problem auf, dass diese Funktionen nicht bekannt sind und sich zudem nur sehr schwer abschätzen lassen.

Häufig kennt man aber einige Eigenschaften der Funktion, aus denen sich Folgerungen für wirtschaftliche Entscheidungen ableiten lassen.

Zur Lösung wirtschaftlicher Fragestellungen durch mathematische Methoden ist es nicht möglich, die Realität in ihrer umfassenden Komplexität zu berücksichtigen. Deshalb wird ein **Modell** (ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit) erstellt, das die realen Zusammenhänge auf das Wesentliche reduziert.

Häufig unterstellt man für die Bestimmung der Nachfragefunktion, dass alle Faktoren bis auf den Preis des Produktes konstant bleiben (**ceteris paribus Bedingung**), so dass nur noch eine unabhängige Variable in die Berechnung eingeht.

Eine weitere Vereinfachung erfolgt dadurch, dass häufig **lineare Funktionen** verwendet werden, auch wenn die Beziehungen zwischen zwei wirtschaftlichen Größen nur annähernd linear verlaufen oder nur in einem bestimmten Intervall eine konstante Steigung haben.

Insbesondere bei wirtschaftlichen Funktionen ist es wichtig, **Definitions- und Wertebereich** zu beachten, da diese in vielen Fällen eingeschränkt sind.

Beispielsweise haben alle Kostenfunktionen K(x) einen beschränkten Definitionsbereich, da die Produktionsmenge durch Kapazitätsbegrenzungen eingeschränkt ist, und K nur die Werte annehmen kann, die sich durch Einsetzen der x-Werte in die Funktion ergeben. Kosten und Produktionsmengen können zudem nicht negativ werden.

Nachfrage- und Angebotsfunktion

Die **Nachfragefunktion** gibt die Abhängigkeit zwischen der nachgefragten Menge eines bestimmten Gutes und allen Faktoren an, die sie beeinflussen.

Wie oben beschrieben, wird diese Beziehung häufig vereinfacht. Die nachgefragte Menge x eines Haushaltes wird nur noch als abhängig von dem Preis p des entsprechenden Gutes angesehen.

$x = f(p)$

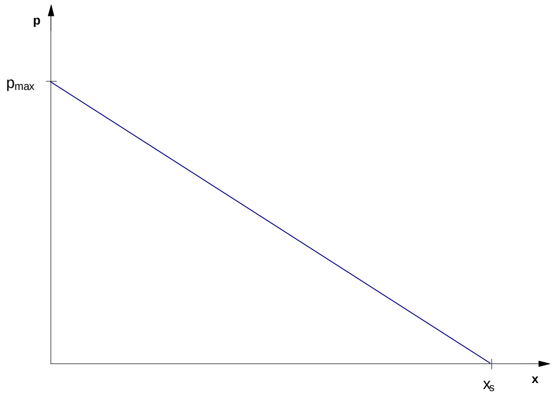
Wenn man die Abhängigkeit zwischen Preis und nachgefragter Menge eines Gutes aus der Sicht des anbietenden **Unternehmens** betrachtet, bezeichnet man die Nachfragefunktion als **Preisabsatzfunktion**.

Bei der Preisabsatzfunktion fragt sich der Unternehmer, welche Mengen er bei welchen Preisen absetzen kann.

Wenn man von einigen Besonderheiten absieht (Preis-Qualitäts-Effekt bei Luxusgütern mit prestigevermittelndem Preis), bei denen die Preisabsatzfunktion von ihrem typischen Verlauf abweicht, ist es plausibel, dass die nachgefragte Menge steigt, wenn der Preis sinkt, und umgekehrt. Die Preisabsatzfunktion hat demnach eine negative Steigung.

Vereinfachend wird in der Praxis häufig ein linearer Verlauf unterstellt, obwohl die Funktion in der Realität vor allem in der Nähe der Achsen ihre Steigung ändern und sich an die Achsen anschmiegen wird.

In den Wirtschaftswissenschaften ist es üblich, den Preis an der Ordinate und die Menge an der Abszisse abzutragen. Die **Nachfragefunktion** wird demgemäß so dargestellt, dass der Preis der abhängigen und die Menge der unabhängigen Variablen entspricht. Man betrachtet also die Umkehrfunktion, die die Abhängigkeit des Preises von der Nachfragemenge angibt $p = f(x)$.



Allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Nachfragefunktion:

p = mx + b

Dabei bedeuten:

- p = Preis
- m = Steigung (negativ)
- x = nachgefragte bzw. abgesetzte Menge
- b = Ordinatenabschnitt (maximalen Preis p_{max} für das Gut, bei dem die Nachfrage Null wird)

Die Nullstelle x_s zeigt die Sättigungsgrenze an. Selbst wenn der Preis des Produktes auf Null gesenkt wird, überschreitet die nachgefragte Menge nicht den Wert x_s.

Die **Angebotsfunktion** gibt die Abhängigkeit der angebotenen Menge eines Gutes von dem dafür verlangten Preis an.

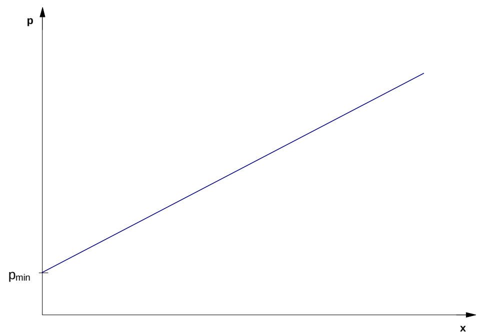
Je höher der Verkaufspreis, desto mehr sind die Hersteller bereit zu produzieren. Mit steigenden Preisen wird also auch die angebotene Menge zunehmen. Die Angebotsfunktion hat eine positive Steigung.

Allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Angebotsfunktion:

p = mx + b

Dabei bedeuten:

- p = Preis
- m = Steigung (positiv)
- x = Angebotsmenge
- b = Ordinatenabschnitt (minimalen Preis p_{min}, bei dem das Angebot gleich Null ist; erst bei steigenden Preisen sind die Produzenten bereit, mehr und mehr Produkte anzubieten.)



Das Marktgleichgewicht, bei dem sich Angebot und Nachfrage ausgleichen, lässt sich graphisch ermitteln, wenn Nachfrage- und Angebotsfunktion in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.

Das Marktgleichgewicht ist erreicht, wenn das Angebot mit der Nachfrage übereinstimmt. Graphisch entspricht das Gleichgewicht dem Schnittpunkt der beiden Funktionen.

p_g = Gleichgewichtspreis

x_g = Gleichgewichtsmenge

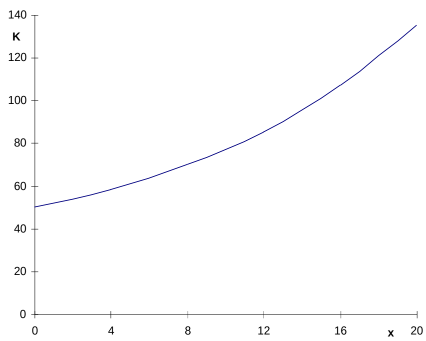
Kostenfunktion

Die Kostenfunktion eines Unternehmens zeigt den Zusammenhang zwischen den gesamten Kosten K in einer Periode und der in dieser Zeit produzierten Menge x eines Produktes auf. Die Produktionsmenge ist die unabhängige Variable, deren Einfluss auf die abhängige mit Hilfe der Kostenfunktion analysiert wird.

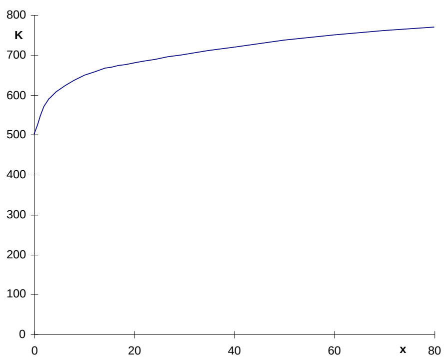
Im Allgemeinen kann man davon ausgehen, dass Kostenfunktionen eine steigende Tendenz haben. Mit zunehmender Produktionsmenge werden auch die Kosten zunehmen. Der Funktionsverlauf hängt von dem zugrunde liegenden Produktionsverfahren ab, so dass sich im konkreten Fall verschiedene Kurvenformen ergeben.

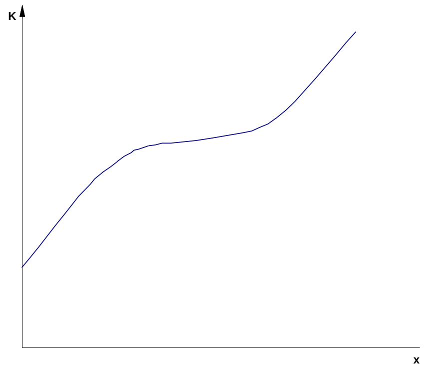
Im einfachsten Fall wird eine **lineare** Kostenfunktion auftreten. Bei linearen Funktionen ist die Steigung konstant, das heißt die Zusatzkosten für die Produktion einer zusätzlichen Einheit sind immer gleich.

Bei einem **progressiven** Verlauf der Kostenfunktion wächst die Steigung mit zunehmendem x. Die Kosten für die Produktion einer zusätzlichen Einheit werden immer größer.



Eine Kostenfunktion mit **degressivem** Verlauf liegt vor, wenn durch die Massenproduktion die Stückkosten gesenkt werden können. Die Steigung nimmt ab, und die Zusatzkosten für weitere Einheiten werden mit größer werdender Stückzahl geringer.





Besonders häufig wird in den Wirtschaftswissenschaften die **S-förmige** Kostenfunktion diskutiert.

Diese S-förmige Kostenfunktion hat zunächst einen degressiven, später aber einen progressiven Verlauf.

Wird beispielsweise ein landwirtschaftliches Gut (z. B. Weizen oder Kartoffeln) auf einer bestimmten Fläche produziert, so ist der Ertrag pro Hektar die Produktionsmenge. Die zusätzlichen Kosten für Saatgut, Dünger etc. werden von einem bestimmten Hektarertrag an immer größer, wenn der Hektarertrag noch weiter gesteigert werden soll.

Da die Funktionsgleichung einer Kostenfunktion in der Praxis im Allgemeinen nicht bekannt ist, wird vereinfachend ein linearer Verlauf unterstellt. Aus einigen Eigenschaften der Kostenfunktion, die aus der Erfahrung abgeleitet werden, lässt sich dann eine lineare Funktion aufstellen, die den tatsächlichen Verlauf wiedergibt.

Die Gesamtkosten $K(x)$ setzen sich zusammen aus den Fixkosten K_f und den variablen Kosten K_v, die sich durch Multiplikation der variablen Stückkosten k_v mit der Produktionsmenge x errechnen.

Die Funktionsgleichung in ihrer allgemeinen Form lautet für die lineare Kostenfunktion:

$K(x) = K_f + K_v = K_f + k_v \cdot x$

Dabei bedeuten:

$K(x)$ = Gesamtkosten, abhängig von der Produktionsmenge x

K_f = Fixkosten, unabhängig von der Produktionsmenge x

K_v = variable Kosten, abhängig von x

k_v = variable Stückkosten, Steigung der Geraden

x = Produktionsmenge

Da die Steigung konstant ist, sind auch die zusätzlichen Kosten für die Produktion einer weiteren Einheit - die Grenzkosten - konstant. Sie betragen k_v.

In einem Unternehmen gilt die Kostenfunktion $K(x) = 700 + 3x$

Zeichnen Sie die Funktion.

Wie hoch sind die Fixkosten und die variablen Kosten pro Stück?

Welche Kosten entstehen bei der Produktion von 150 Mengeneinheiten?

$K_f = 700$ $\quad$ $k_v = 3$

$K(150) = 700 + 3 \cdot 150 = 1.150$

Umsatzfunktion

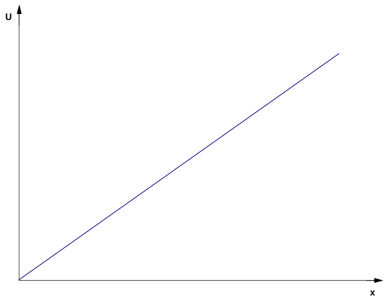
Durch Multiplikation von Preis und Menge ergibt sich der Umsatz, der somit von zwei unabhängigen Variablen abhängt.

$U(x, p) = p \cdot x$

Für viele Unternehmen ist der Preis jedoch eine konstante Größe. Sie haben einen zu geringen Marktanteil, um den Preis beeinflussen zu können. Diese Unternehmen werden **Mengenanpasser** genannt, da sie ihren Umsatz nicht durch den Preis, sondern nur durch die abgesetzte Menge verändern können. Der Umsatz ist für sie nur von der Menge x abhängig.

$U(x) = p \cdot x \quad p = \text{const.}$

Der Preis entspricht der Steigung einer Geraden, die durch den Koordinatenursprung verläuft.



Gewinnfunktion

Die Differenz von Umsatz und Kosten stellt den Gewinn eines Unternehmens dar.

$G = U - K$

Bei einem Mengenanpasser ist der Gewinn nur von der Menge abhängig.

$G(x) = U(x) - K(x)$

Durch Einsetzen der Umsatz- und der Kostenfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} G(x) &= p \cdot x - K_f - k_v \cdot x \\ &= - K_f + (p - k_v) \cdot x \end{aligned}$$

Der Gewinn errechnet sich durch Multiplikation des Überschusses des Preises über die variablen Stückkosten (p-k_v, Stückdeckungsbeitrag) mit der Menge x, wovon noch die Fixkosten subtrahiert werden müssen.

Graphisch lässt sich die Gewinnfunktion ebenfalls durch die Differenz der Umsatz- und Kostenfunktion darstellen.

Wenn die Kosten größer als der Umsatz sind, ist der Gewinn negativ. Das Unternehmen befindet sich in der Verlustzone.

In dem Punkt, in dem sich Umsatz- und Kostenfunktion schneiden, ist der Gewinn Null. Das Unternehmen hat die **Gewinnschwelle** erreicht.

Bei höheren Stückzahlen wird ein positiver Gewinn erzielt (Gewinnzone).

Die Gewinnfunktion kann durch die Subtraktion der Kosten- von der Umsatzfunktion graphisch dargestellt werden. Bei der Produktion von Null Einheiten entsteht ein Verlust in Höhe der Fixkosten; die Gewinnfunktion schneidet die Ordinate bei $-K_f$. An der Gewinnschwelle x_0 schneidet die Gewinnfunktion die Abszisse und erreicht den positiven Bereich.

Beispiel 13:

Auf dem Markt für ein bestimmtes Produkt gilt ein Maximalpreis von 500 Euro und eine Sättigungsmenge von 200 Stück. Der Mindestpreis ist 100 Euro und die Steigung der Angebotsfunktion beträgt 1,5.

a) Bestimmen Sie die Nachfrage- und Angebotsfunktion, die beide einen linearen Verlauf haben sollen.

b) Bestimmen Sie Gleichgewichtspreis und -menge graphisch und analytisch.

c) Welche Folge hat eine staatliche Festlegung des Preises auf 200 Euro für Nachfrage und Angebot?

Lösung:

a) Nachfragefunktion, bekannt:

Punkt 1 (0;500)

Punkt 2 (200;0)

2-Punkteform:

$$\frac{0-500}{200-0} = \frac{500-y}{0-x}$$

$$\mathrm{y} = 500 - \frac{5}{2}x$$

Angebotsfunktion, bekannt:

Punkt (0;100)

Steigung m = 1,5

Punktsteigungsform:

$$1{,}5 = \frac{100-y}{0-x}$$

$$\mathrm{y} = 100 + 1{,}5\mathrm{x}$$

b.

$500 - 2,5x = 1,5x + 100$

$x_g = 100$, $p_g = 250$

c.

Bei einem Preis von 200 Euro ist die Nachfrage größer als das Angebot, wie die Abbildung zeigt.

nachgefragte Menge x_n : $200 = 500 – 2,5x_n$

$x_n = 120$

angebotene Menge x_a : $200 = 1,5x_a + 100$

$x_a = 66,67$

Es besteht ein Nachfrageüberhang von ca. 53 Stück.

Beispiel 14:

Ein Unternehmen hat Fixkosten in Höhe von 1.000 Euro und variable Stückkosten in Höhe von 1,50 Euro. Maximal können 1.500 Einheiten produziert werden. Der Marktpreis beträgt 2,50 Euro.

a) Ermitteln Sie graphisch und analytisch die Gewinnschwelle.

b) Welche Folgen hat eine Senkung des erzielten Preises auf die Hälfte?

Lösung:

a.

$K(x) = 1.000 + 1,5x$

$U(x) = 2,5x$

$G(x) = U(x) - K(x) = 0$

$0 = 2,5x – 1000 – 1,5x$

$x_0 = 1.000$

b.

Wenn der Preis auf 1,25 Euro fällt, ist der Stückdeckungsbeitrag negativ, und es kann kein Gewinn erzielt werden.

Die Steigung der Kostenfunktion ist dann größer, als die der Umsatzfunktion, so dass kein Schnittpunkt existiert.

Beispiel 15:

Ein Betrieb kann im Monat maximal 3000 Kreissägen herstellen. Dabei entstehen fixe Kosten von 100.000 Euro und zusätzliche variable Kosten in Höhe von 150 Euro pro Stück

a) Geben Sie die Kostenfunktion an, die der Anzahl x der produzierten Kreissägen die entstehenden Kosten zuordnet.

b) Geben Sie Definitions- und Wertebereich der Kostenfunktion (bezogen auf einen Monat) an!

Lösung:

$K(x) = K_v + k_v x$

$\Rightarrow K(x) = 100.000 + 150x$

D_K = [0; 3000]

W_K = [100.000; 550.000]

Nichtlineare Funktionen

Beispiel 16:

Einem Unternehmen ist die Preisabsatzfunktion für sein Produkt bekannt:

$p(x) = 80 - 4x$

Die Umsatzfunktion lässt sich durch Multiplikation der Preisabsatzfunktion mit x ermitteln.

$U(x) \quad = p \cdot x = (80 - 4x) \cdot x \qquad = 80x - 4x^2$

Graphische Darstellung von Preisabsatz- und Umsatzfunktion:

Die Preisabsatzfunktion zeigt, dass der Höchstpreis 80 DM beträgt. Die nachgefragte Menge und damit der Umsatz ist bei einem Preis von 80 DM oder mehr gleich Null. Wenn der Preis sinkt, steigt die nachgefragte Menge bis zur Sättigungsmenge von 20, die bei einem Preis von Null erreicht wird. Da der Preis beim Erreichen der Sättigungsmenge Null ist, wird an dieser Stelle der Umsatz wiederum Null.

Die Umsatzfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel 2. Grades. Der Umsatz steigt zunächst mit steigender Absatzmenge und sinkenden Preisen an. Er erreicht sein Maximum genau in der Mitte zwischen den Nullstellen bei der Menge von 10 Einheiten, da die Parabel symmetrisch zur Senkrechten durch x = 10 verläuft. Mit weiter zunehmendem Absatz aber sinkendem Preis geht der Umsatz dann wieder zurück.

Die in der Praxis häufig anzutreffende S-förmige Kostenfunktion entspricht mathematisch einer Variante von Parabeln 3. Grades.

Beispiel 17:

Graphische Darstellung der Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1000$$

Wertetabelle:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
K	1000	1408	1664	1816	1912	2000	2128	2344	2696	3232	4000

Wie ändern sich die Kosten, wenn die Produktion um eine Einheit ausgeweitet wird, ausgehend von 2, 9, 19 Einheiten?

Produktionssteigerung		Zusatzkosten	K(x)
Von	auf		
2	3	144	1552
9	10	46	1954
19	20	416	3584

Bei niedrigen Produktionsmengen fallen die Zusatzkosten (Grenzkosten) bei zunehmender Produktion, die Kostenfunktion verläuft degressiv steigend.

Für höheres x ist die Kostenfunktion progressiv steigend, d. h. die Zusatzkosten werden immer größer.

Bedeutung der Differentialrechnung für die Wirtschaftswissenschaften

Bei der Analyse von ökonomischen Funktionen interessiert man sich für charakteristische Eigenschaften der Funktion, wie Steigung, Extrema, Wendepunkte, die mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt werden können.

Am Beispiel einer Kostenfunktion soll die Anwendung der Differentialrechnung in den Wirtschaftswissenschaften zunächst allgemein verdeutlicht werden.

Die Kostenfunktion $K = K(x)$ stellt den Zusammenhang zwischen der Produktionsmenge x und den Gesamtkosten eines Einproduktunternehmens dar.

Die Frage nach der Kostenerhöhung bei einer Produktionsmengenausweitung entspricht der Frage nach der Steigung der Funktion, die durch die 1. Ableitung bestimmt wird.

Bei einer Änderung der Produktionsmenge von x_1 auf x_2 ändern sich die Gesamtkosten um $K(x_2) - K(x_1)$.

Wenn nun die Änderung der Kosten in Bezug auf die Produktionsmengenänderung mit $x_2 \to x_1$ ermittelt

werden soll, entspricht dies der Frage nach dem Differentialquotienten

$$\frac{dK}{dx} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Der Differentialquotient gibt die Steigung der Kostenfunktion in einem bestimmten Punkt an und entspricht der 1. Ableitung der Funktion.

Die 1. Ableitung einer Kostenfunktion wird als **Grenzkostenfunktion** bezeichnet.

Die Untersuchung von Funktionen bei unendlich kleinen (infinitesimal kleinen) Änderungen der unabhängigen Variablen wird **Marginalanalyse** genannt.

Allgemein ergibt diese Grenzbetrachtung, wie die abhängige Variable variiert, wenn sich die unabhängige Variable um einen gegen Null gehenden Betrag ändert.

Bei der Interpretation der 1. Ableitung einer ökonomischen Funktion wird häufig gesagt, dass die 1. Ableitung der Änderung der abhängigen Variablen bei Änderung der unabhängigen Variablen um **eine** Einheit entspricht.

Beispielsweise ist folgende Ausdrucksweise üblich:

„Die Grenzkostenfunktion zeigt die Änderung der Kosten, wenn die Produktionsmenge um eine Einheit geändert wird.“

Diese Interpretation ist mathematisch nicht korrekt, denn die Marginalanalyse untersucht das Funktionsverhalten bei unendlich kleiner Variation der unabhängigen Variablen.

Anstelle von $\Delta x \to 0$ wird aber $\Delta x = 1$ unterstellt.

Dieser Fehler mag bei der Massenproduktion vernachlässigbar sein. Wenn dagegen Ausbringungseinheiten einen großen Wert haben und die Produktion relativ klein ist (z.B. Flugzeughersteller), entsprechen die Grenzkosten nicht der Kostenänderung bei einer Produktionsveränderung um eine Einheit.

Um die Interpretation nicht zu komplizieren, wird vereinfacht gesagt: Die 1. Ableitung gibt **näherungsweise** an, in welchem Umfang sich die abhängige Variable ändert, wenn die unabhängige um eine Einheit variiert wird.

Bei der Grenzbetrachtung ökonomischer Funktionen muss beachtet werden, daß diese differenzierbar sein müssen. Diese Voraussetzung ist bei solchen Funktionen, die aufgrund von Sprüngen oder Stufen unstetig sind, nicht erfüllt.

Kostenfunktion

Die 1. Ableitung der Kostenfunktion K = K(x) ist die **Grenzkostenfunktion**

$$K' = \frac{dK}{dx}$$

Sie gibt näherungsweise an, wie sich die Gesamtkosten ändern, wenn die Produktionsmenge um eine Einheit verändert wird.

Beispiel 18:

In einem Unternehmen, das nur ein Produkt herstellt, wurde folgende Kostenfunktion ermittelt:

$$K(x) = \frac{x^2}{10} + 2x + 50$$

Wie lautet die Grenzkostenfunktion?

$$K'(x) = \frac{x}{5} + 2$$

Die Höhe der Grenzkosten hängt davon ab, wie hoch die Produktionsmenge ist, von der ausgegangen wird.

Wie hoch sind die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 5, 10 und 20 Stück?

x = 5 K′(5) = 3

x = 10 K′(10) = 4

x = 20 K′(20) = 6

Die Steigung der Kostenfunktion nimmt ständig zu.

Bei einer Produktionsmenge von x = 5 betragen die Grenzkosten drei Geldeinheiten. Wie ändern sich die Kosten, wenn die Produktionsmenge ausgehend von fünf um eine Einheit verringert wird oder wenn sie um eine Einheit erhöht wird?

K(5) – K(4) = 62,5 – 59,6 = 2,9

K(5) – K(6) = 62,5 – 65,6 = –3,1

Die Gesamtkosten sinken um 2,9 bzw. steigen um 3,1 Geldeinheiten.

Dies verdeutlicht, dass die Grenzkosten K′(5) = 3 nicht der Kostenänderung bei der Variation um einen Geldmenge entsprechen.

Umsatzfunktion

Die 1. Ableitung der Umsatzfunktion U = U(x) ist die **Grenzumsatzfunktion**

$$U' = \frac{dU}{dx}$$

Sie gibt näherungsweise an, um welchen Betrag sich der Umsatz ändert, wenn die abgesetzte Menge sich um eine Einheit ändert. Die beschrieben, lässt sich die Umsatzfunktion durch Multiplikation der Preisabsatzfunktion mit der Menge aufstellen.

Beispiel 19:

Ein Unternehmen hat für sein Produkt durch Erfahrung einen Maximalpreis von 1.000 DM und eine Sättigungsmenge von 5.000 Stück festgestellt.

Mit Hilfe der 2-Punkteform lässt sich daraus folgende Preisabsatzfunktion ermitteln, wenn man Linearität unterstellt.

$$p(x) = 1.000 - 0{,}2x$$

Die Umsatzfunktion lautet:

$$U(x) = 1.000x - 0{,}2\,x^2$$

Die Grenzumsatzfunktion lautet:

$$U'(x) = \frac{dU}{dx} = 1.000 - 0{,}4x$$

Sie hat genau die doppelte negative Steigung der Preisabsatzfunktion.

Das Maximum der Umsatzfunktion wird bei der Produktionsmenge von 2500 Stück erreicht.

$$U'(x) = 1.000 - 0{,}4x = 0$$

$$x = 2.500$$

$$U''(2.500) = -0{,}4 < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

Dass die Grenzumsatzfunktion die doppelte negative Steigung der linearen Preisabsatzfunktion hat, gilt nicht nur für diese spezielle Beispiel, sondern allgemein:

$$p(x) = a - mx$$

$$U(x) = ax - mx^2$$

$$U'(x) = a - 2mx$$

Gewinnfunktion

Die 1. Ableitung der Gewinnfunktion G = G(x) ist die **Grenzgewinnfunktion**

$$G' = \frac{dG}{dx}$$

Sie gibt näherungsweise an, um welchen Betrag sich der Gewinn ändert, wenn sie die abgesetzte Menge um eine Einheit ändert.

Da der Gewinn eines Unternehmens die Differenz aus Umsatz und Kosten darstellt G(x) = U(x) – K(x), kann der Grenzgewinn auch als Differenz zwischen Grenzumsatz und Grenzkosten interpretiert werden.

$$G'(x) = U'(x) - K'(x)$$

Beispiel 20:

Die Kostenfunktion eines Unternehmens lautet:

$$K(x) = 440 + 3x$$

Die Preisabsatzfunktion hat die Funktionsgleichung:

$$p(x) = 100 - 0{,}2\ x$$

Die Gewinnfunktion berechnet sich als die Differenz zwischen Umsatz- und Kostenfunktion.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 100x - 0{,}2x^2$$

$$\begin{aligned} G(x) = U(x) - K(x) \quad &= -0{,}2x^2 + 100x - 440 - 3x \\ &= -0{,}2x^2 + 97x - 440 \end{aligned}$$

Die Gewinnfunktion lautet:

$$G'(x) = -0{,}4x + 97$$

Die Berechnung über die Differenz zwischen Grenzumsatz und Grenzkosten ergibt die gleiche Funktion:

$$\begin{aligned} G'(x) \quad &= U'(x) - K'(x) \\ &= 100 - 0{,}4x - 3 \\ &= -0{,}4x + 97 \end{aligned}$$

Gewinnmaximierung

Im Zielsystem eines Unternehmens nimmt die Gewinnmaximierung eine wichtige Position ein.

Bei Kenntnis der Gewinnfunktion lässt sich das Maximum mathematisch dadurch ermitteln, dass die 1. Ableitung der Gewinnfunktion, die Grenzgewinnfunktion, gleich Null gesetzt wird. Denn die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes lautet, dass die 1. Ableitung der entsprechenden Funktion an dieser Stelle Null werden muss.

$$G'(x) = 0$$

oder

$$G'(x) = U'(x) - K'(x) = 0$$

$$U'(x) = K'(x)$$

An der Stelle des Gewinnmaximums sind Grenzumsatz- und Grenzkostenfunktion gleich, sie schneiden sich.

Wenn die Produktionsmenge gesteigert wird, ist dies solange mit einer Gewinnsteigung verbunden, bis die letzte produzierte Einheit einen genauso hohen Umsatzzuwachs (U′) erbringt, wie an zusätzlichen Kosten (K′) für ihre Herstellung anfallen.

Ob an der berechneten Stelle wirklich ein Maximum existiert, wird mit Hilfe der hinreichenden Bedingung überprüft. Wenn die 2. Ableitung der Gewinnfunktion für den ermittelten Wert negativ ist, liegt ein Maximum vor.

An der so berechneten Stelle eines Gewinnmaximums muss jedoch nicht notwendigerweise ein **positiver** Gewinn erzielt werden. Der maximal erreichbare Gewinn kann auch ein Verlust sein; das Gewinnmaximum wäre dann ein Verlustminimum.

Es ist also sinnvoll, zusätzlich zu überprüfen, welchen Wert der Gewinn an der Stelle des Gewinnmaximums annimmt.

Beispiel 21:

Ein Unternehmen stellt einen Dachgepäckträger für Pkws zum Transport von Sportmotorrädern her und ist Monopolist auf diesem Markt.

Im letzten Jahr wurden 50 Dachgepäckträger zu einem Preis von 1200 Euro verkauft. Bei einer Preiserhöhung um 50 Euro wird nach einer Marktforschungsuntersuchung ein Rückgang des Absatzes auf 45 Stück erwartet.

Die Preisabsatzfunktion wird als linear angenommen.

Die Gesamtkosten der Produktion betragen:

$$K(x) = \frac{1}{9}x^3 - 8x^2 + 600x + 4000$$

Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Preismengenkombination das Gewinnmaximum erreicht wird.

Lösen Sie das Problem graphisch.

Preisabsatzfunktion: Ein linearer Verlauf wird unterstellt. Zwei Punkte sind bekannt, so dass die 2-Punkteform angewandt werden kann.

p_1 = 1.200 x_1 = 50

p_2 = 1.250 x_2 = 45

$$\frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} = \frac{p_1 - p}{x_1 - x}$$

$$\frac{1.250 - 1.200}{45 - 50} = \frac{1.200 - p}{50 - x}$$

$$\frac{-50}{-5} = \frac{1.200 - p}{50 - x}$$

$$-500 + 10x = 1.200 - p$$

$$p = 1.700 - 10x$$

Umsatzfunktion

$U(x) = p \cdot x = 1.700x - 10x^2$

Gewinnfunktion

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$G(x) = 1.700x - 10x^2 - \frac{1}{9}x^3 + 8x^2 - 600x - 4.000$$

$$G(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 1.100x - 4.000$$

Ermittlung des Gewinnmaximums

$$G'(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x + 1.100$$

$$G'(x) = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 - 4x + 1.100 = 0$$

$$x^2 + 12x - 3.300 = 0$$

$$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 + 3.300}$$

$$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{3.336}$$

$$x_{1,2} = -6 \pm 57,7581$$

$$x_1 = 51,7581$$

$x_2 = -63,7581$ $\rightarrow$ ökonomisch nicht relevant

$$G''(x) = -\frac{2}{3}x - 4$$

$G''(51,7581) = -38,5054 < 0$ $\rightarrow$ Maximum

Bei einer abgesetzten Menge von gerundet 52 Dachgepäckträgern erzielt der Unternehmer einen maximalen Gewinn.

Der Preis, den er verlangen muss, ergibt sich aus der Preisabsatzfunktion.

$p(x) = 1.700 - 10x$

$p(52) = 1.180$

Der Unternehmer muss einen Preis von 1.180 DM verlangen, um 52 Stück absetzen zu können.

Den maximalen Gewinn erhält man durch Einsetzen der berechneten Menge von 52 Stück in die Gewinnfunktion.

$$G(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 1.100x - 4.000$$

$$G(52) = 32.168{,}89$$

Wenn das Unternehmen einen Preis von 1.180 DM verlangt, wird es 52 Motorradträger jährlich absetzen und damit einen maximalen Gewinn von 32.168,89 DM erzielen.

Da die Stückzahl von 51,7581 auf 52 gerundet wurde, sollte zusätzlich untersucht werden, ob eine Abrundung auf 51 nicht zu einem höheren Gewinn führen würde.

$G(51) = 32.159{,}00$

Der Gewinn bei einem Absatz von 52 Stück ist größer.

Graphische Lösung

Die Nullstellen der Umsatzfunktion $x_1 = 0$ und $x_2 = 170$ begrenzen den relevanten Bereich.

Preisabsatz- und Grenzumsatzfunktion sind linear, für sie erübrigt sich die Aufstellung einer Wertetabelle.

Die Ermittlung des Gewinnmaximums für einen Angebotsmonopolisten, der den Preis für sein Produkt steuern kann und für den eine Preisabsatzfunktion relevant ist, soll allgemein an den obigen Abbildungen erläutert werden.

Die Preisabsatzfunktion hat einen linearen Verlauf. Daraus ergibt sich eine parabelförmige Umsatzfunktion und eine Grenzumsatzfunktion mit der doppelten negativen Steigung wie die Preisabsatzfunktion.

Der Schnittpunkt von U′ und K′ gibt die gewinnmaximale Menge x_c an.

Wenn man den zu x_c gehörenden Punkt auf der Preisabsatzfunktion einträgt, erhält man den **Cournotschen Punkt** C.

Der Cournotsche Punkt gibt die Koordinaten der gewinnmaximalen Preis-Mengen-Kombination an (p_c, x_c).

Beispiel 22:

Berechnen Sie für die S-förmige Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1.000$ die Grenzkostenfunktion.

Wie groß sind die Grenzkosten bei $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 18$?

Bei welcher Produktionsmenge nehmen die Grenzkosten ihr Minimum an?

Funktionen mehrerer Variablen und ihre Differentiation

Begriff

In den vorhergehenden Kapiteln wurden Zusammenhänge zwischen ökonomischen Größen vereinfachend durch Funktionen mit nur einer unabhängigen Variablen beschrieben. Bei der Nachfragefunktion wurde nur die Abhängigkeit der nachgefragten Menge vom Preis berücksichtigt. Dabei wurde vorausgesetzt, dass alle anderen beeinflussenden Faktoren (z.B. Einkommen, Preise von Konkurrenzprodukten, Verbrauchsgewohnheiten) konstant bleiben. Diese **ceteris-paribus-Bedingung** erlaubt die Reduktion einer komplexen Problemstellung auf einen vereinfachten Zusammenhang.

Um einen ökonomischen Prozess, der durch Interdependenzen zwischen mehreren Größen gekennzeichnet ist, realistischer beschreiben zu können, sind Funktionen mit mehreren Veränderlichen heranzuziehen.

Eine wirklichkeitsgetreue Abbildung von ökonomischen Beziehungen durch ein mathematisches Modell ist wegen der vielfältigen und oftmals nicht messbaren Wirkungszusammenhänge nicht möglich. Zwangsläufig wird man sich auf die einflussreichsten wirtschaftlichen Größen (**unabhängige Variablen**) beschränken müssen, die zu einer ausreichend genauen Beschreibung der Problemstellung notwendig sind.

Allgemeine Darstellung einer Funktion mit mehreren Variablen:

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

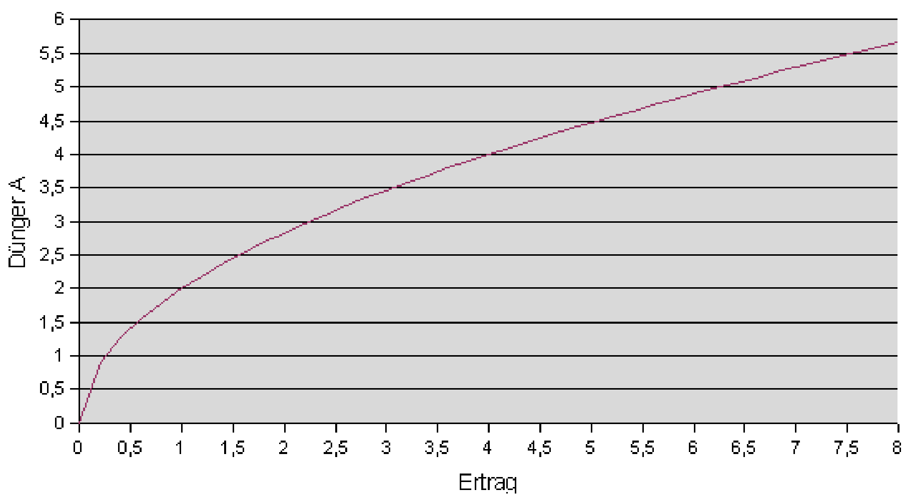
y ist die abhängige Variable

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind die unabhängigen Variablen

Beispiel 23:

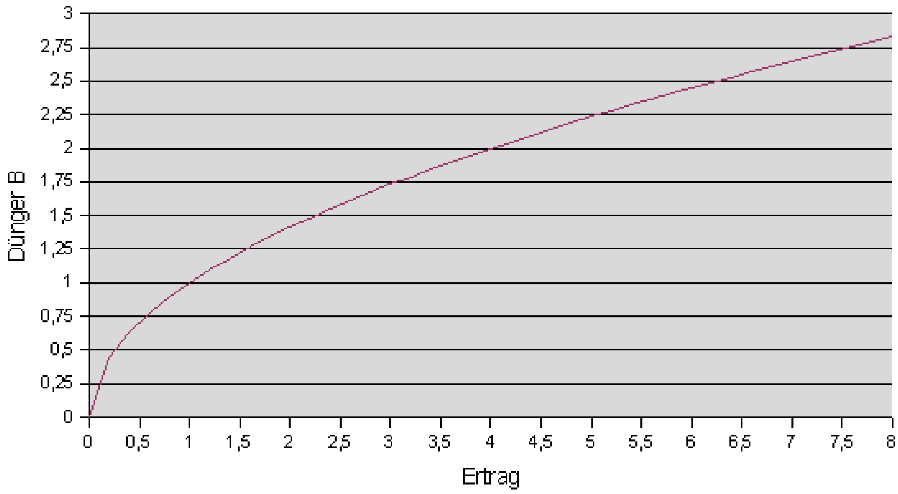
Ein Kartoffelfeld wird mit zwei Düngern A und B behandelt. Nehmen wir an, dass der Ertrag y von der Menge x_1 des Düngers A wie folgt abhängt:

$y = 2\sqrt{x_1}$ für $x_1 \geq 0$



Der Ertrag y hängt aber auch noch von der Menge x_2 des Düngers ab. In unserem Beispiel in der folgenden Weise:

$y = \sqrt{x_2}$ für $x_2 \geq 0$

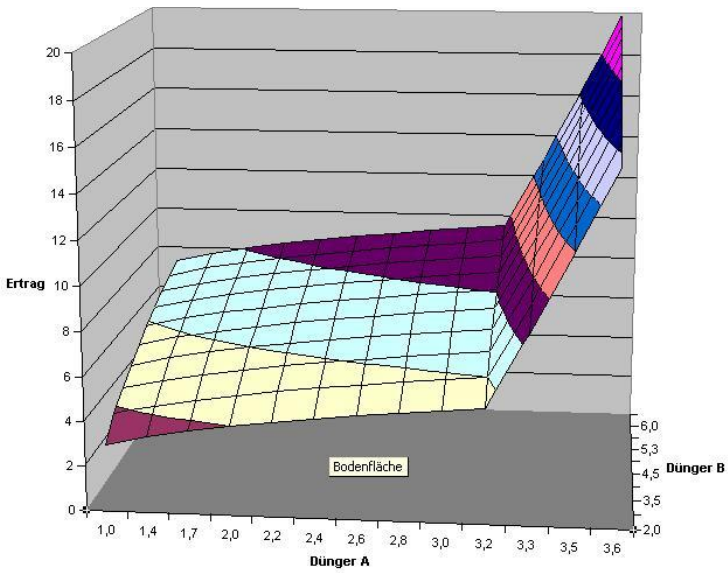


Falls man unterstellt, dass die beiden Variablen x_1 und x_2 durch die folgende Gleichung bestimmt ist, dann können wir angeben, welchen Ertrag y man erhält, falls man beliebige Mengen von x_1 und x_2 einsetzt:

$$y = 2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \text{ für } x_1, x_2 \geq 0.$$

Diese Funktion kann man auch graphisch darstellen. Eine Fläche, die durch die Koordinaten x_1 und x_2 bestimmt wird, gibt die möglichen Düngerkombinationen an.

Als Ausschnitt könnte diese Funktion mehrerer unabhängiger Variablen dann so aussehen.



Analytische Darstellung

Der Umgang mit Funktionsgleichungen von Funktionen mit mehreren Veränderlichen ist problemlos. Er erfolgt im Wesentlichen nach den gleichen Regeln, die auch für Funktionen mit nur einer unabhängigen Variablen gelten.

Beispiel 24:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 x_3 - 5x_3$$

$$y = f(x_1, x_2) = \ln\left(x_1^3 + \sqrt{3x_2}\right)$$

Tabellarische Darstellung

Es lassen sich Wertetabellen für Funktionen mit mehreren Veränderlichen aufstellen, wobei der Umfang und die Unübersichtlichkeit mit zunehmender Anzahl von Variablen sehr schnell wächst.

Bei zwei unabhängigen Veränderlichen lässt sich die Funktion durch eine zweidimensionale Wertetabelle darstellen.

Beispiel:

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 4x_2^2 + 7$$

		x_1			
		1	2	3	4
	1	11	15	23	35
x_2	2	21	23	29	39
	3	39	39	43	51
	4	65	63	65	71

Wenn eine dritte Veränderliche x_3 in die Funktion aufgenommen und in der Tabelle dargestellt wird, so enthält die Wertetabelle bereits 4 · 4 · 4 = 64 Funktionswerte bei Betrachtung von jeweils vier Werten für die unabhängigen Variablen.

Die Darstellung einer Funktion mit mehreren Variablen in einer Wertetabelle ist somit nur bei wenigen Variablen und wenigen zu betrachtenden Werten übersichtlich.

Graphische Darstellung

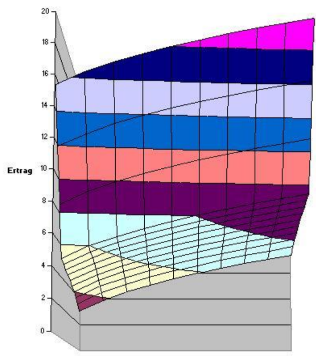
Grundlagen

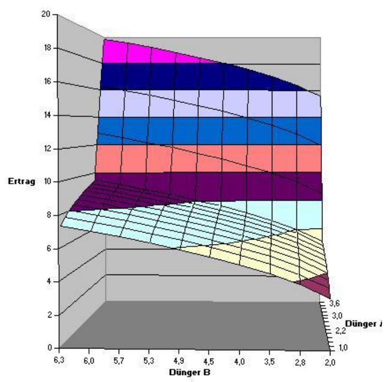
Die graphische Darstellung von Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen wird in den Wirtschaftswissenschaften häufig genutzt, um eine anschauliche Übersicht über die Form von ökonomischen Zusammenhängen zu gewinnen. Mehr als drei Veränderliche lassen sich allerdings graphisch nicht darstellen.

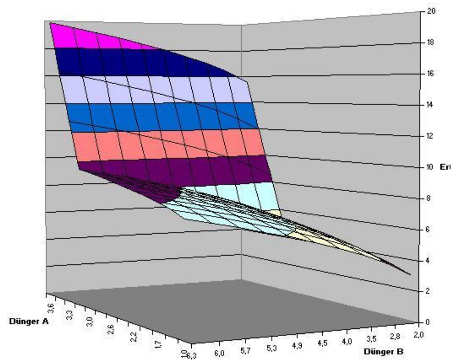
Zur graphischen Darstellung einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen (x und y) und einer Abhängigen (z) $z = f\,(x, y)$ bedarf es eines Koordinatensystems mit drei Achsen.

Jeder Punkt der Funktion $z = f\,(x, y)$ ist durch drei Koordinaten (x; y; z) festgelegt. Die x-, y-, z-Achse stehen senkrecht aufeinander und stellen somit einen (dreidimensionalen) Raum dar, der durch die Koordinaten Länge, Breite und Höhe bestimmt wird.

Die graphische Darstellung einer Funktion $z = f\,(x, y)$ ergibt eine Fläche im Raum. Eine Fläche im Raum ist nicht zeichenbar; es ist lediglich möglich, einen Raum perspektivisch in der Ebene darzustellen. Eine solche Abbildung ist nicht verzerrungsfrei, aber durch geschickte Anordnung der Achsen lassen sich Funktionen so skizzieren, dass der Zusammenhang anschaulich wiedergegeben wird.







Wenn weitere Variablen hinzukommen, versagt das menschliche Vorstellungsvermögen.

Beispiel 25:

Graphische Darstellung des Punktes (4;3;2) im x-y-z-Koordinatensystem.

Der Punkt (4;3;2) wird gezeichnet, indem man bei $x = 4$ eine Parallele zur y-Achse und bei $y = 3$ eine Parallele zur x-Achse zeichnet und deren Schnittpunkt bestimmt.

Von diesem Schnittpunkt aus wird eine Parallele zur z-Achse mit der Höhe $z = 2$ abgetragen.

Lineare Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

Die linearen Funktionen mit drei Veränderlichen lassen sich relativ leicht zeichnen und rechnerisch handhaben, so dass sie in der praktischen Anwendung besonders häufig herangezogen werden. Viele ökonomische Zusammenhänge lassen sich durch lineare Funktionen hinreichend genau beschreiben.

Allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion mit drei Veränderlichen:

$$z = f(x, y) = ax + by + c$$

Die Variablen treten nur in der ersten Potenz auf, und sie werden nicht miteinander multipliziert. Das Bild dieser Funktion stellt eine Ebene im Raum dar.

Beispiel 26:

Graphische Darstellung der Funktion $z = 6 - 2x - y$

Eine Ebene im Raum ist durch drei Punkte festgelegt. Diese drei Punkte sollten zweckmäßigerweise die Schnittpunkte mit den drei Koordinatenachsen sein.

In den Schnittpunkten mit den Achsen nehmen zwei Variablen den Wert Null an; nur die Variable, deren Achse geschnitten wird, hat einen anderen Wert.

Schnittpunkt mit z-Achse: $x = 0$, $y = 0$, $z = 6$

Schnittpunkt mit x-Achse: $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$

Schnittpunkt mit y-Achse: $x = 0$, $z = 0$, $y = 6$

Die Schnittpunkte werden in das Koordinatensystem eingetragen und durch Geraden verbunden.

Durch eine Schraffur lässt sich die Funktionsfläche hervorheben. Diese schraffierte Fläche stellt nur einen Teil der Funktionsebene dar, die sich in alle Richtungen unendlich fortsetzt. Man sieht hier nur den Teil der Fläche, für den alle drei Variablen positive Werte annehmen.

Die Geraden, die die Schnittpunkte verbinden, sind die Schnittgeraden der Funktionsebene mit den Koordinatenebenen, die aus jeweils zwei Achsen gebildet werden.

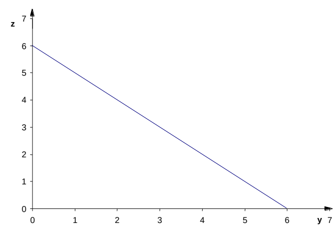
Die Gerade durch die Schnittpunkte von x- und y-Achse stellt alle Punkte der Fläche dar, für die die dritte Koordinate den Wert Null annimmt ($z = 0$). Es handelt sich um die Schnittgerade mit der x-y-Ebene.

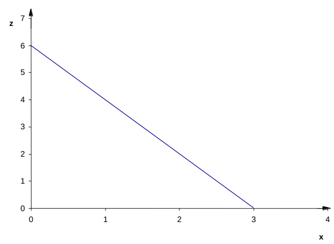
$z = 0$: Schnittgerade mit der x-y-Ebene $\quad 0 = 6 - 2x - y, \qquad y = 6 - 2x$

$x = 0$: Schnittgerade mit der y-z-Ebene $\quad z = 6 - y$

$y = 0$: Schnittgerade mit der x-z-Ebene $\quad z = 6 - 2x$

Diese Schnittgeraden lassen sich im zweidimensionalen Raum darstellen.





Nichtlineare Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

Die graphische Darstellung nichtlinearer Funktionen ist erheblich komplizierter, da sich gekrümmte Flächen im dreidimensionalen Raum ergeben, die sich nur mit Hilfslinien veranschaulichen lassen.

Neben den Schnittkurven der Funktionsfläche mit den drei Koordinatenebenen werden weitere Schnittkurven mit verschiedenen Parallelflächen zu den Koordinatenebenen gezeichnet. Bei geschickter Wahl der gezeichneten Schnittkurven kann eine sehr anschauliche perspektivische Darstellung entstehen.

Beispiel 27:

Graphische Darstellung der Funktion $z = f(x,y) = 1 + x^2 + 2y^2$.

Schnittkurven mit den Koordinatenebenen:

x-y-Ebene: $z = 0$ $\quad x^2 + 2y^2 = -1$

keine Lösung; es gibt keinen Schnittpunkt der Fläche mit der x-y-Ebene, da die Fläche die z-Achse erst bei $z = 1$ schneidet.

x-z-Ebene: $y = 0$ $\quad z = 1 + x^2$ Parabel

y-z-Ebene: $x = 0$ $\quad z = 1 + 2y^2$ Parabel

Eine Eintragung der Schnittkurven in ein dreidimensionales Koordinatensystem lässt die Form der Funktionsfläche erahnen.

An diesem Beispiel bietet es sich an, zusätzliche Schnittkurven parallel zur x-y-Ebene einzutragen, um den Verlauf der Funktionsfläche zu verdeutlichen.

Diese Schnitte parallel zur x-y-Ebene sind dadurch charakterisiert, dass z einen konstanten Wert annimmt, der dem Abstand der Schnittkurve von der Ebene entspricht.

Für $z = 1$ ergibt sich: $1 = 1 + x^2 + 2y^2$

$$0 = x^2 + 2y^2$$

Diese Gleichung gilt nur für $x = 0$ und $y = 0$.

Der Punkt (0;0;1) entspricht dem Schnittpunkt der Fläche mit der z-Achse. d.h. der unteren Spitze der Fläche.

Für $z = 3$ ergibt sich: $3 = 1 + x^2 + 2y^2$

$$2 = x^2 + 2y^2$$

$$2y^2 = 2 - x^2$$

$$y^2 = 1 - 0{,}5x^2$$

$$y = \sqrt{1 - 0{,}5x^2}$$

Die Schnittkurve entspricht einer Ellipse. Es ergibt sich für:

$x = 0 \quad y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$y = 0 \quad x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4142$

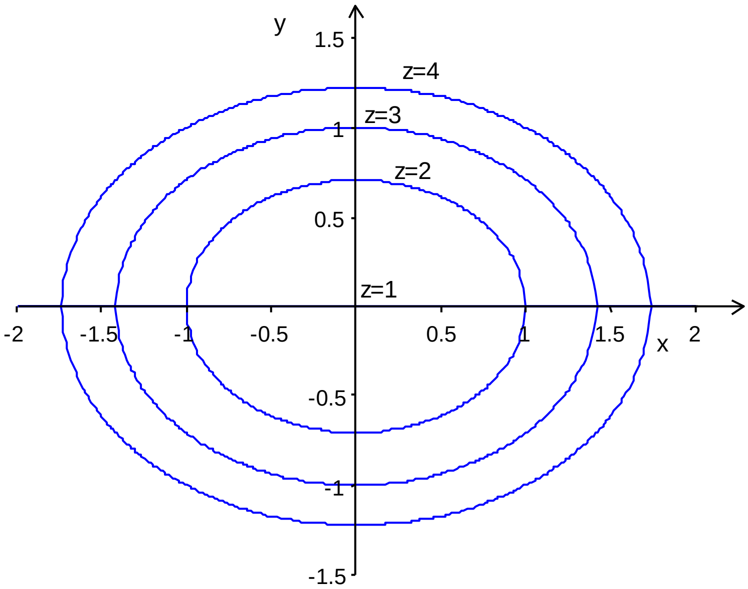
Mit der zusätzlichen Einzeichnung dieser Schnittkurven ist der Verlauf der Fläche besser vorstellbar.

Für die Veranschaulichung ökonomischer Zusammenhänge ist diese Form der Darstellung nicht immer zweckmäßig.

Es reicht zur Lösung vieler wirtschaftlicher Probleme aus, nur die Schnittkurven mit Parallelflächen zur x-y-Ebene zu betrachten. Diese Schnittkurven werden auf die x-y-Ebene projiziert. Jede Schnittkurve beinhaltet alle Punkte der Funktionsfläche, die von der x-y-Ebene den gleichen Abstand bzw. die gleiche Höhe haben (z=const.).

Man bezeichnet diese Schnittkurven als **Isohöhenlinien**.

Isohöhenlinien sind aus der Geographie bekannt. Sie stellen auf einer Landkarte alle Punkte mit der gleichen Höhe dar (Höhenlinie). Von Wetterkarten kennt man die Isobaren, die Punkte mit gleichem Luftdruck verbinden.



Ökonomische Anwendungen

Bei ökonomischen Zusammenhängen, die wegen ihrer Komplexität nur durch **mehrdimensionale** Funktionen hinreichend exakt beschrieben werden können, bereitet es erhebliche Schwierigkeiten, eine geeignete Funktionsgleichung zu finden.

Meist sind nur einige Eigenschaften einer solchen Funktion bekannt oder können zumindest aufgrund theoretischer Überlegungen vermutet werden. So kann die Lage von Extremwerten und das Steigungsverhalten der zugrunde liegenden Funktion geschätzt werden. Auch die Funktionsform (z.B. Lineare Funktion, Parabel) lässt sich häufig erahnen.

Um diese Annahmen und Vermutungen abzusichern, sind umfangreiche statistische Untersuchungen erforderlich. Dabei tritt das Problem hinzu, dass Experimente in der betrieblichen Praxis kaum möglich sind. Die Produktion lässt sich nicht ohne weiteres verändern, um einige Punkte der Kostenfunktion zu ermitteln; auch der Preis für ein Produkt kann auf einem Markt nicht beliebig Testweise variiert werden, um eine Vorstellung über den Verlauf der Preisabsatzfunktion zu erhalten.

Im Folgenden sollen einige wichtige Funktionen mit mehreren Veränderlichen vorgestellt werden, die in den Wirtschaftswissenschaften eine bedeutende Rolle spielen.

Nutzenfunktion

In der Nutzenfunktion wird der durch den Konsum von Gütern gestiftete Nutzen für ein Wirtschaftssubjekt durch eine Funktion beschrieben. Eine Nutzenfunktion lässt sich kaum durch eine Funktionsgleichung ausdrücken, aber es lassen sich doch einige Eigenschaften nennen, die den Verlauf einer Nutzenfunktion beschreiben. Wenn man die Nutzenfunktion für zwei Güter betrachtet, so kann der Nutzen y, den ein Wirtschaftssubjekt durch eine Bedürfnisbefriedigung aus den Gütern bezieht, als abhängige Variable betrachtet werden. Die unabhängigen Variablen sind die konsumierten Mengen x_1 und x_2 der Güter 1 und 2.

$y = f(x_1, x_2)$ Nutzenfunktion

Das Wirtschaftssubjekt kann ein bestimmtes Nutzenniveau durch unterschiedliche Mengenkombinationen der beiden Güter erreichen. Für diese Kombinationen x_1, x_2 mit einem bestimmten Nutzen gilt:

$f(x_1, x_2) = \text{const}$

Wenn eine Nutzenfunktion **graphisch** dargestellt wird, entsprechen die Kurven, die Mengenkombinationen mit konstantem Nutzen angeben, den Isohöhenlinien. In Bezug auf die x_1-x_2-Ebene haben alle Punkte auf jeder dieser Linien die gleiche Höhe. Bei der Analyse von Nutzenfunktionen bezeichnet man die Isohöhenlinien als **Indifferenzkurven**.

Sie geben an, wie ein Wirtschaftssubjekt die konsumierten Mengen der Güter variieren kann, ohne dass sich der gestiftete Nutzen ändert. Gegenüber den Mengenkombinationen auf einer Indifferenzkurve verhält sich das Wirtschaftssubjekt indifferent. Eine Mengenkombination auf einem höheren Nutzenniveau wird dagegen bevorzugt, da sie eine höhere subjektive Bedürfnisbefriedigung bietet.

Der Abstand zwischen den einzelnen Indifferenzkurven ist im Allgemeinen nicht quantifizierbar.

Beispiel 28:

Ein Studienabsolvent hat die Wahl zwischen verschiedenen Stellenangeboten. Die Attraktivität einer beruflichen Position bemisst er nach zwei Faktoren:

monatliches Gehalt (x_1)

Anzahl der Urlaubstage im Jahr (x_2)

Der Nutzen ist eine Funktion der Variablen x_1 und x_2.

$y = f(x_1, x_2)$

Der Absolvent bewertet z.B. folgende Mengenkombinationen als gleichwertig:

Gehalt 1250 Euro und 40 Tage Urlaub

Gehalt 1500 Euro und 30 Tage Urlaub

Gehalt 2500 Euro und 20 Tage Urlaub

Diese drei Mengenkombinationen bieten ihm den gleichen Nutzen, sie liegen auf einer Indifferenzkurve. Zwischen diesen drei Angeboten würde sich der Studienabsolvent indifferent verhalten.

Er bevorzugt natürlich eine Position mit:

Gehalt 5.000 Euro und 30 Tage Urlaub

Gehalt 2.500 Euro und 60 Tage Urlaub

Einen noch größeren Nutzen hätte:

Gehalt 6.000 Euro und 40 Tage Urlaub

Durch diese Mengenkombinationen werden weitere Indifferenzkurven festgelegt, die auf einem höheren Niveau liegen und einen höheren Nutzen bewirken.

Der Absolvent wird versuchen, ein möglichst hohes Nutzenniveau zu erreichen, also eine möglichst weit vom Koordinatenursprung entfernt liegende Indifferenzkurve, wobei ihm die Mengenkombination auf einer bestimmten Indifferenzkurve gleichgültig ist.

Die Messung des Nutzens ist problematisch; die Indifferenzkurven sind hier mit $y = 1$, $y = 2$ und $y = 3$ bezeichnet.

Produktionsfunktion

Eine *mikroökonomische* Produktionsfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen den bei der Herstellung eines Gutes G eingesetzten Produktionsfaktoren (Input) und der damit erzeugten Produktionsmenge (Output) im Rahmen einer konstanten Produktionstechnik. Produktionsfaktoren sind z.B. Energie, Rohstoffe, Arbeitsstunden usw.

Werden nun in einem Produktionsprozess die Mengen $v_1, v_2,..., v_n$ der Produktionsfaktoren $F_1, F_2,..., F_n$ eingesetzt, so gibt die Produktionsfunktion $x = f(v_1, v_2,..., v_n)$ an, welche Menge x man damit von dem Gut G herstellen kann. Wir nehmen hier an, dass alle Produktionsfaktoren unbegrenzt teilbar sind und die Produktionsfunktion stetig ist.

Hängt eine Produktionsfunktion nur von zwei Produktionsfaktoren ab, so kann man deren charakteristische Eigenschaften besonders gut erkennen, wenn man horizontale und vertikale Schnitte durch das Funktionsgebirge legt. Hält man den Output konstant beim Niveau x_0, so ergibt sich aus der Gleichung $x_0 = f(v_1, v_2)$ eine Höhenlinie, auf der alle Mengenkombinationen v_1 und v_2 der Faktoren F_1 und F_2 liegen, mit denen dieser Output x_0 erzeugt werden kann. Eine solche Höhenlinie, die man auch oft als Isoquante bezeichnet, hat im Normalfall etwa eine Form gemäß dem nächsten Bild.

Man kann nämlich annehmen, dass bei Verminderung des einen Faktors die Einsatzmenge des anderen Faktors erhöht werden muss, um denselben Output herstellen zu können (Faktorensubstitution). Wird nun v_1 um den Betrag Δv_1 erhöht, so ist der Betrag Δv_2, um den v_2 dann vermindert werden kann, in der Regel bei einem niedrigen Niveau v_1^* größer als bei einem hohen Niveau v_1^{**}. Wir werden darauf im Zusammenhang mit dem "Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution" später noch genauer eingehen.

Für verschiedene konstante Outputs erhält man eine Schar von Isoquanten der beschriebenen Art, aus deren Verlauf man dann auf die Gestalt der Produktionsfunktion schließen kann.

Für die Produktionsfunktion $x = f(v_1, v_2) = v_1^{1/2} v_2^{1/2}$ ergibt sich z. B.:

Lassen sich die beiden Faktoren stets im gleichen Verhältnis ersetzen, so spricht man von strengster Substitutionalität. Dies trifft z.B. zu für die Produktionsfunktion

$$x = f(v_1, v_2) = \frac{3}{2}v_1 + v_2$$

bei der die Isoquanten Geraden mit der Steigung $-\frac{3}{2}$ darstellen. wird nun v_1 um Δv_1 = 2 erhöht, so vermindert sich v_2 um $\Delta v_2 = 3$, bei $\Delta v_1 = 4$ ergibt sich $\Delta v_2 = 6$ usw.

Von großem Interesse ist auch noch die Frage, wie sich der Output x verändert, wenn man die Faktoreinsatzmenge $v_1, v_2,..., v_n$ verdoppelt, verdreifacht oder allgemein das λ-fache $\lambda v_1, \lambda v_2,..., \lambda v_n$ nimmt ($\lambda > 0$). Wir untersuchen also die Produktionsfunktion auf Homogenität und unterscheiden dabei zwischen drei verschiedenen Typen:

Beispiel 29:

Für $x = f(v_1, v_2) = v_1^{1/2} v_2^{1/2}$ ist die Isoquante für x_0

$$\sqrt{v_1} \cdot \sqrt{v_2} = x_0 \qquad \text{bzw.} \qquad v_2 = \frac{x_0^2}{v_1}$$

Nachfragefunktion

Werden auf einem Markt mit vollkommener Konkurrenz n Güter $G_1, G_2,..., G_n$ gehandelt, so hängt die Nachfrage nach einem Gut G_i allgemein von den Preisen aller dieser Güter ab. Wir können also hierbei n Nachfragefunktionen

$x_1 = f_1(p_1, p_2,..., p_n),..., x_n = f_n(p_1, p_2,..., p_n)$

aufstellen. Die Funktion $x_i = f_i(p_1, p_2,..., p_n)$ beschreibt jeweils den funktionalen Zusammenhang zwischen der für ein Gut G_i nachgefragten Menge x_i und den Preisen $p_1, p_2,..., p_n$ aller auf dem Markt angebotenen Güter $G_1, G_2,..., G_n$.

Vielfach beschränkt man sich darauf, nur die Nachfragebeziehungen zwischen zwei besonders interessierenden Gütern zu analysieren. Bei Konstanz der Preise für die übrigen Güter erhält man dann in diesem Fall die beiden Nachfragefunktionen

$x_1 = f_1(p_1, p_2)$ und $x_2 = f_2(p_1, p_2)$.

Konsumfunktion

Die mikroökonomische Konsumfunktion eines Wirtschaftssubjektes (z.B. Haushalt) gibt die Konsumausgaben in Abhängigkeit von dessen Einkommen sowie den Preisen aller Güter an.

Wenn alle Konsumfunktionen der einzelnen Wirtschaftssubjekte zusammengefasst werden, erhält man die **makroökonomische** Konsumfunktion. die makroökonomische Konsumfunktion untersucht die Abhängigkeit der gesamten Konsumausgaben einer Volkswirtschaft von den Preisen aller konsumierten Güter und den Einkommen aller Wirtschaftssubjekte (Haushalte), die diese Konsumgüter nachfragen.

Beispiel 30:

Gegeben sei die Funktion $z = 20 - 4x - 5y$.

a) Skizzieren Sie die Funktionsfläche.

b) Berechnen Sie die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen und zeichnen Sie sie in zweidimensionale Koordinatensysteme.

c) Berechnen Sie die Isohöhenlinien für $z = 0$, $z = 20$, $z = 40$ und zeichnen Sie sie in ein zweidimensionales Koordinatensystem.

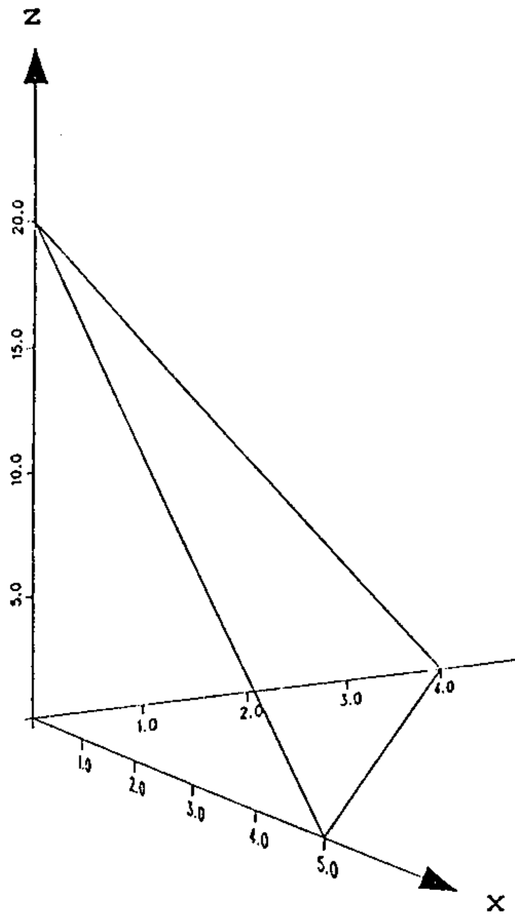
Lösung:

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

z – Achse: x = 0, y = 0, z = 20

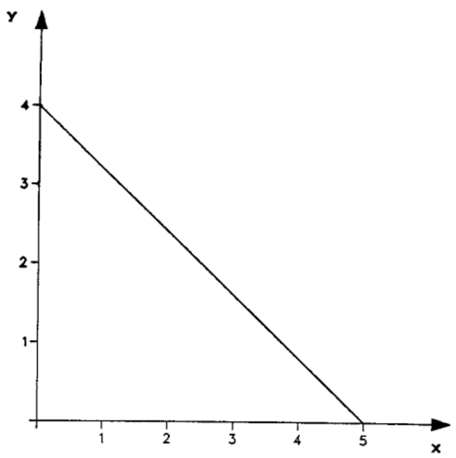
x – Achse: y = 0, z = 0, x = 5

y – Achse: x = 0, z = 0, y = 4

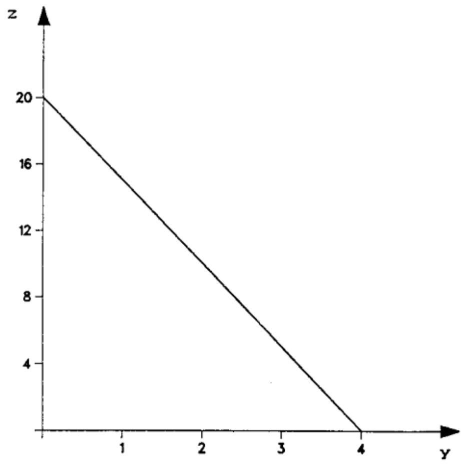


b)

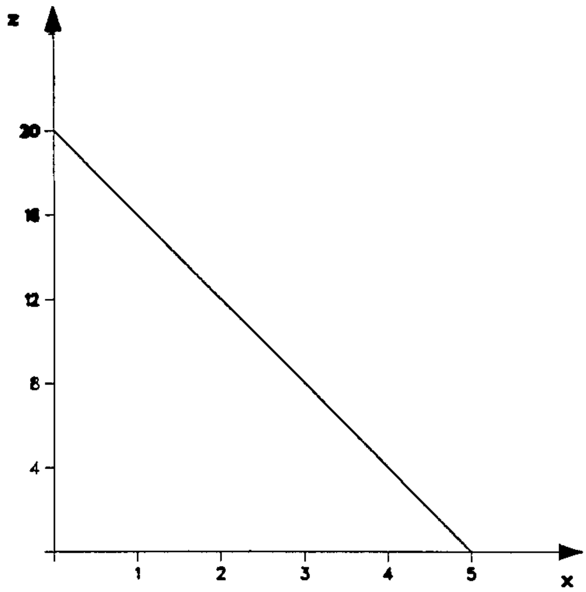
z = 0: Schnittgerade mit x-y – Ebene y = 4 – 0,8x



x = 0: Schnittgerade mit z-y – Ebene: z = 20 – 5y



y = 0: Schnittgerade mit z-x – Ebene: z = 20 – 4x

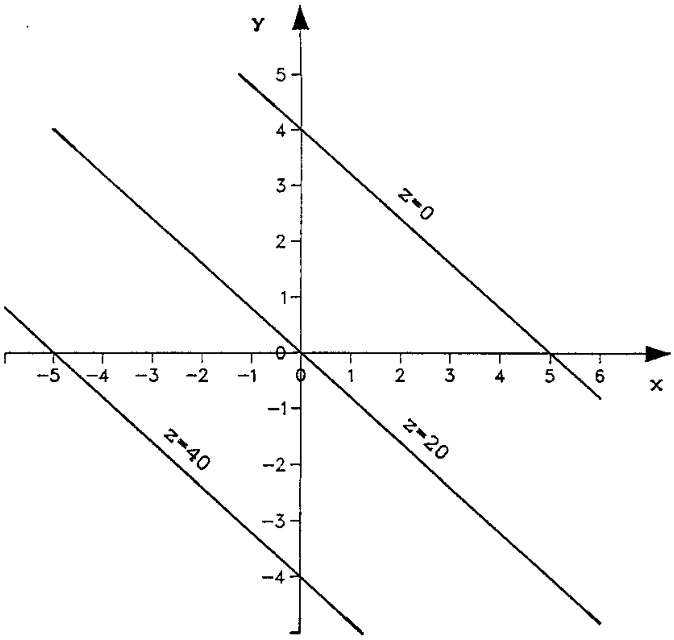


c)

z = 0; y = 4 – 0,8x

z = 20; y = – 0,8x

z = 40; y = – 4 – 0,8x



Beispiel 31:

Ein Monopolist bietet ein Produkt in zwei unterschiedlichen Varianten an. Die Nachfragefunktion, die von den Preisen beider Produktvarianten (p_1,p_2) abhängt, lautet:

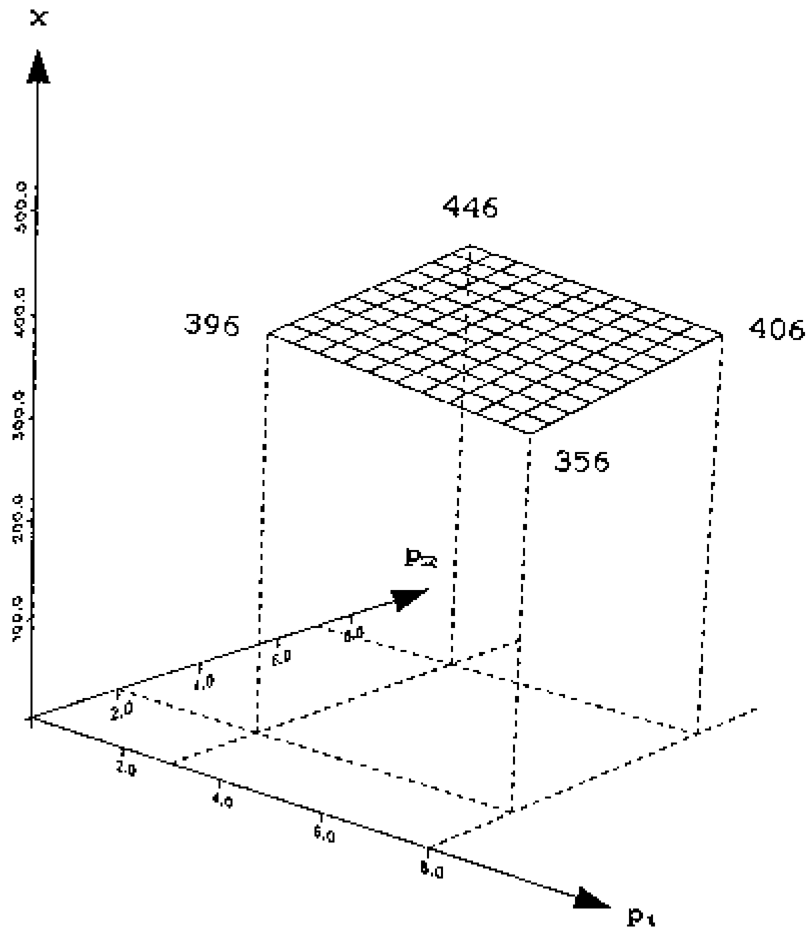
$X=400-8p_1+10p_2$

Die Preise können nur innerhalb bestimmter Grenzen verändert werden

$3<=p_1<=8$ und $1<=p_2<=7$

Stellen Sie die Nachfragefunktion graphisch dar!

Lösung:



Beispiel 32:

Gegeben ist eine Funktion von zwei Variablen: $z=f(x,y) = x^{1/2} -y^{3/2}$

a) Zeichnen Sie die Schnittkurve von f(x,y) mit der Koordinatenebene z-x-Ebene!

b) Berechnen Sie die Höhenlinie zu z=0 und zeichnen Sie sie!

Lösung:

a) z-x-Ebene y=0: $z=x^{½}$ (Zeichnung ist die Wurzelfunktion)

b) z=0; $x^{½}= y^{3/2}$; $x= y^{3}$ (Zeichnung wie Parabel 3-ten Grades)

$f'_x(x,y)=1/2\ x^{-1/2}$

$f'_y(x,y)=-3/2\ y^{½}$

$f''_{xx}(x,y)=-1/4\ x^{-3/2}$

$f''_{yy}(x,y)=-3/4\ y^{-½}$

$f''_{yx}(x,y)=0$

Partielle Ableitung

Partielle Ableitungen ermöglichen die Berechnung einer Lösung für Probleme, die von mehreren Parametern abhängen.

Die Abbildung einer Funktion mit einer unabhängigen und einer abhängigen Variablen entspricht einer Kurve in der Ebene, und die erste Ableitung dieser Funktion kann anschaulich als die Steigung dieser Kurve an einer bestimmten Stelle interpretiert werden.

Eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen x und y und der abhängigen Variablen z entspricht graphisch einer Fläche im dreidimensionalen Raum. Man schreibt: $z = f(x,y)$

Die erste Ableitung einer solchen Funktion kann nicht ohne weiteres als Steigung interpretiert werden.

Die Steigung einer Fläche in einem Raum lässt sich nicht eindeutig festlegen, denn sie nimmt unterschiedliche Werte an in Abhängigkeit von der Richtung, in der sie gemessen wird. Sie ist abhängig vom Wert beider unabhängigen Variablen x und y und zusätzlich von der Richtung.

Wenn sich die Person auf dem Punkt P der skizzierten Fläche befindet, sind damit die Koordinaten x, y und z festgelegt, jedoch nicht die Steigung in diesem Punkt.

Die Steigung ist zusätzlich davon abhängig, in welche Richtung sich die Person auf diesem Skihang bewegt. Sie kann bergab fahren (I) und damit die maximale negative Steigung erreichen, sich bergauf in Richtung der höchstmöglichen Steigung bewegen (II), einen Weg auf einer Höhenlinie mit einer Steigung von Null wählen (III) oder auch alle Richtung, die dazwischen liegen.

Wenn die Richtung der Bewegung geändert wird, ändert sich folglich auch der Wert der Steigung.

Eine Aussage über die richtungsabhängige Steigung der Funktionsfläche lässt sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen treffen.

Bei der Berechnung einer **partiellen Ableitung** wird die Abhängigkeit der Funktion von nur einer der unabhängigen Variablen betrachtet, während alle anderen als konstant angenommen werden.

In der Funktion $z = f(x,y)$ wird entweder x als konstant angenommen, so dass die Funktion nur noch von y abhängt, oder man setzt y konstant. Die Änderung des Funktionswertes ins Verhältnis gesetzt zur Änderung einer der unabhängigen Variablen bei Konstanthalten der übrigen bezeichnet man als **partiellen Differentialquotienten**.

Graphisch entspricht diese Vorgehensweise Schnitten durch die Funktion, die parallel zu den Koordinatenebenen verlaufen. Man ermittelt somit die Steigung in Richtung jeweils einer Koordinatenachse.

Definition 21:

Wenn eine Funktion mehrere Variablen hat, z.B.

$$f(x,y) = 2x + y$$

und nach einer (!) der Variablen abgeleitet wird, spricht man von der **partiellen Ableitung**.

Im obigen Beispiel gibt es zwei partielle Ableitung, weil man ja sowohl nach x als auch nach y ableiten kann. Die jeweils andere Variable - die, nach der nicht abgeleitet wird - verhält sich dabei wie eine Konstante. Wenn du also nach x ableiten willst, kannst du dir vorstellen, dass y z.B. dem Wert 5 entspricht:

y wird als konstant ($y = 5$) angesehen: $f(x,y) = 2x + 5 \quad \rightarrow \quad f_x(x,y) = 2$

Jetzt setzen wir x konstant und leiten nach y ab:

x wird als konstant ($x = 7$) angesehen: $f(x,y) = 2 \cdot 7 + y \quad \rightarrow \quad f_y(x,y) = 1$

Wie man sieht, ist es gar nicht so schwer, die partiellen Ableitungen einer Funktion zu berechnen. Übrigens ist die Vorstellung, dass die jeweils konstante Variable einem konkreten Wert entspricht nur eine Denkhilfe. In Prüfungen könnt ihr euch an dieser Stelle Schreibarbeit sparen und einfach direkt ableiten.

Definition 22:

Die Ableitung einer Konstanten ist Null.

Beispiel 33:

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 2x + 3y$.

Wenn wir die Funktion nach x ableiten, wird y gleich Null.

$$f_x = 2 + 0 = 2$$

Wenn wir die Funktion nach y ableiten, wird x gleich Null.

$$f_y = 0 + 3 = 3$$

Sind die beiden Variablen x und y multiplikativ verknüpft, kommt die Faktorregel zum Einsatz.

Definition 23:

Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.

Beispiel 34:

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 5xy$.

Wenn wir die Funktion nach x ableiten, bleibt y erhalten.

$f_x = 5y$

Wenn wir die Funktion dagegen nach y ableiten, bleibt x erhalten.

$f_y = 5x$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Im Zusammenhang mit partiellen Ableitungen spricht man von einer Ableitung 1. Ordnung, wenn einmal abgeleitet wurde. Falls die Funktion jedoch zweimal abgeleitet wurde, spricht man von der partiellen Ableitung 2. Ordnung. Entsprechend berechnet man die 3. und 4. Ordnung (usw.) - schauen wir uns das mal an einem Bespiel an.

$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$

Berechne die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$f_x(x, y) = 2x + y$

$f_y(x, y) = x + 4y$

Berechne die partiellen Ableitungen 2. Ordnung

Wenn man die partielle Ableitung 1. Ordnung (f_x) noch einmal nach x (oder nach y) ableitet, erhält man die partiellen Ableitungen 2. Ordnung

$f_{xx}(x, y) = 2$

$f_{xy}(x, y) = 1$

Wenn man die partielle Ableitung 1. Ordnung (f_y) noch einmal nach y (oder nach x) ableitet, erhält man die partiellen Ableitungen 2. Ordnung

$f_{yy}(x, y) = 4$

$f_{yx}(x, y) = 1$

Wir stellen fest, dass die Zahl der möglichen Ableitungen höherer Ordnung schnell größer wird. Eine Funktion mit zwei Variablen (x, y) besitzt beispielsweise zwei partielle Ableitungen 1. Ordnung (f_x und f_y), vier partielle Ableitungen 2. Ordnung (f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} und f_{yx}) und acht partielle Ableitungen 3. Ordnung (f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yyy}, f_{yyx}, f_{yxy} und f_{yxx}).

Schreibweisen für partielle Ableitungen

Je nach Schule oder Universität gibt es im Zusammenhang mit partiellen Ableitungen unterschiedliche Schreibweisen, die aber selbstverständlich dasselbe bedeuten.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Entsprechend lauten die Schreibweisen für partielle Ableitungen 3. (usw.) Ordnung.

Ableitungsregeln

Alle bekannten Ableitungsregeln gelten auch für partielle Ableitungen.

Bei den folgenden Beispiele wurde jeweils die Ableitung 1. Ordnung berechnet, d.h. die Funktionen wurden nach jeder Variable einmal abgeleitet.

- Summenregel / Differenzregel
  $f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

  Beispiel
  $f(x, y) = 2x^2 + 2x - 4y$
  $f_x = 4x + 2$
  $f_y = -4$

- Produktregel
  $f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

  Beispiel
  $f(x, y) = x^2 y \cdot xy^3$
  $f_x = 2xy \cdot xy^3 + x^2 y \cdot y^3$
  $f_y = x^2 \cdot xy^3 + x^2 y \cdot 3xy^2$

- Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Beispiel

$$f(x,y) = \frac{2x}{y^2}$$

$$f_x = \frac{y^2 \cdot 2 - 2x \cdot 0}{[y^2]^2}$$

$$f_y = \frac{y^2 \cdot 0 - 2x \cdot 2y}{[y^2]^2}$$

- Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Beispiel

$$f(x,y) = (x+2y)^3$$

Äußere Funktion: $g(v) = v^3 \quad \rightarrow \quad g'(v) = 3v^2$
Innere Funktion: $h(x,y) = x + 2y \quad \rightarrow \quad h_x = 1 \quad \text{und} \quad h_y = 2$

$$f_x = 3(x+2y)^2 \cdot 1$$
$$f_y = 3(x+2y)^2 \cdot 2$$

Beispiel 35:

$$\begin{aligned} z &= 6x^2 + 5xy - 7y^2 + 3x + 2y - 13 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 12x + 5y + 3 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 5x - 14y + 2 \\ z &= \ln(xy^2) \quad z_x = \frac{1}{x},\ z_y = \frac{2}{y} \end{aligned}$$

Beispiel 36:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2y^3 + y\ln x \\
f_x(x,y) &= 2xy^3 + \frac{y}{x}, \quad f_y(x,y) = 3x^2y^2 + \ln x
\end{aligned}
$$

Gemischte Ableitungen

Gemischte Ableitungen sind all jene, bei denen man nacheinander nach verschiedenen Variablen ableitet.

Unter der Voraussetzung, dass alle Ableitungen immer schön stetig sind, darf man dann nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der Ableitungen vertauschen.

Das heißt das f_{xy} beispielsweise dasselbe ergibt wie f_{yx} oder

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

gilt. Das spart einem eine Menge Arbeit und das finden wir gut! :)

Beispiel 37:

Hier haben wir einige partielle Ableitungen am Beispiel der Funktion

$$f(x,y) = x^2y + x^3$$

Erste partielle Ableitung nach x:

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + x^3) \\
&= 2 * x^{2-1}y + 3 * x^{3-1} \\
&= 2xy + 3x^2
\end{aligned}
$$

Erste partielle Ableitung nach y:

$$
\begin{aligned}
f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + \underbrace{x^3}_{\text{Konstante}}\right) \\
&= x^2 * 1 * y^{1-1} + 0 \\
&= x^2 * y^0 \\
&= x^2 * 1 \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

Zweimal nach x ableiten:

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + 3x^2\right) \\
&= 1 * 2x^{1-1}y + 2 * 3x^{2-1} \\
&= 2x^0 y + 6x \\
&= 2y + 6x
\end{aligned}
$$

Zweimal nach y ableiten

$$
\begin{aligned}
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} f_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Und noch die gemischten Ableitungen. Hier bekommen wir nach dem Satz von Schwarz zwei zum Preis von einer:

$$
\begin{aligned}
f_{yx} = f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} f_x \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + 3x^2\right) \\
&= 1 * 2xy^{1-1} + 0 \\
&= 2xy^0 \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x,y)$ nach y lautet (partieller Differentialquotient):

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad (\partial \text{ ist ein stilisiertes d})$$

Andere Schreibweisen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y)$$

Analog lässt sich die erste partielle Ableitung nach *x* bestimmen; dabei wird *y* konstant gesetzt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

Es gibt also genauso viele partielle erste Ableitungen einer Funktion wie unabhängige Variablen, das heißt eine Funktion mit vier unabhängigen Variablen $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ besitzt vier partielle Ableitungen erster Ordnung. Es wird nach jeweils einer Variablen abgeleitet, wobei die übrigen drei als konstant aufgefasst werden.

Bemerkung 2:

Für die Bestimmung der partiellen Ableitungen gelten die gleichen Regeln und Techniken wie beim Differenzieren von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen. Es ist nur zu beachten, dass alle Variablen bis auf die eine, nach der differenziert wird, als Konstante anzusehen sind. Sie werden allerdings nur beim Differenzieren wie eine Konstante behandelt, sind aber nach wie vor Variablen.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ bezeichnet man als *partielle Ableitung* von *f* nach *x* und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ als *partielle Ableitung* von *f* nach *y* an der Stelle (x_0, y_0). Man kann diese partiellen Ableitungen interpretieren als die Steigung der Tangentialebene an die Funktion *f* im Punkt (x_0, y_0),

Beispiel 38:

a) $z = x^2 + 4y^3$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 12y^2$

b) $z = x^n y^m$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = nx^{(n-1)} y^m \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^n m y^{(m-1)}$

c) $z = 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 8x_4$ $\qquad \frac{\partial x}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 5$

$\frac{\partial z}{\partial x_3} = -1 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_4} = 8$

d) $z = 4x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_2 - x_4$ $\qquad \frac{\partial x}{\partial x_1} = 8x_1 x_2 + x_2 x_3 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 4x_1^2 + x_1 x_3 + 1$

$\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1 x_2 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_4} = -1$

e) $\qquad y = x_1^3 + 3x_1^2 \cdot x_2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 6x_1 x_2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 3x_1^2$

f) $\qquad y = x_1^2 \cdot e^{x_2} \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_2} \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^2 e^{x_2}$

g) $\qquad y = x_1^a \cdot x_2^b \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} \cdot x_2^b \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^a b x_2^{b-1}$

Beispiel 39:

Gegeben sei die folgende Produktionsfunktion

$$y = 2x_1 + 4x_2^2 \text{ für } x_1, x_2 \geq 0$$

die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2$ und $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 8x_2$ geben die sog. Grenzproduktivität von x_1 bzw. x_2 an.

Diese partiellen Grenzproduktivitäten stellen näherungsweise ein Maß für die Wirksamkeit der zuletzt eingesetzten Einheit dar. Eine positive (negative) Grenzproduktivität zeigt an, dass eine Erhöhung von z. B. x_1 auch zu einer Erhöhung (Verminderung) des Outputs y führt. In unserem Beispiel wird durch eine Erhöhung von x_1 um eine Einheit (während x_2 konstant bleibt) der Output um zwei Einheiten gesteigert. Eine Erhöhung von x_2 von z. B. 2 auf 3 lässt den Output näherungsweise um 16 ansteigen.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Da auch die partiellen Ableitungen wieder Funktionen der unabhängigen Variablen sind, lassen sie sich wie die Ableitungen von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen noch einmal partiell differenzieren. Man erhält die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion.

Beispiel 40:

$$z = 2x^3 + x^2 y - 4xy^2 - e^x + \ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 2xy - 4y^2 - e^x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 8xy + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 2y - e^x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8x - \frac{1}{y^2}$$

Weiterhin ist es möglich, die erste partielle Ableitung nach *x* im zweiten Schritt nach *y* sowie die partielle Ableitung nach *y* anschließend nach *x* zu differenzieren. Man erhält dann die **gemischten** Ableitungen zweiter Ordnung.

Beispiel 41:

Für das obige Beispiel gilt dann:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - 8y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x - 8y$$

Die Reihenfolge der Variablen im Nenner gibt die Reihenfolge der Differentiation an. Das Beispiel zeigt, dass beide gemischten zweiten Ableitungen zum gleichen Ergebnis führen.

Allgemein gilt:

Die Reihenfolge der Differentiationen bei gemischten partiellen Ableitungen ist für das Ergebnis ohne Bedeutung. Durch weiteres Differenzieren gelangt man zu den partiellen Ableitungen höherer Ordnung wobei die Anzahl der gemischten Ableitungen ständig zunimmt.

Definition 24:

Sind für Funktionen $f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ die partiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ und $f_{x_j x_i}$ stetig, so gilt:

$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ (i, j= 1, 2,..., n).

Beispiel 42:

Die Ableitung 3. Ordnung der Funktion sind:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 12 - e^x \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -8 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{2}{y^3}$$

Für die praktische Anwendung der Differentialrechnung mit mehreren Variablen in den Wirtschaftswissenschaften benötigt man im Allgemeinen die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Definition 25:

Gegeben sei die Funktion f : → IR mit D ⊂ IR^n. Ist dann

a) f partiell differenzierbar nach x_1, x_2, ..., x_n, so heißt der Vektor

$$(\text{grad f})(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x) \\ f_{x_2}(x) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x) \end{pmatrix}$$

der <u>Gradient</u> von f an der Stelle x.

b) f zweimal partiell differenzierbar nach x_1, x_2, ..., x_n, so heißt die Matrix

$$\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & \dots & f_{x_1x_n}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & f_{x_2x_2}(x) & \dots & f_{x_2x_n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & f_{x_nx_2}(x) & \dots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

die <u>Hessesche Matrix</u> von *f* an der Stelle *x*.

Beispiel 43:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 x_3 + x_3$$

Wegen $f_{x_1}(x) = 3x_1^2$, $f_{x_2}(x) = 2x_2x_3$ und $f_{x_3}(x) = x_2^2 + 1$ ist $(\text{grad f})(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2x_3 \\ x_2^2 + 1 \end{pmatrix}$.

Aus den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$f_{x_1x_1}(x) = 6x_1$ $\quad f_{x_1x_2}(x) = 0$ $\quad f_{x_1x_3}(x) = 0$

$f_{x_2x_1}(x) = 0$ $\quad f_{x_2x_2}(x) = 2x_3$ $\quad f_{x_2x_3}(x) = 2x_2$

$f_{x_3x_1}(x) = 0$ $\quad f_{x_3x_2}(x) = 2x_2$ $\quad f_{x_3x_3}(x) = 0$

bilden wir dann die Hessesche Matrix

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für x_0 = (0,0,0) erhält man hierbei

$$(\text{grad f})(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sowie } \mathbf{H}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und für $x_1 = (1,-1,-1)$ ergibt sich

$$(\text{grad f})(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ sowie } \mathbf{H}(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf ähnliche Weise wie die Ableitungen von Funktionen einer Variablen werden auch die partiellen Ableitungen bei der Untersuchung von funktionalen ökonomischen Zusammenhängen benützt. So kann man beispielsweise mit Hilfe der Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ feststellen, ob eine Funktion $f(x_1,x_2,...,x_n)$ in Bezug auf die Variable x_i monoton oder konvex bzw. konkav ist, wenn die übrigen Variablen konstant gehalten werden.

Beispiel 44:

Berechnen Sie folgende partielle Ableitungen:

a) $y = (x_1 \cdot x_2)^3$ $\qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_2^3$ $\qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 3x_2^2\ x_1^3$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 6x_1\ x_2^3 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 6x_2\ x_1^3$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 9x_1^2\ x_2^2$$

b) $y = e^{(x_1+x_2)}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} = y$$

Beispiel 45:

Gegeben sei die Produktionsfunktion $y = 2 \cdot \sqrt{x_1 x_2}$. Als partielle Grenzproduktivitäten erhält man $\frac{\partial y}{\partial x_1} = x_1^{-1/2} \cdot x_2^{1/2}$ und $\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_2^{-1/2} \cdot x_1^{1/2}$. Da die zweiten partiellen Ableitungen negativ sind $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -1/2x_1^{-3/2} \cdot x_1^{1/2}$ und $\frac{\partial^2 y}{dx_2^2} = -1/2 \cdot x_2^{-3/2} \cdot x_1^{1/2}$ erhält man z. B. bei konstanten x_1 mit steigendem x_2 abnehmende Ertragszuwächse (entsprechendes gilt, falls x_1 steigt).

Beispiel 46:

Berechnen Sie die Ableitungen 1. und 2. Ordnung für folgende Funktion.

$y = 10x_1^2 \cdot x_2^3$

Lösung:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 20x_1x_2^3 \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 30x_1^2\ x_2^2\ .$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 20x_2^3 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 60x_2 \cdot x_1^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 3 \cdot 20x_2^{3-1} \cdot x_1 = 60x_2^2 \cdot x_1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 2 \cdot 30x_2^{2-1} = 60x_2^2 \cdot x_1$$

Beispiel 47:

Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen

a) $z = 2x^3 - x^2y + 4\ xy^2 + 3y^3$

b) $z = ax + by + c$

c) $z = x \ln y$

d) $z = \sqrt{6x^2 + 2y^2}$

e) $z = x \cdot e^{x^2} - y^2$

f) $z = 5x_1^2x_2^4x_3^3x_4 + x_5$

Lösung:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 2xy + 4y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 8xy + 9y^2$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = a$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = b$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}$

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x}{\sqrt{6x^2 - 2y^2}}$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{6x^2 - 2y^2}}$

e) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2} + x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2)$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$

f) $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 10x_1x_2^4x_3^3x_4$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial x_2} = 20x_1^2x_2^3x_3^3x_4$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 15x_1^2x_2^4x_3^2x_4 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_4} = 5x_1^2x_2^4x_3^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_5} = 1$$

Beispiel 48:

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung:

a) z = x² + y³

b) z = 6x³y²

Lösung:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2y^2$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^3y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36xy^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^3$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 36x^2y$

Beispiel 49:

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen:

$$f(x,y) = 3x^2 \cdot \sin y + e^{xy}$$

Lösung:

$$f(x,y) = 3x^2 \cdot \sin y + e^{xy}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 6x \cdot \sin y + y \cdot e^{xy} \qquad (\text{Produkt} - \text{und} \quad \text{Kettenregel})$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 3x^2 \cdot \cos y + x \cdot e^{xy}$$

Beispiel 50:

Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\delta f}{\delta x}$ der Funktion: $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{xyz}$

Lösung:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{xyz} \qquad (\text{Quotientenregel})$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{(2x) \cdot xyz - yz \cdot (x^2 + y^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{2x^2yz - x^2yz - y^3z}{x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{yz(2x^2 - x^2 - y^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2yz}$$

$$= \frac{1}{yz} - \frac{y}{x^2z}$$

Das totale Differential

Um eine Aussage über die Änderung von y bei gleichzeitiger Variation von x_1 und x_2 zu machen, bestimmt man das totale Differential.

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$$

dx_1 und dx_2 sind dabei Änderungen von x_1 bzw. x_2.

$\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot dx_1$ bzw. $\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot dx_2$ nennt man partielle Differentiale.

Beispiel 51:

Gegeben sei die Funktion $y = 2(x_1 + x_2)$. Das totale Differential lautete dann $dy = 2dx_1 + 2dx_2$

Falls man x_1 um $dx_1 = 10$ und x_2 um $dx_2 = 5$ erhöht, erhält man als totales Differential $dy = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 30$.

Wegen der Linearität der Funktion ist dieses Ergebnis exakt, obwohl dx_1 bzw. dx_2 recht große Änderungen sind.

Beispiel 52:

Gegeben sei die Funktion $y = 2(x_1 \cdot x_2)$; $dy = 2x_1 \cdot dx_1 + 2x_2 \cdot dx_2$.

Beispiel 53:

Für die Produktionsfunktion $y = 2x_1 + 4x_2^2$ erhält man als totales Differential

$dy = 2\, dx_1 + 8 \cdot x_2 dx_2$

Für $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 1$ $\quad dx_1 = 1$ $\quad dx_2 = 1$ erhält man $dy = 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 1 = 10$

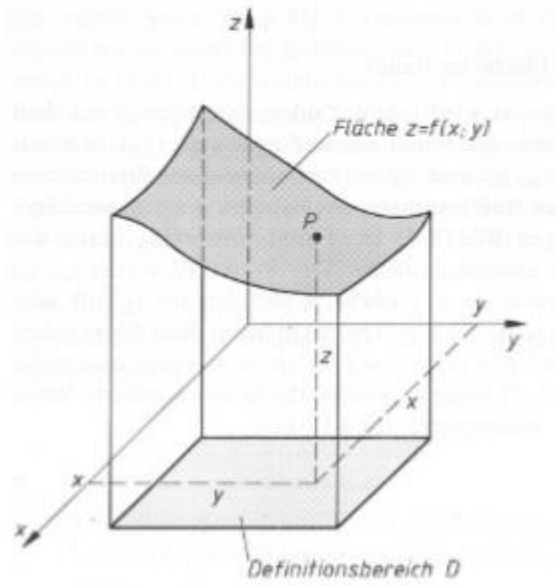
für $x_1 = 2$ $\quad x_2 = 2$ $\quad dx_1 = 1$ $\quad dx_2 = 1$ erhält man $dy = 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 1 = 18$,

d. h. der Output y wächst ungefähr um 10 bzw. um 18.

Schnittliniendiagramme

Definition 26:

Eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen kann in einem dreidimensionalen kartesischen Raum durch eine über dem Definitionsbereich D liegende Fläche dargestellt werden. Der Funktionswert z besitzt dabei die geometrische Bedeutung der Höhenkoordinate.



Extremwerte von Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

Den Graphen einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen kann man sich als Gebirge vorstellen. Wenn ein Extremwert vorliegt, dann werden die in diesem Punkt angelegten Tangenten waagerecht verlaufen, so auch die in Richtung der Koordinatenachsen. Falls die Tangenten waagerecht verlaufen, dann müssen die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung gleich Null sein. Dies ist eine notwendige Bedingung für einen Extremwert.

Jetzt muss noch untersucht werden, ob tatsächlich ein Extremwert vorliegt, denn die beiden Tangenten können auch waagerecht verlaufen, ohne dass ein Extremwert, sondern ein sog. Sattelpunkt vorliegt.

Für die Entscheidung, ob ein Extremwert oder ein Sattelpunkt vorliegt, werden die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung herangezogen. Die Untersuchung läuft dann nach dem folgenden Schema ab (ohne Begründung, da zu langwierig). Beispiele zu diesem Schema sind unten angegeben.

Schema zur Ermittlung von Extremwerten und Sattelpunkten (bei zwei Variablen):

- Ermittlung der partiellen Ableitungen erster Ordnung
- Nullsetzen und Lösung dieses Gleichungssystems (hat das Gleichungssystem keine Lösung, so existiert kein Extremwert)
- Untersuchung, ob tatsächlich ein Extremwert vorliegt mit Hilfe der partiellen Ableitung zweiter Ordnung, an den ermittelten Stellen.

Wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ gilt, dann liegt an dieser Stelle ein Extremwert vor.

Wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} < \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ gilt, dann liegt an dieser Stelle ein Sattelpunkt vor.

Wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ gilt, dann ist so keine Aussage bezüglich eines Extremwertes möglich.

Wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} < 0$, dann liegt an dieser Stelle ein Maximum vor.

Wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} > 0$, dann liegt an dieser Stelle ein Minimum vor.

Beispiel 54:

$$y = 20\,x_1 - x_1^2 + 40\,x_2 - x_2^2 - x_1 \cdot x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -2x_1 + 20 - x_2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -2x_2 + 40 - x_1 = 0$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 = 20$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -2; \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -2; \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$$

Da $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2$ gilt, $\left[(-2) \cdot (-2) > (-1)^2)\right]$ liegt ein Extremwert vor.

Da $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} < 0$ gilt, liegt ein Maximum vor.

Beispiel 55:

$$y = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 40x_2 + x_1 \cdot x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 - 20 + x_2; \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 - 40 + x_1$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 = 20$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2; \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 2; \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$$

Da $2 \cdot 2 > 1^2$ liegt ein Extremwert vor.

Da $2 > 0$ liegt ein Minimum vor.

Beispiel 56:

$$y = 50x_1^2 + 10x_1 \cdot x_2 - 160x_1 - 50x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 100x_1 + 10x_2 - 160; \frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_1 - 50$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt $x_1 = 5$ und $x_2 = -34$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 100; \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 100; \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 0 ; \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 10$$

Da $100 \cdot 0 < 10^2$ ist, liegt ein Sattelpunkt vor.

Der Integral-Begriff

Geometrische Definition des Integrals

Orientierter Flächeninhalt

Bemerkung 3:

- Flächeninhalte oberhalb der x-Achse haben ein positives Vorzeichen.
- Flächeninhalte unterhalb der x-Achse haben ein negatives Vorzeichen.

Definition 27:

Gegeben sei eine Funktion f, die über einem Intervall [a; b] definiert ist, dann versteht man unter dem **Integral der Funktion von a bis b** die Summe der orientierten Flächeninhalte zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und der Geraden x=a und x=b.

Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)dx$$

a: untere Grenze

b: obere Grenze

Stammfunktionen (unbestimmtes Integral)

Definition 28:

Eine Funktion F(x) heißt **Stammfunktion** von f(x), wenn F'(x) = f(x).

Beispiel 57:

Welche Funktion hat die Ableitung f(x) = x?

Eine mögliche Antwort ist $F(x)=\frac{x^2}{2}$.

Eine beliebige Stammfunktion ist von der Form $F(x)=\frac{x^2}{2}+C$

(C ist eine beliebige Konstante), weil konstante Summanden beim Differenzieren wegfallen.

Wenn von der Funktion sonst nichts bekannt ist, müssen wir also immer die Integrationskonstante C dazuschreiben.

Die Stammfunktion bezeichnet man auch als **unbestimmtes Integral**:

$$F(x)=\int f(x)dx$$

Stammfunktion berechnen

In der Integralrechnung geht es meist darum, die Stammfunktion zu berechnen. Die Stammfunktionen einiger populärer Funktionen zeigt die nachfolgende Tabelle.

Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen lauten:

konstante Funktion	$f(x) = k$	$F(x) = k \cdot x + C$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{1+n} x^{n+1} + C$
e-Funktion	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
Logarithmus	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = -x + x \cdot \ln(x) + C$
Hyperbel	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + C$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
Kosinus	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
Tangens	$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln\|\cos(x)\| + C$
Wurzel	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} + C$

Grundintegrale:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Integrationsregeln

In diesem Kapitel besprechen wir die Integrationsregeln. Dabei handelt es sich um Regeln, die beim Integrieren einer Funktion beachtet werden müssen.

Wir haben bereits gelernt, dass es in der Integralrechnung darum geht, die Stammfunktion F(x) einer gegebenen Funktion f(x) zu berechnen. In diesem Zusammenhang sind folgende Regeln von Bedeutung:

Potenzregel

Die Potenzregel hilft uns bei der Suche der Stammfunktion einer Potenzfunktion

Potenzregel

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Beispiele

$$\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C$$

$$\int x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{1}{5} x^5 + C$$

Faktorregel

Ein konstanter Faktor im Integranden kann vor das Integralzeichen gezogen werden.

Faktorregel

$$\int c \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = c \cdot \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

Mit Hilfe der Faktorregel können wir einen konstanten Faktor vor das Integralzeichen ziehen und auf diese Weise die Berechnung der Stammfunktion vereinfachen.

Beispiele

$$\int 2\cos(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int \cos(x) \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \sin(x) + C$$

$$\int 4x \, \mathrm{d}x = 4 \int x \, \mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = 2x^2 + C$$

Summenregel

Das unbestimmte Integral einer Summe ist gleich der Summe der unbestimmten Integrale.

Summenregel

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit Hilfe der Summenregel können wir Terme "auseinanderziehen" und auf diese Weise die Berechnung der Stammfunktion vereinfachen.

Beispiele

$$\int \left(x^3 + x^4\right)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + \int x^4\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + C$$

$$\int \left(3x^2 + 4x^3\right)\,\mathrm{d}x = \int 3x^2\,\mathrm{d}x + \int 4x^3\,\mathrm{d}x = x^3 + x^4 + C$$

Differenzregel

Das unbestimmte Integral einer Differenz ist gleich der Differenz der unbestimmten Integrale.

Differenzregel

$$\int (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit Hilfe der Differenzregel können wir Terme "auseinanderziehen" und auf diese Weise die Berechnung der Stammfunktion vereinfachen.

Beispiele

$$\int \left(x^3 - x^4\right)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x - \int x^4\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 + C$$

$$\int \left(3x^2 - 4x^3\right)\,\mathrm{d}x = \int 3x^2\,\mathrm{d}x - \int 4x^3\,\mathrm{d}x = x^3 - x^4 + C$$

Besondere Regeln

Ist der Integrand ein Bruch, in dem der Zähler die Ableitung des Nenners ist, dann ist das unbestimmte Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + C$

Das Integrieren von Funktionen, in denen sowohl im Zähler als auch im Nenner ein x vorkommt, ist meistens sehr schwierig. Liegt jedoch der hier erwähnte Spezialfall vor (Zähler ist die Ableitung des Nenners), so hilft uns diese Regel dabei, ohne große Rechenarbeit die Stammfunktion zu finden. Wenn du also auf eine Funktion stößt, die sowohl im Zähler als auch im Nenner ein x hat, so lohnt es sich zu überprüfen, ob der Zähler eine Ableitung des Nenners ist.

Beispiel

$\int \frac{3x^2-4x^3}{x^3-x^4}\,\mathrm{d}x = \ln(x^3-x^4) + C$

Damit haben wir die wesentlichen Integrationsregeln gelernt.

Integrationsregeln vs. Ableitungsregeln

Bemerkung 4:

Es ist wichtig, sich immer wieder klarzumachen, wie eng die Differential- und die Integralrechnung zusammenhängen. In der Differentialrechnung geht es darum, Funktion abzuleiten, wohingegen man in der Integralrechnung Funktionen aufleitet (= integriert). Die gleichen Regeln, die wir in diesem Kapitel gelernt haben, gibt es dementsprechend auch beim Ableiten (nur eben umgekehrt, schließlich will man ja ab- und nicht aufleiten):

Beispiel 58:

Ermitteln Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen!

a) f(x) = 3x

b) f(x) = $8x^3$

c) f(x) = $x^2 + x$

d) f(x) = $3x^2 + 4x + 1$

e) f(x) = $x^6 - 3x^5 + 7x^3$

f) f(x) = $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x$

g) f(x) = $\frac{1}{10}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}$

h) f(x) = $\frac{1}{x^2}$

i) f(x) = $\frac{1}{x^3}$

j) f(x) = $\sqrt{x}$

Lösung:

a) F(x) = $3x^2/2 + C$

b) F(x) = $2x^4 + C$

c) F(x) = $x^3/3 + x^2/2 + C$

d) F(x) = $x^3 + 2x^2 + x + C$

e) F(x) = $x^7/7 - x^6/2 + 7x^4/4 + C$

f) F(x) = $x^3/9 + x^2/8 + C$

g) F(x) = $x^5/50 - x^3 + 2x/3 + C$

h) F(x) = $-1/x + C$

i) F(x) = $-1/(2x^2) + C$

j) F(x) = $2/3 \cdot \sqrt{x^3} + C$

Beispiel 59:

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion, wenn die Ableitung und ein Punkt des Funktionsgraphen gegeben ist.

a) f'(x) = $4x$; P(2/5)

b) f'(x) = $2x - 3$; P(1/0)

c) f'(x) = $-6x + 5$; P(2/3)

d) f'(x) = $-x + 1$; P(-1/1)

e) f'(x) = $3x^2 - 4x$; P(0/-4)

f) f'(x) = $6x^2 - 5$; P(-2/-5)

g) f'(x) = $-x^2 + x + 4$; P(3/4)

h) f'(x) = $2x^3 - 6x$; P(-2/1)

Lösung:

a) f(x) = $2x^2 - 3$

b) f(x) = $x^2 - 3x + 2$

c) f(x) = $-3x^2 + 5x + 5$

d) f(x) = $-x^2/2 + x + 5/2$

e) f(x) = $x^3 - 2x^2 - 4$

f) f(x) = $2x^3 - 5x + 1$

g) f(x) = $-x^3/3 + x^2/2 + 4x - 7/2$

h) f(x) = $x^4/2 - 3x^2 + 5$

Beispiel 60:

(1) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

(2) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(3) $\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

(4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

(5) $\int \frac{4}{x^2}dx = 4\int x^{-2}dx = 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{4}{x} + C$

(6) $\int \left(-\frac{6}{x^2}\right)dx = \frac{6}{x} + C$

(7) $\int \frac{4}{x^3}dx = 4\int x^{-3}dx = 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{2}{x^2} + C$

(8) $\int \frac{x^2-4}{x^2}dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)dx = \int \left(1 - 4x^{-2}\right)dx = x - 4\frac{x^{-1}}{-1} + C = x + \frac{4}{x} + C$

(9) $\int \frac{x^3-4x^2+1}{2x^2}dx = \int \left(\frac{1}{2}x - 2 + \frac{1}{2}x^{-2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) + C$

$= \frac{1}{4}x^2 - 2x - \frac{1}{2x} + C$

(10) $\int \frac{x^3-2x}{x^2}dx = \int \left(x - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 2\cdot\ln x + C$

(11) $\int \frac{\left(x^2-2\right)^2}{8x^2}dx = \int \frac{x^4-4x^2+4}{8x^2}dx = \int \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-2}\right)dx$

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right) + C = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + C$

(12) $\int \frac{x^2-4}{3x}dx = \int \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}\cdot\ln x + C = \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}\ln x + C$

(13) $\int \frac{x^2-3x+4}{2x^3}dx = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{3}{2}x^{-2} + 2x^{-3}\right)dx = \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x}\right) + 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}$

$= \frac{1}{2}\ln x + \frac{3}{2x} - \frac{1}{x^2} + C$

Integration durch einfache Substitution

(1) Da es für ein Integral der Form $\int \frac{5}{2x+1}dx$ keine eigene Integrationsregel gibt, müssen wir einen Trick anwenden. Wir formen durch eine **Substitution** den Integranden so um, dass der Nenner keine Summe mehr enthält. Dazu müssen wir lediglich 2x+1 durch u ersetzen :
Substitution: **u = 2x + 1.**
Jetzt kommt allerdings noch die Umrechnung von dx dran. Wir dürfen nun aber nicht einfach du statt dx schreiben. Wir müssen uns daran erinnern, dass dx ein Differential ist. Und für das Differential einer Funktion hatten wir diese Formel: $dy = y' \cdot dx$
Unsere Substitutions-Funktion heißt nun $u = 2x+1$ also gilt für sie $du = u' \cdot dx = 2 \cdot dx$
Jetzt lösen wir die letzte Gleichung nach dx auf und erhalten: $dx = \frac{1}{2}du$
Dies ist der 2. Teil der Substitution. Zusammen folgt nun:

$$\int \frac{5}{2x+1}dx = \int \frac{5}{u} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{5}{2}\ln u + C.$$

Nun folgt die Rücksubstitution, indem wir u wieder durch 2x+1 ersetzen:

$$\int \frac{5}{2x+1}dx = \int \frac{5}{u} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{5}{2}\ln u + C = \frac{5}{2}\ln(2x+1) + C$$

Beispiel 61:

$\int \frac{16}{(x-2)^2}dx$ Substitution: u = x – 2 also du = u’ dx = dx

$$= \int \frac{16}{u^2}du = -\frac{16}{u} + C = -\frac{16}{x-2} + C$$

$\int \frac{8}{(4-x)^2}dx$ Substitution: u = 4 – x also du = - dx, dx = - du

$$= -\int \frac{8}{u^2}du = +\frac{8}{u} + C = \frac{8}{4-x} + C$$

$\int \frac{12}{(2x-1)^3}dx$ Substitution: u = 2x – 1 also du = 2 dx, $dx = \frac{1}{2}du$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{12}{u^3}du = 6\int u^{-3}\,du = 6\frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{u^2} + C = -\frac{3}{(2x-1)^2} + C$$

Integration durch erweiterte Substitution

Dieses x erschwert die Rechnung, denn es muss auch noch substituiert werden:

1. Schritt:	Substitution: $u = 5x + 2$
2. Schritt:	Differential: $du = u' \cdot dx = 5\,dx$
3. Schritt:	Nach dx auflösen: $dx = \frac{1}{5}du$
4. Schritt:	u nach x auflösen: $x = \frac{1}{5}(u-2)$
5. Schritt:	Einzelbrüche „aufleiten“
6. Schritt:	Rücksubstitution.

Beispiele

(5) $\int \frac{x}{(5x+2)^2}dx$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{u-2}{u^2}du$$

$$= \frac{1}{25}\int\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}\right)du = \frac{1}{25}\left(\ln u - 2\cdot\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{1}{25}\left(\ln u + \frac{2}{u}\right) + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = \frac{1}{25}\left(\ln(5x+2) + \frac{2}{5x+2}\right) + C$

-

Beispiel 62:

(6) $\int \frac{x^2}{(x+3)^2}dx$ Substitution: $u = x + 3$, $du = dx$ und $x = u - 3$

$$= \int \frac{(u-3)^2}{u^2}du = \int \frac{u^2 - 6u + 9}{u^2}du = \int\left(1 - \frac{6}{u} + \frac{9}{u^2}\right)du = u - 6\cdot\ln u - \frac{9}{u} + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = x + 3 - 6\cdot\ln(x+3) - \frac{9}{x+3} + C$

(7) $\int \frac{x^2}{(2-x)^2}dx$ Substitution: $u = 2 - x$ also $du = -dx$, $dx = -du$ und $x = 2 - u$

$$= -\int \frac{(2-u)^2}{u^2}du = -\int \frac{4 - 4u + u^2}{u^2}du = -\int\left(\frac{4}{u^2} - \frac{4}{u} + 1\right)du = +\frac{4}{u} + 4\cdot\ln u - u + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = \frac{4}{2-x} + 4\cdot\ln(2-x) + x - 2 + C$

(8) $\int \frac{x^2 - 1}{x+2}dx$ Substitution: $u = x + 2$ also $du = dx$ und $x = u - 2$

$$= \int \frac{(u-2)^2 - 1}{u}du = \int \frac{u^2 - 4u + 3}{u}du = \int\left(u - 4 + \frac{3}{u}\right)du = \frac{1}{2}u^2 - 4u + 3\cdot\ln u + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4(x+2) + 3\cdot\ln(x+2) + C$

$$F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) - 4(x+2) + 3\cdot\ln(x+2) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 + 3\cdot\ln(x+2) + C$$

Die erweiterte Substitution quadratischer Terme

(9) $\int \frac{x}{x^2-4}dx$

Das neue Problem liegt darin, dass nach der Substitution des Nenners durch $u = x^2 - 4$ die Substitution von x im Zähler nicht mehr ohne weiteres möglich ist. Denn löst man die Substitution nach x auf, folgt $x^2 = u + 4$ also $x = \pm\sqrt{u+4}$. Dies macht unser Integral komplizierter, so dass diese Möglichkeit wegfällt. Die Lösung ist ein ganz simpler Trick. Wir berechnen zuerst das Differential $du = u'dx = 2x \cdot dx$. Ein Blick auf das Integral zeigt, dass dort im Zähler x steht und hinter dem Bruchstrich dx. Ziehen wir also dieses dx auf den Bruchstrich, so haben wir $x \cdot dx$ und aus unserem Differential folgt: $x \cdot dx = \frac{1}{2}du$.
Auf diese Weise gelingt es, $x \cdot dx$ auf einmal zu ersetzen.

Hier die komplette Lösung:

Substitution: $u = x^2 - 4$.
Differential: $du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx: $x \cdot dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{x}{x^2-4}dx = \int \frac{x \cdot dx}{x^2-4} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2} \cdot \ln u + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4\right) + C$$

Beispiel 63:

Substitution: $u = x^2 + 9$.
Differential: $du = u'dx = 2x \cdot dx$
Ersetzen von x dx: $x \cdot dx = \frac{1}{2}du$
also folgt $4x \cdot dx = 2 \cdot du$

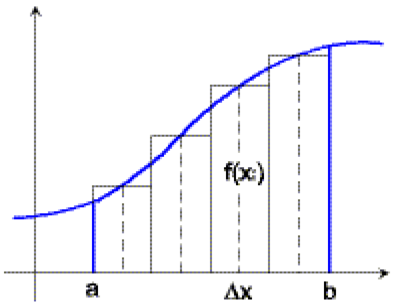
(10) $\int \frac{4x}{x^2+9}dx$

$$= \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{1}{u}du = 2 \cdot \ln u + C = 2 \cdot \ln\left(x^2+9\right) + C$$

Das bestimmte Integral

Definition 29:

Die Funktion f(x) sei gegeben; wir wollen die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [a, b] berechnen.



Einen Näherungswert erhält man, wenn man [a, b] in Teilintervalle der Länge Δx teilt, in jedem Intervall eine Stelle x_i wählt und die Flächeninhalte der Rechtecke $\Delta x \cdot f(x_i)$ addiert:

$A \approx (f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)) \cdot \Delta x$,

in Summenschreibweise:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Die Fläche - das **bestimmte Integral** - definieren wir als Grenzwert dieser Summe, wenn Δx gegen 0 geht; man schreibt:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

sprich "Integral von a bis b von f(x)dx" (das Integralzeichen soll an S für "Summe" erinnern).

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 30:

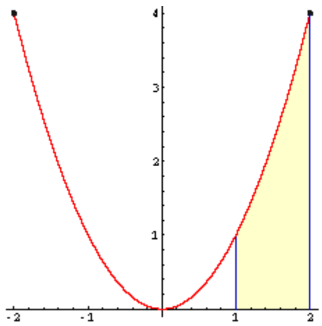
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

das heißt, die Fläche unter dem Graphen von f(x) ist eine Stammfunktion von f.

Beispiel 64:

Wir suchen die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen den Grenzen a = 1 und b = 2.

Folgende Vorgehensweise sollte immer angewandt werden:



Zuerst eine Zeichnung oder zumindest eine Skizze erstellen, um den Sachverhalt zu verdeutlichen.

Um eventuelle Besonderheiten zu erkennen, sollten die Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) berechnet werden

$\int_1^2 x^2 dx =$ Stammfunktion finden

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$ Grenzen einsetzen, untere Grenze von oberer abziehen

$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

Intervalladditivität

Wollen wir uns folgendes Integral anschauen:

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} und \int_3^1 \frac{1^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{1}{3} - 9 = -8\frac{2}{3}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = -[-\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}] und \int_a^b \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} = -\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} = 0$$

Aus den obigen Beispielen ergibt sich die nachfolgende Definition:

Definition 31:

(1) Ist a<b, so sei

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$Bsp.: \int_3^1 x^2 dx = -\int_1^3 x^2 dx = -(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}) = -\frac{26}{3} = -8\frac{2}{3}$$

(2)

$$\int_a^a x^2 dx = 0$$

$$Bsp.: \int_3^3 x^3 dx = 0$$

Außerdem gilt.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$Bsp.: \int_{-4}^9 x^2 dx + \int_9^3 x^2 dx = \int_{-4}^3 x^2 dx$$

(a, b, c können beliebig sein.)

Beispiel 65:

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 5x - 4)dx + \int_1^4 (3x^2 + 5x - 4)dx$$

Lösung:

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 5x - 4)dx + \int_1^4 (3x^2 + 5x - 4)dx = \int_{-2}^4 (3x^2 + 5x - 4)dx = 3\int_{-2}^4 x^2 dx + 5\int_{-2}^4 x dx - 4\int_{-2}^4 1 dx$$
$$= (Grund\,\mathrm{int}\,egrale) = 78$$

Flächenberechnungen

Achtung: Für $f(x) < 0$ ist auch das Integral negativ. Der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse ist dann der *Betrag* des Integrals.

Wenn die Funktion im angegebenen Intervall ein oder mehrere **Nullstellen** hat, müssen wir daher die einzelnen Flächenstücke getrennt berechnen und ihre Beträge addieren.

Wenn die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse berechnet werden soll (ohne dass ein Intervall angegeben ist), müssen wir zuerst die **Nullstellen** bestimmen - das sind dann die Integrationsgrenzen.

Die Fläche, die von ***zwei Kurven*** - den Graphen der Funktionen f(x) und g(x) - eingeschlossenen wird, berechnen wir nach der Formel

$$A = \int_{x1}^{x2} (f(x) - g(x))dx$$

Die Integrationsgrenzen sind dabei die x-Koordinaten der Schnittpunkte. Wenn es mehr als zwei Schnittpunkte gibt, muss man wieder die einzelnen Flächenstücke getrennt verrechnen.

Beispiel 66:

Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ und der x-Achse zwischen den Grenzen $a = 0$ und $b = 2$ eingeschlossen wird?

Lösung:

Die Funktion hat bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle, wir müssen daher von 0 bis 1 und von 1 bis 2 *getrennt integrieren:*

$$\int_0^1 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

Beispiel 67:

Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$ und der x-Achse begrenzt wird?

Lösung:

Nullstellen bestimmen: $-x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$$A = \int_0^3 \left(-x^3 + 3x^2\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3 = 6\tfrac{3}{4}$$

Beispiel 68:

Wie groß ist die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$?

Lösung:

Schnittpunkte bestimmen: $x^2 = x^3 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{12}$$

Flächenberechnung zwischen zwei Graphen

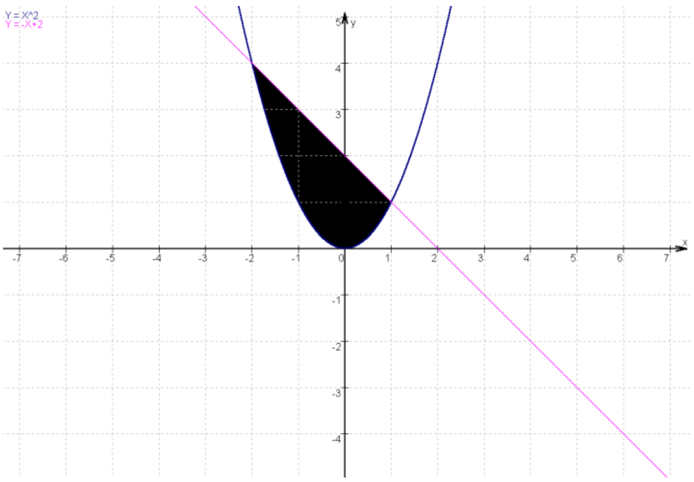
Beispiel 69:

Berechne den Inhalt der von den Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche.

$f(x)=x^2;\ g(x)=-x+2$

Folgende Vorgehensweise hat sich bewährt

(1) Auch hier zeichnen wir wieder eine Skizze, um uns den Sachverhalt besser zu verdeutlichen.



(2) Um die Integralgrenzen zu erhalten, bestimmen wir die Schnittpunkte der Graphen.

$$x^2 = -x + 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$p,q - Formel$$
$$x1,2 = -\frac{1}{2} + -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} + -\frac{3}{2}$$
$$x1 = 1$$
$$x2 = -2$$

(3) Man sieht hieraus:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Also gilt:

$$A = \left| \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx \right| = \left| -1 \bullet \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - 6 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{1}{3}\right) \right|$$

$$= |-1{,}5 - 6 + 3| = |-4{,}5| = 4{,}5$$

Definition 32:

Ist f(x)>g(x) für alle x mit a<x<b, das heißt verläuft der Graph von f zwischen a und b oberhalb von g, so gilt für den Flächeninhalt A der von beiden Graphen über dem Intervall [a; b] eingeschlossenen Fläche

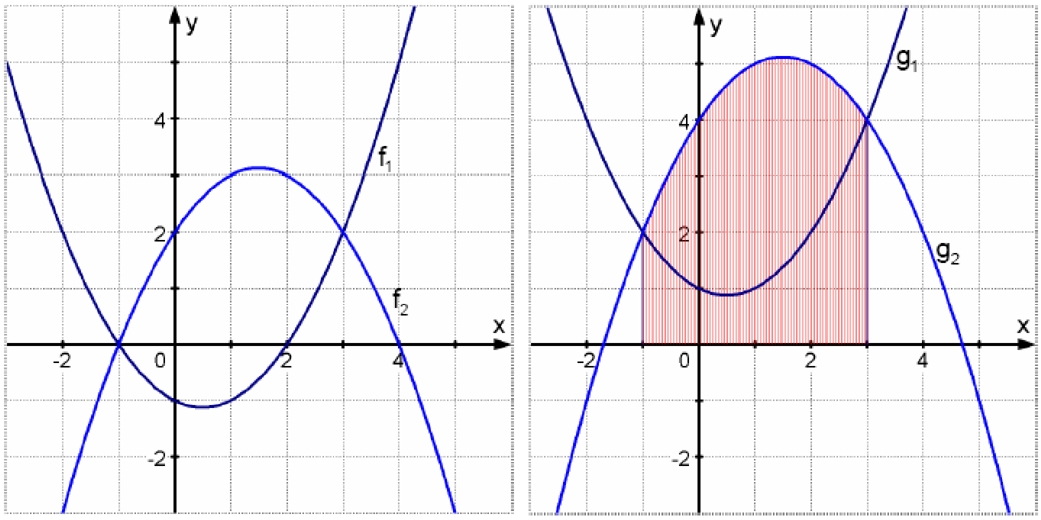
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Wird f(x)>g(x) nicht beachtet, so erscheint das Ergebnis mit negativen Vorzeichen.

Beispiel 70:

Wie groß ist die Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ und $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ begrenzt wird ?

Lösung:



Hinführung: Zunächst betrachten wir die linke Abbildung. Diese zeigt die gesuchte Fläche zwischen den beiden Parabeln.

1. Schritt: Wir verschieben beide Kurven und damit auch die zu berechnende Fläche um eine Strecke +C so nach oben, daß die Zielfläche ganz oberhalb der x-Achse liegt.
Die Funktionsgleichungen ändern sich damit in:
$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 + C$ und $g_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + C$

2. Schritt: Wir denken uns nun die gesuchte Fläche als Differenz zweier krummliniger Trapeze (rechtes Bild):
Das große „Kru-Li-Trap" wird oben durch das Schaubild von g_2 begrenzt. Sein Inhalt ist $A_1 = \int_{-1}^{3} g_1(x)\,dx$
Das kleine „Kru-Li-Trap" wird durch das Schaubild von g_2 Begrenzt. Sein Inhalt ist: $A_2 = \int_{-1}^{3} g_2(x)\,dx$

3. Schritt: Die gesuchte Fläche hat daher diesen Inhalt:

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{3} g_1(x)\,dx - \int_{-1}^{3} g_2(x)\,dx = \int_{-1}^{3}\left[\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1 + C\right) - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 2 + C\right)\right]dx$$

Beim genauen Hinsehen erkennt man, daß der zur Verschiebung über die x-Achse eingefügte Summand +C durch die Subtraktion der beiden Funktionen wieder wegfällt. Daher kann man ihn eigentlich weglassen und gleich mit den Funktionen f_1 und f_2 arbeiten. Damit erhält man folgende Berechnung:

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{3} f_1(x)\,dx - \int_{-1}^{3} f_2(x)\,dx = \int_{-1}^{3}\left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx$$

Berechnung der Fläche:

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{3}\left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx = \int_{-1}^{3}\left[\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1\right) - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 2\right)\right]dx$$

$$A = \int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x - 3\right)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = \left[9 - 9 + 9\right] - \left[-\tfrac{1}{3} - 1 + 3\right] = 7 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{22}{3}$$

Beispiel 71:

(12): $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2} = x + \dfrac{2}{x^2}$

hat die schiefe Asymptote $y = x$.
Eine Fläche wird begrenzt durch K, die schiefe Asymptote und den Geraden $x = 1$ und $x = r$ $(r>1)$.
Diese hat folgenden Inhalt:

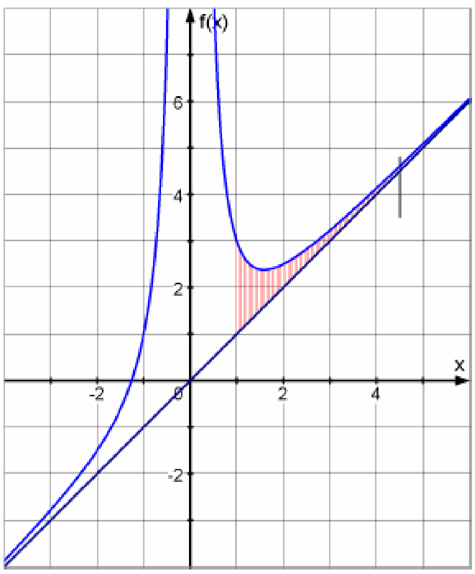
$$A(r) = \int_{1}^{r}\left(f(x) - x\right)dx = \int_{1}^{r}\left(\left(x + \frac{2}{x^2}\right) - x\right)dx = \int_{1}^{r}\frac{2}{x^2}\,dx$$

Die untere Kurve ist die Asymptote: $y = x$.
Dieser Funktionsterm ist Teil der Funktion f.
Daher fällt bei der Formel für die Fläche zwischen zwei Kurven der Asymptotenterm heraus.

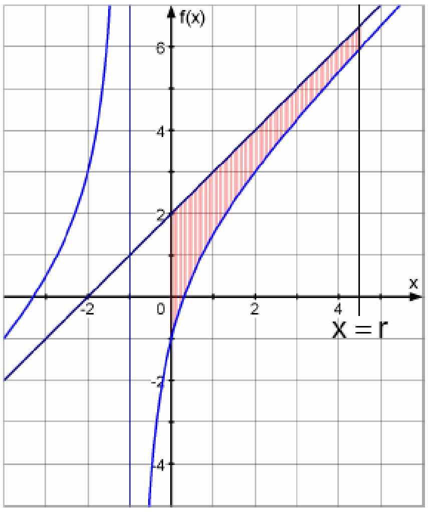
$$A(r) = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^r = -\frac{2}{r} + 2 = 2 - \frac{2}{r}.$$

Für die ins Unendliche reichende Fläche gilt daher:

$$A^* = \lim_{r\to\infty} A(r) = 2, \text{ denn } \lim_{r\to\infty}\frac{2}{r} = 0.$$



Beispiel 72:



(13) $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+1}$

Um die schiefe Asymptote zu bestimmen benötigt man Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^2+3x-1):(x+1)=x+2 \\
\underline{-(x^2+\ \ x)} \\
\quad (2x-1) \\
\quad \underline{-(2x+2)} \\
\qquad -3
\end{array}
$$

Daraus folgt, daß man die Funktion so zerlegen kann:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+1}=x+2-\frac{3}{x+1}$$

Wegen $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{3}{x+1}=0$ ist y = x + 2 die schiefe Asymptote.

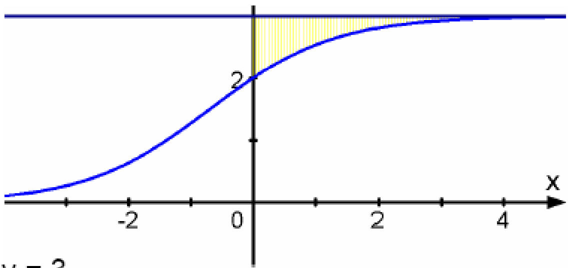
Nun kann man die schraffierte Fläche berechnen

$$A(r)=\int_0^r\left(x+2-\left(x+2-\frac{3}{x+1}\right)\right)dx=\int_0^r\frac{3}{x+1}dx$$

Wer nicht mit der Polynomdivision arbeitet, geht so vor:

$$A(r)=\int_0^r\left(x+2-\frac{x^2+3x-1}{x+1}\right)dx=\int_0^r\frac{(x+2)(x+1)-(x^2+3x-1)}{x+1}dx=\int_0^r\frac{3}{x+1}dx$$

Beispiel 73:



(14) $f(x)=\frac{6}{e^{-x}+2}$

Zuerst sei bemerkt, daß es nicht Gelingen wird, eine Stammfunktion zu f zu finden. Hier hilft keine Substitution. Berechnet man jedoch die Fläche zwischen der waagerechten Asymptote y = 3 und der Kurve, dann wird das Intergral lösbar:

$$A=\int_0^5(3-\frac{6}{e^{-x}+2})dx=\int_0^5\frac{3e^{-x}+6-6}{e^{-x}+2}dx=\int_0^5\frac{3e^{-x}}{e^{-x}+2}dx$$

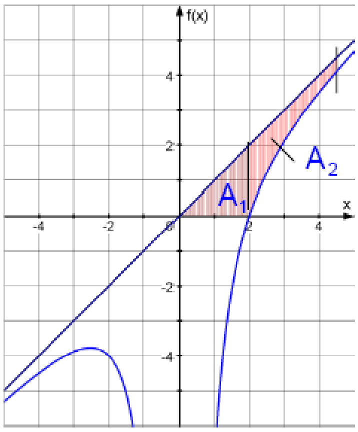
Substitution: $u=e^{-x}+2 \Rightarrow du=e^{-x}dx \Rightarrow 3e^{-x}dx=3du$

$$A=\int_3^{2+e^{-5}}\frac{3du}{u}=3\left[\ln u\right]_3^{2+e^{-5}}=3\cdot\ln(2+e^{-5})-3\cdot\ln 3\approx ...$$

Soll man eine Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im 2. Feld berechnen, dann stößt man zuerst an das Problem der nicht auffindbaren Stammfunktion. Wenn man jedoch herausgefunden hat, daß das Schaubild punktsymmetrisch zum Wendepunkt W (- ln 2 I 3) , der berechnet eben die am W gespiegelte Fläche, die dann wie eben berechnet wird, da sie nun zwischen der Geraden y = 3 und K liegt.

Beispiel 74:

2.11 Zusammengesetzte Flächen



(16) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}$

Das Schaubild K, die schiefe Asymptote, die x-Achse und die Gerade x = r (r > 2) begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(r) sowie deren Grenzwert für r gegen Unendlich.

Lösung:

Jetzt ist es wichtig, zu erkennen, daß die Fläche zwei verschiedene untere Begrenzungen hat, weshalb Man sie auch nicht auf einmal berechnen kann.
Die Teilfläche A_1 ist in diesem Fall ein Dreieck und kann entweder mit der Dreiecksformel $A_1 = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ oder mittels Integral berechnet werden:

$$A_1 = \int_0^2 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2.$$

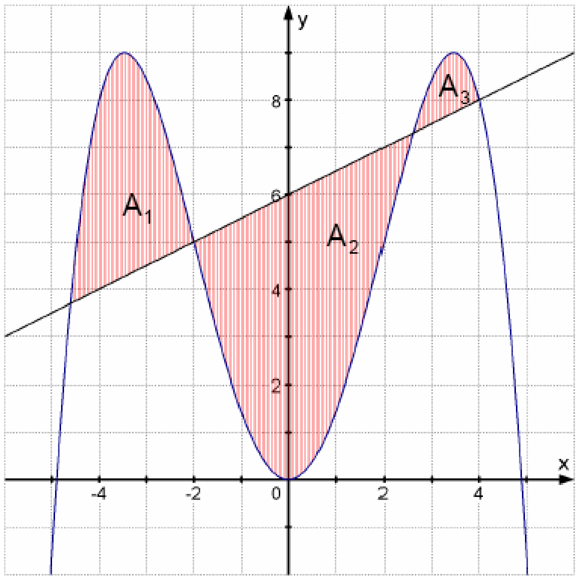
Die Teilfläche A_2 wird zunächst als Flächeninhaltsfunktion berechnet:

$$A_2(r) = \int_2^r \left(x - \left(x - \frac{8}{x^2} \right) \right) dx = \int_2^r \frac{8}{x^2} dx = \left[-\frac{8}{x} \right]_2^r = -\frac{8}{r} + 4 = 4 - \frac{8}{r}$$

Gesamtfläche: $A(r) = A_1 + A_2(r) = 2 + 4 - \frac{8}{r} = 6 - \frac{8}{r}$.

Grenzwert für $r \to \infty$: $A^* = \lim_{r\to\infty} A(r) = 6$, denn $\lim_{r\to\infty} \frac{8}{r} = 0$

Beispiel 75:



(17) Die Kurve mit der Gleichung
$y = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2$
und die Gerade $y = \frac{1}{2}x + 6$
schneiden sich in 4 Punkten.
Se begrenzen eine aus 3 Teilen zusammengesetzte Fläche.

Zunächst muß man die Schnittpunkte berechnen. Aus der Zeichnung liest Man $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$ ab.
Diese sind zu bestätigen und die restlichen müssen berechnet werden.
Schnittgleichung:
$\frac{1}{2}x + 6 = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \quad | \cdot 16$
$8x + 96 = -x^4 + 24x^2$ bzw. $x^4 - 24x^2 + 8x + 96 = 0$
Da zwei bekannte Lösungen vorliegen, kann man die zugehörigen Linearfaktoren ausklammern: (x + 2) und (x – 4).
Dies geht am schnellsten mit dem Horner-Schema, oder auch mittels Polynomdivision, indem man durch $(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$ dividiert:

Hornerschema aus den Koeffizienten der Schnittgleichung:

	1	0	-24	8	96
	0	-2	4	40	-96
x = - 2	1	-2	-20	48	$\boxed{0}$
	0	4	8	-48	
x = 4	1	2	-12	$\boxed{0}$	

Das Hornerschema liefert uns die Zerlegung: von

$x^4 - 24x^2 + 8x + 96 = 0$ in

$(x+2)(x-4)\left(1x^2 + 2x - 12\right) = 0$

Dasselbe erreicht man mit der Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 + 0x^3 - 24x^2 + 8x + 96\right) : \left(x^2 - 2x - 8\right) = x^2 + 2x - 12 \\
-(x^4 - 2x^3 - 8x^2) \\
\hline
\quad 2x^3 - 16x^2 + 8x \\
\quad -(2x^3 - 4x^2 - 16x) \\
\hline
\qquad -12x^2 + 24x + 96 \\
\qquad -(-12x^2 + 24x + 96) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Schnittgleichung wurde durch die abgelesenen Lösungen zerlegt in

$$(x+2)(x-4)\underbrace{\left(x^2 + 2x - 12\right) = 0}_{x_{3,4}}$$

Man erhält die Schnittstellen 3 und 4:

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+48}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13} \approx \begin{cases} 2{,}6 \\ -4{,}6 \end{cases}$$

Flächenberechnung:

Die Teilflächen 1 und 3 haben K als obere Begrenzung, lassen sich also nach diesem Schema bestimmen: $A_{1,2} = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$ wobei mit g die zur Geraden gehörende Funktion bezeichnet worden ist. Die Teilfläche 2 hat nun K als untere und g als obere Begrenzung. Wenn man daher dasselbe Integral verwendet, wird das Ergebnis wegen der vertauschen Vorzeichen negativ, was man dadurch kompensieren kann, daß man für diesen Fall die Grenzen vertauscht.

Nun empfiehlt sich folgendes Vorgehen (mit Näherungswerten für die Grenzen)

$$A_1 = \int_{-1-\sqrt{13}}^{-2} \left(-\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 - x - 6\right)dx \approx \left[-\tfrac{1}{80}x^5 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-4,6}^{-2} = F(-2) - F(-4{,}6)$$

$$A_2 \approx \int_{2,6}^{-2} \left(-\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 - x - 6\right)dx = F(-2) - F(2{,}6)$$

$$A_2 \approx \int_{2,6}^{4} \left(-\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 - x - 6\right)dx = F(4) - F(2{,}6)$$

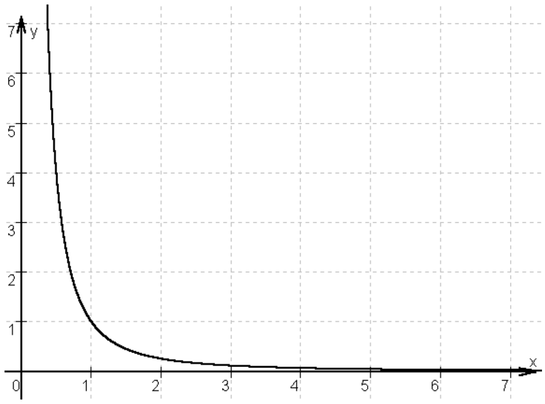
Gesamtfläche: $A = 2 \cdot F(-2) - F(-4{,}6) - 2 \cdot F(2{,}6) + F(4) = \ldots$

Der Rest ist Taschenrechnerarbeit !

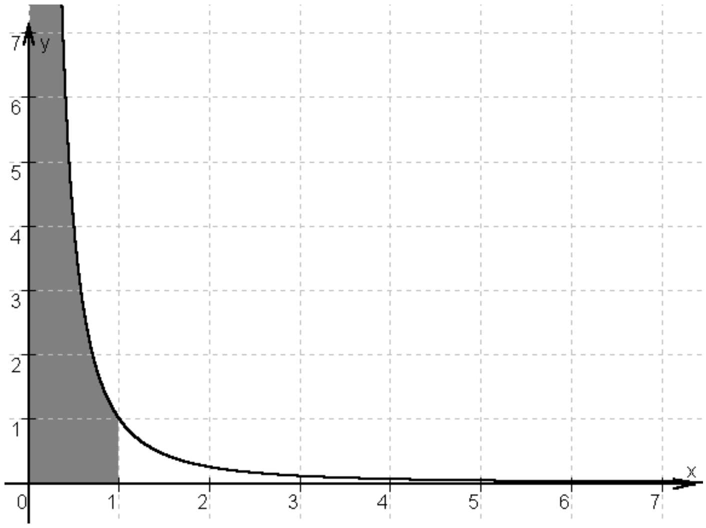
Uneigentliche Integrale

Gelegentlich gibt es Flächen, die „ins Unendliche“ reichen, also z. B. eine „offene rechte oder linke Integrationsgrenze haben

Schauen wir uns am Anfang die Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Und zwar nur den Teil im 1. Quadranten.



Wenn wir nun die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen wollen, stellen wir fest, dass die y-Achse eine Asymptote ist und es somit keinen Schnittpunkt mit der y-Achse gibt.



Die Fläche „reicht ins Unendliche“. Zu ihrer Berechnung kann man das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil f nicht im ganzen Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist f unbeschränkt.

Zur Berechnung der Fläche verspricht folgender Gedanke Aussicht auf Erfolg.

Wir berechnen $\int_a^1 f(x)dx$ (für 0<a<1) und bestimmen den Grenzwert $\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx$ (a>0).

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion f.

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}; F(x) = \frac{1}{-2+1} \bullet x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$

Somit erhalten wir:

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}(-1+\frac{1}{a})$$

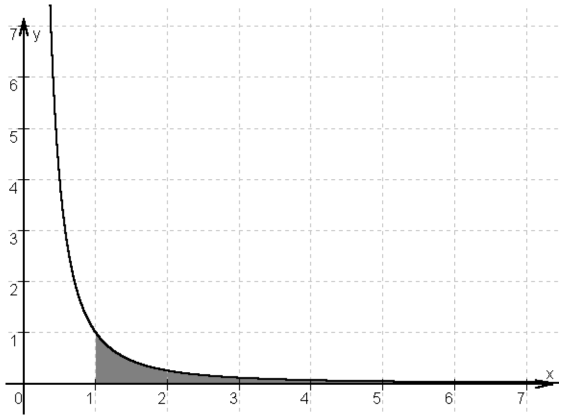
Der Grenzwert $\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}$ existiert nicht. Gibt es also doch keinen Grenzwert? Ist unsere Idee doch nicht so aussichtsreich, wie wir uns das gedacht haben?

Wir halten fest:

Für $a \to 0$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ von a bis 1 jede Schranke.

Nicht verzweifeln, nehmen wir einfach ein weiteres Beispiel.

Wir wollen von dieser Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ die Fläche über dem Intervall $[1;\infty]$ berechnen.



Und gehen genauso wie oben vor. Wir erhalten:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}+1) = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}) + \lim_{b\to\infty}1 = 0+1=1$$

Die Fläche von f über diesem Intervall beträgt also 1.

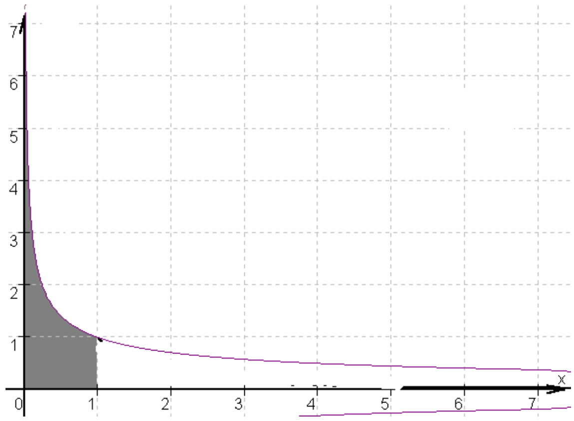
Wir sehen, dass unsere Idee doch nicht so schlecht ist.

Halten wir erst einmal unser Ergebnis fest:

Die Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ von 1 bis Unendlich hat den Flächeninhalt 1.

Weil es so gut geklappt hat, nehmen wir uns nun eine zweite Funktion. Und zwar g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Die Funktion sieht wie folgt aus:



Auch hier wollen wir die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen. Auch hier stoßen wir auf das gleiche Problem. Die Fläche „reicht ins Unendliche“. Zu ihrer Berechnung kann man das Integral $\int_0^1 g(x)dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil g nicht im ganzen Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist g unbeschränkt.

Zur Berechnung der Fläche gehen wir mit derselben Methode wie oben vor.

Wir berechnen $\int_a^1 g(x)dx$ (für 0<a<1) und bestimmen den Grenzwert $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 g(x)dx$ (a>0).

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion g.

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}};G(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\bullet x^{-\frac{1}{2}+1}=2\sqrt{x}$$

Wir berechnen den Flächeninhalt:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0}\int_a^1\frac{1}{\sqrt{x}}dxdx=\lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1=\lim_{a\to 0}(2-2\sqrt{a})=\lim_{a\to 0}2-\lim_{a\to 0}2\sqrt{a})=2-0=2$$

Der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ von 0 bis 1 beträgt 2.

Berechnet auch hier die Fläche über dem Intervall $[1;\infty]$:

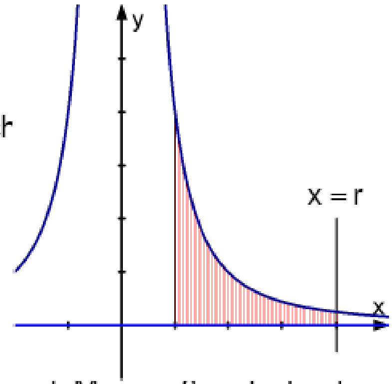
$$\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b}-2)=\lim_{b\to\infty}2\sqrt{b}-\lim_{b\to\infty}2$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\lim\limits_{b\to\infty}2\sqrt{b}$ beliebig groß wird.

Für $b\to\infty$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g mit $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ von 1 bis b jede Schranke.

Beispiel 76:

(8) $f(x)=\frac{4}{x^2}$



Das Schaubild dieser Funktion nähert sich asymptotisch der x-Achse an. Daher schließen das Schaubild K, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = 1 eine bis ins unendliche reichende Fläche ein.
Die Schreibweise

$$A=\int_1^{\infty}\frac{4}{x^2}dx \qquad (*)$$

ist leider nicht zulässig, und das hat einen einfachen Grund: Man muß ja die beiden Grenzen in die Stammfunktion einsetzen und sollte dann mit „Unendlich" rechnen. Dies geht nicht, obwohl man mit diesem Begriff natürlich rechenähnliche Überlegungen anstellen kann. Aber ∞ ist nun mal keine Zahl !.
Dennoch findet man Schreibweisen wie in (*) dargestellt sehr oft. Vor allem Physiker neigen dazu, in ihren Integralanwendungen derartige Schreibweisen zu verwenden. Dann aber bezeichnen sie damit das Ergebnis nach Abschluß der Berechnungen. Aber zum Durchführen der Rechnung ist das Zeichen ∞ als Integrationsgrenze verboten.

In unserem Beispiel sieht das so aus:

$$A(r)=\int_1^r\frac{4}{x^2}dx=\left[-\frac{4}{x}\right]_1^r=-\frac{4}{r}+4=4-\frac{4}{r}$$

Und nun verschiebt man den rechten Rand ins Unendliche:

$$A^*=\lim_{r\to\infty}A(r)=4\,,\quad \text{denn}\quad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}=0\,.$$

Definition 33:

(1) Die Funktion f sei stetig für alle x>a bzw. für alle x<b. Dann sei

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx$$

(2) Die Funktionen f sei stetig für]a; b] bzw. [a; b[. Dann sei:

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a}\int_c^b f(x)dx$, falls f definiert ist für]a; b[;

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx$, falls f definiert ist für [a; b[.

Die Integrale links vom Gleichheitszeichen nennt man **uneigentliche Integrale**. Existiert der Grenzwert rechts vom Gleichheitszeichen nicht, existiert das uneigentliche Integral nicht.

Bestimmte Integrale für ganzrationale Funktionen

Beispiel 77:

(1) $\int_1^3 (5x^2-3x+7)\,dx = \underbrace{\left[\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+7x\right]}_{F(x)}{}_1^3 = \underbrace{\left[\frac{5}{3}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9+21\right]}_{F(3)} - \underbrace{\left[\frac{5}{3}-\frac{3}{2}+7\right]}_{F(1)}$

$= 45-\frac{27}{2}+21-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}-7$

Tipp: Addiere zuerst alle ganzen Zahlen, dann die Brüche mit gleichem Nenner

$= 59-12-\frac{5}{3} = 47-\frac{5}{3} = 45\frac{1}{3} = \frac{136}{3}$

(2) $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^2-2x+1\right)dx = \left[\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{9}x^3-x^2+x\right]_0^2 = \left[\frac{32}{20}+\frac{8}{9}-4+2\right]-[0]$

$= \frac{8}{5}+\frac{8}{9}-2 = \frac{72+40-90}{45} = \frac{22}{45}$

(3) $\int_{-1}^5 (x^4+x^2)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^5 = \left[5^4+\frac{1}{3}5^3\right]-\left[-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right] = 5^3\left(5+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$

$= 125\cdot\frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{2001}{3}+\frac{1}{5} = \frac{10008}{15} \approx 667{,}2$

(4) $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^3+3x^2+x-7\right)dx = \left[\frac{1}{8}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-7x\right]_1^3 =$

$= \left[\frac{81}{8}+27+\frac{9}{2}-21\right]-\left[\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2}-7\right]$ Zuerst Brüche mit gleichen Nennern addieren:

$= \frac{80}{8}+\frac{8}{2}+6+6 = 10+4+12 = 26$

(5) $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx = \int_{-1}^1 (x^4+2x^2+1)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^2 =$

$= \left[\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right]-\left[-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right]$ Klammert man aus der 2. Klammer (-1) aus, ist sie identisch gleich zur ersten Klammer, also kommt diese doppelt vor:

$= 2\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = 2\cdot\frac{3+10+15}{15} = 2\cdot\frac{28}{15} = \frac{56}{15}$

Bestimmte Integrale für gebrochen rationale Funktionen

Beispiel 78:

(1) $$\int_1^3 \frac{4}{x^2}dx = 4\int_1^3 x^{-2}dx = 4\cdot\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[-\frac{4}{x}\right]_1^3 = \left[-\frac{4}{3}\right]-[-4] = 4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

> Achtung: Man spart sich Schreibarbeit, wenn man sich dieses Integral auswendig merkt:
> $$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b$$

Dann sieht die Lösung so aus:

$$\int_1^3 \frac{4}{x^2}dx = 4\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}+1\right) = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

(2) $$\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{5}{x^3}\right)dx = -5\int_{-2}^{-1} x^{-3}dx = -5\cdot\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

Nenner ohne Summe: Einzelbruchzerlegung

Beispiel 79:

(3) $$\int_{-2}^{2}\frac{x^2-4}{x^2}dx = \int_{-2}^{2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx = \left[x+\frac{4}{x}\right]_{-2}^{2} = [2+2]-[-2-2] = 8$$

(4) $$\int_1^4 \frac{x^2+4}{8x^2}dx = \int_1^4\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right]_1^4 = \left[\frac{4}{8}-\frac{1}{8}\right]-\left[\frac{1}{8}-\frac{4}{8}\right] = \frac{3}{8}+\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

(5) $$\int_1^3 \frac{x-2}{x}dx = \int_1^3\left(1-\frac{2}{x}\right)dx = [x-2\cdot\ln x]_1^3 = [3-2\cdot\ln 3]-\left[1-2\cdot\underbrace{\ln 1}_{0}\right] = 2-2\cdot\ln 3$$

(6) $$\int_2^6 \frac{x^2-4x+6}{x}dx = \int_2^6\left(x-4+\frac{6}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2-4x+6\cdot\ln x\right]_2^6 =$$
$$=[18-24+6\cdot\ln 6]-[2-8+6\cdot\ln 2] = -6+6\cdot\ln 6+6-6\cdot\ln 2$$
$$=6\cdot(\ln 6-\ln 2) = 6\cdot\ln\frac{6}{2} = 6\cdot\ln 3 \qquad \text{denn} \quad \ln a-\ln b = \ln\frac{a}{b}$$

Nenner mit Summe: Einfache Substitution

Beispiel 80:

(7) $$\int_5^6 \frac{5}{2x-4}\,dx$$

Substitution: $u = 2x - 4$ also $du = u'\,dx = 2\,dx$
$dx = \frac{1}{2}\,du$
Grenzen: $x = 5$ gibt $u = 6$
$x = 6$ gibt $u = 8$

$$= \int_6^8 \frac{5}{u}\cdot\frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{5}{2}\int_6^8 \frac{1}{u}\,du = \frac{5}{2}\cdot\left[\ln u\right]_6^8 = \frac{5}{2}\cdot(\ln 8 - \ln 6) = \frac{5}{2}\cdot\ln\frac{8}{6} = \frac{5}{2}\cdot\ln\frac{4}{3}$$

HINWEIS: Beim unbestimmten Integral endete jede Substitution mit der Rücksubstitution, die wieder auf x zurückgeführt hat. Wenn man hier auch die Integrationsgrenzen nach u umrechnet, kann man sich dies sparen!

Beispiel 81:

(8) $$\int_0^3 \frac{2}{(4-x)^2}\,dx$$

Substitution: $u = 4 - x$ also $du = u'\,dx = -\,dx$
$dx = -\,du$
Grenzen: $x = 0$ gibt $u = 4$
$x = 3$ gibt $u = 1$

$$= -\int_4^1 \frac{2}{u^2}\,du$$

$$= -\left[-\frac{2}{u}\right]_4^1 = \left[\frac{2}{u}\right]_4^1 = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

Nenner mit Summe: Erweiterte Substitution

Beispiel 82:

(9) $\int_0^4 \frac{16x}{(x+4)^2}dx$

Substitution: u = x + 4 also du = dx also
dx = du und x = u - 4
Grenzen : x = 0 gibt u = 4
x = 4 gibt u = 8

$$= 16\int_4^8 \frac{(u-4)}{u^2}du$$

$$= 16 \cdot \int_4^8 \left(\frac{1}{u} - \frac{4}{u^2}\right)du = 16 \cdot \left[\ln u + \frac{4}{u}\right]_4^8 = 16\left[\ln 8 + \frac{1}{2}\right] - 16[\ln 4 + 1]$$

$$= 16\left(\ln 8 - \ln 4 + \frac{1}{2} - 1\right) = 16\left(\ln\frac{8}{4} - \frac{1}{2}\right) = 16 \cdot \ln 2 - 8$$

(10) $\int_0^3 \frac{x^2}{4-x}dx$

Substitution: u = 4 - x also du = - dx also
dx = - du und x = 4 - u
Grenzen : x = 0 gibt u = 4
x = 3 gibt u = 1

$$= -\int_4^1 \frac{(4-u)^2}{u}du$$

Jetzt vertauscht man die Grenzen, was eine Vorzeichenänderung von – nach + bewirkt:

$$= \int_1^4 \frac{16 - 8u + u^2}{u}du = \int_1^4 \left(\frac{16}{u} - 8 + u\right)du = \left[16 \cdot \ln u - 8u + \tfrac{1}{2}u^2\right]_1^4$$

$$= [16 \cdot \ln 4 - 32 + 8] - \left[16 \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - 8 + \tfrac{1}{2}\right] = 16 \cdot \ln 4 - 24 + 8 - \tfrac{1}{2} = 16 \cdot \ln 4 - 16{,}5$$

(11) $\int_0^{-2} \frac{x^2 - 4}{1-x}dx$

Substitution: u = 1 - x also du = - dx also
dx = - du und x = 1 - u
Grenzen : x = 0 gibt u = 1
x = -2 gibt u = 3

$$= -\int_1^3 \frac{(1-u)^2 - 4}{u}du$$

$$= \int_3^1 \frac{-3 - 2u + u^2}{u}du = \int_3^1 \left(-\frac{3}{u} - 2 + u\right)du = \left[-3 \cdot \ln u - 2u + \tfrac{1}{2}u^2\right]_3^1$$

$$= \left[-3 \cdot \ln 1 - 2 + \tfrac{1}{2}\right] - \left[-3 \cdot \ln 3 - 6 + \tfrac{9}{2}\right] = -2 + \tfrac{1}{2} + 6 - \tfrac{9}{2} + 3\ln 3 = 3 \cdot \ln 3 = \ln 3^3 = \ln 27$$

(12) $\int_0^1 \frac{4x}{(x+1)^3}dx$

Substitution: u = x + 1 also du = dx also
dx = du und x = u - 1
Grenzen : x = 0 gibt u = 1
x = 1 gibt u = 2

$$= 4\int_1^2 \frac{u-1}{u^3}du$$

$$= 4\int_1^2 (u^{-2} - u^{-3})dx = 4\left[\frac{u^{-1}}{-1} - \frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^2 = 4\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 = 4\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right] - 4\left[-1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Erweiterte Substitution quadratischer Nenner

Beispiel 83:

(13) $\int\limits_3^6 \frac{x}{x^2-4}dx$

Substitution: $u = x^2 - 4$ also $du = 2x\,dx$ also $x\,dx = \frac{1}{2}du$
Grenzen: $x = 3$ gibt $u = 5$; $x = 6$ gibt $u = 32$

$$= \int\limits_5^{32} \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int\limits_5^{32} \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln u\right]_5^{32} = \frac{1}{2}(\ln 32 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{32}{5} = \frac{1}{2}\ln 6{,}4$$

(14) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{8x}{x^2+4}dx$

Substitution: $u = x^2 + 4$ also $du = 2x\,dx$ also $8x\,dx = 4\,du$
Grenzen: $x = -2$ gibt $u = 8$; $x = 2$ gibt $u = 8$

$$= \int\limits_8^8 \frac{4}{u}du$$

$$= 4\left[\ln u\right]_8^8 = 4\cdot\ln 8 - 4\cdot\ln 8 = 0$$

Das Null-Integral $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

Beweis: $\int\limits_a^a f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

Das Besondere am Beispiel (14) ist die Tatsache, dass das gegebene Integral trotz verschiedener Grenzen den Wert 0 hat. Später wird erklärt, warum das so ist (es liegt an der Punktsymmetrie von f).

(15) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{36x}{(x^2+1)^2}dx$

Substitution: $u = x^2 + 1$ also $du = 2x\,dx$ also $36\,x\,dx = 18\,du$
Grenzen: $x = 0$ gibt $u = 1$; $x = \sqrt{3}$ gibt $u = 4$

$$= \int\limits_1^4 \frac{18}{u^2}du$$

$$= \left[-\frac{18}{u}\right]_1^4 = -\frac{18}{4} + 18 = 18 - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

(16) $\int\limits_0^4 \frac{x^3}{x^2+9}dx$

Substitution: $u = x^2 + 9$ also $du = 2x\,dx$ also $x\,dx = \frac{1}{2}du$ und $x^2 = u - 9$
Grenzen: $x = 0$ gibt $u = 9$; $x = 4$ gibt $u = 25$

$$= \int\limits_9^{25} \frac{x^2\cdot x\,dx}{x^2+9}$$

$$\int\limits_9^{25} \frac{(u-9)\cdot\frac{1}{2}}{u}du = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25}\left(u - \frac{9}{u}\right)du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u^2 - 9\cdot\ln u\right]_9^{25} = \frac{1}{4}\cdot 625 - \frac{9}{2}\cdot\ln 25 - \frac{81}{4} + \frac{9}{2}\cdot\ln 9$$

$$= 136 + 4{,}5\cdot(\ln 9 - \ln 25)$$

Ergänzungen

Hinweis auf das Integral $\int_a^b \frac{1}{x}dx$

Die Funktion $f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$ hat als Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Dies gilt sowohl für positive wie für negative x. Daher kann man auch das Integral

$\int_{-1}^{-3} \frac{1}{x}dx$ berechnen.

Falsch wäre diese Lösung: $\int_{-1}^{-3} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{-1}^{-3} = \ln(-3) - \ln(-1)$ denn -1 und – 3 gehören nicht zum Definitionsbereich der Funktion f(x) = ln x.

Richtig ist diese Lösung: $\int_{-1}^{-3} \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_{-1}^{-3} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 0 = \ln 3$

Merke:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_a^b$$

Die Integration vieler weiterer Funktionen ist möglich, erfordert aber andere Methoden, weshalb dies teils später, teils hier gar nicht besprochen wird.
Beispiele sind die Integrale

Integration von Wurzelfunktionen

Einfachste Wurzelfunktionen

Das 1. Grundintegral lautete

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{für } n \neq -1 \\ \ln x + C & \text{für } n = -1 \end{cases}$$

Beispiel 84:

Es gilt auch für gebrochene Hochzahlen.

(1) $$\int_0^9 \sqrt{x}dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9 = \tfrac{2}{3}\cdot 9\cdot 3 = 18$$

(2) $$\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \left[\tfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_1^4 = \tfrac{2}{5}\cdot 16\cdot 2 - \tfrac{2}{5}\cdot 1\cdot 1 = \tfrac{64}{5} - \tfrac{2}{5} = \tfrac{62}{5}$$

(3) $$\int_0^4 \sqrt[3]{x^2}dx = \int_0^4 x^{\frac{2}{3}}dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^4 = \left[\tfrac{3}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}\right]_0^4 = \tfrac{3}{5}\cdot 4\cdot\sqrt[3]{16} = \tfrac{3}{5}\cdot 4\cdot 2\sqrt[3]{2} = \tfrac{24}{5}\sqrt[3]{2}$$

(4) $$\int_1^4 \frac{4}{\sqrt{x}}dx = 4\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = 4\cdot\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 4\left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 16 - 8 = 8$$

Wenn der Radikand einen Faktor enthält, kann man so vorgehen:

(5) $$\int_2^8 \sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2}\cdot\int_2^8 x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2}\cdot\left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^8 = \sqrt{2}\cdot\tfrac{2}{3}\left(8\cdot\sqrt{8} - 2\cdot\sqrt{2}\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}(8\cdot 4 - 2\cdot 2) = \tfrac{2}{3}\cdot 28 = \tfrac{56}{3}$$

Oder mit Substitution:

$$\int_2^8 \sqrt{2x}\,dx \qquad \text{Substitution:} \quad u = 2x \quad du = u'\,dx = 2\,dx \quad \text{also} \quad dx = \tfrac{1}{2}du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_4^{16}\sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{16} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\left[u\sqrt{u}\right]_4^{16} = \tfrac{1}{3}(16\cdot 4 - 4\cdot 2) = \tfrac{56}{3}$$

(6) $$\int_{2t}^{8t}\sqrt{\frac{2t}{x}}dx = \sqrt{2t}\cdot\int_{2t}^{8t} x^{-\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2t}\left[2\sqrt{x}\right]_{2t}^{8t} = 2\sqrt{2t}\left[\sqrt{8t} - \sqrt{2t}\right] = 2(4t - 2t) = 4t$$

Merke : Konstante Faktoren des Radikanden kann man isolieren und vor das Integral ziehen.

Wurzelfunktionen mit einfacher Substitution

Beispiel 85:

(7) $\int_1^5 \sqrt{5-x}\,dx$

Substitution: $u = 5 - x$, also $du = u'\,dx = -\,dx$, $dx = -\,du$
Umrechnung der Grenzen: $x = 1$ ergibt $u = 4$, $x = 5$ ergibt $u = 0$.

$$= -\int_4^0 \sqrt{u}\,du = \int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^4 = \tfrac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 = \tfrac{16}{3}$$

Merke:
Vertauschung der Grenzen bewirkt eine Vorzeichenänderung des Integrals !

(8) $\int_{-2}^6 \sqrt{2x+4}\,dx$

Substitution: $u = 2x + 4$, also $du = 2\,dx$, $dx = \frac{1}{2}du$
Umrechnung der Grenzen: $x = -2$ ergibt $u = 0$, $x = 6$ ergibt $u = 16$.

$$= \int_0^{16} \sqrt{u}\,du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{16} = \tfrac{2}{3}\left[u\sqrt{u}\right]_0^{16} = \tfrac{2}{3}(16\cdot 4 - 0) = \tfrac{128}{3}$$

(9) $\int_1^2 \frac{4}{\sqrt{4x-1}}dx$

Substitution: $u = 4x - 1$, also $du = 4\,dx$, $dx = \frac{1}{4}du$
Umrechnung der Grenzen: $x = 1$ ergibt $u = 3$, $x = 2$ ergibt $u = 7$.

$$\int_3^7 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_3^7 u^{-\frac{1}{2}}du = \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^7 = 2\left[\sqrt{u}\right]_3^7 = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$$

Verschiedene Integraltypen

Die Integraltypen $\int_a^b r(x)\cdot\sqrt{ax+b}\,dx$ und $\int_a^b \frac{r(x)}{\sqrt{ax+b}}\,dx$

Beispiel 86:

(10) $\int_0^4 3x\sqrt{4-x}\,dx$

1. Methode: Substitution des Radikanden:

u = 4 – x, du = - dx also dx = - du.
Für die Umwandlung des Faktors 3x löst man u = 4 – x nach x auf:
x = 4 – u.
Umrechnung der Grenzen:
Aus x = 0 folgt u = 4, aus x = 4 folgt u = 0.

$$\int_0^4 3x\sqrt{4-x}\,dx = -\int_4^0 3\cdot(4-u)\sqrt{u}\,du = \int_0^4 \left(12\sqrt{u}-3u\sqrt{u}\right)du = \int_0^4 \left(12u^{\frac{1}{2}}-3u^{\frac{3}{2}}\right)du$$

$$\left[12\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-3\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \left[12\cdot\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}-3\cdot\tfrac{2}{5}u^2\sqrt{u}\right]_0^4 = 8\cdot4\cdot2-\tfrac{6}{5}\cdot16\cdot2 = 32\left(2-\tfrac{6}{5}\right)$$

$$= 32\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{128}{5}$$

2. Methode: Substitution der ganzen Wurzel (günstiger !!):

$u=\sqrt{4-x} \Rightarrow u^2=4-x \Rightarrow x=4-u^2$
Nun ist x eine Funktion von u, also bilden wir das Differential von x:
dx = x’ du = - 2u du.
Umrechnung der Grenzen:
Aus x = 0 folgt u = 2, aus x = 4 folgt u = 0

$$\int_0^4 3x\sqrt{4-x}\,dx = \int_2^0 3\left(4-u^2\right)\cdot u\cdot(-2u\,du) = -6\int_2^0\left(4-u^2\right)u^2\,du = 6\int_0^2\left(4u^2-u^4\right)du$$

$$= 6\left[\tfrac{4}{3}u^3-\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^2 = 6\cdot\left(\tfrac{32}{3}-\tfrac{32}{5}\right) = 6\cdot32\cdot\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right) = 6\cdot32\cdot\tfrac{2}{3\cdot5} = \tfrac{128}{5}$$

Beispiel 87:

(11) $\int_0^4 \frac{2-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

1. Methode: Substitution des Radikanden:

u = 2x + 1, du = 2 dx also dx = $\frac{1}{2}$du und $x=\frac{1}{2}(u-1)$
Umrechnung der Grenzen: Aus x = 0 folgt u = 1, aus x = 4 folgt u = 9.

$$= \int_1^9 \frac{2-\frac{1}{2}(u-1)}{\sqrt{u}}\tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}\int_1^9 \frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}u}{\sqrt{u}}du = \tfrac{1}{2}\int_1^9\left(\tfrac{5}{2}u^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\right)du = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{5}{2}\cdot2\sqrt{u}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^9$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[5\sqrt{u}-\tfrac{1}{3}u\sqrt{u}\right]_1^9 = \tfrac{1}{2}\left[5\cdot3-\tfrac{1}{3}9\cdot3\right]-\tfrac{1}{2}\left[5-\tfrac{1}{3}\right] = \tfrac{1}{2}\left(15-9-5+\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3}$$

2. Methode: Substitution der ganzen Wurzel (günstiger !!):

$u=\sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2=2x+1 \Rightarrow x=\tfrac{1}{2}\left(u^2-1\right) \Rightarrow dx=u\cdot du$

Grenzen: x = 0 ergibt u = 1 und x = 4 ergibt u = 3.

$$\int_0^4 \frac{2-x}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_1^3 \frac{2-\frac{1}{2}\left(u^2-1\right)}{u}u\,du = \int_1^3\left(2-\tfrac{1}{2}\left(u^2-1\right)\right)du = \int_1^3\left(\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}u^2\right)du$$

$$= \left[\tfrac{5}{2}u-\tfrac{1}{6}u^3\right]_1^3 = \left[\tfrac{15}{2}-\tfrac{27}{6}\right]-\left[\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{6}\right] = \tfrac{10}{2}-\tfrac{26}{6} = 5-\tfrac{13}{3} = \tfrac{2}{3}$$

Die Integraltypen $\int_a^b kx\cdot\sqrt{ax^2+b}\,dx$ und $\int_a^b \frac{kx}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx$

Beispiel 88:

(12) $\int_3^5 x\sqrt{x^2-4}\,dx$

Kennzeichen dieses Intergrals ist der quadratische Radikand x^2-4, dessen Ableitung bzw. ein Vielfaches davon als Faktor vor der Wurzel steht.

> Substitution: $u=x^2-4 \Rightarrow du=u'\cdot dx=2x\,dx$
> Also ist $x\,dx=\frac{1}{2}du$
> Der Faktor x verschwindet also im neuen Differential du !
> Grenzen: $x=3 \Rightarrow u=5,\quad x=5 \Rightarrow u=21$

$$\int_3^5 x\sqrt{x^2-4}\,dx=\int_5^{21}\sqrt{u}\cdot\tfrac{1}{2}du=\tfrac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_5^{21}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\left[u\sqrt{u}\right]_5^{21}=\tfrac{1}{3}\left(21\sqrt{21}-5\sqrt{5}\right)\approx 28{,}35$$

Beispiel 89:

(13) $\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

Kennzeichen dieses Intergrals ist der quadratische Radikand x^2+4, dessen Ableitung bzw. ein Vielfaches davon im Zähler steht.

> Substitution: $u=x^2+4 \Rightarrow du=u'\cdot dx=2x\,dx$
> Also ist $x\,dx=\frac{1}{2}du$ und $4x\,dx = 2\,du$!!!
> Der Faktor x verschwindet also im neuen Differential du !
> Grenzen: $x=0 \Rightarrow u=4,\quad x=2 \Rightarrow u=8$

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_4^8\frac{2}{\sqrt{u}}du=2\int_4^8 u^{-\frac{1}{2}}du=2\cdot\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]=4\left[\sqrt{x}\right]_4^8=4\sqrt{8}-4\cdot 2=8\sqrt{2}-8$$

Integration von Exponentialfunktionen

Einfache Exponentialfunktionen

Die einfachste Methode, sich von der Richtigkeit einer Integration zu überzeugen, ist die Probe, also die Umkehrung, die Ableitung der Stammfunktion.

Da man weiß, daß $f(x) = e^x$ als Ableitung $f'(x) = e^x$ hat, kann man sofort die Umkehrung als unbestimmtes Integral aufschreiben:

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

Oder: $f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$.

$f(x) = -e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x}$. Daher folgt:

$$\boxed{\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C}$$

Wie geht das allgemein mit einem linearen Exponenten $ax + b$?

$$f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow f'(x) = e^{ax+b} \cdot a$$

Teilt man nun die Funktion durch die innere Ableitung a des Exponenten, so folgt

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} \Rightarrow f'(x) = e^{ax+b}$$

Nun schnell dazu die Umkehrung:

$$\boxed{\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C}$$

Merksatz:

Beim Integrieren bleibt eine Exponentialfunktion mit einem linearen Exponenten erhalten, es wird lediglich noch durch die innere Ableitung geteilt.

Beispiel 90:

(1) $\int_{-2}^{2} e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_{-2}^{2} = \left[-e^{-1}\right] - \left[-e^{3}\right] = e^{3} - e^{-1} \approx 19{,}72$

Dasselbe geht übrigens auch mit einer einfachen Substitution zu machen:

$\int_{-2}^{2} e^{1-x}dx =$ Substitution: u = 1 – x also du = - dx und dx = - du

$$= -\int_{3}^{-1} e^{u}du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{3} = e^{3} - e^{-1}$$

Das Minuszeichen fiel beim Vertauschen der Grenzen weg.

(2) $\int_{0}^{4} e^{\frac{1}{2}x}dx = \left[2e^{\frac{1}{2}x}\right]_{0}^{4} = \left[2e^{2}\right] - \left[2e^{0}\right] = 2e^{2} - 2 \approx 12{,}78$

Hier wurde durch die innere Ableitung geteilt, also durch $\frac{1}{2}$, was eine Multiplikation mit 2 bedeutet. Alle diese Integrale kann man auch durch eine einfache Substitution berechnen.

(3) $\int_{1}^{2} e^{4-2x}dx = \left[\frac{1}{-2}e^{4-2x}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{2}e^{0} + \frac{1}{2}e^{2} = \frac{e^{2}-1}{2} \approx 3{,}19$

(4) $\int_{0}^{\ln 2} \left(4 - \frac{1}{2}e^{-x}\right)dx = \left[4x + \frac{1}{2}e^{-x}\right]_{0}^{\ln 2} = 4 \cdot \ln 2 + \frac{1}{2}e^{-\ln 2} - 0 - \frac{1}{2}e^{0} = \ln 2^{4} + \frac{1}{2}e^{\ln\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$

$$= \ln 16 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = \ln 16 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = \ln 16 - \tfrac{1}{4},$$

denn aus $e^{\ln a} = a$ folgt $e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(5) $\int_{1}^{2} \frac{4}{e^{2x-4}}dx = 4\int_{1}^{2} e^{-2x+4}dx = \left[4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)e^{-2x+4}\right]_{1}^{2} = -2\left[e^{-2x+4}\right]_{1}^{2} = -2e^{0} + 2e^{2} = 2e^{2} - 1$

(6) $\int_{0}^{2} \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = \left[\tfrac{1}{2}x^{2} - x + 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{0}^{2} = \left[2 - 2 + 2 \cdot e^{-1}\right] - \left[2 \cdot e^{0}\right] = 2e^{-1} - 2$

Exponentialfunktionen mit erweiterter Substitution

Beispiel 91:

(5) $\int_0^3 x\cdot e^{-x^2}dx$ Substitution: $u=-x^2 \Rightarrow du=-2x\,dx \Rightarrow x\cdot dx=-\frac{1}{2}du$

$$=\int_0^{-9} e^u\cdot(-\tfrac{1}{2})du=-\tfrac{1}{2}\int_0^{-9} e^u du=\tfrac{1}{2}\left[e^u\right]_{-9}^0=\tfrac{1}{2}e^0-\tfrac{1}{2}e^{-9}=\frac{1-e^9}{2}\approx 0{,}50$$

(6) $\int_0^1 \frac{4x}{e^{x^2-1}}dx$ Substitution: $u = x^2 - 1$ $du = 2x\ dx$ also $4x\,dx = 2\,du$

$$=\int_{-1}^0 \frac{2du}{e^u}=2\int_{-1}^0 e^{-u}du=2\left[-e^{-u}\right]_{-1}^0=2\left[-e^0+e^1\right]=-2+2e\approx 3{,}44$$

(7) $\int_{-\ln 1}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}dx$ <u>**Substitution des ganzen Nenners**</u>: $u = e^x + 1$

Daraus folgt $du = u'dx = e^x\,dx$. Also ist $e^x\,dx = du$!

$$\int_2^3 \frac{du}{u}=\left[\ln u\right]_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\tfrac{3}{2}=\ln 1{,}5$$

(8) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}dx$ <u>**Substitution der Klammer**</u>: $u = e^x - 1$ $du = e^x\,dx$

$$=\int_1^3 \frac{2du}{u^2}=2\int_1^3 u^{-2}du=2\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_1^3=2\left[-\frac{1}{u}\right]_1^3=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$$

Integration von Ln-Funktionen

Da die Berechnung der Stammfunktion von $f(x) = \ln x$ nur mit einer sehr anspruchsvollen Methode zu erreichen ist, gehen wir den umgekehrten Weg. Wir können durch Ableiten schnell beweisen, dass $F(x) = x \ln x - x + C$ eine Stammfunktion von $f(x) = \ln x$ ist:

$$F'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Daher merken wir uns als weiteres Grundintegral:

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C}$$

bzw.

$$\boxed{\int_a^b \ln x \, dx = \left[x \cdot \ln x - x\right]_a^b}$$

Integration mit einfacher Substitution

Beispiel 92:

(1) $\int_{-1}^{1} \ln(2-x)\,dx$ Substitution: $u = 2 - x$ $du = -dx$ also $dx = -du$

$$= -\int_3^1 \ln u \, du = \left[u \cdot \ln u - u\right]_1^3 = \left[3 \cdot \ln 3 - 3\right] - \left[1 \cdot \ln 1 - 1\right] = 3\ln 3 - 2 = \ln 27 - 2 \approx 1{,}30$$

Erklärung: Durch Vertauschung der Grenzen ändert sich das Vorzeichen, so daß das Minuszeichen wieder verschwindet. Weiter ist $\ln 1 = 0$ und $3 \ln 3 = \ln 3^3 = \ln 27$.

(2) $\int_{-2}^{1} \left(x - 2 \cdot \ln(x+3)\right)dx$ Wir zerlegen das Integral in zwei Integrale und substituieren im zweiten $u = x + 3$, $du = dx$ also $dx = du$.

$$= \int_{-2}^{1} x\,dx - 2\int_1^4 \ln u \, du = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1} - 2\left[u \cdot \ln u - u\right]_1^4 = \tfrac{1}{2} - 2 - 2(4\ln 4 - 4) + 2(0 - 1)$$

$$= \tfrac{1}{2} - 2 - 8 \cdot \ln 4 + 8 - 2 = \tfrac{9}{2} - 8 \cdot \ln 4$$

(3) $\int_0^2 2 \cdot \ln\left(\tfrac{1}{2}x + 1\right)dx$ Substitution: $u = \tfrac{1}{2}x + 1 \Rightarrow du = \tfrac{1}{2}dx \Rightarrow 2dx = 4du$

$$= 4\int_1^2 \ln u \, du = 4\left[u \cdot \ln u - u\right]_1^2 = 4\left[2\ln 2 - 2\right] - 4\left[0 - 1\right] = 8\ln 2 - 4 \approx 1{,}55$$

Integration mit erweiterter Substitution

Beispiel 93:

(4) $\int_3^5 x\cdot\ln\left(x^2-4\right)dx$ Substitution: $u = x^2 - 4$ d.h. $du = 2x\,dx$ also $xdx = \frac{1}{2}du$

$$= \int_5^{21} \tfrac{1}{2}\cdot\ln u\,dx = \tfrac{1}{2}\left[u\cdot\ln u - u\right]_5^{21} = \tfrac{1}{2}\left[21\cdot\ln 21 - 21\right] - \tfrac{1}{2}\left[5\cdot\ln 5 - 5\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(21\cdot\ln 21 - 5\cdot\ln 5 - 16\right) \approx 19{,}94$$

Bei dieser Substitution ist das Merkmal: Das Argument besteht aus einem quadratischen Term, und davor steht als Faktor ein Vielfaches der Ableitung des Arguments. Also gelingt es, den Faktor x zusammen mit dx im du verschwinden zu lassen. Man nennt dies auch ein „Schlupfintegral".

(5) $\int_0^2 4x\cdot\ln\left(x^2+4\right)du$ Substitution: $u = x^2 + 4$ $du = 2x\,dx$, $4x\,dx = 2\,du$

$$= 2\int_4^8 \ln u\,du = 2\left[u\cdot\ln u - u\right]_4^8 = 2\left[8\ln 8 - 8\right] - 2\left[4\cdot\ln 4 - 4\right] =$$

$$= 2\left(8\cdot\ln 2^3 - 4\cdot\ln 2^2 - 4\right) = 2\cdot\left(\ln 2^{24} - \ln 2^8 - 4\right) = 2\cdot\left(\ln\frac{2^{24}}{2^8} - 4\right)$$

$$= 2\cdot\ln 2^{16} - 8 = \ln 2^{32} - 8 = 32\cdot\ln 2 - 8 \approx 14{,}18$$

Wieder ein Schlupfintegral. Die lange LN-Umformung am Ende ist Spielerei und sollte nur die vielfältigen Möglichkeiten aufzeigen.

Integration von Trigonometrischen Funktionen

Einfache Sinus- und Kosinus-Integrale

Wer integrieren will, muß ableiten können. Daher halten wir zunächst fest:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \qquad \text{und} \qquad (\cos x)' = -\sin x}$$

Die Stammfunktion erhält man bekanntlich durch „Aufleiten". Also folgt:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int (-\sin x) dx = \cos x + C \quad \text{also} \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Wir merken uns also diese

Grundintegrale:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \text{und} \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

bzw.

$$\int_a^b \sin x \, dx = -[\cos x]_a^b \quad \text{und} \quad \int_a^b \cos x \, dx = [\sin x]_a^b$$

Beispiel 94:

(1) $\int_0^{2\pi} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ Substitution: $u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2 \cdot du$

$$= 4\int_0^{\pi} \sin u \, du = -4[\cos u]_0^{\pi} = -4(\cos\pi - \cos 0) = -4(-1-1) = 8$$

Hier ist es wichtig, die wichtigsten Werte von Sinus und Kosinus im Kopf zu haben:

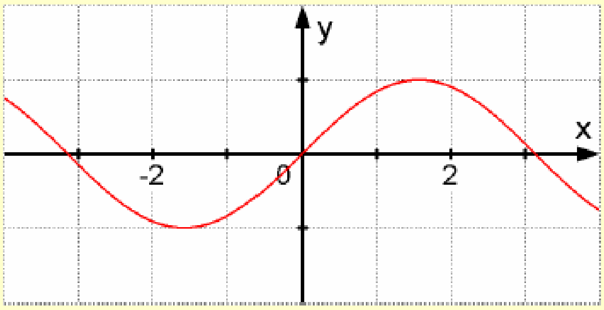
Gradmaß	Bogenmaß	sin x	cos x
$x = 0^o$	$x = 0$	0	1
$x = 30^o$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x = 45^o$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$x = 60^o$	$x = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$x = 90^o$	$x = \frac{\pi}{2}$	1	0
$x = 180^o$	$x = \pi$	0	-1

Beispiel 95:

(2) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx = \left[\sin u\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

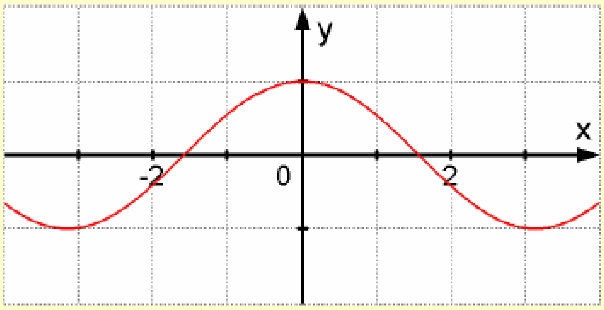
Substitution:	$u = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow du = dx$
Grenzen:	$x_1 = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow u_1 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\pi$ und $x_2 = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow u_2 = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\pi$

Wiederholung der Symmetrieeigenschaft von Sinus- und Kosinuskurve:



Die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung: sin(-x) = sin x

Also gilt z.B.: $\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$



Die Kosinuskurve ist achsensymmetrisch zur y-Achse: cos(-x) = cos x

Also gilt z.B.

$\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$

Diese Symmetrieeigenschaft, trat z.B. in der Rechnung zu (2) auf.

Beispiel 96:

(3) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin u \, du = 2\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = -2\left(\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \underbrace{\cos 0}_{1}\right) = 2$

Substitution:	$u = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2 \cdot du$
Grenzen:	$x_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow u_2 = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} = \pi$

Partielle Integration

Da sich viele Stammfunktionen nicht berechnen lassen, haben die Mathematiker viele Methoden und Tricks ersonnen, um diese Probleme doch noch zu knacken. Die wohl berühmteste aller Methoden wird jetzt vorgestellt. Mit ihr erreicht man, daß, bestimmte komplizierte Integrale in einfachere umgewandelt werden können.

Zu Herleitung benötigen wir die Produktregel der Ableitung:
Aus $y = f(u) = u(x) \cdot v(x)$ folgt $y' = f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.
Also folgt $dy = y' \cdot du = \left(u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)\right) dx$, kurz $dy = (u' \cdot v + v' \cdot u) dx$

Nun gehen wir ganz formal vor und machen das Differential durch das Integral rückgängig: $y = \int dy = \int (u'v + v'u) dx = \int u'v\, dx + \int v'u\, dx$
Daraus folgt: $\int u'v\, dx = y - \int v'u\, dx$ bzw. $\int u'v\, dx = [u \cdot v] - \int v'u\, dx$

Was wir jetzt rein formal als unbestimmtes Intergral gezaubert haben, spielt sich in der Praxis beim bestimmten Integral so ab:

$$\boxed{\int_a^b u'v\, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v'u\, dx}$$

Wer diese Formel zum ersten Male sieht, denkt vielleicht an Asterix und Obelix. Diese Gleichung sieht nicht vertrauenerweckend aus. Man muß ihren Aufbau verstehen, dann kann man sie anwenden:

Auf der linken Seite steht das zu berechnende schwere Integral.
Der Integrand besteht aus einem Produkt. Den einen Faktor interpretieren wir als eine Ableitung u' , den anderen v als eine „normale“ Funktion.
Auf der rechten Seite steht eine Formel, die sich auch u, v und v' zusammensetzt und ein zweites Integral beinhaltet.
Wenn es gelingt, die Faktoren u' und v geeignet so zu finden, dass das auf der rechten Seite entstehende zweite Integral einfacher ist als das gegebene auf der linken Seite (also leicht berechenbar), dann schafft es diese Formel, ein kompliziertes Integral in ein einfacheres zu verwandeln !

Es gibt viele Fälle. In denen sich diese Formel bewährt. Diese Gleichung trägt übrigens verschiedene Namen: Produktintegration, Partielle Integration sind die beiden gebräuchlichsten.

Die Anwendungen kommen in erster Linie bei Exponentialfunktionen, LN-Funktionen und Sinus-Cosinus-Funktionen vor.

Partielle Integration bei Ln-Funktionen

Beispiel 97:

(1) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$ Hier die Formel : $\int_a^b u'v \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v'u \, dx$

Partielle Integration: 1. Versuch	Partielle Integration: 2. Versuch:
$u' = \ln x \Rightarrow u = x \cdot \ln x - x$	$u' = x \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2$
$v = x \Rightarrow v' = 1$	$v = \ln x \Rightarrow v' = \dfrac{1}{x}$

Genau wie bei den Exponentialfunktionen testen wir zuerst die beiden Möglichkeiten durch, um diejenige zu entdecken, die zum Ziel führt.

$$= \left[x \cdot (x \cdot \ln x - x)\right]_1^e - \int_1^2 (x \ln x - x)\, dx = ??$$

Wie man erkennt, führt die erste Methode zu einem komplizierteren Integral, während die zweite Methode zum Ziel führt.

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \tfrac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x \, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \tfrac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \tfrac{1}{2}e^2 \cdot \underbrace{\ln e}_{1} - \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4}$$

$$= \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\left(e^2 + 1\right) \approx 2{,}10$$

Merke: **Bei der partiellen Integration mit LN-Funktionen behandelt man den LN-Faktor als v und den ganzrationalen Term als u':**

$$u' = g(x) \Rightarrow u = ...$$
$$v = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

Wie man sofort sieht, liegt der Grund für die spezielle Wahl von v darin, daß eben bei der LN-Funktion die Ableitung sehr einfach wird (ln verschwindet!) während sich die e-Funktion praktisch nicht verändert, weshalb man dort anderes vorgeht.

Beispiel 98:

(2) $\int_1^{e^2} x^2 \cdot \ln x \, dx$

Partielle Integration: $u' = x^2 \Rightarrow u = \frac{1}{3}x^3$

$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x^2}{3} dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \tfrac{1}{9}x^3\right]_1^{e^2}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}e^6 \cdot \underbrace{\ln e^2}_{=2} - \tfrac{1}{9}e^6\right] - \left[\tfrac{1}{3} \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - \tfrac{1}{9}\right] = \tfrac{2}{3}e^6 - \tfrac{1}{9}e^6 + \tfrac{1}{9} = \tfrac{5}{9}e^6 + \tfrac{1}{9} = \frac{5e^6 + 1}{9}$$

Beispiel 99:

(3) $\int_a^b \ln x \, dx = \int_a^b 1 \cdot \ln x \, dx =$

$$= \left[x \cdot \ln x\right]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[x \cdot \ln x\right]_a^b - \int_a^b 1 \, dx = \left[x \cdot \ln x - x\right]_a^b .$$

Partielle Integration: $u' = 1 \Rightarrow u = x$

$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

Das nächste Integral ist genauso berühmt, vor allem dadurch, daß man es auf zwei verschiedene Weisen partiell integrieren kann:

Integrale, die Substitution und partielle Integration verlangen

Beispiel 100:

Das Integral $A = \int_0^3 x \cdot \ln(4-x)\,dx$ muß einerseits mit partieller Integration berechnet werden, andererseits verlangt das komplizierte Argument (4-x) eine Vereinfachung durch Substitution.

Es gibt zwei Möglichkeiten, diese beiden Methoden in unterschiedlicher Reihenfolge anzuwenden.

1. Methode: Zuerst partielle Integration, dann Substitution:

$$\boxed{\begin{array}{lll} u' = x & \Rightarrow & u = \tfrac{1}{2}x^2 \\ v = \ln(4-x) & \Rightarrow & v' = \dfrac{-1}{4-x} = \dfrac{1}{x-4} \end{array}}$$

Dies ergibt:

$$A = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(4-x)\right]_0^3 - \tfrac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2}{x-4}\,dx$$

Nun wird in einer Nebenrechnung das neue Integral berechnet:

Substitution: $z = x-4 \Rightarrow dz = dx$ und $x = z+4$

$$\int_0^3 \frac{x^2}{x-4}\,dx = \int_{-4}^{-1} \frac{z^2+8z+16}{z}\,dz = \int_{-4}^{-1}\left(z+8+\frac{16}{z}\right)dz = \left[\tfrac{1}{2}z^2+8z+16\cdot\ln|z|\right]_{-4}^{-1}$$

Zusammengesetzt:

$$A = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(4-x)\right]_0^3 - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}z^2+8z+16\cdot\ln|z|\right]_{-4}^{-1} = \tfrac{9}{2}\ln 1 - 0 - \left[\tfrac{1}{4}z^2+4z+8\ln|z|\right]_{-4}^{-1}$$

$$= -\tfrac{1}{4}+4+4-16+8\cdot\ln 4 = -8{,}25+8\cdot\ln 4 \approx 2{,}84$$

<u>**2. Methode: Zuerst Substitution, dann partielle Integration,**</u>

$A=\int_0^3 x\cdot\ln(4-x)dx$ Substitution: $\mathbf{z}=4-x \Rightarrow x=4-\mathbf{z}$ und $dx=-dz$

$A=-\int_4^1 (4-z)\cdot\ln z\,dz=\int_1^4 (4-z)\cdot\ln z\,dz$

$u'=4-z \Rightarrow u=4z-\frac{1}{2}z^2$

$v=\ln z \Rightarrow v'=\frac{1}{z}$

Jetzt partielle Integration:

$$A=\left[\left(4z-\tfrac{1}{2}z^2\right)\cdot\ln z\right]_1^4-\int_1^4\left(4z-\tfrac{1}{2}z^2\right)\cdot\frac{1}{z}dz=\left[\left(4z-\tfrac{1}{2}z^2\right)\cdot\ln z\right]_1^4-\int_1^4\left(4-\tfrac{1}{2}z\right)dz$$

$$=\left[\left(4z-\tfrac{1}{2}z^2\right)\cdot\ln z\right]_1^4-\left[4z-\tfrac{1}{4}z^2\right]_1^4=$$

$$=(16-8)\cdot\ln 4-\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\ln 1-(16-4)+\left(4-\tfrac{1}{4}\right)=8\cdot\ln 4-8{,}25$$

Vergleicht man beide Methoden, so fällt auf, dass die zweite kürzer und einfacher ist. Der Grund ist schnell erkannt: Wenn man zuerst partiell integriert, ergibt das komplizierte Logarithmus-Argument einen Bruch für das nächste Integral, der eine Summe im Nenner hat. Dies bereitst Mühe.

Vereinfacht man dagegen das Argument zuerst durch eine Substitution, wird das zweite Integral nach der partiellen Integration deutlich einfacher.

MERKE:

Zuerst Vereinfachung durch Substitution,
dann erst partielle Integration!

Beispiel 101:

$$\int_2^{-2}\left(x^2-4\right)\cdot e^{-x}dx$$

Lösung:

(11) $\int_2^{-2}\left(x^2-4\right)\cdot e^{-x}dx$

Partielle Integration: $u'=e^{-x} \Rightarrow u=-e^{-x}$

$v=\left(x^2-4\right) \Rightarrow v'=2x$

$$\left[-\left(x^2-4\right)e^{-x}\right]_2^{-2}+2\int_2^{-2}x\cdot e^{-x}dx=$$

Weitere partielle Integration: $u'=e^{-x} \Rightarrow u=-e^{-x}$

$v=x \Rightarrow v'=1$

$$\int_2^{-2}x\cdot e^{-x}dx=\left[-x\cdot e^{-x}\right]_{-2}^{2}+\int_2^{-2}e^{-x}dx=\left[-x\cdot e^{-x}-e^{-x}\right]_2^{-2}$$

Zusammengesetzt:

$$\int_2^{-2}\left(x^2-4\right)\cdot e^{-x}dx=\left[-\left(x^2-4\right)e^{-x}\right]_2^{-2}+2\left[-x\cdot e^{-x}-e^{-x}\right]_2^{-2}=$$

$$=\left[-e^{-x}\left(x^2-4+2x+2\right)\right]_2^{-2}=\left[-e^{-x}\left(x^2+2x-2\right)\right]_2^{-2}=-e^2(-2)+e^{-2}\cdot 6=2e^2+6e^{-2}$$

Partialbruchzerlegung

Ein weiteres Integrationsverfahren ist die Partialbruchzerlegung. Sie wird zur Integration gebrochen rationaler Integranden benötigt. Mit ihrer Hilfe lassen sich alle gebrochen rationalen Funktionen integrieren. Diese Einsicht, die um 1799 aufkam, führte zur Frage nach der Existenz von Nullstellen des Nennerpolynoms und wurde dadurch zu einem wichtigen Motiv bei der Entwicklung des Fundamentalsatzes der Algebra.

Eine gebrochen rationale Funktion s(x) ist als ein Quotient aus ganzrationalen, stetigen Funktionen definiert

Ihr Definitionsbereich ist D=\{B}, wobei B die Menge der Nullstellen der Nennerfunktion ist.

Der Definitionsbereich kann aufgefasst werden als Vereinigung von endlich vielen Intervallen, in denen die gebrochen rationale Funktionen stetig sind.

Eine Stammfunktion ist folglich vorhanden.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots\dots\dots + b_1 x + b_0}$$

Einführendes Beispiel

Dies ein Verfahren, Funktionsterme von gebrochen rationalen Funktionen so in einzelne Brüche zu zerlegen, daß sie integriert werden können.

Ich beginne mit einem Beispiel.

Das Integral $\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-3}\right)dx$ kann so berechnet werden:

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = \int_{-1}^{2}\frac{3}{x+2}dx + \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx$$

Für jedes Integral führt man dann eine geeignete Substitution durch.

Doch es geht und jetzt nicht um diese verhältnismäßig leichten Berechnungen. Wenn man in die beiden Brüche auf den Hauptnenner bringt, entsteht

$$\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-3} = \frac{3\cdot(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{3x-9+x+2}{x^2-x-6} = \frac{4x-7}{x^2-x-6}.$$

Und nun stelle ich die Aufgabe: Berechnen Sie $\int_{-1}^{2}\frac{4x-7}{x^2-x-6}dx$!

Stellen wir uns vor, wir würden die obere Rechnung nicht kennen, wir müßten sicher kapitulieren, weil weder eine Substitution noch gar eine partielle Integration weiter hilft. Aber eigentlich haben wir die Methode parat. Sie heißt „Zerlege den Integranden is zwei kleinere Brüche, so daß die obige Rechnung zur Lösung führt". Doch wie geht das ? Wir können selbst drauf kommen:

Zuerst brauchen wir die Nullstellen des Nenners, damit wir diesen in ein Produkt zweier Linearfaktoren zerlegen können:

$$x^2 - x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Also haben wir als erstes erreicht: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

Wir müssen dabei die umgekehrten Vorzeichen verwenden, weil gilt:

$$x = 3 \;\Leftrightarrow\; (x-3) = 0 \;\text{ und }\; x = -2 \;\Leftrightarrow\; (x+2) = 0$$

Nun wissen wir also schon dieses:

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Nun bringen wir die rechte Seite wieder auf den Hauptnenner:

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

Wir vergleichen nun die Koeffizienten im Zähler des ersten und letzten Bruches:
Es muß gelten: $A + B = 4$ und $-3A + 2B = -7$.
Löst man dieses Gleichungssystem, zum Beispiel indem man $B = 4 - A$ in die zweite Gleichung einsetzt, so erhält man $A = 3$ und $B = 1$
Damit haben wir nun die Zerlegung in Partialbrüche und die Integration kann durchgeführt werden.

Die Restlösung geschieht wie gesagt durch Substitution des 1. Integrals durch $u = x + 2 \Rightarrow du = dx$ und des 2. Integrals durch $v = x - 3 \Rightarrow dv = dx$.

Damit folgt

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-3}\right)dx = \int_{-1}^{2}\frac{3}{x+2}dx + \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx = \int_{1}^{4}\frac{3}{u}du + \int_{-4}^{-1}\frac{1}{v}dv = \left[3\cdot\ln|u|\right]_1^4 + \left[\ln|v|\right]_{-4}^{1}$$

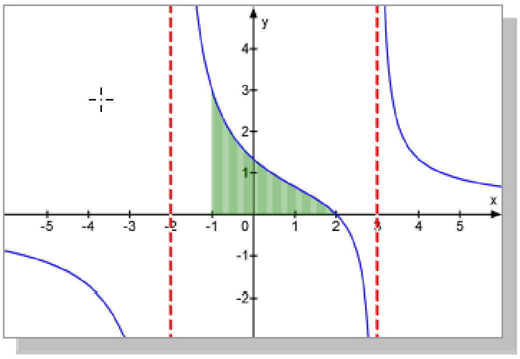
$$= 3\cdot\ln 4 - 3\cdot\ln 1 + \ln 1 - \ln 4 = 2\cdot\ln 4 = \ln 16$$

Musterbeispiele

Nenner mit einfachen Nullstellen und Grad Z < Grad N

Beispiel 102:

$$A = \int_{-1}^{2} \frac{4x-8}{x^2-x-6}\,dx$$



1. Schritt: Faktorisierung des Nenners:

Nenner = 0: $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Folgerung: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

2. Schritt: Zerlegung in eine Summe:

Ansatz: $$\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \qquad (1)$$

1. Methode: Koeffizientenvergleich

Berechnung der rechten Seite:

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{ax+2a+bx-3b}{(x-3)(x+2)} = \frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}$$

Also gilt: $$\boxed{\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)} = \frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}}$$

Grundsatz: Zwei gleich große Brüche mit gleichem Nenner müssen auch den gleichen Zähler besitzen. Und weil dieser x enthält, müssen alle Koeffizienten gleich sein.

Also führt man einen Koeffizientenvergleich durch: $\begin{Bmatrix} a+b=4 \\ 2a-3b=-8 \end{Bmatrix}$

Aus diesem Gleichungssystem kann man a und b berechnen. Etwa so:

Aus der 1. Gleichung folgt: $b = 4 - a$

Eingesetzt in die 2. Gleichung: $2a - 3(4-a) = -8$

Umgeformt: $2a - 12 + 3a = -8$

$5a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$

Daraus folgt dann: $b = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$.

Ergebnis: $$\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)} = \frac{\frac{4}{5}}{x-3} + \frac{\frac{16}{5}}{x+2}$$

Flächenberechnung:

$$A = \int_{-1}^{2} \frac{4x-8}{x^2-x-6}dx = \int_{-1}^{2}\left(\frac{\frac{4}{5}}{x-3}+\frac{\frac{16}{5}}{x+2}\right)dx = \tfrac{4}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx + \tfrac{16}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}dx$$

Ausführliche Berechnung der Teilintegrale:

$I_1 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx$ Substitution: $u = x-3 \;\Rightarrow\; du = dx$

Umrechnung der Grenzen: $x=-1 \;\Rightarrow\; u=-4$ und $x=2 \;\Rightarrow\; u=-1$

$$I_1 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx = \int_{-4}^{-1}\frac{1}{u}du = \left[\ln|u|\right]_{-4}^{-1} = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 4 = -\ln 4$$

$I_2 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}dx$ Substitution: $v = x+2 \;\Rightarrow\; dv = dx$

Umrechnung der Grenzen: $x=-1 \;\Rightarrow\; v=1$ und $x=2 \;\Rightarrow\; v=4$

$$I_2 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}dx = \int_{1}^{4}\frac{1}{v}dv = \left[\ln|v|\right]_{1}^{4} = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

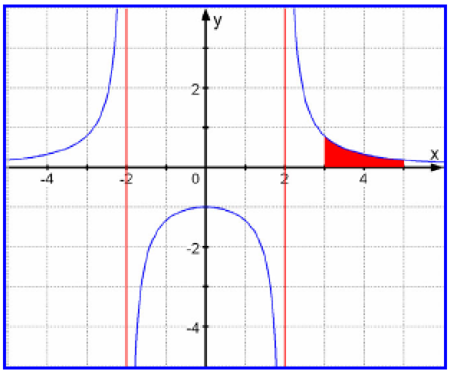
Zusammengefasst: $A = \tfrac{4}{5}\cdot I_1 + \tfrac{16}{5}\cdot I_2 = \tfrac{4}{5}\cdot(-\ln 4) + \tfrac{16}{5}\cdot\ln 4 = \left(-\tfrac{4}{5}+\tfrac{16}{5}\right)\cdot\ln 4 = \tfrac{12}{5}\cdot\ln 4$

Kurzfassung der Integration ohne Substitution:

$$A = \tfrac{4}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx + \tfrac{16}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}dx = \tfrac{4}{5}\cdot\left[\ln|x-3|\right]_{-1}^{2} + \tfrac{16}{5}\cdot\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{2}$$

$$A = \tfrac{4}{5}\cdot(\ln 1 - \ln 4) + \tfrac{16}{5}\cdot(\ln 4 - \ln 1) = -\tfrac{4}{5}\cdot\ln 4 + \tfrac{16}{5}\cdot\ln 4 = \tfrac{12}{5}\cdot\ln 4$$

Beispiel 103:



(1) $\int\limits_3^5 \frac{4}{x^2-4}dx$

Nullstellen des Nenners: $x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Rechte Seite auf den Hauptnenner bringen:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{x^2-4} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$$

Zwischenergebnis: $\frac{4}{x^2-4} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$

Koeffizientenvergleich im Zähler:

(1) $A + B = 0$
(2) $2A - 2B = 4$

Aus (1) folgt B = - A. Eingesetzt in (2):

$2A + 2A = 4 \Leftrightarrow 4A = 4 \Leftrightarrow A = 1$

Also B = - 1

Ergebnis: $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

Berechnung des Integrals:

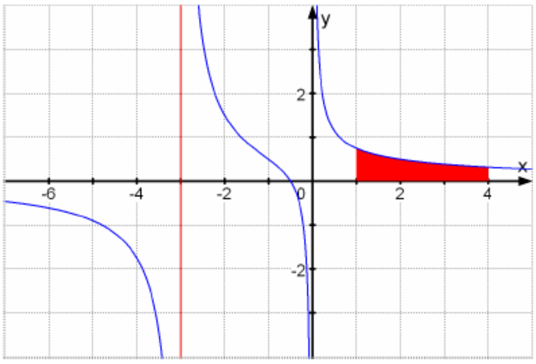
$$A = \int\limits_3^5 \frac{4}{x^2-4}dx = \int\limits_3^5 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \int\limits_3^5 \frac{1}{x-2}dx - \int\limits_3^5 \frac{1}{x+2}dx$$

Substitution des 1. Integrals durch $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$
Substitution des 2. Integrals durch $v = x + 2 \Rightarrow dv = dx$

$$A = \int\limits_1^3 \frac{1}{u}du - \int\limits_5^7 \frac{1}{v}dv = [\ln u]_1^3 - [\ln v]_5^7 = \ln 3 - \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 7 + \ln 5 = \ln\frac{3\cdot 5}{7} = \ln\frac{15}{7} \approx 0{,}762$$

Beispiel 104:

(2) $\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+3x}dx$



Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{2x+1}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

Hauptnennerform der rechten Seite:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x^2+3x}$$

Zwischenergebnis: $\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{(A+B)x+3A}{x^2+3x}$

Koeffizientenvergleich der Zähler:

$A+B=2 \quad (1)$

$3A=1 \quad (2)$

Aus (2) folgt $A=\frac{1}{3}$. Setzt man dies in (1) ein, folgt $\frac{1}{3}+B=2 \Rightarrow B=\frac{5}{3}$

Ergebnis: $\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x+3}$

Berechnung des Integrals:

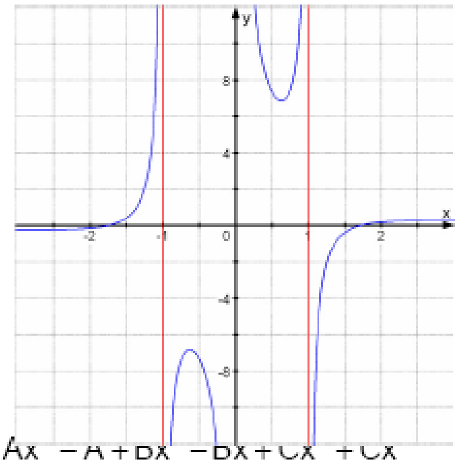
$$A = \int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+3x}dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x}dx + \frac{5}{3}\int_1^4 \frac{1}{x+3}dx$$

Substitution beim 2. Integral: $u=x+3 \Rightarrow du=dx$

$$A = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x}dx + \frac{5}{3}\int_4^7 \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}[\ln x]_1^4 + \frac{5}{3}[\ln u]_4^7 = \frac{1}{3}\cdot\ln 4 + \frac{5}{3}\cdot\ln 7 - \frac{5}{3}\cdot\ln 4 = \frac{5}{3}\cdot\ln 7 - \frac{4}{3}\ln 4 \approx 0{,}462$$

Beispiel 105:

(3) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}dx$



Nullstellen des Nenners: 0, 1 und – 1 , denn
$x^3 - x = x\left(x^2-1\right) = x(x+1)(x-1)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Hauptnennerform der rechten Seite:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A\left(x^2-1\right) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx}{x^3-x}$$

Also folgt: $\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-B+C)x - A}{x^3-x}$

Koeffizientenvergleich der Zähler:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \qquad (1)\\ -B+C &= 0 \qquad (2)\\ -A &= -3 \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt: $A = 3$. Setzt man dies in (1) ein, folgt

$$B + C = -2 \qquad (4)$$

Addition von (2) und (4) liefert $2C = -2 \Rightarrow C = -1$

Aus (2) folgt schließlich $B = C = -1$

Ergebnis: $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

Berechnung des Integrals: $A = \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}dx = 3\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x}dx - \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x-1}dx - \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x+1}dx$

Substitution für das 2. Integral: $u = x-1 \Rightarrow du = dx$
Substitution für das 3. Integral: $v = x+1 \Rightarrow dv = dx$

$$A = 3\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x}dx - \int\limits_{\sqrt{3}-1}^{4} \frac{1}{u}du - \int\limits_{\sqrt{3}+1}^{6} \frac{1}{v}dv = 3[\ln x]_{\sqrt{3}}^{5} - [\ln u]_{\sqrt{3}-1}^{4} - [\ln v]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3\ln 5 - 3\ln\sqrt{3} - \ln 4 + \ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln 6 + \ln\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Wegen $\ln\left(\sqrt{3}-1\right) + \ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln(3-1) = \ln 2$ folgt

$$A = 3\cdot\ln 5 - 3\cdot\ln\sqrt{3} - \ln 24 + \ln 2 = 3\cdot\ln\frac{5}{\sqrt{3}} - \ln 12 \approx 0{,}7$$

Hinweis: Wenn man das Verfahren der Rücksubstitution anwendet, dann verläuft die Rechnung so:

$$A = 3\int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x}dx - \int_{\sqrt{3}-1}^{4}\frac{1}{u}du - \int_{\sqrt{3}+1}^{6}\frac{1}{v}dv = 3[\ln x]_{\sqrt{3}}^{5} - [\ln u]_{\sqrt{3}-1}^{4} - [\ln v]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3[\ln x]_{\sqrt{3}}^{5} - [\ln(x-1)]_{\sqrt{3}}^{5} - [\ln(x+1)]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}\right]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{x^2-1}\right]_{\sqrt{3}}^{5}$$

$$A = \ln\frac{125}{24} - \ln\frac{3\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{125}{24}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} = \ln\frac{125}{36\sqrt{3}} \approx 0{,}7$$

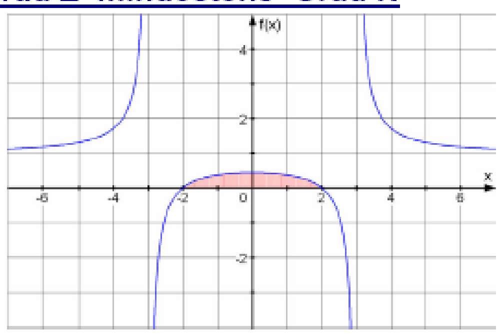
Dieses Verfahren ist dann anzuwenden, wenn nur die Stammfunktion, also das unbestimmte Integral gesucht ist, bei dem man ja ohne Grenzen arbeitet.

Nenner mit einfachen Nullstellen und Grad Z mindestens Grad N

Beispiel 106:

Nenner mit einfachen Nullstellen und Grad Z mindestens Grad N

(4) $$\int_{-2}^{2}\frac{x^2-4}{x^2-9}dx$$



Jetzt ist der Funktionsterm nicht mehr "echt" gebrochen. Man muß ihn dann zuerst so zerlegen:

$$\frac{x^2-4}{x^2-9} = \frac{x^2-9+5}{x^2-9} = \frac{x^2-9}{x^2-9} + \frac{5}{x^2-9} = 1 + \frac{5}{x^2-9}$$

Wer dies nicht erkennt, findet die Zerlegung stets über eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2-4):(x^2-9)=1 \\ \underline{-(x^2-9)} \\ \quad 5 \end{array}$$

Dies ergibt $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9} = 1 + \frac{5}{x^2-9}$

Nun folgt die Partialbruchzerlegung für den Restterm:

$$\frac{5}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-3B)}{x^2-9}$$

Koeffizientenvergleich für den ersten und letzten Zähler:

$$A+B=0 \Rightarrow B=-A \quad (1)$$

$$3A-3B=5 \quad (2)$$

(1) in (2) liefert $6A=5 \Rightarrow A=\frac{5}{6}$ und damit $B=-\frac{5}{6}$

Ergebnis: $$\frac{5}{x^2-9} = \frac{\frac{5}{6}}{x-3} - \frac{\frac{5}{6}}{x+3}1$$

Berechnung des Integrals (unter Ausnützung der Symmetrie der Fläche):

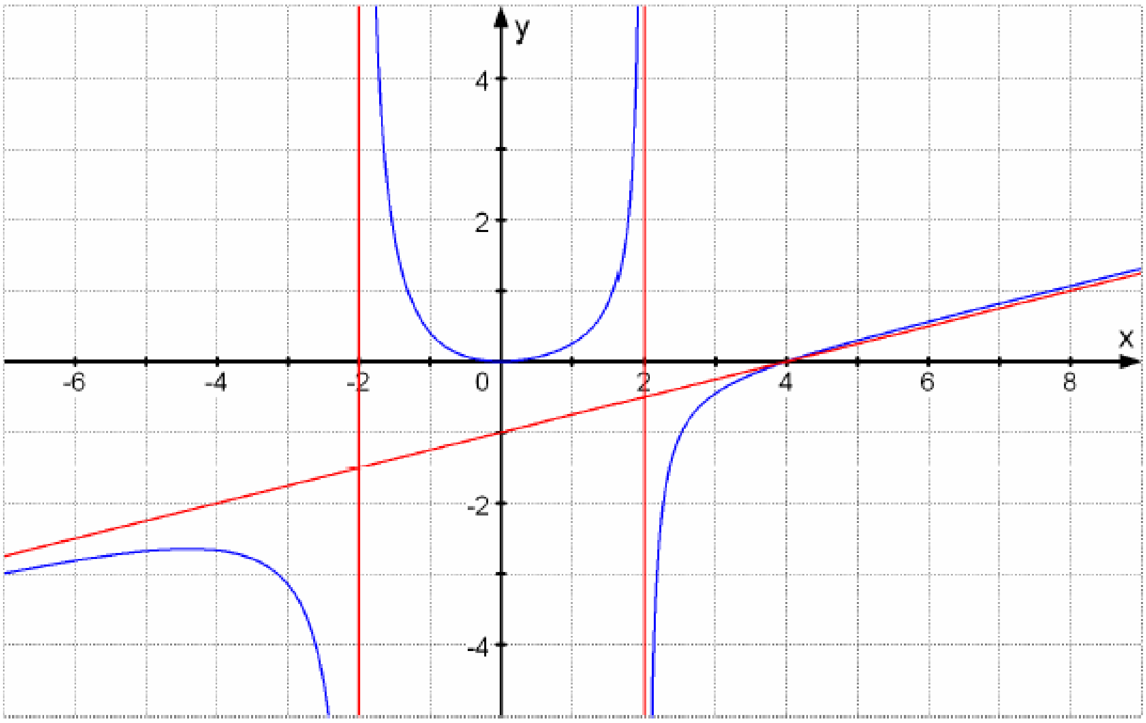
$$A = \int_{-2}^{2}\frac{x^2-4}{x^2-9}dx = 2\int_{0}^{2}\left(1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{5}{6}\frac{1}{x+3}\right)dx = 2\int_{0}^{2}dx + \frac{5}{3}\int_{0}^{2}\frac{1}{x-3}dx - \frac{5}{3}\int_{0}^{2}\frac{1}{x+3}dx$$

$$A = [2x]_0^2 + \frac{5}{3}\int_{-3}^{-1}\frac{1}{u}du - \frac{5}{3}\int_{3}^{5}\frac{1}{v}dv = 4 + \frac{5}{3}[\ln|u|]_{-3}^{-1} - \frac{5}{3}[\ln|v|]_{3}^{5} = 4 - \frac{5}{3}\ln 5$$

Beispiel 107:

(5) $f(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}$ Gesucht ist die Stammfunktion F.

Diese Funktion hat eine doppelte Nullstelle bei 0, eine weitere Nullstelle bei 4, dann zwei Polstellen bei 2 und – 2 (jeweils mit Zeichenwechsel), und dies hat die beiden senkrechten Asymptoten dx = 2 und x = - 2 zur Folge. Da der Grad des Zählers um 1 größer als der Nenner ist, besitzt das Schaubild eine schiefe Asymptote. Ihre Gleichung $y=\frac{1}{4}x-1$ folgt aus der unten gezeigten Polynomdivision.



Nun müssen wir diese Vorarbeit leisten:
Zunächst lassen wir den Faktor $\frac{1}{4}$ einfach weg. Er wird am Ende der Rechnung wieder ergänzt. Zum zweiten führen wir eine Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-4x^2+0x+0):(x^2-4)=x-4 \\
-(x^3+0x^2-4x) \\
\hline
\quad -4x^2+4x \\
\quad -(-4x^2+0x+16) \\
\hline
\qquad +4x-16
\end{array}
\qquad \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\cdot\left(x-4+\frac{4x-16}{x^2-4}\right)
$$

oder so: $f(x)=\frac{1}{4}x-1+\frac{x-4}{x^2-4}$

Daraus erkennt man die schiefe Asymptote, da $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{x-4}{x^2-4}=\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$ ist.

Da der Restterm $\frac{x-4}{x^2-4}$ seine Nullstelle bei x = 4 hat, liegt dort auch der Schnittpunkt zwischen der Kurve und ihrer schiefen Asymptote.

Nun aber zur Berechnung der Stammfunktion.

$$F(x)=\frac{1}{4}\int\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}dx=\int\left(\tfrac{1}{4}x-1+\frac{x-4}{x^2-4}\right)dx=\tfrac{1}{8}x^2-x+\int\frac{x-4}{x^2-4}dx \qquad (*)$$

Partialbruchzerlegung für den Restterm $\frac{x-4}{x^2-4}$:

$$\frac{x-4}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$$

Koeffizientenvergleich für den ersten und letzten Zähler:

$$\begin{aligned} A+B&=1 && (1)\\ 2A-2B&=-4 && (2) \quad |:2\\ A-B&=-2 && (3)\end{aligned}$$

$$(1)+(3)\ \text{liefert}\ \ 2A=-1\ \Rightarrow\ A=-\tfrac{1}{2}.$$

$$\text{Eingesetzt in (3):}\quad -\tfrac{1}{2}-B=-2\ \Rightarrow\ B=\tfrac{3}{2}$$

Damit folgt

$$\frac{x-4}{x^2-4}=\frac{-\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}$$

Das letzte Integral in (*) lautet daher

$$\int\frac{x-4}{x^2-4}dx=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+2}dx$$

Den Bruch $\frac{1}{x-2}$ substituieren wir mit $u=x-2\ \Rightarrow\ du=dx$, den Bruch $\frac{1}{x+2}$ mit $v=x+2\ \Rightarrow\ dv=dx$. Damit folgt:

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du+\frac{3}{2}\int\frac{1}{v}dv=-\frac{1}{2}\cdot\ln|u|+\frac{3}{2}\ln|v|+C$$

Und nach der Rücksubstitution:

$$=-\frac{1}{2}\cdot\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$$

Nun setzten wir dies wieder in die Gleichung (*) ein und erhalten die gesuchte Stammfunktion:

$$F(x)=\tfrac{1}{8}x^2-x-\frac{1}{2}\cdot\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$$

Soll damit eine Fläche berechnet werden, dann hängt die weitere Rechnung von der Lage dieser Fläche ab, da wir entscheiden müssen, was aus den Beträgen wird. Für $x>2$ darf man beispielsweise alle Beträge weglassen. Dann folgt:

$$F(x)=\tfrac{1}{8}x^2-x-\frac{1}{2}\cdot\ln(x-2)+\frac{3}{2}\ln(x+2)+C=\tfrac{1}{8}x^2-x-\ln\sqrt{x-2}+\ln\sqrt{x+2}^3+C$$

$$F(x)=\tfrac{1}{8}x^2-x+\ln\frac{\sqrt{x+2}^3}{\sqrt{x-2}}+C$$

Jetzt könnte man z.B. die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und der Geraden x = 6 berechnen. Dazu kann man C = 0 wählen:

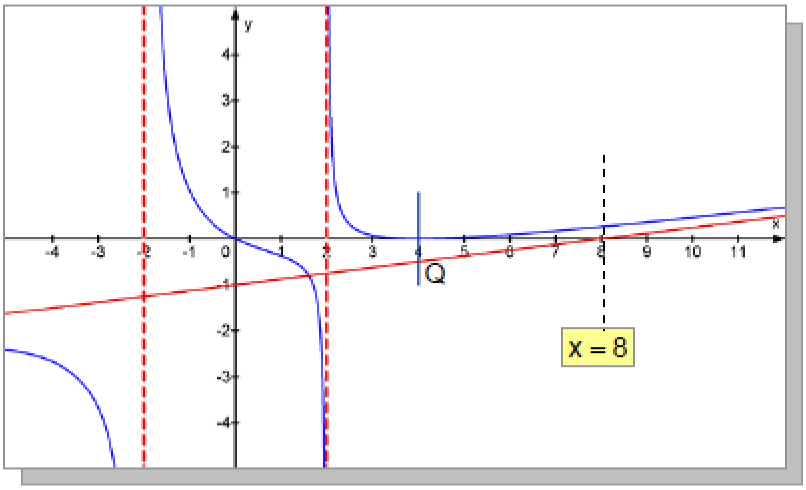
$$A=\int_4^6 F(x)dx=\left[\frac{1}{8}x^2-x+\ln\frac{\sqrt{x+2}^3}{\sqrt{x-2}}\right]_4^6=\dots$$

Beispiel 108:

$$f(x)=\frac{1}{8}\cdot\frac{x\cdot(x-4)^2}{x^2-4}$$

Gesucht ist die Fläche zwischen
dem Schaubild K von f,
der schiefen Asymptote und den
Geraden x = 4 und x = 8.

Lösung:



<u>Methode zur Flächenberechnung:</u>
Man berechnet die Fläche zwischen der Kurve K, der schrägen Asymptote und den Geraden x = 4 und x = 8. Danach subtrahiert man die Dreiecksfläche, die unter der x-Achse liegt.

$$A=\int_4^8\left[f(x)-g(x)\right]dx=\frac{1}{2}\int_4^8\frac{5x-8}{x^2-4}dx$$

Zerlegung des Nenners: $x^2-4=(x+4)(x-4)$

Partialbruchzerlegung: $\frac{5x-8}{(x-2)(x+2)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2} \quad | \cdot(x-2)(x+2)$

$$5x-8=a\cdot(x+2)+b\cdot(x-2)$$

$x=2$ eingesetzt: $5\cdot\boxed{2}-8=a\cdot\left(\boxed{2}+2\right)+b\cdot\left(\boxed{2}-2\right) \Leftrightarrow 4a=2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

$x=-2$ eingesetzt: $5\cdot\boxed{-2}-8=a\cdot\left(\boxed{-2}+2\right)+b\cdot\left(\boxed{-2}-2\right) \Leftrightarrow -4b=-18 \Leftrightarrow b=\frac{9}{2}$

Ergebnis: $\frac{5x-8}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x+2}$

Fortsetzung der Integration (ausführlich):

$$A=\frac{1}{2}\int_4^8\frac{5x-8}{x^2-4}dx=\frac{1}{2}\int_4^8\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x+2}\right)dx=\underbrace{\frac{1}{4}\int_4^8\frac{1}{x-2}dx}_{A_1}+\underbrace{\frac{9}{4}\int_4^8\frac{1}{x+2}dx}_{A_2}$$

1. Teilintegral: $A_1=\frac{1}{4}\int_4^8\frac{1}{x-2}dx$ Substitution: $u=x-2 \Rightarrow du=dx$

$$A_1=\frac{1}{4}\int_4^8\frac{1}{x-2}dx=\frac{1}{4}\int_2^6\frac{1}{u}du=\frac{1}{4}\cdot\left[\ln|u|\right]_2^6=\frac{1}{4}\cdot(\ln6-\ln2)=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{6}{2}=\frac{1}{4}\cdot\ln3$$

2. Teilintegral: $A_2=\frac{9}{4}\int_4^8\frac{1}{x+2}dx$ Substitution: $v=x+2 \Rightarrow dv=dx$

$$A_2=\frac{9}{4}\int_4^8\frac{1}{x+2}dx=\frac{9}{4}\cdot\int_6^{10}\frac{1}{v}dv=\frac{9}{4}\cdot\left[\ln|v|\right]_6^{10}=\frac{9}{4}\cdot(\ln10-\ln6)=\frac{9}{4}\cdot\ln\frac{10}{6}=\frac{9}{4}\cdot\ln\frac{5}{3}$$

Zusammengesetzt

$$A=A_1+A_2=\tfrac{1}{4}\cdot\ln3+\tfrac{9}{4}\cdot\ln\tfrac{5}{3}\approx1{,}424$$

<u>Integration in Schnellform (ohne Substitution):</u>

$$A=\frac{1}{4}\int_4^8\frac{1}{x-2}dx+\frac{9}{4}\int_4^8\frac{1}{x+2}dx$$

$$A=\tfrac{1}{4}\cdot\left[\ln|x-2|\right]_4^8+\tfrac{9}{4}\cdot\left[\ln|x+2|\right]_4^8$$

$$A=\tfrac{1}{4}\cdot(\ln6-\ln2)+\tfrac{9}{4}\cdot(\ln10-\ln6)=\tfrac{1}{4}\cdot\ln3+\tfrac{9}{4}\cdot\ln\tfrac{10}{6}=\tfrac{1}{4}\cdot\ln3+\tfrac{9}{4}\cdot\ln\tfrac{5}{3}\approx1{,}424$$

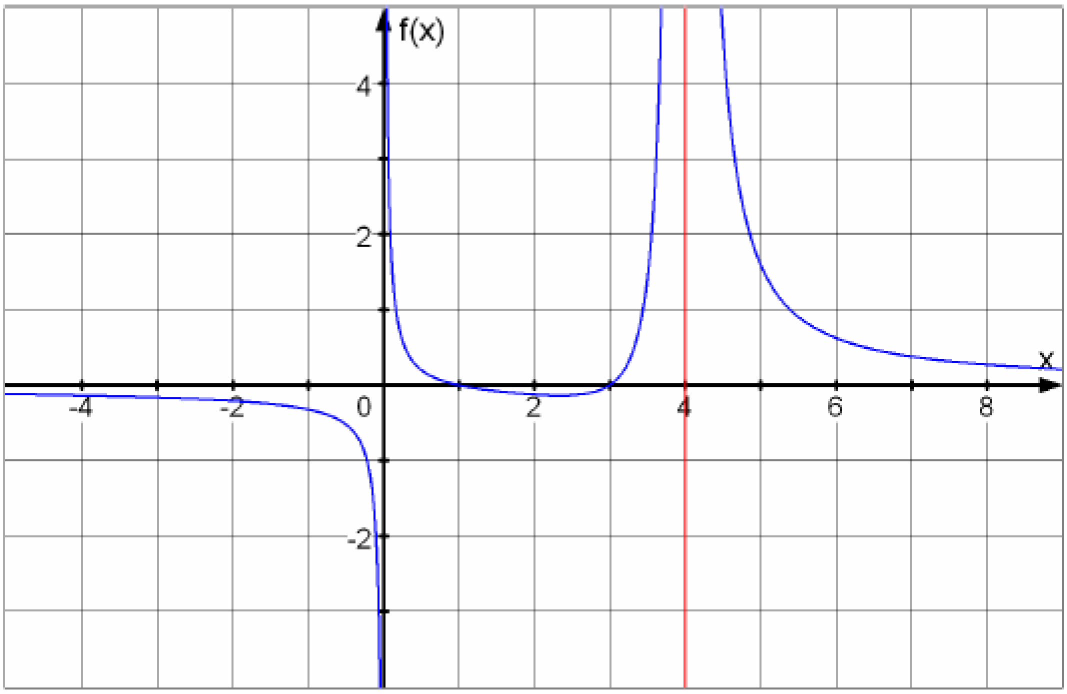
Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen Grad Z < Grad N

Beispiel 109:

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z < Grad N

$$(6) \qquad f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2-8x+16)}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2}$$

Gesucht ist die Fläche, die K und die x-Achse zwischen 1 und 3 begrenzen.



Lösung: $A=-\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^1 \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}dx$

Die jetzt erforderliche Partialbruchzerlegung klappt nur mit diesem Ansatz:

$$\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

Warum ? Sagen wir doch einfach – das Ergebnis rechtfertigt dieses Mittel.
(Da der linke Zähler 3 Summanden hat, benötigen wir rechts 3 Brüche mit den Zählern A, B und C; sonst ist ein Koeffizientenvergleich nicht möglich!)
Man sollte in einem solchen Fall immer einen vergleichbaren Ansatz machen !
Nun bringen wir die rechte Seite auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}=\frac{A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx}{x\cdot(x-4)^2}=\frac{A(x^2-8x+16)+B(x^2-4x)+Cx}{x\cdot(x-4)^2}$$

Daraus folgt $\qquad \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-8A-4B+C)x+16A}{x(x-4)^2}$

Koeffizientenvergleich:

$$A+B=1 \qquad (1)$$
$$-8A-4B+C=-4 \qquad (2)$$
$$16A=3 \Rightarrow A=\tfrac{3}{16}$$
$$\text{A in (1):} \quad B=1-\tfrac{3}{16}=\tfrac{13}{16}$$
$$\text{A, B in (2):} \quad -8\cdot\tfrac{3}{16}-4\cdot\tfrac{13}{16}+C=-4$$
$$-\tfrac{3}{2}-\tfrac{13}{4}+C=-4 \Rightarrow C=-4+\tfrac{19}{4}=\tfrac{3}{4}$$

Ergebnis: $$\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{\frac{3}{16}}{x}+\frac{\frac{13}{16}}{x-4}+\frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}$$

<u>**Berechnung des Flächeninhaltes**</u>:

$$A=-\int_1^3 f(x)dx=\int_3^1\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}dx=\int_3^1\left(\frac{\frac{3}{16}}{x}+\frac{\frac{13}{16}}{x-4}+\frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}\right)dx=$$
$$A=\tfrac{3}{16}\int_3^1\frac{1}{x}dx+\tfrac{13}{16}\int_3^1\frac{1}{x-4}dx+\tfrac{3}{4}\int_3^1\frac{1}{(x-4)^2}dx$$

Substitution: $u=x-4 \Rightarrow du=dx$

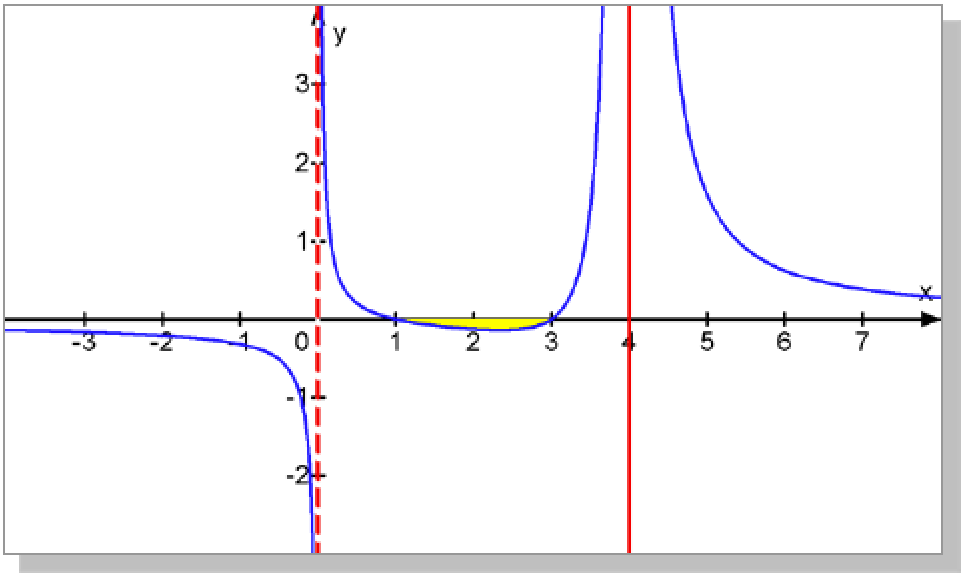
$$A=\tfrac{3}{16}\int_3^1\frac{1}{x}dx+\tfrac{13}{16}\int_{-1}^{-3}\frac{1}{u}du+\tfrac{3}{4}\int_{-1}^{-3}\frac{1}{u^2}du=\tfrac{3}{16}\left[\ln|x|\right]_3^1+\tfrac{13}{16}\left[\ln|u|\right]_{-1}^{-3}+\tfrac{3}{4}\cdot\left[-\tfrac{1}{u}\right]_{-1}^{-3}$$
$$A=\tfrac{3}{16}(0-\ln3)+\tfrac{13}{16}(\ln3-0)+\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{3}-1\right)=-\tfrac{3}{16}\ln3+\tfrac{13}{16}\ln3+\tfrac{3}{4}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)$$
$$A=\tfrac{10}{16}\ln3-\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{8}\cdot\ln3-\tfrac{1}{2}\approx0{,}19$$

Beispiel 110:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2}$$

Die Fläche zwischen Kurve und x-Achse zwischen 1 und 3 ist zu berechnen.

Lösung:



Die Fläche wird berechnet durch: $A = \int_1^3 \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2}\,dx$.

Information:

Bei diesem Typ erfordert die Partialbruchzerlegung diesen Ansatz:

$$\boxed{\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4} + \frac{c}{(x-4)^2}} \quad | \cdot x(x-4)^2$$

$$(x-1)(x-3) = a\cdot(x-4)^2 + b\cdot x(x-4) + c\cdot x$$

$x = 0$ eingesetzt: $\left(\boxed{0}-1\right)\left(\boxed{0}-3\right) = a\cdot\left(\boxed{0}-4\right)^2 + \underbrace{b\cdot\boxed{0}\left(\boxed{0}-4\right) + c\cdot\boxed{0}}_{0} \Leftrightarrow 16a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{16}$

$x = 4$ eingesetzt: $\left(\boxed{4}-1\right)\left(\boxed{4}-3\right) = a\cdot\underbrace{\left(\boxed{4}-4\right)^2}_{0} + b\cdot\underbrace{\boxed{4}\left(\boxed{4}-4\right)}_{0} + c\cdot\boxed{4} \Leftrightarrow 4c = 3 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$

$x = 5$ eingesetzt: $\left(\boxed{5}-1\right)\left(\boxed{5}-3\right) = a\cdot\underbrace{\left(\boxed{5}-4\right)^2}_{1} + b\cdot\underbrace{\boxed{5}\left(\boxed{5}-4\right)}_{5} + c\cdot\boxed{5}$

Daraus folgt: $8 = a + 5b + 5c$

Umgestellt: $5b = 8 - a - 5c = 8 - \frac{3}{16} - \frac{15}{4} = \frac{128}{16} - \frac{3}{16} - \frac{60}{16} = \frac{65}{16} \Leftrightarrow b = \frac{13}{16}$

Ergebnis: $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2} = \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{13}{16}}{x-4} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}$

Berechnung des Flächeninhaltes:

$$A=-\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^1 \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}\,dx=\int_3^1\left(\frac{\frac{3}{16}}{x}+\frac{\frac{13}{16}}{x-4}+\frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}\right)dx=$$

$$A=\tfrac{3}{16}\int_3^1 \frac{1}{x}\,dx+\tfrac{13}{16}\int_3^1 \frac{1}{x-4}\,dx+\tfrac{3}{4}\int_3^1 \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$$

Substitution: $u=x-4 \Rightarrow du=dx$

$$A=\tfrac{3}{16}\int_3^1 \frac{1}{x}\,dx+\tfrac{13}{16}\int_{-1}^{-3} \frac{1}{u}\,du+\tfrac{3}{4}\int_{-1}^{-3} \frac{1}{u^2}\,du=\tfrac{3}{16}\big[\ln|x|\big]_3^1+\tfrac{13}{16}\big[\ln|u|\big]_{-1}^{-3}+\tfrac{3}{4}\cdot\big[-\tfrac{1}{u}\big]_{-1}^{-3}$$

$$A=\tfrac{3}{16}(0-\ln 3)+\tfrac{13}{16}(\ln 3-0)+\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{3}-1\right)=-\tfrac{3}{16}\ln 3+\tfrac{13}{16}\ln 3+\tfrac{3}{4}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)$$

$$A=\tfrac{10}{16}\ln 3-\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{8}\cdot\ln 3-\tfrac{1}{2}\approx 0{,}19$$

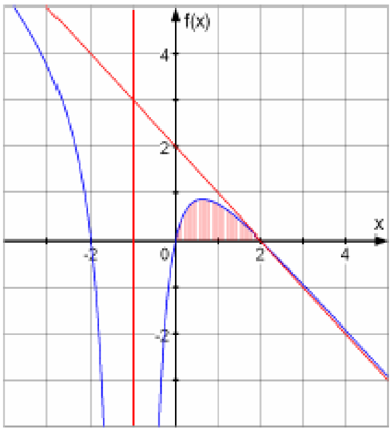
Nenner mit nur einer doppelten Nullstelle Grad Z> Grad N

Beispiel 111:

<u>Nenner mit mur einer doppelten Nullstelle. Grad Z > Grad N</u>

(7) $f(x)=\frac{4x-x^3}{(x+1)^2}$

Hier hat der Nenner **nur eine** doppelte Nullstelle.
Dann ist **keine Partialbruchzerlegung** erforderlich.
Die Substitution $u=x+1 \Rightarrow x=u-1 \Rightarrow dx=du$
löst das Integral:



$$A=\int_0^2 \frac{4x-x^3}{(x+1)^2}dx=\int_1^3 \frac{4(u-1)-(u-1)^3}{u^2}du$$

$$=\int_1^3 \frac{4u-4-(u^3-3u^2+3u-1)}{u^2}du=\int_1^3 \frac{-u^3+3u^2+u-3}{u^2}du$$

$$=\int_1^3\left(-u+3+\frac{1}{u}-\frac{3}{u^2}\right)dx=\left[-\tfrac{1}{2}u^2+3u+\ln|u|+\tfrac{3}{u}\right]_1^3=-\tfrac{9}{2}+\tfrac{1}{2}+9-3+\ln 3+1-3=\ln 3\approx 1{,}1$$

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z = Grad N

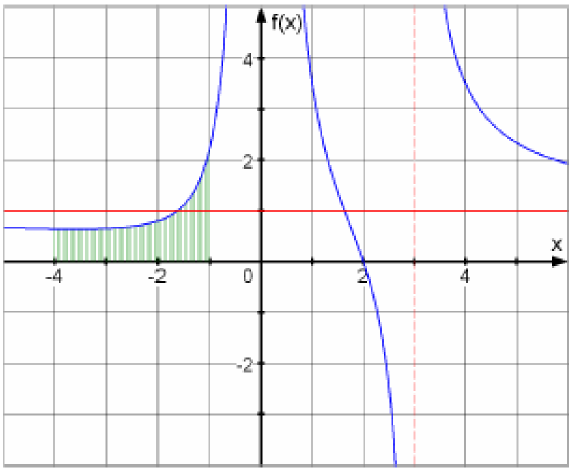
Beispiel 112:

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z = Grad N

(8) $f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-8}{x^2(x-3)}$

Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und den Geraden x=-1 und x = - 4:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx$$



Zuerst müssen wir den Funktionsterm so zerlegen, daß der ganzrationale Anteil herausgezogen wird und ein echter Bruch (mit Grad Z < Grad N) übrig bleibt. Dies geht entweder trickreich so:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2}{x^3-3x^2}+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

oder man erreicht dasselbe Ergebnis via Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^3+0x^2-8):(x^3-3x^2)=1\\ \underline{-(x^3-3x^2)}\\ \quad 3x^2-8\end{array} \qquad \Rightarrow f(x)=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

Nun muß man für den Restbruch die **besondere Partialbruchzerlegung** an, die dann eingesetzt wird, wenn wie hier eine doppelte und eine einfache Polstelle auftauchen.

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B)-3B}{x^2(x-3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dieses Gleichungssystem:

$$A + C = 3 \qquad (1)$$
$$-3A + B = 0 \qquad (2)$$
$$-3B = -8 \;\Rightarrow\; B = \tfrac{8}{3}$$
$$\text{B in (2) ergibt} \quad 3A = B = \tfrac{8}{3} \;\Rightarrow\; A = \tfrac{8}{9}$$
$$\text{A in (1)}: \quad C = 3 - A = 3 - \tfrac{8}{9} = \tfrac{19}{9}$$

Ergebnis: $$\frac{3x^2 - 8}{x^3 - 3x^2} = \frac{\frac{8}{9}}{x} + \frac{\frac{8}{3}}{x^2} + \frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

Somit haben wir jetzt $$f(x) = 1 + \frac{\frac{8}{9}}{x} + \frac{\frac{8}{3}}{x^2} + \frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

Berechnung der Fläche:

$$A = \int_{-4}^{-1} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2}\,dx = \int_{-4}^{-1} \left(1 + \frac{\frac{8}{9}}{x} + \frac{\frac{8}{3}}{x^2} + \frac{\frac{19}{9}}{x-3}\right) dx = \left[x + \tfrac{8}{9}\ln|x| - \tfrac{8}{3x} + \tfrac{19}{9}\ln|x-3|\right]_{-4}^{-1}$$

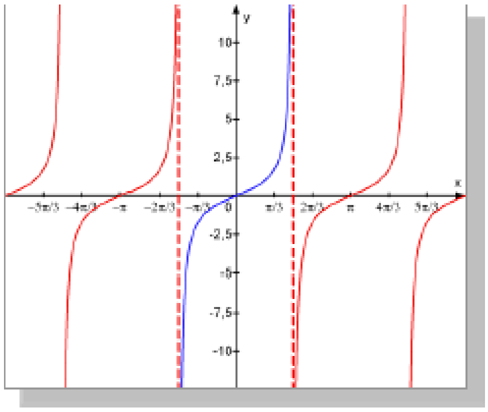
(Der letzte Term wurde mit Substitution u = x -3 und folgender Rücksubstitution integriert).

$$A = -1 + 4 + \tfrac{8}{9}\underbrace{\ln 1}_{=0} - \tfrac{8}{9}\ln 4 + \tfrac{8}{3} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{19}{9}\ln 4 - \tfrac{19}{9}\ln 7 = 5 - \tfrac{8}{9}\ln 4 + \tfrac{19}{9}\ln\tfrac{4}{7} \approx 2{,}59$$

Anwendung der Arcustangensfunktion

Grundlagen

1 Grundlagen kompakt

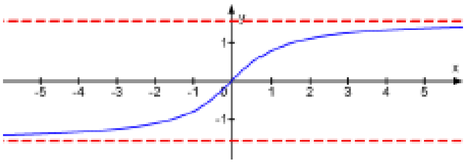


Die Funktion $f(x) = \tan x$ hat im Definitionsbereich

$\mathbf{D} = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ eine Umkehrfunktion.

Man nennt sie $g(x) = \arctan x$ (bzw. $g(x) = \tan^{-1} x$).

Wichtig: Es ist $\arctan 0 = 0$



Ihre Ableitung ist: $g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Und weil das Schaubild punktsymmetrisch zum Ursprung ist, gilt $\boxed{\arctan(-x) = -\arctan(x)}$

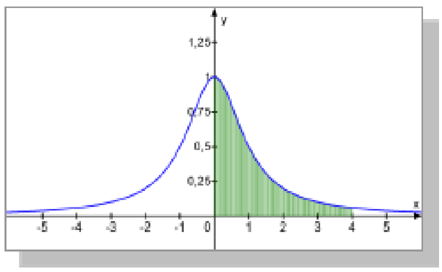
Weiter folgt:

Die Funktion $g(x) = \arctan x$ ist eine Stammfunktion der Funktion $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

bzw.: $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C$ bzw. $\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan x]_a^b$

Beispiel 113:

2.2 Anwendungen zur Flächenberechnung

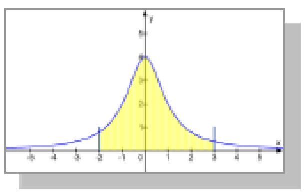


Beispiel 1: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Die schraffierte Fläche berechnet man so:

$$A = \int_0^4 \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan x]_0^4 = \arctan 4 - \arctan 0 = \arctan 4 \approx 1{,}32582$$

Beispiel 2: $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$



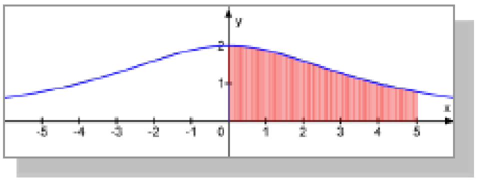
$$A = \int_{-2}^{3} \frac{4}{x^2+1}dx = 4\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^2+1}dx = 4\cdot[\arctan x]_{-2}^{3} = 4\cdot(\arctan 3 - \arctan(-2))$$

$$= 4\cdot(\arctan 3 + \arctan 2) \approx 9{,}42$$

Beispiel 114:

Beispiel 3: $f(x) = \dfrac{32}{x^2+16}$

$$A = \int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx$$



Anleitung:

Damit man hier auf den Zielterm $\dfrac{1}{x^2+1}$ kommt,

muss man folgende Umformungen durchführen:

1. Schritt: Kürzen durch 16 (Ziel ist im Nenner „+1" statt „+16":

$$A = \int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx = \int_0^5 \frac{2}{\frac{1}{16}x^2+1}\,dx =$$

2. Schritt: Substitution: Um den Nenner u^2+1 zu erreichen, muss $u^2 = \frac{x^2}{16}$ sein.

Also setzt man $u = \dfrac{x}{4} \Rightarrow du = \dfrac{1}{4}dx$ und somit ist $dx = 4 \cdot du$:

$$A = \int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx = \int_0^5 \frac{2}{\frac{1}{16}x^2+1}\,dx = \int_0^5 \frac{2}{u^2+1} \cdot 4du = 8 \cdot \int_0^{5/4} \frac{1}{u^2+1}\,du$$

3. Schritt: Jetzt kann man die Arcustangensfunktion als Stammfunktion einsetzen:

$$A = \int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx = \int_0^5 \frac{2}{\frac{1}{16}x^2+1}\,dx = \int_0^5 \frac{2}{u^2+1} \cdot 4du = 8 \cdot \boxed{\int_0^{5/4} \frac{1}{u^2+1}\,du} = 8 \cdot [\arctan u]_0^{5/4}$$

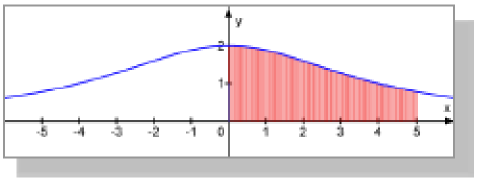
$$A = 8 \cdot \arctan\tfrac{5}{4} \approx 7{,}7$$

Denn arctan 0 = 0.

Beispiel 115:

Beispiel 3: $f(x)=\frac{32}{x^2+16}$

$$A=\int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx$$



Anleitung:

Damit man hier auf den Zielterm $\frac{1}{x^2+1}$ kommt,

muss man folgende Umformungen durchführen:

1\. Schritt: Kürzen durch 16 (Ziel ist im Nenner „+1“ statt „+16“:

$$A=\int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx=\int_0^5 \frac{2}{\frac{1}{16}x^2+1}\,dx=$$

2\. Schritt: Substitution: Um den Nenner u^2+1 zu erreichen, muss $u^2=\frac{x^2}{16}$ sein.

Also setzt man $u=\frac{x}{4} \Rightarrow du=\frac{1}{4}dx$ und somit ist $dx=4\cdot du$:

$$A=\int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx=\int_0^5 \frac{2}{\frac{1}{16}x^2+1}\,dx=\int_0^5 \frac{2}{u^2+1}\cdot 4du=8\cdot\int_0^{5/4} \frac{1}{u^2+1}\,du$$

3\. Schritt: Jetzt kann man die Arcustangensfunktion als Stammfunktion einsetzen:

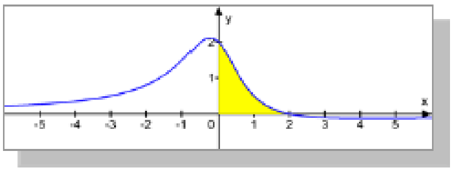
$$A=\int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx=\int_0^5 \frac{2}{\frac{1}{16}x^2+1}\,dx=\int_0^5 \frac{2}{u^2+1}\cdot 4du=8\cdot\boxed{\int_0^{5/4} \frac{1}{u^2+1}\,du}=8\cdot\left[\arctan u\right]_0^{5/4}$$

$$A=8\cdot\arctan\tfrac{5}{4}\approx 7{,}7$$

Denn arctan 0 = 0.

Beispiel 116:

Beispiel 5: $f(x) = \frac{2-x}{x^2+1}$



Vorbemerkung:

Es ist wichtig, dass man dem Funktionsterm seine Merkmale ansehen kann.
Dazu vergleichen wir die letzten beiden Funktionen: B3: $f(x) = \frac{32}{x^2+16}$ und B4: $f(x) = \frac{9x}{x^2+9}$.

B3 erforderte als Stammfunktion die Funktion arctan x, wegen des x im Zähler „reichte" bei B4 die Funktion ln x aus. In B5 liegen beide Fälle vor!

Schauen wir uns an, ob eine Substitution ausreicht: $A = \int_0^2 \frac{2-x}{x^2+1} dx$

Wenn man substituieren will, muss man den Nenner u setzen:
$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x \cdot dx$

Jetzt geht es nur weiter, wenn man (wie in B4) $\boxed{x \cdot dx}$ gemeinsam ersetzen kann.
Das gelingt aber hier nicht, denn $(2-x)dx = 2 \cdot dx - x \cdot dx$ lässt sich nicht auf einmal ersetzen.

Daher wird man folgende Methode wählen:

Man zerlegt den Funktionsterm in 2 Brüche, der eine führt auf arctan x, der andere auf ln x:

$$A = \int_0^2 \frac{2-x}{x^2+1} dx = \int_0^2 \frac{2}{x^2+1} dx - \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$$

Beim 1. Teilintegral ziehen wir den Faktor 2 vor das Integral, das zweite Teilintegral wird mit $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \Rightarrow \boxed{x \cdot dx} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot du}$ substituiert. Man erhält so:

$$A = \int_0^2 \frac{2-x}{x^2+1} dx = \int_0^2 \frac{2}{x^2+1} dx - \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx = 2\int_0^2 \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{1}{u} du$$

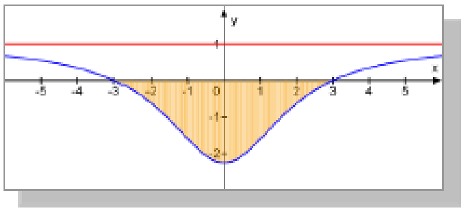
Jetzt verwendet man die Stammfunktionen:

$$A = 2 \cdot [\arctan x]_0^2 - \frac{1}{2} \cdot [\ln|x|]_1^5$$

$$A = 2 \cdot \left(\arctan 2 - \underbrace{\arctan 0}_{0}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\ln 5 - \underbrace{\ln 1}_{0}\right) = 2 \cdot \arctan 2 - \frac{1}{2} \cdot \ln 5 \approx 1{,}41$$

Beispiel 117:

Beispiel 6: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5}$



Methode:

a) Weil Zähler und Nenner denselben Grad haben, muss man zuerst den Funktionsterm in einen ganzen und einen echt gebrochenen Term aufspalten.

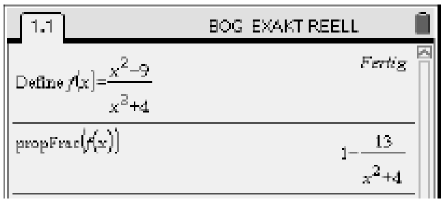
Das geht entweder durch einen Umformungstrick:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 4 - 4 - 9}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 4 - 13}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 4} - \frac{13}{x^2 + 4} = 1 - \frac{13}{x^2 + 4}$$

Oder durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2 - 9) : (x^2 + 4) = 1 \\ \underline{-(x^2 + 4)} \\ \quad -13 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = 1 - \frac{13}{x^2 + 4}$$

Oder mittels CAS-Rechner:



b) Integration:

$$A = -2\int_0^3 \left(1 - \frac{13}{x^2 + 4}\right) dx = -2\int_0^3 dx + 2\int_0^3 \frac{13}{x^2 + 4} dx$$

1. Teilintegral: $-2\int_0^3 dx = -2 \cdot [x]_0^3 = -2 \cdot 3 = -6$

2. Teilintegral: $2\int_0^3 \frac{13}{x^2 + 4} dx$

Kürzen durch 4: $= 2\int_0^3 \frac{13 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}x^2 + 1} dx$

Substitution: Ziel ist der Nenner $\boxed{u^2 + 1}$, also muss $u^2 = \frac{x^2}{4}$ werden.

Dies erreicht man mit: $u = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx} = \boxed{2 \cdot du}$

$$= 2\int_0^3 \frac{13}{x^2 + 4} dx = 2\int_0^3 \frac{13 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}x^2 + 1} dx = 2\int_0^3 \frac{13 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}x^2 + 1} \boxed{2 \cdot du} = 13 \cdot \int_0^{3/2} \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= 13 \cdot [\arctan u]_0^{3/2} = 13 \cdot \arctan \tfrac{3}{2}$$

Zusammengesetzt:

$A = -6 + 13 \cdot \arctan 1{,}5 \approx 6{,}77$

Integralrechnung und ihre ökonomischen Anwendungen

Zu zwei weiteren Fragestellungen, die im Zusammenhang mit ökonomischen Funktionen von einer Veränderlichen gestellt werden, sollen in dieser Folge die Lösungsmethoden vorgestellt werden.

Die erste Fragestellung taucht auf, wenn eine Funktion gegeben ist, die die Bedeutung einer Ableitung hat, deren ursprüngliche Funktion aber nicht bekannt ist. Gesucht ist dann die Funktion, deren Ableitungsfunktion die vorgegebene ist. Zur Beantwortung benötigt man die Umkehrung der Differentiation.

Die zweite Fragestellung ist die des Flächeninhalts unter der Kurve einer Funktion f(x). Dies entspricht der Kumulierung der Werte, welche die Funktion darstellt. Wenn die Funktion z.B. die Verkaufsmengen eines Produktes über die Monate eines Jahres darstellt, dann erhält man die gesamte Verkaufsmenge eines Jahres durch Kumulierung (= Addition) der monatlichen Werte. In der graphischen Darstellung der Funktion wird dies durch die Fläche unter der Kurve dargestellt.

Beide Fragestellungen sind miteinander verwandt und werden durch die gleiche Operation gelöst: die Integration, bzw. die Berechnung des Integrals.

Die Umkehrung der Differentiation: das unbestimmte Integral

Zuerst wird die Fragestellung nach der Umkehrung der Differentiation beantwortet. Es ist also eine Funktion f(x) gegeben, und gesucht wird eine andere Funktion F(x), die folgenden Zusammenhang erfüllt: $F'(x) = f(x)$.

Definition 34:

Man bezeichnet F als Stammfunktion der gegebenen Funktion f, wenn die erste Ableitung von F die Funktion f ergibt. $F'(x) = f(x)$.

Da die Ableitungsfunktionen nach den Differentiationsregeln aus Folge 5 berechnet werden können, liegt es nahe, das Problem durch „Probieren“ zu lösen:

Funktion	Stammfunktion	Ableitung
$f: f(x) = 2 \cdot x$	$F: F(x) = x^2$	$F': F'(x) = 2 \cdot x$
$f: f(x) = 2 \cdot x$	$F: F(x) = x^2 + C$	$F': F'(x) = 2 \cdot x + 0$
$f: f(x) = 0$	$F: F(x) = c$	$F': F'(x) = 0$
$f: f(x) = 0$	$F: F(x) = 0$	$F': F'(x) = 0$
$f: f(x) = x^n$	$F: F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$F': F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n$
$f: f(x) = e^x$	$F: F(x) = e^x$	$F': F'(x) = e^x$

Das führt für einfache Funktionen und bekannte Ableitungen schnell zum Ziel. Es fällt jedoch auf, dass es mehrere Möglichkeiten für die Wahl der Stammfunktion F(x) gibt, aus der man durch Ableiten die vorgegebene Funktion f(x) erhält.

Die Stammfunktionen F(x) zu einer Funktion f(x) unterscheiden sich jeweils um eine additive Konstante: $F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \qquad (F(x)+C)' = F'(x)+C' = F'(x)+0 = f(x)$

Die Umkehrung der Differentiation ist also nicht eindeutig! Jede Funktion hat mehrere, sogar unendlich viele Stammfunktionen.

Definition 35:

Das unbestimmte Integral entspricht allen Stammfunktionen von f. Man schreibt $F(x)+C = \int f(x)\,\mathrm{dx}$

Dabei ist $\int$ das Integralzeichen, f(x) der Integrand, x die Integrationsvariable und die additive Konstante C die Integrationskonstante.

Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung

Entsprechend den zwei unterschiedlichen Problemstellungen, die eine Integration als Lösungsweg erfordern, ist die Anwendung der Integration auf ökonomische Fragen auch zweigeteilt. Die eine Anwendung betrifft die Umkehrung der Differentiation, die andere die Berechnung einer Fläche unter einer Kurve.

Integration zur Umkehrung der Differentiation

Die Integration erlaubt die Umkehrung der Differentiation; also den Schluß vom Grenzverhalten einer ökonomischen Größe auf die Funktion selbst. Dies kann die Grenzkosten- oder die Grenzumsatzfunktion sein.

Beispiel 118:

Die Kostenfunktion $K(x) = 3x^2 - 2x + 180$ mit den Bestandteilen variablen Kosten von $K_v(x) = 3x^2 - 2x$ und Fixkosten in Höhe von $K_f = 180$ sei unbekannt, aber deren Grenzkostenfunktion sei bekannt (z.B. durch Messung): $K'(x) = 6x - 2$.

Der Versuch, aus dieser Grenzkostenfunktion durch Integration wieder zur Gesamtkostenfunktion zu gelangen, führt zu dem Ergebnis:

$$K(x) = \int K'(x)dx = \int (6x-2)dx = 3x^2 - 2x + C = K_v(x) + C \ .$$

Die Integrationskonstante entspricht den Fixkosten $C = K_f$, die Integralrechnung kann diese nicht liefern.

Das Beispiel zeigt, dass aus der Kenntnis der Grenzkostenfunktion allein die Bestimmung der Gesamtkostenfunktion mit Hilfe der Integration nicht möglich ist. Zusätzlich ist es notwendig, die Höhe der Fixkosten zu kennen.

Da in der Umsatzfunktion keine fixen Bestandteile enthalten sind, die bei der Berechnung der ersten Ableitung verloren gingen, kann die Gesamtumsatzfunktion U(x) durch Integration aus der Grenzumsatzfunktion U'(x) ermittelt werden:

$U(x) = \int U'(x)dx$, weil hier immer C = 0.

Integration zur Berechnung einer Fläche

Die Bestimmung eines **Mittelwertes** ist mit einer Summation oder Integration verbunden.

Eine Maschine produziere ein Produkt mit der Eigenschaft x, deren Werte mit einer Häufigkeit N(x) auftreten. Die Gesamtanzahl der produzierten Produkte ist dann gegeben durch $N_{ges} = \int_{-\infty}^{\infty} N(x)dx$. Die Wahrscheinlichkeit p(x) für das Auftreten eines Produktionswertes x ist dann $p(x) = \frac{N(x)}{N_{ges}} = \frac{N(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} N(x)dx}$.

Hier wurde allgemein das Integrationsintervall auf die größten möglichen Werte gesetzt. Nicht alle Werte x werden auch tatsächlich produziert werden, für diese ist N(x) = p(x) = 0. Daher müssen die Integrale nur zwischen dem kleinsten und dem größten auftretenden Wert x integriert werden.

Den Mittelwert der Eigenschaft x erhält man aus dem Integral $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$.

Beispiel 119:

Die Produktionsmengenverteilung sein gegeben durch $N(x) = 99 \cdot \left(1-(x-4)^2\right)$ für $x \in [3;5]$.

Die gesamte Produktionsmenge ist dann:

$$N_{ges} = \int_3^5 99 \cdot \left(1-(x-4)^2\right)dx = 99 \cdot \int_3^5 \left(1-(x^2-8x+16)\right)dx = 99 \cdot \int_3^5 (-x^2+8x-15)dx =$$

$$99 \cdot \left(-\int_3^5 x^2dx + \int_3^5 8xdx - \int_3^5 15dx\right) = 99 \cdot \left[\frac{-1}{3}(5^3-3^3) + \frac{8}{2}(5^2-3^2) - 15 \cdot 2\right] = 99 \cdot \frac{4}{3} = 132$$

Dann sind die Wahrscheinlichkeiten $p(x) = \frac{99 \cdot \left(1-(x-4)^2\right)}{132} = \frac{3}{4} \cdot \left(1-(x-4)^2\right)$.

Der Mittelwert der Produktion ist

$$\bar{x} = \int_3^5 x \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1-(x-4)^2\right)dx = \frac{3}{4} \cdot \int_3^5 x \cdot \left(-x^2+8x-15\right)dx = \frac{3}{4} \cdot \int_3^5 \left(-x^3+8x^2-15x\right)dx =$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left[\frac{-1}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2\right]_3^5 = \frac{3}{4}\left[\frac{-1}{4}(5^4-3^4) + \frac{8}{3}(5^3-3^3) - \frac{15}{2}(5^2-3^2)\right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{3} = 4$$

Auf einem Markt stellt sich durch Gegenüberstellung von Angebots- und Nachfragefunktion ein Gleichgewichtspreis ein, der durch den Schnittpunkt der beiden Funktionen bestimmt ist.

Manche Konsumenten wären aber auch bereit, einen höheren Preis als den Gleichgewichtspreis für das Produkt zu zahlen. Dadurch, daß sie das Produkt zu einem niedrigeren Preis erwerben können, sparen sie einen bestimmten Betrag, der **Konsumenterente** genannt wird.

Ebenso wären auch einige Produzenten bereit, das Produkt zu einem niedrigeren Preis zu veräußern. Sie erzielen durch den Gleichgewichtspreis eine Mehreinnahme, die **Produzentenrente.**

Beispiel 120:

Die Nachfrage nach einem bestimmten Gut ergibt sich aus der Nachfragefunktion:

$p = 200 - \frac{1}{2}x$.

Die Angebotsfunktion lautet: $p = \frac{3}{4}x + 50$.

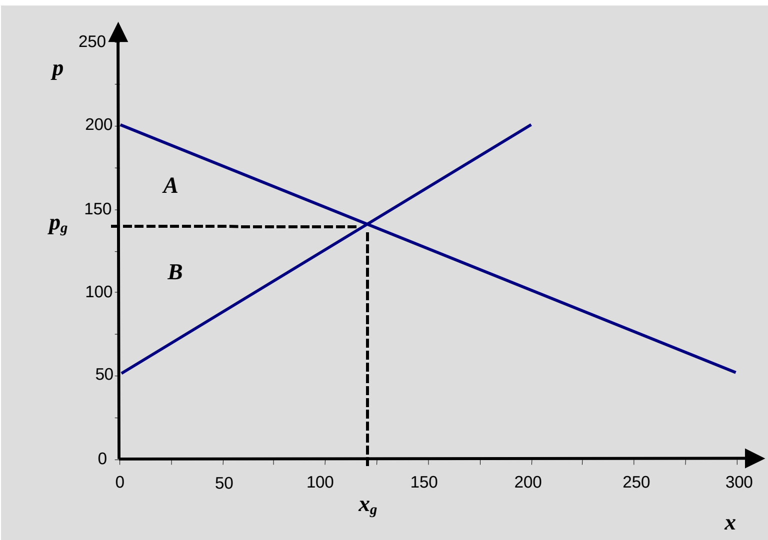
Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt sich der Schnittpunkt, der Gleichgewichtspreis und -menge angibt: $p_g = 200 - \frac{1}{2}x_g = \frac{3}{4}x_g + 50$.

Dies tritt bei einer abgesetzten Menge x_g = 120 und einem Preis von p_g = 140 ein. Dann gleichen sich Angebot und Nachfrage aus.

Einige der Käufer wären aber auch bei einem höheren Preis zum Kauf des Produktes bereit; bis zu einem Maximalpreis von 200 könnte ein zusätzlicher Umsatz erzielt werden.

Die Käufer sparen also einen Betrag, die Konsumentenrente, die der Fläche A in der Abbildung entspricht.

Auf der anderen Marktseite wären auch einige Produzenten bereit, ihre Produkte zu einem niedrigeren Preis zu verkaufen. Bis zu einem Minimalpreis von 50 finden sich angebotene Güter. Die Anbieter erzielen Mehreinnahmen, die Produzentenrente, in Höhe der Fläche B.



Die Bestimmung der Flächen in diesem Beispiel sowohl durch geometrische Berechnungen als auch durch Integration möglich, bei nichtlinearen Funktionen wird die Integralrechnung benötigt.

$$A = \frac{1}{2} \cdot (200 - p_g) \cdot x_g = \frac{1}{2} \cdot (60) \cdot 120 = 3600$$

$$A = \int_0^{x_g} \left(200 - \frac{1}{2} x \right) dx - p_g \cdot x_g = \left[200x - \frac{1}{4} x^2 \right]_0^{120} - 140 \cdot 120 = 3600$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (p_g - 50) \cdot x_g = \frac{1}{2} \cdot (90) \cdot 120 = 5400$$

$$B = p_g \cdot x_g - \int_0^{120} \left(\frac{3}{4} x + 50 \right) dx = 120 \cdot 140 - \left[\frac{3}{8} x^2 + 50x \right]_0^{120} = 5.400$$

Hierbei entspricht $p_g x_g$ dem Rechteck, das durch x_g und p_g begrenzt wird. Dieses gibt den erzielten Umsatz an.

Die Integration als Lösungsweg für beide Fragestellungen vervollständigt das Handwerkszeug der Differential- und Integralrechnung zur Untersuchung von Funktionen in Abhängigkeit von einer unabhängigen Variablen. Diese Methoden werden erweitert auf mehrere unabhängige Variablen.

Anwendungen zur Integralrechnung

Einführung

Durch Rotation des Graphen einer konstanten Funktion $x \to c$ um die x-Achse entsteht ein **Zylinder.**

Durch Rotation des Graphen einer der Funktion $x \to mx$ um die x-Achse entsteht ein **Kegel.**

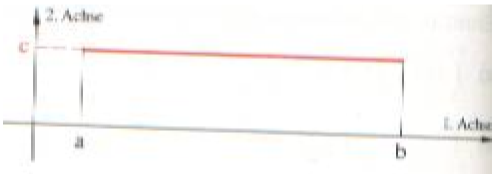
Durch Rotation eines Halbkreises, also des Graphen der Funktion $x \to \sqrt{r^2 - x^2}$ um die x-Achse entsteht eine **Kugel.**

Durch Rotation des Graphen einer Funktion um die x-Achse entstehen also **Rotationskörper.** (Zylinder, Kegel und Kugel) .

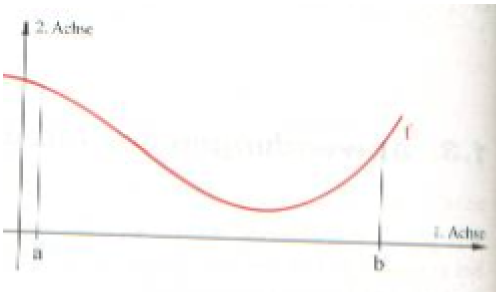
Unser Ziel ist es nun, eine Formel für das Volumen von beliebigen Rotationskörpern zu gewinnen.

Dazu folgende Beispiele mit ihren Lösungen:

a) Der Graph einer konstanten Funktion x→c über dem Intervall [a; b] mit c>0 rotiert um die x-Achse. Bestimme das Volumen für den Rotationskörper (Zylinder).



b) Der Graph einer stetigen Funktion f mit f(x)>0 rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Gesucht ist auch hier das Volumen V dieses Körpers zwischen den Stellen a und b. Gib nun eine endgültige Formel an.



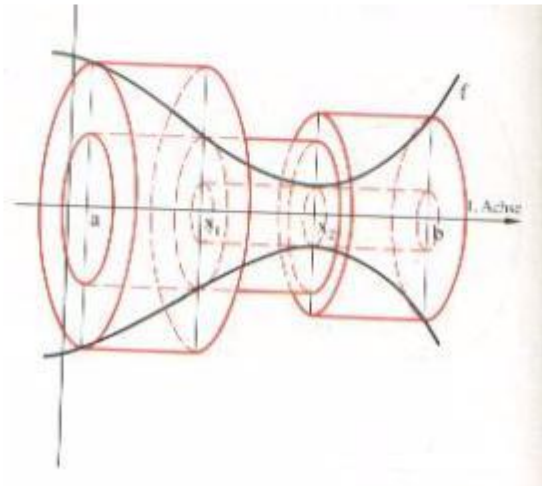
Lösung:

a) Bei der Rotation des Graphen um die x-Achse entsteht ein Zylinder. Seine Höhe ist b-a, sein Radius c. (siehe Zeichnung)

Das Volumen V des Zylinders beträgt demnach $V = \pi c^2 \bullet (b-a)$.

b) Grundgedanke der Lösung

Wir teilen das Intervall [a; b] in n gleich lange Teilintervalle und betrachten die einbeschriebenen und umbeschriebenen Treppenfiguren aus Rechtecken. Diese lassen wir ebenfalls um die x-Achse rotieren. Dadurch entsteht für den Rotationskörper ein einbeschriebener und ein umbeschriebener Treppenkörper aus Zylindern. (Ähnlich wie wir im Teil I auf das Integral gekommen sind.)



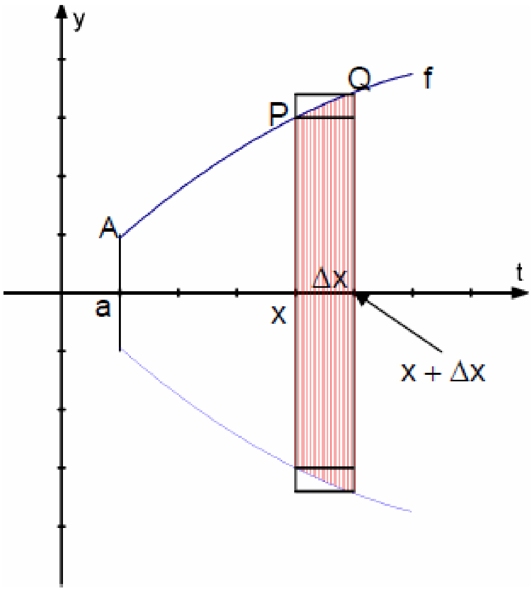
Es sei $\underline{S_n}$ das Volumen des einbeschriebenen Treppenkörpers aus Zylindern und $\overline{S_n}$ das Volumen des umbeschriebenen Treppenkörpers aus Zylindern.

Dann gilt für das gesuchte Volumen V:

$$\underline{S_n} \leq V \leq \overline{S_n}$$

Lassen wir die Anzahl n der Teilintervalle über alle Grenzen wachsen, so nähern sich $\underline{S_n}$ und $\overline{S_n}$ immer mehr dem gesuchten Volumen V an.

Grundlagen



Zunächst sei f die gegebene Randfunktion. Diese begrenzt mit der x-Achse ein krummliniges Trapez. Dieses soll um die x-Achse rotieren.

Dabei entsteht ein Körper, dessen Schnittfläche mit der x-y-Ebene rechts abgebildet ist. Dort allerdings heißt die x-Achse schon wieder t-Achse, denn wir brauchen für ein brauchbares Ergebnis einen variablen rechten Rand, den wir x nennen. Den linken Rand setzen wir bei a an.

Das vom Bogen AP oben begrenzte Kru-Li-Trap rotiere nun um die x-Achse und erzeuge dabei einen Drehkörper vom Inhalt $V_a(x)$.

Jetzt verschieben wir den Punkt P um die Strecke Δx nach rechts bis Q. Damit vergrößert sich auch der Rotationskörper und hat nun das neue Volumen $V_a(x+\Delta x)$.

Durch diese Verschiebung um Δx hat sich das Volumen natürlich auch vergrößert, und zwar um das Stück ΔV. Dieser Volumenzuwachs ist in der Abbildung (im Querschnitt) rot schraffiert.

Für den Volumenzuwachs gilt: $\Delta V = V_a(x+\Delta x) - V_a(x)$.

Diesen Volumenzuwachs schätzen wir nun durch zwei zylindrische Körper ab. Die in der Abbildung von P aus nach rechts gehende horizontale Strecke der Länge Δx begrenzt ein Rechteck der Breite Δx und der Höhe $f(x) = y_P$. Bei der Rotation um die x-Achse entsteht daraus ein Zylinder, der innerhalb unseres Volumens ΔV liegt. Andererseits entdecken wir eine horizontale Strecke derselben Länge Δx, die vom Q aus nach links geht. Dazu gehört ein Rechteck mit der Höhe $y_Q = f(x+\Delta x)$. Und bei Rotation wird daraus ein größerer Zylinder, der seinerseits das Volumen ΔV beinhaltet.

Es gilt also: Inneres Zylindervolumen < ΔV < Äußeres Zylindervolumen

Diese beiden Zylinder haben als Radius des Grundkreises die y-Koordinate von P bzw. Q und Δx ist die Zylinderhöhe:

$$\pi {y_P}^2 \cdot \Delta x < \Delta V < \pi {y_Q}^2 \cdot \Delta x$$

bzw.

$$\pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x < \Delta V < \pi \cdot f(x+\Delta x)^2 \cdot \Delta x$$

Division durch Δx liefert:

$$\pi \cdot f(x)^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi \cdot f(x+\Delta x)^2 \qquad (1)$$

Nun sollte man die lange Einführung in die Flächenberechnung mittels Integral lesen (Datei Nr. 48 112 – Flächenberechnung 2 Seite 23 – 25). Dort wurde der Hauptsatz über die Flächenberechnung mit Integral bewiesen. Jetzt geht es ganz analog um die Volumenberechnung mit Integral. Und die Schritte gleichen sich sehr ! Genau wie damals praktizieren wir jetzt die Methode „Entstehung aus der Null".

Wir machen jetzt unsere Volumenvergrößerung wieder rückgängig:
Q rückt wieder nach P, während $\Delta x \to 0$ geht.
Dann wird natürlich auch $f(x+\Delta x) \to f(x)$ gehen. Wenn man sich daraufhin die Doppelungleichung (1) ansieht, dann passiert dort folgendes:

$$\pi \cdot f(x)^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi \cdot f(x+\Delta x)^2 \quad (1)$$

1. Die linke Seite $\pi \cdot f(x)^2$ ändert sich nicht.
2. Die rechte Seite $\pi \cdot f(x+\Delta x)^2$ wird zu $\pi \cdot f(x)^2$, also wird rechts gleich links.
3. Zwischen beiden Seiten eingeschlossen ist der Bruch $\frac{\Delta V}{\Delta x}$, der zum unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ wird. Da wir seinen wahren Wert bei diesem Verschwindungsprozeß noch nicht kennen, schreiben wir ihn als Grenzwert an: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$. Nun wissen wir ja, was im Zähler wirklich steht: $\Delta V = V_a(x+\Delta x) - V_a(x)$. Damit lautet der Grenzwert: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{V_a(x+\Delta x) - V_a(x)}{\Delta x}$.

Nun ist Wissen gefragt: Dieser Grenzwert stellt die Ableitung der Volumenfunktion $V_a(x)$ dar: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{V_a(x+\Delta x) - V_a(x)}{\Delta x} = V_a'(x)$
Und nun dürfen wir nicht aus den Augen verlieren, was bei der Zurückschiebung von Q nach P mit diesem Bruch bzw. seinem Grenzwert passiert: Da er stets zwischen dem linken Wert und dem rechten Wert eingeschlossen ist, und da diese ferner für $\Delta x \to 0$ gleich werden, muß auch der eingeschlossene Wert genauso groß werden. Wir erhalten demnach als Ergebnis

$$V_a'(x) = \pi \cdot f(x)^2 \quad (2)$$

Und wir müssen nochmals nachdenken: $f(x)$ war der Zylinderradius an der Stelle x, dann ist $\pi \cdot f(x)^2 = q(x)$ die Kreisfläche des Querschnitts an dieser Stelle.
Wir haben also nun endlich das Ergebnis:

$$V_a'(x) = q(x) \quad (3)$$

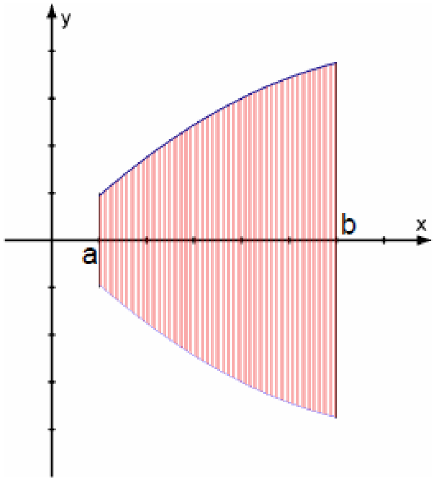
Die Volumenfunktion ist eine Stammfunktion der Querschnittsfunktion

Also können wir aus der Querschnittsfunktion die Volumenfunktion berechnen:

$$V_a(x) = \int q(x)\,dx = Q(x) + C \quad (4)$$

wobei mit C die Integrationskonstante gemeint ist.

Aus drei Zeilen Überlegung finden wir heraus, wie groß C sein muß:
Dazu müssen wir wissen, was wir suchen: Wir suchen das Volumen des Drehkörpers, der bei a beginnt und bei b endet
Dazu müssen wir wissen, was die Volumen-Funktion für x = a und für x = b liefert:



$$V_a(b) = Q(b) + C \quad (5)$$
$$V_a(a) = Q(a) + C$$

Ein Drehkörper, dessen linker und rechter Rand zusammenfällt, hat das Volumen 0, also folgt

$$V_a(a) = Q(a) + C = 0 \Rightarrow C = -Q(a).$$

Damit erhalten wir aus (5):

$$V_a(b) = Q(b) - Q(a).$$

Nun verwenden wir die Schreibweise des bestimmten Integrals:
Wir berechnen zur Querschnittsfläche zuerst die Stammfunktion Q(x) und setzen dann ein:

$$V_a(b) = \int_a^b q(x)dx = [Q(x)]_a^b = Q(b) - Q(a) \quad (6)$$

Wir gehen noch einen Schritt zurück: Die Querschnittsfunktion ist die Kreisfläche an der Stelle x. Diese wird berechnet als $q(x) = \pi r^2 = \pi \cdot f(x)^2$.
Ergebnis:

Das Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse wird berechnet durch folgendes Integral:

$$V_a(b) = \int_a^b q(x)dx = \pi\int_a^b f(x)^2 dx = [Q(x)]_a^b = Q(b) - Q(a)$$

Rotationsvolumen um die x-Achse

Definition 36:

Die Funktion f sei stetig über dem Intervall [a; b]. Ihr Graph rotiere über dem Intervall [a; b] um die x-Achse. Dann gilt für das Volumen V des entstehenden Körpers

$$V = \int_a^b \pi \bullet (f(x))^2 dx$$

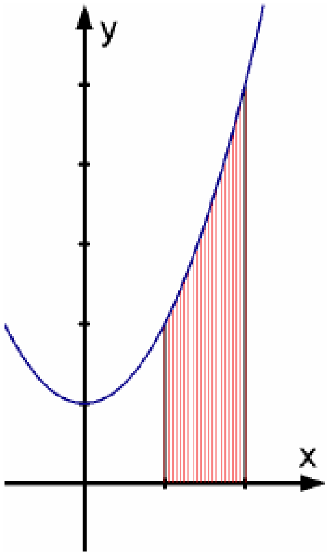
Anwendungsaufgaben zur Rotation um die x-Achse

Beispiel 121:

Randfunktion: $f(x) = x^2 + 1$

Krummliniges Trapez von x = 1 bis x = 2.

Rotation um die x-Achse:



$$V = \pi\int_1^2 \left(x^2+1\right)^2 dx = \pi\int_1^2 \left(x^4+2x^2+1\right)dx =$$

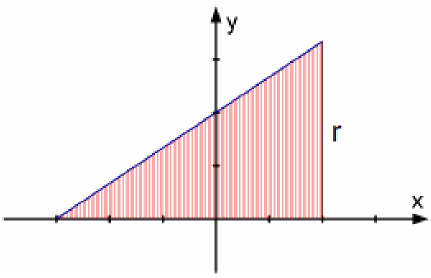
$$V = \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{2}{3}x^3+x\right]_1^2 = \pi\left[\tfrac{32}{5}+\tfrac{16}{3}+2\right]-\pi\left[\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right]$$

$$V = \pi\cdot\left(\tfrac{31}{5}+\tfrac{14}{3}+1\right) = \pi\cdot\tfrac{93+70+15}{15} = \tfrac{178}{15}\pi$$

Beispiel 122:

(2) Gerade $y = \frac{2}{3}x + 2$ für x= - 3 bis x = 2 begrenzt zusammen mit der x-Achse und der Geraden x = 2 ein Dreieck, das bei Drehung um die x-Achse zu einem Kegel wird.

Berechne dessen Volumen.



1. Lösung: $V = \pi\int_{-3}^{2}\left(\tfrac{2}{3}x+2\right)^2 dx = \pi\int_{-3}^{2}\left(\tfrac{4}{9}x^2+\tfrac{8}{3}x+4\right)dx = \pi\left[\tfrac{4}{27}x^3+\tfrac{4}{3}x^2+4x\right]_{-3}^{2}$

$$V = \pi\left[\tfrac{32}{27}+\tfrac{16}{3}+8\right]-\pi\left[-\tfrac{4}{27}\cdot 27+\underbrace{\tfrac{4}{3}\cdot 9-12}_{=0}\right] = \pi\cdot\frac{32+144+324}{27} = \pi\cdot\frac{500}{27} \approx 58{,}2$$

2. Lösung: Die Formel für das Kegelvolumen lautet: $V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$

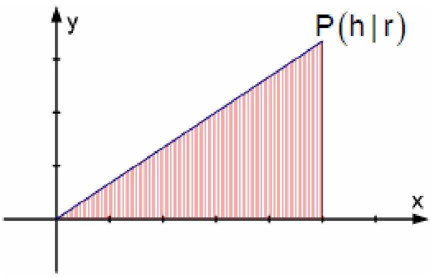
wobei der Radius $r = f(2) = \frac{4}{3}+2 = \frac{10}{3}$ ist und h = 2 – (-3) = 5

Es folgt: $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{100}{9}\cdot 5 = \frac{500}{27}\pi$.

---

(3) Wir wollen diese Volumenformel herleiten:

Wir legen die Kegelspitze in den Ursprung und verwenden den Endpunkt P (h I r) .
Dann erhält die Usprungsgerade die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r}{h}$ und die Gerade die Gleichung $y = \frac{r}{h}x$.



Volumen des Drehkörpers:

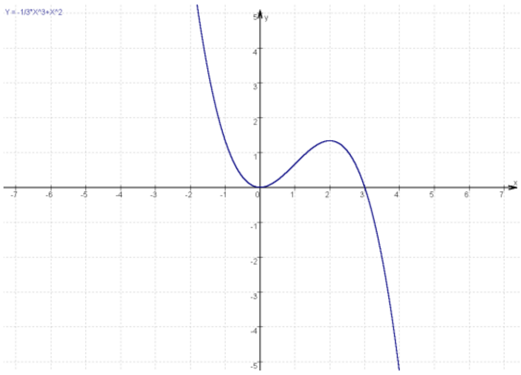
$$V = \pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^2dx = \pi\left[\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi\cdot\frac{1}{3}r^2h$$

Beispiel 123:

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse werde um die x-Achse gedreht. Zeichne die zu drehende Fläche und berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

Lösung:



$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$$

$$0 = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 = x^2(-\frac{1}{3}x + 1)$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

$$V = \pi \bullet \int_0^3 (-\frac{1}{3}x^3 + x^2)^2 dx = \pi \bullet \int_0^3 (\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4)dx$$

$$F(x) = \frac{1}{63}x^7 - \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{5}x^5$$

$$V = \pi \bullet \int_0^3 (\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4)dx = \pi \bullet [\frac{1}{63}x^7 - \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{5}x^5]_0^3$$

$$= \pi \bullet (\frac{1}{63} \bullet 3^7 - \frac{1}{9} \bullet 3^6 + \frac{1}{5} \bullet 3^5) = (34\frac{5}{7} - 81 + 48,6) \bullet \pi = 7,27$$

Durch Rotation der Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{10x + 40}$ und $g(x) = \sqrt{15x - 75}$ über den Intervallen [0; 20] bzw. [5; 20] um die x-Achse entsteht ein schalenförmiger Körper, dessen Volumen zu berechnen ist.

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{10x + 40}$$

$$g(x) = \sqrt{15x - 75}$$

$$V = \pi \bullet (\int_0^{20} (10x + 40)dx - \int_5^{20} (15x - 75)dx) = \pi \bullet ((10 \bullet \frac{20^2}{2} + 40 \bullet 20) - (15 \bullet (\frac{20^2}{2} - \frac{5^2}{2}) - 75 \bullet 15))$$

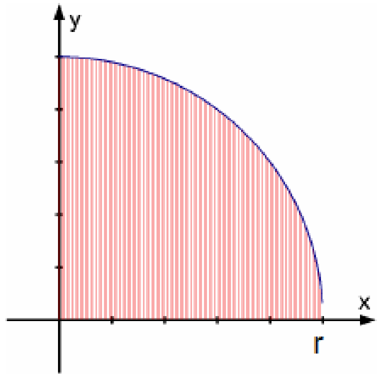
$$= \pi \bullet (2800 - 1687,5) = \pi \bullet 1112,5 = 3495,02$$

Beispiel 124:

(4) Genauso können wir das Volumen einer Kugel berechnen.

Dazu stellen wir einen Halbkreis als Funktion dar.
Aus der Kreisgleichung $x^2+y^2=r^2$ folgt die
obere Halbkreisfunktion: $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

Wir drehen nun einen Viertelskreis um die x-Achse und verdoppeln das Ergebnis:



$$V=2\cdot\pi\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=2\pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx=2\pi\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r$$

$$V=2\pi\left[r^3-\tfrac{1}{3}r^3\right]=2\pi\cdot\tfrac{2}{3}r^3=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Beispiel 125:

(7) $f(x)=\tfrac{x}{3}\sqrt{9-x}$

Das Schaubild und die x-Achse begrenzen eine Fläche, diese dreht man um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

$$V=\pi\int_0^9\left(\tfrac{1}{3}x\cdot\sqrt{9-x}\right)^2dx=\tfrac{1}{9}\pi\int_0^9 x^2(9-x)\,dx=\tfrac{1}{9}\pi\int_0^9\left(9x^2-x^3\right)dx=\tfrac{1}{9}\pi\left[3x^3-\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^9$$

$$=\tfrac{1}{9}\pi\left[3\cdot9^3-\tfrac{1}{4}\cdot9^4\right]=\tfrac{1}{9}\pi\cdot9^3\cdot\left(3-\tfrac{9}{4}\right)=81\pi\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{243}{4}\pi\approx191\ \text{(VE)}.$$

Beispiel 126:

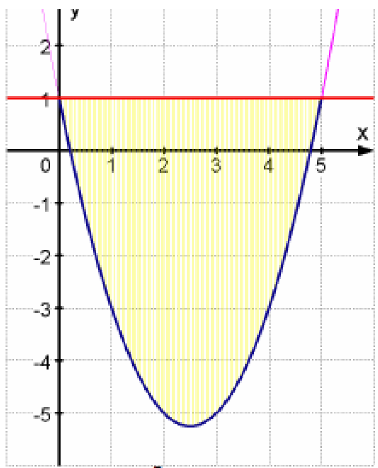
(8) $f(x)=x^2-5x+1$

Die Parabel und die Gerade $y = 1$ begrenzen ein Parabelsegment. Dreht man dieses um die Gerade g: $y = 1$, entsteht ein Drehkörper. Berechne dessen Volumen.

Da wir nur um die x-Achse drehen können, verschieben wir dieses Segment um 1 nach unten. Damit erhält die Parabel diese Gleichung:

$$g(x)=x^2-5x.$$

Nun drehen wir um die x-Achse:



$$V=\pi\int_0^5\left(x^2-5x\right)^2dx=\pi\int_0^5\left(x^4-10x^3+25x^2\right)dx=\pi\left[\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{5}{2}x^4+\tfrac{25}{3}x^3\right]_0^5$$

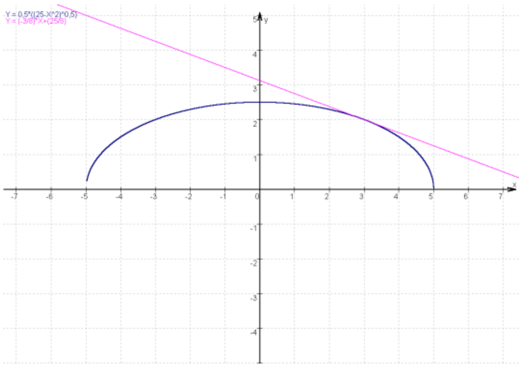
$$V=\pi\left(5^4-\tfrac{1}{2}\cdot5^4+\tfrac{25}{3}\cdot5^3\right)=\pi\cdot5^4\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{3}\right)=625\pi\cdot\tfrac{6-3+10}{6}=625\cdot\pi\cdot\tfrac{13}{6}=\tfrac{8125}{6}\pi\approx4254$$

Beispiel 127:

Bestimme die Gleichung der Tangente mit dem Berührpunkt P(3; f(3)) an den Graphen von $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$.

Durch Rotation des Graphen von f und der Tangente um die x-Achse entsteht ein stromlinienförmiger Körper. Berechne sein Volumen.

Lösung:



$$P(3;2);\ f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x}{2\sqrt{25-x^2}};\ f'(3)=m=\frac{-3}{2\bullet 4}=-\frac{3}{8}$$

$$m=-\frac{3}{8};P(3;2)$$

$$y=mx+b$$

$$2=-\frac{9}{8}+b$$

$$b=3\frac{1}{8}=\frac{25}{8}$$

$$t(x)=-\frac{3}{8}+\frac{25}{8}$$

$b)$

Nullstellenberechnung:

$$0=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$$

$$0=25-x^2$$

$$x=+-5$$

$$0=-\frac{3}{8}+\frac{25}{8}$$

$$x=\frac{25}{3}$$

$$V=\pi\bullet\int_{-5}^{3}\frac{1}{4}(25-x^2)dx+\pi\bullet\int_{3}^{\frac{25}{3}}(-\frac{3}{8}+\frac{25}{8})^2dx$$

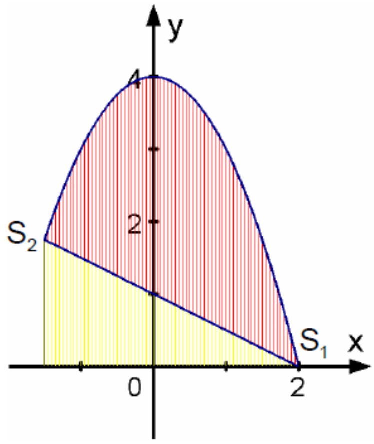
$$V=\pi\bullet 37,3+\pi\bullet 7,3=139,63$$

Beispiel 128:

(5) Eine Fläche wird von einem Parabelbogen der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ und einer Geraden der Funktion $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ begrenzt.

Bei Drehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper, der einen Hohlraum hat. Berechne sein Volumen.

Nun kann man nicht wie bei Flächen die Formel "obere Kurve minus untere Kurve" nehmen, man muß vielmehr die zwei Drehkörpervolumen berechnen und dann subtrahieren:



1. Schritt: Schnittpunkte berechnen:

$$-x^2 + 4 = -\tfrac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x^2 - \tfrac{1}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Schritt: Drehung des Parabelbogens:

$$V_1 = \pi \int_{-\frac{3}{2}}^{2} (4 - x^2)^2\, dx = \pi \int_{-\frac{3}{2}}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx = \pi \left[16x - \tfrac{8}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5\right]_{-\frac{3}{2}}^{2}$$

$$V_1 = \pi\left[32 - \tfrac{64}{3} + \tfrac{32}{5}\right] - \pi\left[-24 + 9 - \tfrac{243}{5 \cdot 32}\right]$$

3. Schritt: Drehung der Strecke S_1S_2 um die x-Achse (ergibt einen Kegel).
Jetzt kann man mit Intergal arbeiten oder mit der Kegelformel:

$$V_2 = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\tfrac{7}{4}\right)^2 \cdot \tfrac{7}{2} = \pi \cdot \tfrac{343}{96}$$

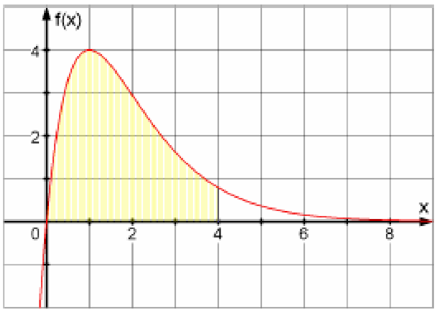
4. Schritt: Subtraktion:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\left(32 - \tfrac{64}{3} + \tfrac{32}{5} + 15 - \tfrac{243}{160} - \tfrac{343}{96}\right) = \tfrac{2401}{80}$$

Beispiel 129:

(9) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Die Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 4 rotiere um die x-Achse.



$$V = \pi \int_0^4 \left(x \cdot e^{1-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x^2 \cdot e^{2-2x} dx$$

1. Partielle Integration:
$u' = e^{2-2x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{2-2x}$
$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}x^2 e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi \int_0^4 x \cdot e^{2-2x} dx$$

2. Partielle Integration:
$u' = e^{2-2x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{2-2x}$
$w = x \Rightarrow w' = 1$

$$\int_0^4 x \cdot e^{2-2x} dx = \left[-\tfrac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \tfrac{1}{2}\int e^{2-2x} dx = \left[-\tfrac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \tfrac{1}{2} \cdot \left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2x}\right]_0^4$$

Zusammengesetzt:

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}x^2 e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi\left[-\tfrac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \tfrac{1}{2}\pi \cdot \left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2x}\right]_0^4$$

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2x}\left(x^2 + x + \tfrac{1}{2}\right)\right]_0^4$$

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{-6}\left(16 + 4 + \tfrac{1}{2}\right)\right] - \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)\right] = \left(\tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{41}{4}e^{-6}\right) \cdot \pi$$

Zusatzaufgabe:

Man verschiebt den rechten Rand der Fläche gegen Unendlich. Besitzt dann der Rotationskörper ein endliches Volumen ? Man ersetzt dazu x = 4 durch x = r :

$$V(r) = \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2x}\left(x^2 + x + \tfrac{1}{2}\right)\right]_0^r$$

$$V(r) = \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2r}\left(r^2 + r + \tfrac{1}{2}\right)\right] - \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] = \left(\tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{1}{2}\left(r^2 + r + \tfrac{1}{2}\right) \cdot e^{2-2r}\right) \cdot \pi$$

Wir müssen nun mit der Regel von de L'Hospital diesen Grenzwert berechnen:

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^2 + r + \tfrac{1}{2}\right) \cdot e^{2-2r} = \lim_{r\to\infty}\frac{r^2 + r + \frac{1}{2}}{e^{2r-2}} = \lim_{r\to\infty}\frac{2r+1}{2 \cdot e^{2r-2}} = \lim_{r\to\infty}\frac{2}{4e^{2r-2}} = 0$$

Also gilt: $V^* = \lim\limits_{r\to\infty} V(r) = \frac{1}{4}\pi e^2$

Beispiel 130:

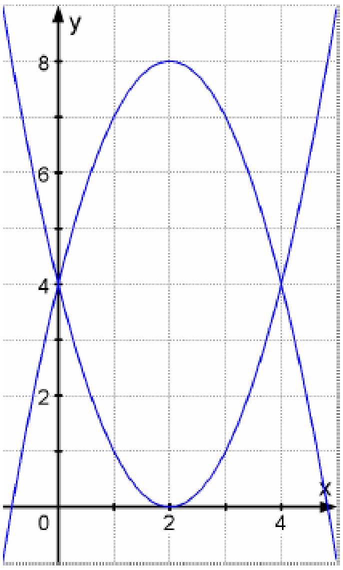
(6) Die Schaubilder der Funktionen

$f(x) = -x^2 + 4x + 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$ (rechts)

begrenzen eine Fläche, die sich um die x-Achse dreht. Berechne das Volumen des Rotationskörpers. Die Schnittstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

Das Volumen:

$$V = \pi\int_0^4 f(x)^2\,dx - \pi\int_0^4 g(x)^2\,dx = \pi\int_0^4 \left[\left(-x^2+4x+4\right)^2 - \left(x^2-4x+4\right)^2\right]dx$$



Achtung: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

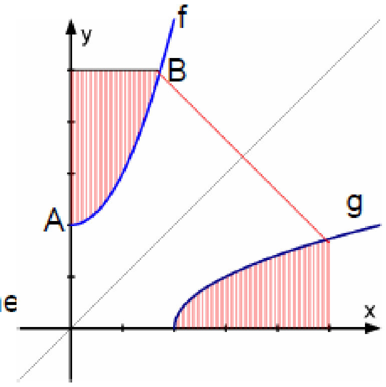
$$V = \pi\int_0^4 \left[\left(x^4+16x^2+16-8x^3-8x^2+32x\right)-\left(x^4+16x^2+16-8x^3+8x^2-32x\right)\right]dx$$

$$V = \pi\int_0^4 \left(-16x^2+64x\right)dx = \pi\left[-\tfrac{16}{3}x^3+32x^2\right]_0^4 = \pi\left(-\tfrac{16}{3}\cdot 64+32\cdot 16\right)$$

$$V = \pi\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\cdot 2^4\cdot 2^6+2^5\cdot 2^4\right) = 2^9\cdot\pi\cdot\left(-\tfrac{2}{3}+1\right) = \tfrac{512}{3}\pi \approx 536(\text{VE})$$

Rotationsvolumen um die y-Achse

Herleitung der Formel:



Wir gehen aus von der Parabelfunktion f mit $f(x) = x^2 + 2$. Die Parabel begrenzt zusammen mit der y-Achse und der Geraden y = 5 eine Fläche. Diese soll um die y-Achse gedreht werden.

Nun arbeiten wir mit einem Trick. Wir spiegeln die Fläche an der 1. Winkelhalbierenden mit der Gleichung y = x. Dann entsteht aus f die Umkehrfunktion g:

f: $y = x^2 + 2$ Vertauschen von x und y: $x = y^2 + 2$ bzw. $y^2 = x - 2$.

Darin stecken nun zwei Funktionen: Die Funktion $g(x) = \sqrt{x-2}$ stellt die obere Halbparabel dar, die andere $h(x) = -\sqrt{x-2}$ die untere Halbparabel.

Ja, und jetzt drehen wir einfach die gespiegelte Fläche um die x-Achse:

$$V_x = \pi\int_2^5 \left(\sqrt{x-2}\right)^2 dx = \pi\int_2^5 (x-2)\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^5 = \pi\left[\tfrac{25}{2} - 10\right] - \pi\left[2-4\right] = \tfrac{9}{2}\pi$$

Umständlich ? Natürlich ! Bei dieser Spiegelung wird doch x mit y vertauscht. Dies taten wir an der Kurvengleichung. Und jetzt der geniale Einfall eines nicht bekannten Mathematikers: Es ist doch eigentlich egal, wo wir x und y vertauschen. Warum tun wir es dann nicht in der Volumenformel ?

Dann wird aus $V_x = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \Rightarrow V_y = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$.

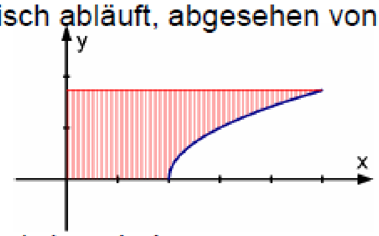
Aber bitte konsequent sein: Wir müssen die Kurvengleichung nach x^2 auflösen, dann ist y die Funktionsvariable, und die Grenzen sind jetzt die y-Koordinaten der Randpunkte:

Testen wir es an unserer gegebenen Fläche: Hier war $y = x^2 + 2$, also $x^2 = y - 2$.
Und die Randpunkte sind A (0 I 2) und B $\left(\sqrt{3} \,|\, 5\right)$

$$V_y = \pi\int_{y=2}^{y=5} (y-2)\,dy = \pi\left[\tfrac{1}{2}y^2 - 2y\right]_2^5 = \dots = \tfrac{9}{2}\pi$$

Man sieht durch Vergleichen, daß diese Rechnung identisch abläuft, abgesehen von der Variablen y statt x.

Beispiel 2.



Wir verwenden den Parabelbogen der Funktion $g(x) = \sqrt{x-2}$ von 2 bis 5 und lassen nun das krummlinige Trapez, das zur y-Achse hin reicht, um die y-Achse drehen. Dann entsteht ein Rotationskörper mit diesem Volumen:

Zuerst müssen wir $y = \sqrt{x-2}$ nach x auflösen: $y^2 = x - 2 \Rightarrow x = y^2 + 2$. Dann:

$$V_y = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(y^2+2\right)^2 dy = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(y^4 + 4y^2 + 4\right)dy = \pi\left[\tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{4}{3}y^3 + 4y\right]_0^{\sqrt{3}} = .. = \tfrac{49}{5}\sqrt{3}\pi$$

Die Grenze $\sqrt{3}$ ist die y-Koordinate des rechten Endpunktes !

Definition 37:

Das Volumen bei **Drehung um die x-Achse** erhält man durch

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx$$

Das Volumen bei **Drehung um die y-Achse** erhält man durch

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$$

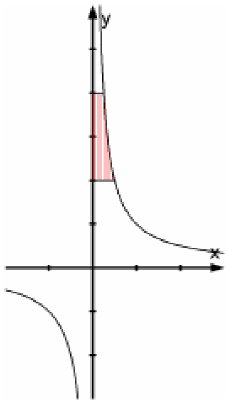
Dazu muß man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x^2 auflösen.
Die Integrationsgrenzen sind die y-Koordinaten der Randpunkte

Anwendungsaufgaben zur Rotation um die y-Achse

Beispiel 131:

Weitere Beispiele:

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$ Der Kurvenbogen von $A\left(\frac{1}{4} \mid 4\right)$ bis $B\left(\frac{1}{2} \mid 2\right)$ begrenzt zusammen mit der y-Achse und den Geraden x = 2 und x = 4 ein Kru-Li-Trap.
Welches Volumen hat der Rotationskörper, der durch Drehung um die y-Achse entsteht ?

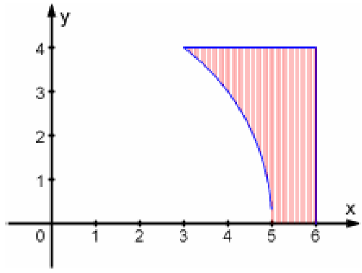


$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$ ALSO

$$V_y = \pi \int_2^4 x^2 dy = \pi \int_2^4 \frac{1}{y^2} dy = \pi \cdot \left[-\frac{1}{y} \right]_2^4 = \pi \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}\pi$$

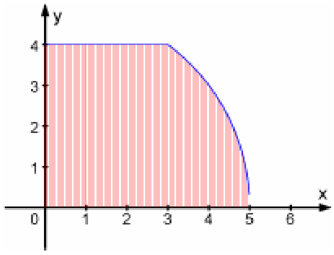
Beispiel 132:

(4) Nebenstehende Fläche wird begrenzt von einem Kreisbogen um den Ursprung mit Radius 5 und den Geraden x = 6, y = 0 und y = 4. Diese Fläche erzeugt bei Rotation um die y-Achse einen Körper in Form eines Ringes. Berechne sein Volumen.



Hierzu erzeugen wir zunächst einen Zylinder mit dem Radius 6 und der Höhe 4.
Sein Volumen ist $V_{zyl} = \pi r^2 h = \pi \cdot 36 \cdot 4 = 144\pi.$

Dann lassen wir die Innenfläche rotieren und erzeugen eine Scheibe aus einer Kugel:
Die Kreisgleichung ist $x^2 + y^2 = 25$,
daraus folgt $x^2 = 25 - y^2$ und

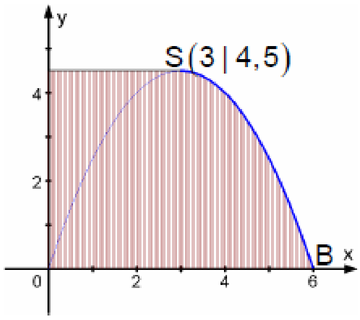


$$V_K = \pi\int_0^4 \left(25 - y^2\right)dy = \pi\left[25y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^4 = \pi\left[100 - \tfrac{64}{3}\right] = \tfrac{236}{3}\pi$$

Durch Subtraktion folgt: $V = V_{zyl} - V_K = 144\pi - \frac{236}{3}\pi = \frac{196}{3}\pi$.

Beispiel 133:

(5) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$



Der Parabelbogen SB erzeugt zur y-Achse hin ein krummliniges Trapez. Dieses soll um die y-Achse rotieren. Wir suchen das Volumen.

Die Formel $V_y = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$ nützt uns jetzt gar nichts.

Es gelingt nämlich nicht so ohne weiteres, die Kurvengleichung nach x aufzulösen.
Daher man sich daran erinnern, daß es ja die Möglichkeit gibt, bei einer Substitution auf eine andere Variable umzurechnen. Und dort haben wir die Formel dy = y' dx.
Setzen wir die ein, dann folgt:

$$V_y = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi\int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot y'\, dx$$

Jetzt aber kommt ein Problem mit den Grenzen.

Endet das Integral mit dy, dann sind die y-Koordinaten in Richtung der y-Achse einzusetzen, also unten die kleinere Zahl, das ist $y_B = 0$, und oben die größere, das ist $y_S = 4,5$.
Bei der gezeigten Umrechnung auf x als Integrationsvariable darf man nicht einfach unten die kleinere x-Koordinate hinschreiben!
Wir müssen die zugehörigen x-Koordinaten verwenden :

$$V_y = \pi \int_{y_B=0}^{y_S=4,5} x^2 dy = \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2 \cdot y'\, dx$$

So, und nun wird eingesetzt: Da jetzt x die Integrationsvariable ist, bleibt x^2 als Faktor stehen, aber $y' = f'(x) = -x+3$ muß ersetzt werden:

$$V_y = \pi \int_{y_B=0}^{y_S=4,5} x^2 dy = \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2 \cdot y'\, dx = \pi \int_6^3 x^2 \cdot (-x+3)\, dx = \pi \int_6^3 \left(-x^3 + 3x^2\right) dx =$$

$$= \pi\left[-\tfrac{1}{4}x^4 + x^3\right]_6^3 = \pi\left[-\tfrac{81}{4} + 27 + 324 - 216\right] = \tfrac{459}{4}\pi \approx 360,5 \quad \text{(VE)}.$$

Merke:

Definition 38:

Läßt sich die Randkurvengleichung nicht nach x^2 auflösen, verwendet man für das **Volumen bei Drehung um die y-Achse**:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot y'\, dx$$

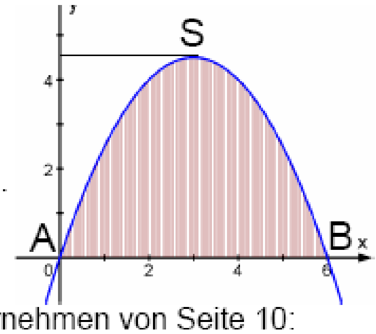
Grenzen des 1. Integrals: die kleinere y-Koordinate steht unten.
Grenzen des 2. Integrals: die zugehörigen x-Koordinaten verwenden

Erzeugung eines Ringes.

Wir verwenden dieselbe Funktion wie zuvor:

$$y = f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x$$

Jetzt aber wollen wir das eingefärbte Parabelsegment
Um die y-Achse drehen und somit eine Art Ring erzeugen.



Wir führen eine Formel-Rechnung durch.

1. Schritt: Wir erzeugen den Drehkörper aus (5) und übernehmen von Seite 10:

$$V_1 = \pi \int_{y_B=0}^{y_S=4{,}5} x^2 dy = \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx$$

2. Schritt. Nun drehen wir das krummlinige Dreieck, das vom Bogen AS, der y-Achse und der Geraden $y = 4{,}5$ begrenzt wird, um die y-Achse. Die Formel dafür lautet:

$$V_2 = \pi \int_{y_A=0}^{y_S=4{,}5} x^2 dy = \pi \int_{x_A=0}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx$$

3. Schritt: Subtraktion beider Volumina ergibt das gesuchte Volumen:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx - \pi \int_{x_B=0}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx$$

Um weiterhin nur mit Formeln arbeiten zu können, wird die zu diesen gleichartigen Integralen gehörende Stammfunktion mit $F(x)$ bezeichnet, dann geht die Rechnung so weiter:

$$V = V_1 - V_2 = \left[F(x)\right]_6^3 - \left[F(x)\right]_0^3 = \cancel{F(3)} - F(6) - \cancel{F(3)} + F(0) = F(0) - F(6)$$

Es bleiben also nur die Grenzen 0 und 6 maßgeblich, also die x-Koordinaten der Randpunkte A und B. Schreiben wir dieses Ergebnis in eine Integralformel zurück, dann erhalten wir schließlich:

$$\boxed{V = \pi \int_{x_B=6}^{x_A=0} x^2 \cdot y' \, dx} \qquad (*)$$

Wichtig ist dabei, daß man sich merkt, daß die unten stehende x-Koordinate die äußere ist, und die oben stehende die innere !!!

Merke:

$V = \pi \int_{x_A=0}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx$ berechnet das Volumen des Hohlraumes.

$V = \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx$ berechnet das Volumen der Platte (siehe (5))

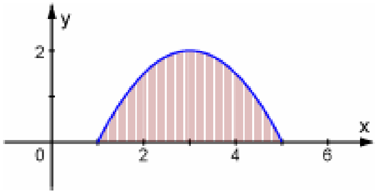
$V = \pi \int_{x_B=6}^{x_A=0} x^2 \cdot y' \, dx$ berechnet das Volumen des Ringes.

Beispiel 134:

(7) Noch ein Ring, jetzt gleich mit der Formel:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$

Berechne den Inhalt des Ringes, der bei Drehung Dieser Fläche um die y-Achse entsteht:

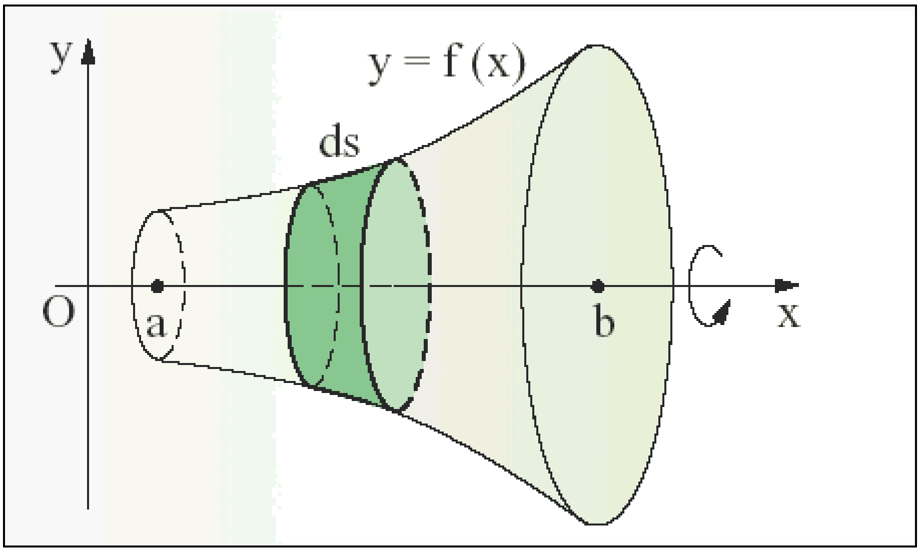


$$V = \pi\int_5^1 x^2 \cdot y'\,dx = \pi\int_5^1 x^2 \cdot (-x+3)\,dx = \pi\int_5^1 \left(-x^3 + 3x^2\right)dx = \pi\left[-\tfrac{1}{4}x^4 + x^3\right]_5^1$$

$$= \pi\left[-\tfrac{1}{4}+1\right] - \pi\left[-\tfrac{1}{4}\cdot 625 + 125\right] = \pi\left(\tfrac{624}{4} - 124\right) = 32\pi\,.$$

Berechnung der Mantelfläche von Rotationskörpern

Wir betrachten eine Kurve als Graph einer Funktion f mit der Gleichung y=f(x) im Intervall [a ; b].



Die Kurve (der Graph zu f) rotiere nun um die x-Achse. Dabei überstreift die Kurve die Mantelfläche des entstehenden Drehkörpers.

Die Kurve im Intervall [a ; b] wird nun in einzelne Kurvenstücke der Länge ds zerlegt (siehe Abbildung oben).

Eines dieser Kurvenstücke überstreicht dann einen kleinen Teil des Mantels. Es entsteht so ein schmales, reifenförmiges Band.

Schneidet man das Band auf, so entsteht näherungsweise ein Rechteck mit den Seitenlängen ds und 2·p·y.

Daher gilt für den Flächeninhalt dA des schmalen Bands: dA » 2py·ds

Hieraus ergibt sich (analog wie bei der Berechnung der Bogenlänge; vgl. oben) durch Integration als Mantelfläche des Rotationskörpers im Intervall [a ; b]:

$$A_{Mantel} = 2\pi\int_a^b y\,ds$$

Nun gilt für die Bogenlänge im Intervall [a ; b]:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Daraus ergibt sich:

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Eingesetzt in A_{Mantel} ergibt sich damit die Berechnungsformel für die Mantelfläche eines Drehkörpers:

$$A_{Mantel} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Eine Funktion f(x) rotiere um die x-Achse. Nun sei die Mantelfläche dieser Funktion im Bereich von $x_1 = a$ bis $x_2 = b$ gesucht, also im Intervall (a,b).

Definition 39:

Folgende Formel gilt bei Rotation um die x-Achse:

$$A_{Mantel} = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

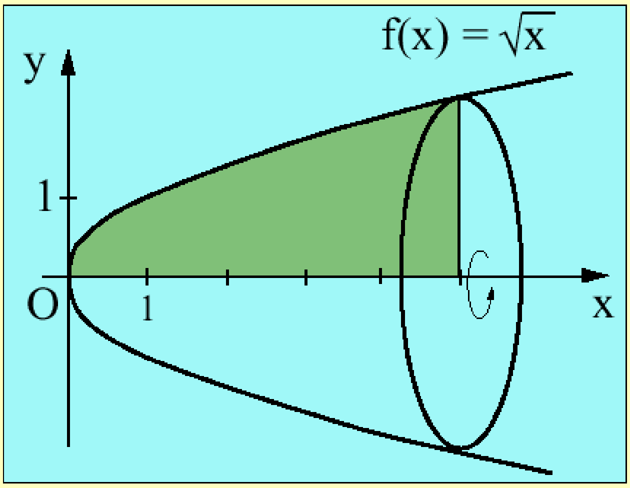
Für die Rotation um die y-Achse gilt demnach:

$$A_{Mantel} = 2\pi \cdot \int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}dy$$ mit x=f(y), d.h. nach x aufgelöst und x'=dx/dy.

Beispiel 135:

Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationsparaboloids, der durch Drehung des Graphen der Wurzelfunktion ($f(x) = \sqrt{x}$) um die x-Achse im Intervall [0 ; 5] entsteht.

Lösung:



(Bildquelle: TCP 2001, CD zu: Mathematik Gymnasiale Oberstufe. PAETEC-Verlag)

Es gilt:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow [f'(x)]^2 = \frac{1}{4x}$$

Durch Einsetzen in die Formel für den Mantelflächeninhalt ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} A_{Mantel} &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^5 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx \end{aligned}$$

Da nun folgende Beziehung gilt:

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}} = \left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt sich in der Berechnungsformel für den Mantelflächeninhalt A_{Mantel} für den Rotationskörper:

$$\begin{aligned} A_{Mantel} &= 2\pi \int_0^5 \left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5 \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(5+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(0+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{21}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right) \approx 49{,}85\,FE \end{aligned}$$

Also ist die Mantelfläche des Rotationsparaboloids etwa 49,85 Flächeneinheiten groß.

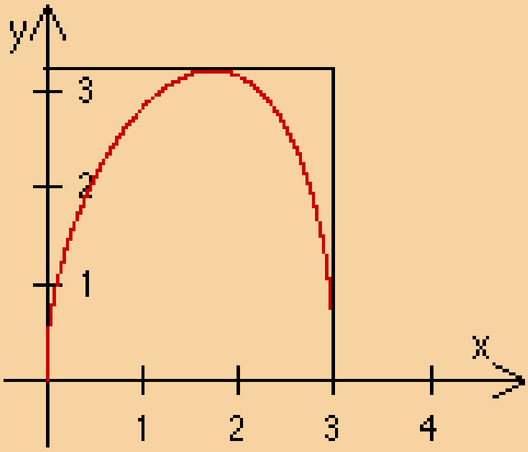
Beispiel 136:

Der Graf der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x(9 - x^2)}$ begrenzt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück, welches um die x-Achse gedreht wird. Dem so entstandenen Rotationskörper wird der kleinste gerade Kreiszylinder umbeschrieben. Berechnen Sie das Verhältnis der beiden Volumina.

Lösung:

$V_{Rot} : V_{Zyl}$ istgleich $\frac{81\pi}{4} : 18\pi\sqrt{3} = \mathbf{9 : 8\sqrt{3}}$.

Lösungsweg:



Die Nullstellen von f sind bei x=0 oder x=3.
Für die Extremalstelle muss der Radikand $x(9-x^2)=9x - x^3$ extremal sein, d.h. $9 - 3x^2=0$.
Damit ist $x=\sqrt{3}$ und $y= \sqrt{6\sqrt{3}}$.
Der Zylinder hat somit Höhe 3, Radius $\sqrt{6\sqrt{3}}$ und Volumen $3\pi 6\sqrt{3} = 18\pi\sqrt{3}$.

Für den Rotationskörper ist das Volumen

$$\pi \int_0^3 (9x - x^3)\,dx = \pi \left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^3 = \frac{81\pi}{4}$$

Das Verhältnis der beiden Volumina ist

$$\frac{81\pi}{4} : \frac{72\pi\sqrt{3}}{4} = \mathbf{9{:}8\sqrt{3}}.$$

Beispiel 137:

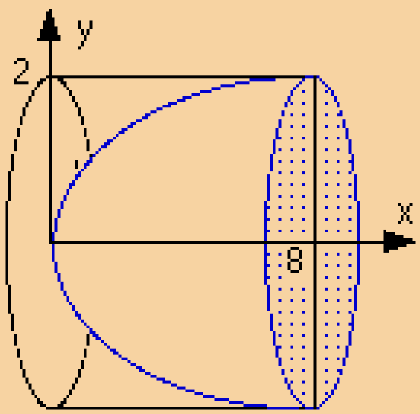
Ein zylindrischer Becher mit Radius 2 cm enthält Wasser. Bei Rotation um seine Achse steigt das Wasser am Rand 8 cm hoch und senkt sich im Innern bis auf den Boden ab. Ein Querschnitt durch die Achse ergibt eine quadratische Funktion f als Flüssigkeitsbegrenzung. Wie hoch steht das Wasser im Becher, wenn dieser in Ruhe ist?

Lösung:

Das Wasservolumen ist 16π. Dies ergibt einen Zylinder mit Radius 2 und **Höhe 4**.

Lösungsweg:

Die Flüssigkeitsbegrenzung f mit $f(x) = ax^2$ erfüllt $f(2) = 8$, also ist $a = 2$. Spiegeln wir f mit $f(x)=2x^2$ an der Geraden $y=x$ entsteht die Umkehrfunktion g mit der Gleichung $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.



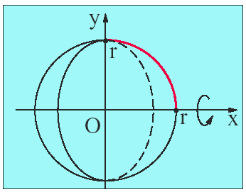
Nun ist das Wasservolumen die Differenz zwischen dem Zylindervolumen und dem (gespiegelten) Rotationskörpervolumenvon g.

Also $V_{Zyl}-V_{Rot} = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 - \pi \int_0^8 \frac{x}{2}\,dx = 32\pi - 16\pi = 16\pi$.

Dieses Wasservolumen ergibt einen vollen Zylinder mit Radius 2 und **Höhe 4.**

Beispiel 138:

Oberflächeninhalt einer Kugel



Wir betrachten zunächst eine Halbkugel. Diese wird durch Rotation des Viertelkreises um die x-Achse erzeugt.

Die Funktionsgleichung für den Viertelkreis lautet:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (0 \le x \le r)$$

Durch Auflösen nach y folgt:

$$f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich als erste Ableitung mit $x \neq r$:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Ferner gilt:

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Daher ergibt sich in der Berechnungsformel für den Mantelflächeninhalt A_{Mantel} für die Halbkugel:

$$\begin{aligned} A_{Mantel} &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^r r\, dx = 2\pi \cdot [r \cdot x]_0^r = 2\pi \cdot r^2 - 2\pi \cdot 0 \\ &= 2\pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

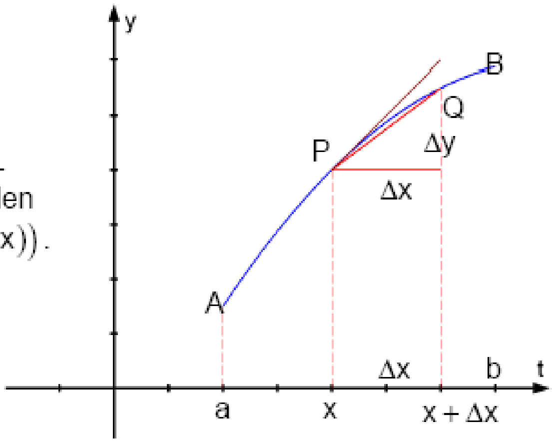
Diesen Wert muss man nun verdoppeln und man erhält den Inhalt der Oberfläche einer Kugel mit Radius r:

$$2 \cdot A_{Mantel} = 2 \cdot 2\pi \cdot r^2 = 4\pi r^2$$

Diverse Berechnungen mit dem Integral

Bogenlänge einer Kurve

In diesem 1. Abschnitt wird gezeigt, wie man die Bogenlänge berechnen kann, und die Methode wird auch noch hergeleitet, und zwar auf eine Art, wie man sie in Schulbüchern kaum findet, aber ganz analog zu den Herleitungen über die Berechnung von Flächeninhalten und Rotationskörpern.
Wer Übungen und Beispiele sucht, lese In Abschnitt 2 nach.



<u>Vorarbeit für die Herleitung.</u>

1. Gegebene Funktion: $y = f(t)$

Wie man erkennt, nennen wir die Funktions-variable t, damit wir x als 1. Koordinate für den Arbeitspunkt P verwenden können: $P(x \mid f(x))$.

2. Diese Funktion sei im Intervall [a ; b] differenzierbar, d.h. an jeder Stelle kann man einen Ableitungswert f'(x) berechnen, der dann die Tangentensteigung angibt.

3. Wir legen fest: $L_a(x)$ sei die Länge des Bogens von der Stelle a bis zur Stelle x, also vom Punkt A bis P: $\overset{\frown}{AP} = L_a(x)$. Dann ist $\overset{\frown}{AQ} = L_a(a + \Delta x)$.

<u>Und jetzt die Herleitung:</u>

4. Unsere Ergebnisse gewinnen wir am Bogen von P nach Q. Für diesen gilt:

$$\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{AQ} - \overset{\frown}{AP} = L_a(x + \Delta x) - L_a(x) \qquad (1)$$

5. Da wir für die Länge des Bogens noch kein Maß haben, vergleichen wir sie mit der Länge der Sehne von P nach Q. Die Sehne ist bei einem „echt gekrümmten" Bogen immer kürzer als der Bogen. Da wir als „Kurve im mathematischen Sinne" aber auch Geraden zulassen müssen, müssen wir statt kürzer besser höchstes sagen:

$$\overline{PQ} \le \overset{\frown}{PQ} \qquad (2)$$

Dies Länge der Sehne errechnen wir nach Pythagoras so:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,.$$

6. Wir formen trickreich, aber zielorientiert um, indem wir Δx^2 ausklammern:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \qquad (3)$$

7. Wir ersetzen nun (1) und (3) in der Ungleichung (2):

$$\Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le L_a(x + \Delta x) - L_a(x)$$

und dividieren durch Δx, das wir bis jetzt als $\neq 0$ voraussetzen mußten, sonst wären ja P und Q derselbe Punkt gewesen:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{L_a(x+\Delta x)-L_a(x)}{\Delta x} \quad (4)$$

8. Ohne Tricks kommt man auch in der Mathematik nicht sehr weit. Jetzt kommt der Clou des ganzen Beweises, den man aber schon seit der Einführung der Ableitung kennt: Wir lassen Q nach P rücken, indem wir $\Delta x \to 0$ gehen lassen,
Dabei passiert mehreres:

Zunächst geht dann auch Δy gegen Null, aber aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird nicht $\frac{0}{0}$, sondern dieser Grenzwert: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und dies ist die Tangentensteigung an der Stelle x.

Also: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Auf der rechten Seite der Ungleichung (4) passiert dasselbe:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{L_a(x+\Delta x)-L_a(x)}{\Delta x} = L'(x).$$

Und nun das Wichtigste überhaupt: Bei diesem Grenzprozeß schrumpfen Bogen und Sehne zu einem Punkt zusammen, d.h. sie werden gleich groß. Daher wird in der Ungleichung (4) aus $\le$ nur noch $=$.

Fassen wir zusammen: Für $\Delta x \to 0$ wird aus (4) diese Gleichung:

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = L_a'(x)$$

Ergebnis: Die Bogenlängen-Funktion ist Stammfunktion der Funktion

$$B(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$$

9. Nun bezeichnen wir die Stammfunktion von B(x) einfach einmal mit S(x), da wir sie noch nicht kennen. Dann folgt für die Bogenlängenfunktion:

$$L_a(x) = S(x) + C$$

Für den B ogen von A bis B gilt dann: $L_a(b) = S(b) + C$

und $L_a(a) = S(a) + C = 0$,

denn der Bogen von a bis a hat die Länge 0. Daraus folgt nun C = - S(a)

Also erhalten wir: $L_a(b) = S(b) - S(a)$

Dies ist nun genau die Form des bestimmten Integrals, daher schreiben wir:

Die Bogenlängen von $A(a\,|\,f(a))$ bis $B(b\,|\,f(b))$ wird so berechnet:

$$L_a(b) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Beispiel 139:

Es gibt nur wenige einigermaßen gut lösbare Aufgabe zur Berechnung der Bogenlänge, denn das Integral wird meistens zu schwer.

(1) $f(x) = x\sqrt{x}$. $A(1|1)$, $B(2|8)$. $\overset{\frown}{AB} = ?$

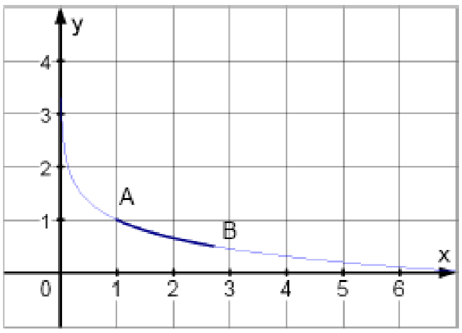
(2) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$. Gesucht ist die Bogenlänge von 1 bis e.

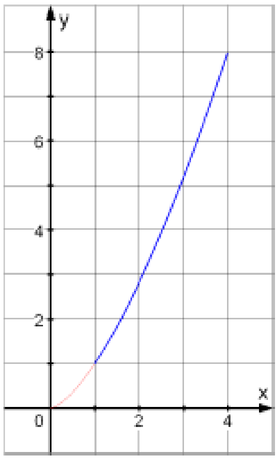
(3) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ Gesucht ist die Bogenlänge von – a bis + a

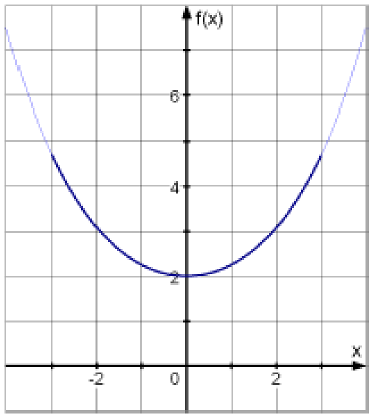
(4) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ Bogen von 1 bis a.

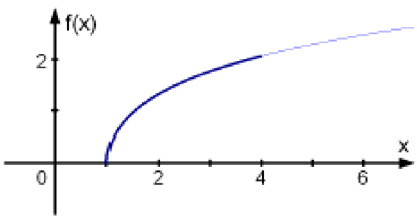
(5) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ Bogen von 1 bis 3.

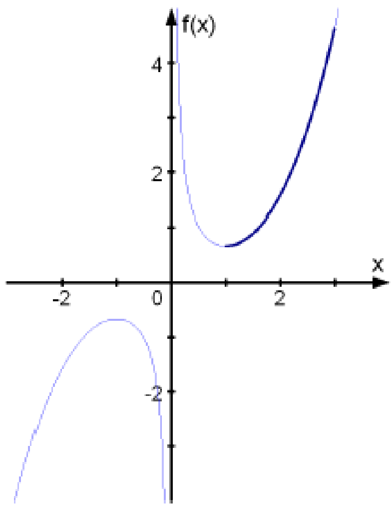
(6) $f(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ Bogen zwischen den Koordinatenachsen.

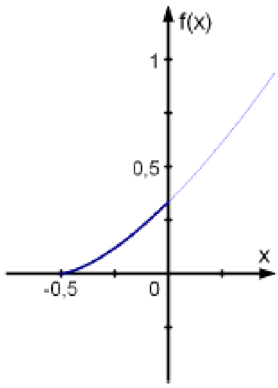




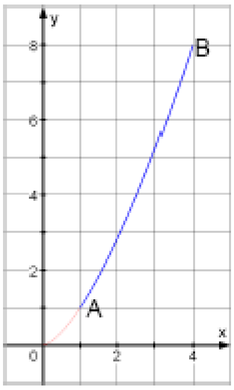








Lösungen



(1) $f(x) = x\sqrt{x}$. $A(1|1)$, $B(2|8)$.

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$$\widehat{AB} = \int_1^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Substitution: $u \approx 1+\frac{9}{4}x \Rightarrow du = \frac{9}{4}dx \Rightarrow dx = \frac{4}{9}du$

$x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{13}{4}$; $x_2 = 4 \Rightarrow u_2 = 10$

$$\widehat{AB} = \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} u^{\frac{1}{2}}du = \tfrac{4}{9}\left[\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{13/4}^{19} = \tfrac{8}{27}\left[u\sqrt{u}\right]_{13/4}^{10}$$

$$\widehat{AB} = \tfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - \tfrac{13}{4}\sqrt{\tfrac{13}{4}}\right) \approx 7{,}63$$

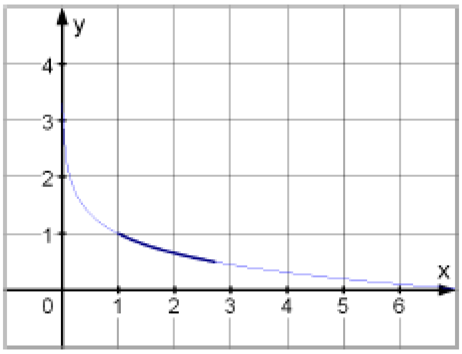
Vergleichen wir diesen Bogen noch mit der Länge der Sehne AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} \approx 7{,}615$$

---

(2) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$.

Gesucht ist die Bogenlänge von 1 bis e.



$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$

$$L_1(2) = \int_1^e \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{1+\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{2x}\right)^2}dx$$

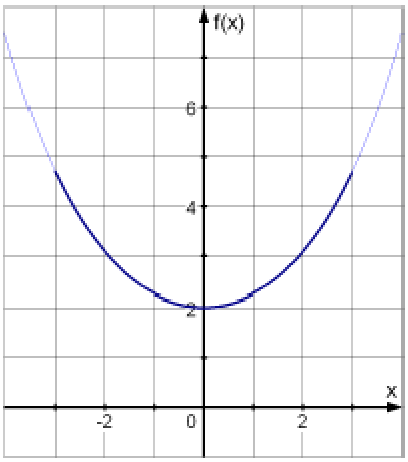
$$= \int_1^e \sqrt{1+\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4x^2}}\,dx = \int_1^e \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{\frac{x^2+2x^2+1}{4x^2}}\,dx = \int_1^e \sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^e = 1 + \frac{1}{2}\cdot\ln e - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

(3) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$

Bogenlänge von – a bis + a



Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

Bogenlänge:

$$\widehat{AB} = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\int_0^a \sqrt{1+\left(\tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\,dx$$

$$\widehat{AB} = 2\int_0^a \sqrt{1+\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\,dx$$

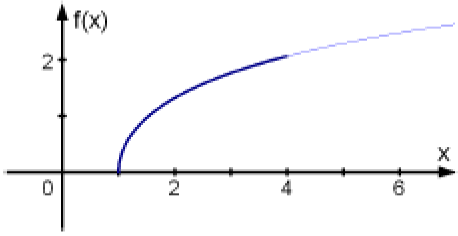
$$\widehat{AB} = 2\int_0^a \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[4+\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)\right]}\,dx$$

$$\widehat{AB} = \int_0^a \sqrt{\left(e^x + 2 + e^{-x}\right)}\,dx$$

$$\widehat{AB} = \int_0^a \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^a \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx = \left[2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^a = 2\left(e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}\right)$$

(4) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Bogen von 1 bis a.



Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Bogenlänge:

$$\widehat{AB} = \int_1^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_1^a \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}}\,dx = \int_1^a \sqrt{\frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1}}\,dx = \int_1^a \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}\,dx = \int_1^a \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$$

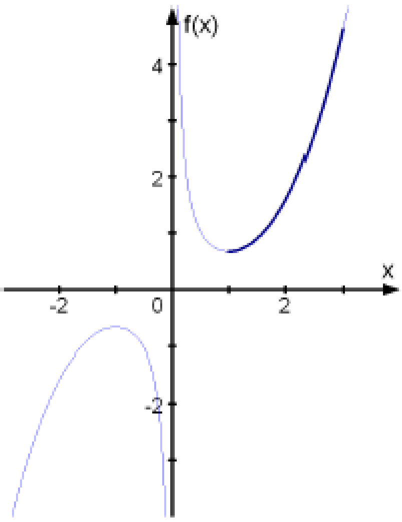
Substitution: $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \Rightarrow u \cdot dx = \frac{1}{2}du$

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2-1} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2-1} u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right]_0^{a^2-1} = \left[\sqrt{u}\right]_0^{a^2-1} = \sqrt{a^2 - 1}$$

In der Abbildung ist a = 4, das ergibt dann $\widehat{AB} = \sqrt{15}$

(5) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$

Bogen von 1 bis 3.



Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - x^{-2}\right)$

Bogenlänge:

$$\widehat{AB} = \int_1^3 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - x^{-2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(x^4 - 2 + x^{-4}\right)}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{2}\sqrt{\left(x^4 + 2 + x^{-4}\right)}\,dx$$

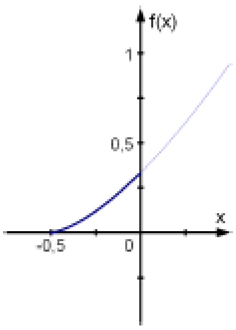
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{\left(x^2 + x^{-2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(x^2 + x^{-2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - x^{-1}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[9 - \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(10 - \frac{2}{3}\right) = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

(6) $f(x) = \frac{2}{3}(2x + 1)^{\frac{3}{2}}$

Bogen zwischen den Koordinatenachsen.



Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (2x + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = \sqrt{2x + 1}$

Bogenlänge:

$$\widehat{AB} = \int_{-0,5}^{0} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_{-0,5}^{0} \sqrt{1 + (2x + 1)}\,dx = \int_{-0,5}^{0} \sqrt{2x + 2}\,dx$$

Substitution: $u = 2x + 2 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right] = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

Mehrfachintegrale

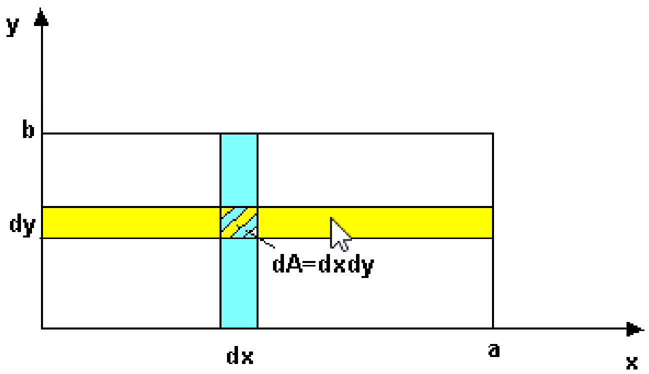
In der Vorlesung wurde das Integral (einer Variablen) als Fläche zwischen einer Kurve f(x) und der x-Achse interpretiert. Das Integral wurde dabei als Grenzwert von Summen betrachtet.

Dies wollen wir nun in den R^2 und R^3 übertragen.

Zweifachintegrale

Beispiel 140:

Flächeninhalt eines Rechteckes



Dies lässt sich in folgender Weise schreiben.

$$\iint_A dA = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} dy\,dx$$

Die Integration bei einem Doppelintegral werden in der Reihenfolge der Differentiale ausgeführt.

Inneres Integral:

$$\int_0^b dy = y\Big|_0^b = b$$

Äußeres Integral:

$$\int_0^a b\cdot dx = b\cdot x\Big|_0^a = b\cdot a$$

Beispiel 141:

Die Funktion

$f(x, y) = x^2 \cdot \cos y$

ist für $x \in [0, 5]$ und $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ zu integrieren.

Lösung:

$$\int_0^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos y \;\mathrm{d}y \;\mathrm{d}x \;=\; \int_0^5 x^2 \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \;\mathrm{d}y \Big) \;\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^5 x^2 \left(\sin y \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \mathrm{d}x = \int_0^5 2x^2 \;\mathrm{d}x = \frac{250}{3}.$$

Beispiel 142:

$$I = \int_{y=0}^{1} \int_{x=-2}^{1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

Innere Integration nach x: $\quad I = \int_{y=0}^{1} \int_{x=-2}^{1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = 3 \int_0^1 (1 + y^2)\,dy \;=\; 4$

Innere Integration nach y: $\quad I = \int_{y=0}^{1} \int_{x=-2}^{1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = 4$

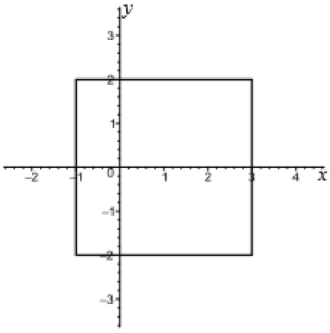
Beispiel 143:

Integrieren Sie $f(x,y) = xy^2$

a) über dem Rechteck mit den Eckpunkten $(-1,-2)$, $(3,-2)$, $(3,2)$ und $(-1,2)$,
b) über der von der Parabel $y = x^2$, der Gerade $x = 2$ und der x-Achse begrenzten Fläche sowie
c) über der von der Parabel $x = y^2$, der Gerade $y = 2$ und der y-Achse begrenzten Fläche!

Lösung:

a)

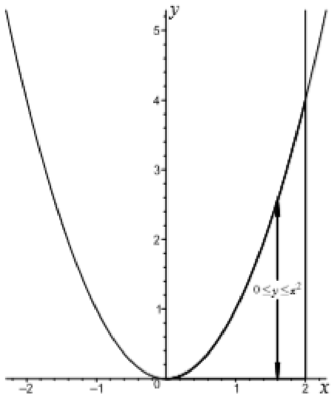


$$B = \{(x,y) : -1 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 2\},$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{3} xy^2 \, dx\, dy = \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_{-1}^{3} dy = \int_{-2}^{2} \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)y^2\, dy$$

$$= 4\int_{-2}^{2} y^2\, dy = \frac{4}{3}y^3\Big|_{-2}^{3} = \frac{4}{3}16 = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

b)

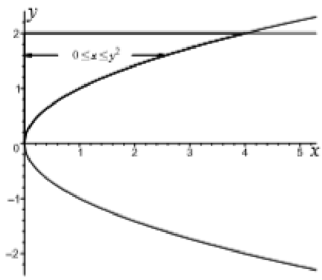


$$B = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\},$$

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{x^2} xy^2 \, dy\, dx = \int_{0}^{2} \left[x\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{x^2} dx = \int_{0}^{2} \frac{x^7}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^8}{24}\Big|_{0}^{2} = \frac{256}{24} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

c)



$$B = \{(x,y) : 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le y^2\},$$

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{y^2} xy^2 \, dx\, dy = \int_{0}^{2} \left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_{0}^{y^2} dy = \int_{0}^{2} \frac{y^6}{2}\, dx$$

$$= \frac{y^7}{14}\Big|_{0}^{2} = \frac{128}{14} = \underline{\underline{\frac{64}{7}}}$$

Beispiel 144:

$$I = \int_{y=0}^{1}\int_{x=-2}^{1} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

Innere Integration nach x: $$I = \int_{y=0}^{1}\int_{x=-2}^{1} (x^2+y^2)\, dx\, dy = 3\int_{0}^{1} (1+y^2)\, dy = 4$$

Innere Integration nach y: $$I = \int_{y=0}^{1}\int_{x=-2}^{1} (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{-2}^{1} \left(x^2+\frac{1}{3}\right) dx = 4$$

Beispiel 145:

Dreifachintegrale

Bei der Berechnung verfährt man wie bei Doppelintegralen und integriert von ‚von innen nach außen' bzgl. der einzelnen Variablen.

Die jeweiligen Integrationsgrenzen sind durch die Geometrie des Integrationsbereichs festgelegt.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \underbrace{\int_{x_u}^{x_o} \underbrace{\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \underbrace{\int_{z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{\text{1. (innerste) Integration: } z \text{ wird ‚eliminiert' (ausintegriert)}}\,dy}_{\text{2. Integration: } y \text{ wird ‚eliminiert' (ausintegriert)}}\,dx}_{\text{3. Integration bzgl. } x}$$

Wie bei Doppelintegralen, ist auf die Zuordnung zu achten: $\int$ & $d\ldots$ wirken jeweils wie eine Klammer.
Bei der links festgelegten Reihenfolge müssen die Integrationsgrenzen für z also am inneren Integral stehen, die y-Grenzen am Mittleren und die x-Grenzen außen.

Unter folgenden Voraussetzungen lässt sich die Berechnung von Dreifachintegralen vereinfachen:

1. Die Integrationsgrenzen <u>für alle drei</u> Veränderliche sind konstant

2. Der Integrand $f(x,y,z)$ lässt sich in ein Produkt zerlegen, wobei die Faktoren jeweils nur von x, nur von y und nur von z abhängen, also $f(x,y,z) = u(x)\cdot v(y)\cdot w(z)$

Dann (und nur dann!) gilt:

$$\boxed{\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \left(\int_a^b u(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d v(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_e^f w(z)\,dz\right)}$$

Unter den Voraussetzungen 1. & 2. lässt sich also ein Dreifachintegral als Produkt dreier Einfachintegrale schreiben.

Beispiel 146:

Unendliche Reihen

Grundlagen

Definition 40:

Eine Zahlenfolge ist eine geordnete und numerierte Liste von Zahlen, die entweder in der aufzählenden Schreibweise oder durch eine Berechnungsvorschrift gegeben sein kann.

Beispiel 147:

(1) $2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots$ Diese Folge besteht aus allen geraden Zahlen in steigender Folge, beginnend bei 2.

(2) $1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \ldots$ Es handelt sich um die Folge der Quadratzahlen, beginnend bei 1.

(3) $3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \ldots$ Dies ist eine steigende Folge von Zahlen mit dem Abstand 4, beginnend bei 3.

Beispiel 148:

Berechne jeweils 5 Glieder dieser Folgen.

(a) $a_n = 3n - 11$ (b) $a_n = 24 - 10n$

(c) $a_n = n^2 - 16$ (d) $a_n = n^2 - 2n + 3$

Rekursive Folgen

Definition 41:

Eine Folge heißt rekursiv, wenn man keine direkte Möglichkeit hat, beliebige Glieder der Folge (z.B. a_{37}) zu berechnen, sondern wenn man die Glieder der Folge aus seinen Vorgängern berechnet.

Beispiel 149:

(a) $a_1 = 5;\ a_n = a_{n-1} + 3$.
Hier berechnet man $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$.
oder $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$.

Aber $a_{37} = a_{36} + 3 = ?$
Wenn man a_{36} noch nicht kennt, dann läßt sich auch a_{37} nicht berechnen.

(b) $a_1 = 2;\ a_n = -a_{n-1}$
Also: $a_2 = -a_1 = -2$
Dann $a_3 = -a_2 = 2$
$a_4 = -a_3 = -2$ usw.

(c) $a_1 = 20;\ a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$
Also: $a_2 = \frac{1}{2} a_1 = 10$
Dann $a_3 = \frac{1}{2} a_2 = 5$
$a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{5}{2}$ usw.

(d) $a_1 = 1;\ a_n = 3a_{n-1} - n$
Also $a_2 = 3 - 2 = 1$
Dann $a_3 = 3 - 3 = 0$
$a_4 = 0 - 4 = -4$ usw.

(e) $a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
Also $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$
Dann $a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$
$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$ usw.

Lineare Folgen – Arithmetische Folgen

Definition 42:

Es sollte bekannt sein, daß die **lineare Funktion** $\mathbf{f(x) = rx + s}$ als Schaubild eine **Gerade** mit der Gleichung $\mathbf{y = rx + s}$ hat.

Schränkt man für eine lineare Funktion den Definitionsbereich auf $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ ein, dann entsteht daraus eine **lineare Folge**: $\mathbf{a_n = r \cdot n + s}$

Ihr Schaubild sind dann einzelne Punkte auf einer Geraden.

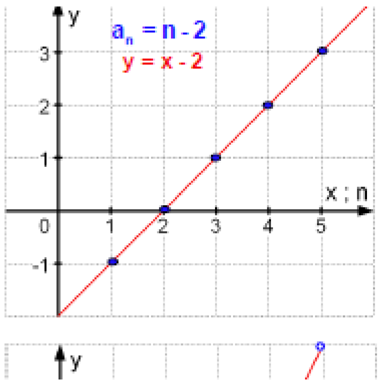
Beispiel 150:

Die lineare Funktion $f(x) = x - 2$ hat als Schaubild die Gerade mit der Gleichung $y = x - 2$.

Für $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ wird daraus die Zahlenfolge $a_n = n - 2$ mit

$a_1 = -1;\ a_2 = 0;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3$ usw.

Im Schaubild ergibt dies die auf der Geraden liegenden Punkte $(1|-1); (2|0); (3|1); (4|2); (5|3)$ usw.



Definition 43:

Bei einer linearen Folge $a_n = r \cdot n + s$

ist der Abstand (die Differenz) aufeinander folgender Glieder immer konstant. Daher heißen solche Folgen auch **arithmetische** Folgen.

Beispiel 151:

GRUNDAUFGABE:

Beweise, daß die Folge a_n mit $a_n = 48 - 16n$ eine arithmetische Folge ist.

BEWEIS:

$$d = a_{n+1} - a_n = \left(48 - 16 \cdot (n+1)\right) - (48 - 16 \cdot n)$$
$$d = 48 - 16n - 16 - 48 + 16n = -16$$

Weil die Differenz d aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, liegt eine arithmetische Folge vor.

Beispiel 152:

Grundaufgabe:

Von einer arithmetischen Folge kennt man

$$a_4 = 17 \quad \text{und} \quad a_{10} = 59.$$

Berechne die ersten 5 Glieder der Folge.

LÖSUNG:

Nach der Lattenzaunmethode folgt

$$6d = a_{10} - a_4 = 59 - 17 = 42 \Rightarrow d = 7$$

Analog: $a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d = 17 - 3 \cdot 7 = 17 - 21 = -4$

Also $-4 \xrightarrow[+7]{} 3 \xrightarrow[+7]{} 10 \xrightarrow[+7]{} 17 \xrightarrow[+7]{} 24 \xrightarrow[+7]{} \ldots$

Definition 44:

Für eine beliebige arithmetische Folge gilt:

$$a_m - a_n = (m-n) \cdot d$$

$$a_n - a_1 = (n-1) \cdot d$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel: Aus $a_1 = -4$ und $d = 7$ folgt

$a_n = -4 + (n-1) \cdot 7 = -4 + 7n - 7 = 7n - 11$

Dies ist der Funktionsterm aus dem obigen Beispiel !

Beispiel 153:

(e) Eine arithmetische Folge ist gegeben durch $a_3 = 6$ und $a_{10} = -36$.
Berechne a_1 und d und stelle die Berechnungsformel für a_n auf.

Lösung: $7d = a_{10} - a_3 = -36 - 6 = -42 \Rightarrow d = -6$.

$a_1 = a_3 - 2d = 6 - (-12) = 6 + 12 = 18$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 18 + (n-1) \cdot (-6) = 18 - 6n + 6 = 24 - 6n$.

Man kann a_n aber auch aus a_3 heraus berechnen, dazu benötigt man nicht a_1 :

$$a_n = a_3 + (n-3) \cdot d = 6 + (n-3) \cdot (-6) = 6 - 6n + 18 = 24 - 6n$$

Oder aus a_{10} heraus:1

$$a_n = a_{10} + (n-10) \cdot d = -36 + (n-10) \cdot (-6) = -36 - 6n + 60 = 24 - 6n$$

Beispiel 154:

(f) Prüfe nach, ob eine arithmetische Folge vorliegt und stelle dann die Berechnungsvorschrift auf: $a_1 = 186$; $a_2 = 318$; $a_5 = 714$

LÖSUNG: (Wir müssen überprüfen, ob die Differenzen konstant sind:)

$a_2 - a_1 = 318 - 186 = 132 = d$

$a_5 - a_2 = 714 - 318 = 396$

Wenn eine arithmetische Folge vorliegt, muß $a_5 - a_2 = 3d$ sein:

$3d = 396 \Rightarrow d = 132$.

Dies stimmt, also liegt eine arithmetische Folge vor.

Und es gilt:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 186 + (n-1) \cdot 132 = 186 + 132n - 132 = 132n + 54$

(g) Prüfe nach, ob eine arithmetische Folge vorliegt und stelle dann die Berechnungsvorschrift auf: $a_3 = 1900$; $a_7 = 1600$; $a_{14} = 1075$

LÖSUNG:

$a_7 - a_3 = 4d = -300 \Rightarrow d = -75$ (1)

$a_{14} - a_7 = 7d = 1075 - 1600 = -525 \Rightarrow d = -75$ (2).

Die Rechnung (1) und (2) führen zum selben Wert von d, also liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_n = a_3 + (n-3) \cdot d = 1900 + (n-3) \cdot (-75) = 1900 - 75n + 225 = -75n + 2125$

(h) Zeige, daß jetzt keine arithmetische Folge vorliegt:
$a_2 = 320$; $a_4 = 392$; $a_7 = 504$

Beweis:

$a_4 - a_2 = 392 - 320 = 72 = 2d \Rightarrow d = 36$

$a_7 - a_4 = 503 - 392 = 111 = 3d \Rightarrow d = 37$

Weil die zweite Berechnung von d zu einem anderen Ergebnis führt, kann keine arithmetische Folge vorliegen !
(Man muß sich auch den passenden Text zu einer solchen Rechnung einfallen lassen !)

Arithmetische Folge höherer Ordnung

Arithmetische Folge 2. Ordnung

Wir haben in der Aufgabe 6 der vorangegangenen Seite gesehen, daß eine Folge, die durch einen quadratischen Term berechnet wird, keine arithmetische Folge mehr ist. Aber sie hat viel Ähnlichkeit damit, was wir am nächsten Beispiel sehen werden:

BEISPIEL 1 $\quad a_n = n^2 + 3n + 16$

$a_1 = 1 + 3 + 16 = 20$	$a_2 = 4 + 6 + 16 = 26$
$a_3 = 9 + 9 + 16 = 34$	$a_4 = 16 + 12 + 16 = 44$
$a_5 = 25 + 15 + 16 = 56$	$a_6 = 36 + 18 + 16 = 70$ usw.

Übersicht:

$$20 \xrightarrow[+6]{} 26 \xrightarrow[+8]{} 34 \xrightarrow[+10]{} 44 \xrightarrow[+12]{} 56 \xrightarrow[+14]{} 70 \xrightarrow[+16]{} \ldots$$

Erkennen Sie, daß die Differenzen eine arithmetische Folge bilden ?

$$6 \xrightarrow[2]{} 8 \xrightarrow[2]{} 10 \xrightarrow[2]{} 12 \xrightarrow[2]{} 14 \xrightarrow[2]{} 16 \xrightarrow[2]{} \ldots$$

Man führt hier folgende Begriffe:

Aus der Stammfolge	20 ; 26 , 34 ; 44 ; 56 ; 70 ; ...
Bildet man die 1. Differenzenfolge	6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; ...
Und daraus die 2. Differenzenfolge	2 ; 2 ; 2 ; 2 ; ...

Wir halten unsere Erkenntnis fest:
Bei dieser quadratischen Folge ist die erste Differenzenfolge eine arithmetische Folge, weil die 2. Differenzenfolge konstant ist.

Ist das bei jeder quadratischen Folge so ?

Die Antwort errechnen wir uns an Hand der allgemeinen quadratischen Folge:

$$f_n = an^2 + bn + c$$

Wir berechnen $f_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$ und daraus (wie in Aufgabe 6)

$$f_{n+1} - f_n = \left[a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right]$$
$$f_{n+1} - f_n = \left[an^2 + 2an + a + bn + b + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right]$$
$$f_{n+1} - f_n = 2an + a + b$$

Diese 1. Differenzenfolge nenne ich $d_n = (2a) \cdot n + (a + b)$.
Man erkennt, daß dies eine lineare Folge, also eine arithmetische Folge ist.
Also ist die zweite Differenzenfolge konstant, und zwar lautet sie konstant 2a 2a 2a ...

Beispiel 155:

Gegeben ist die Folge a_n durch $a_1 = -1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 7$ und $a_4 = 17$
Stelle einen möglichen Funktionsterm für diese Folge auf und gib a_5 an.

Lösung:

Überlegungen zur Methodik:

Man erkennt auf den ersten Blick, daß keine arithmetische Folge vorliegt, da die Abstände (Differenzen) nicht konstant sind.
Aber (in diesem Abschnitt ist es naheliegend) wir können ja einmal die 1. und 2. Differenzenfolgen ansehen:

1. Differenzenfolge: 2 ; 6 ; 10 ; ...
2. Differenzenfolge: 4 ; 4 ; ...

Auf Grund der wenigen gegebenen Glieder der Folge müssen wir sagen:
Die 2. Differenzenfolge *könnte* konstant sein, d.h. die 1. Differenzenfolge ist arithmetisch.

Nun haben wir nur gezeigt, daß bei einer quadratischen Folge die Differenzenfolge arithmetisch ist, aber wir haben die Umkehrung nicht bewiesen. Und die würde lauten: Wenn die 1. Differenzenfolge arithmetisch ist, dann ist die Stammfolge quadratisch.

Wir gehen dennoch von der Annahme aus, die gegebene Folge ist quadratisch und erstellen unter dieser Annahme den Funktionsterm. Dann können wir den Beweis schnell vollenden. Jetzt die Rechnung:

ANSATZ: $a_n = an^2 + bn + c$.

Zur Berechnung der drei unbekannten Koeffizienten a, b und c benötigen wir drei (unabhängige) Gleichungen. Diese erstellt man unter Verwendung der gegebenen Glieder a_1 bis a_3:

n = 1: $a_1 = a + b + c = -1$ (1)

n = 2: $a_2 = 4a + 2b + c = 1$ (2)

n = 3: $a_3 = 9a + 3b + c = 7$ (3)

---

(2) – (1) : $3a + b = 2$ (4)
(3) – (2) : $5a + b = 6$ (5)

---

(5) – (4) : $2a = 4 \Rightarrow a = 2$

In (4): $b = 2 - 3a = 2 - 6 = -4$
In (1): $c = -1 - a - b = -1 - 2 + 4 = 1$

ergibt $a_n = 2n^2 - 4n + 1$.
Nun wissen wir erst, daß diese Formel a_1, a_2 und a_3 richtig gerechnet.
Wir machen noch die Probe für $a_4 = 32 - 16 + 1 = 17$! und berechnen noch $a_5 = 50 - 20 + 1 = 31$.

Arithmetische Folge 3. Ordnung

Man kann erahnen, wie es mit Folgen aussehen wird, die einen Funktionsterm 3. Grades zur Berechnung verwenden.

BEISPIEL 3:

$$f_n = n^3 + n^2 - 5n + 4$$

$f_1 = 1+1-5+4 = 1;$ $\quad f_2 = 8+4-10+4 = 6$

$f_3 = 27+9-15+4 = 25$ $\quad f_4 = 64+16-20+4 = 64$

$f_5 = 125+25-25+4 = 129$ $\quad f_6 = 216+36-30+4 = 226$ usw.

Stammfolge: 1 ; 6 ; 25 ; 64 ; 129 ; 226 ; ...
1. Differenzenfolge: 5 ; 19 ; 39 ; 65 ; 97 ; ....
2. Differenzenfolge: 14 ; 20 ; 26 ; 32 ; ....
3. Differenzenfolge: 6 ; 6 ; 6 ; .,..

BEOBACHTUNG: Bei einer Folge 3. Ordnung ist die 3. Differenzenfolge konstant, also ist die 2. Differenzenfolge arithmetisch. (Folglich sollte die 2. Differenzenfolge quadratisch sein !!).

Dies nützen wir aus, um umgekehrt Funktionsterme für Folgen aufzustellen, wenn wir herausgefunden haben, daß ihre 2. Differenzenfolge arithmetisch ist.

Beispiel 156:

Stelle einen Funktionsterm für diese Stammfolge auf und berechne a_6 .

Stammfolge :	1 ; 0 ; -9 ; -32 ; -75 ; ...
1. Differenzenfolge :	-1 ; -9 ; -23 ; -43 ; ...
2. Differenzenfolge :	-8 ; -14 ; -20 ; ....
3. Differenzenfolge :	- 6 ; - 6 ; ....

Da die 3. Differenzenfolge konstant ist, ***könnte*** die Stammfolge eine arithmetische Folge 3. Ordnung sein. Daher beginnen wir mit dem Ansatz:

$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ und stellen 4 Gleichungen auf:

n=1: $a_1 = a + b + c + d = 1$ (1)

n=2: $a_2 = 8a + 4b + 2c + d = 0$ (2)

n=3: $a_3 = 27a + 9b + 3c + d = -9$ (3)

n=4 $a_4 = 64a + 16b + 4c + d = -32$ (4)

(2) – (1): $7a + 3b + c = -1$ (5)

(3) – (2): $19a + 5b + c = -9$ (6)

(4) – (3): $37a + 7b + c = -23$ (7)

(6) – (5): $12a + 2b = -8$ (8)

(7) – (6): $18a + 2b = -14$ (9)

(9) – (8) $6a = -6 \Rightarrow a = -1$

In (8): $-12 + 2b = -8 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$

In (5): $-7 + 6 + c = -1 \Rightarrow c = 0$

In (1): $-1 + 2 + 0 + d = 1 \Rightarrow d = 0$

Ergebnis: $a_n = -n^3 + 2n^2$.

ACHTUNG: Damit kann man a_1 bis a_4 berechnen. Zur Kontrolle der vollen Wirksamkeit müssen wir noch a_5 überprüfen:

$a_5 = -5^3 + 2 \cdot 5^2 = -125 + 50 = -75$ richtig !

Gefragt war noch $a_6 = -6^3 + 2 \cdot 6^2 = -216 + 72 = -144$.

(4) – (3):	$37a+7b+c=78$	(7)
(6) – (5):	$12a+2b=28$	(8)
(7) – (6):	$18a+2b=52$	(9)
(9) – (8)	$6a=24 \Rightarrow a=4$	
in (8)	$2b=28-12a=28-48=-20 \Rightarrow b=-10$	
in (5)	$c=-2-7a-3b=-2-28+30=0$	
in (1)	$d=2-a-b-c=2-4+10=8$	
Ergebnis:	$a_n=4n^3-10n^2+8$	
Probe:	$a_5=500-250+8=258$.	

(3) Zeige durch Berechnung von 7 Gliedern, daß die 4. Differenzenfolge bei $a_n = n^4 - n^2$ konstant ist.

LÖSUNG:

$$a_1=1-1=0$$
$$a_2=16-4=12$$
$$a_3=81-9=72$$
$$a_4=256-25=231$$
$$a_5=625-25=600$$
$$a_6=1296-36=1260$$
$$a^7=2401-49=2352$$

Stammfolge: 0 ; 12 ; 72 ; 240 ; 600 ; 1260 ; 2352 ..
1. Differenzenfolge: 12 ; 60 ; 168 ; 360 ; 660 ; 1092
2. Differenzenfolge: 48 ; 108 ; 192 ; 300 ; 432
3. Differenzenfolge: 60 ; 84 ; 108 ; 132
4. Differenzenfolge: 24 ; 24 ; 24 ...

Geometrische Folgen

Definition 45:

Eine Zahlenfolge heißt geometrisch, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad (1)$$

Beispiel 157:

a) $3 \xrightarrow[\cdot 2]{} 6 \xrightarrow[\cdot 2]{} 12 \xrightarrow[\cdot 2]{} 24 \xrightarrow[\cdot 2]{} 48 \xrightarrow[\cdot 2]{} \ldots$

Die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder sind stets 2: $\frac{a_2}{a_1} = 2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$

b) $8 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} 4 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} 2 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} 1 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} \tfrac{1}{2} \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} \tfrac{1}{4} \ldots$

Die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder hier $\frac{1}{2}$: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$

c) Für die Aufgabe „Prüfe nach, ob eine geometrische Folge vorliegen kann“

$a_1 = \frac{4}{9};\ a_2 = \frac{4}{3};\ a_3 = 4;\ a_4 = 12;\ \ldots$

müssen diese Quotienten berechnet werden:

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} = 3;\quad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3;\quad q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{12}{4} = 3;\ \ldots,$

Weil diese Quotienten gleich sind, ***kann*** eine geometrische Folge vorliegen.

Man sagt „kann“, weil es zahllose weitere Folgen gibt, die z. B. ab a_5 oder später abweichen und keine geometrische Folge bilden.

Struktur von geometrischen Folgen

Definition 46:

Aus der Definition, wonach die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ konstant sein sollen, folgt diese Gleichung: $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$ (2)

Beispiel 158:

Man wählt ein erstes Glied der Folge, etwa $a_1 = 3$ und z.B. $q = 5$

Dann folgt nach (2):

$$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 5 = 15$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = 15 \cdot 5 = 75$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = 75 \cdot 5 = 375$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = 375 \cdot 5 = 1875 \quad \text{usw.}$$

Beispiel 159:

Gegeben ist die Folge $\{\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; ...\}$
Zeige, daß es sich um eine arithmetische Folge handeln kann.
Stelle eine Berechnungsformel für a_n auf.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2; \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2;$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \qquad \frac{a_5}{a_4} = \frac{2}{1} = 2; \qquad \frac{a_6}{a_5} = \frac{4}{2} = 2.$$

Da alle möglichen Quotienten aufeinander folgender Zahlen gleich groß, nämlich q = 2 sind, liegt eine geometrische Folge vor.

Berechnung von a_n: $\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{8} \cdot 2^{n-1}$

Dies läßt sich umformen: $\quad a_n = 2^{-3} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-4}$

Oder: $\quad a_n = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^n}{2} = \frac{1}{16} \cdot 2^n$ usw.

Beispiel 160:

Von einer geometrischen Folge kennt man $a_3 = \frac{1}{64}$ und $a_6 = \frac{1}{8}$.

Berechne q, a_1 und a_{15}.

$$q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{64} \cdot \frac{8}{1} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}.$$

Also wird $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{1}{64}}{2^2} = \frac{1}{64 \cdot 4} = \frac{1}{256}$

Und schließlich: $\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{256} \cdot 2^{n-1}$

Mit den Regeln der Potenzrechnung kann man diesen Term verändern:

$2^{n-1} = \frac{2^n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{256} \cdot \frac{2^n}{2} = \frac{1}{512} \cdot 2^n = \frac{2^n}{2^9}$ z.B. für $a_{13} = \frac{2^{13}}{2^9} = 2^4 = 16$

Beispiel 161:

Von einer geometrischen Folge kennt man $a_2 = 9$ und $a_7 = \frac{1}{27}$.

Berechne q, a_1 und a_n.

$$q^5 = \frac{a^7}{a^2} = \frac{1}{27 \cdot 9} = \frac{1}{3^3 \cdot 3^2} = \frac{1}{3^5} \Rightarrow q = \frac{1}{3} \text{ ergibt } a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 9 \cdot 3 = 27.$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n : \frac{1}{3} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 81 \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{81}{3^n} = 81 \cdot 3^{-n}$$

Exponentialfolgen sind Geometrische Folgen

In all unseren Beispielen enthielt der Term für a_n die Variable n im Exponenten. Es lag also stets eine Exponentialfunktion vor. Dies zeigt ja schon die hergeleitete Formel

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wir wollen nun einige solche Exponentialfolgen untersuchen.

Beispiel 162:

Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = \frac{2^n}{32}$.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{32}}{\frac{2^n}{32}} = \frac{2^{n+1}}{32} \cdot \frac{32}{2^n} = 2 \text{ ist konstant.}$$

Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = \frac{3^{n-4}}{7^{n+1}}$.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n-3}}{7^{n+2}} \cdot \frac{7^{n+1}}{3^{n-4}} = \frac{3}{7} \text{ ist konstant.}$$

Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = \left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-2}$.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-1}}{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-2}} = \left(-\sqrt[3]{2}\right) \text{ ist konstant.}$$

Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = 4^{2-\frac{1}{2}n}$.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{2-\frac{1}{2}(n+1)}}{4^{2-\frac{1}{2}n}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ ist konstant.}$$

Beispiel 163:

Liegt bei $a_n = 12 - 2^n$ eine geometrische Folge vor ?

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{12-2^{n+1}}{12-2^n}$. Irgendwie weiß man nicht, wie man weiterrechnen soll.

In so einem Falle berechnet man sich einige Glieder der Folge:
$a_1 = 12 - 2 = 10$; $a_2 = 12 - 4 = 8$; $a_3 = 12 - 8 = 4$; ...

Das reicht schon um zu erkennen, daß **keine** geometrische Folge vorliegt:
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Diese Quotienten sind nämlich verschieden !

Definition 47:

Jede Folge der Bauart

$a_n = a \cdot b^n$ ***oder*** $a_n = b^{r \cdot n + s}$

ist eine geometrische Folge.

Logarithmen für Geometrische Folgen

Beispiel 164:

Gegeben ist die Folge $a_n = 2^n$. Ist b = 131 072 ein Glied dieser Folge ?

ıg:

Es muß also gelten: $a_n = 2^n = 131072$

$2^n = 131072 \quad (1)$

Die Unbekannte n steht im Exponenten. Es gibt nur eine Möglichkeit, diese von dort herunter zu holen, das ist die Anwendung des 3. Logarithmengesetzes. Dieses heißt:

$$\boxed{\log_b a^n = n \cdot \log_b a}$$

Demnach gilt auch $\log_b 2^n = n \cdot \log_b 2$.

Man nimmt nun eine solche Basis, deren Logarithmen im Taschenrechner eingearbeitet sind. Beispielsweise die Zehnerlogarithmen, also die Logarithmen zur Basis 10. Diese schreibt man entweder so: $\log_{10} 2$ oder nach alter Tradition kurz $\lg 2$. Auf den Taschenrechnern trägt die Taste dafür den Aufdruck „log" . Die Taste ln x ist ein andere Logarithmusfunktion, nämlich zur Basis e = 1,71828... , das ist die Eulersche Zahl. Man könnte sie auch verwenden.

Wir logarithmieren also die Gleichung (1), d.h. wir nehmen von beiden Seiten den Logarithmus:

$$\lg 2^n = \lg 131072$$

Nun wenden wir auf die linke Seite das 3. Logarithmengesetz an:

$$n \cdot \lg 2 = \lg 131072$$

und dividieren durch lg 2:

$$n = \frac{\lg 131072}{\lg 2} = 17$$

Ergebnis: $2^{17} = 131072$, also ist $b = a_{17}$.

Beispiel 165:

(G2) Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{1}{27}3^n$. Ist $b = 59049$ ein Glied dieser Folge ?

Lösung:

Ansatz: $a_n = \frac{1}{27}3^n = 59049$

$$\frac{1}{3^3}\cdot 3^n = 59049$$

$$3^{n-3} = 59049$$

Logarithmieren: $\lg 3^{n-3} = \lg 59049$

3. Logarithmengesetz: $(n-3)\cdot \lg 3 = \lg 59049$

$$n-3 = \frac{\lg 59049}{\lg 3}$$

$$n = \frac{\lg 59049}{\lg 3} + 3 = 13$$

Ergebnis: $b = a_{13}$.

Arithmetische Wachstumsfolgen

Beispiel 166:

Eine Maschine produziert pro Minute 25 Klinkersteine. Zur Zeit $t = 0$ sind $n(0) = 450$ Klinker im Lager. Wie viele sind dort nach 1 Minute, 2 Minuten, 30 Minuten, 2 Stunden und n Minuten ?

Lösung:

Es sei $n(t)$ die Menge der Klinker zur Zeit t , $t \in \mathbb{N}_0$.
Die Zunahme der Klinker pro Minute ist $d = 25$. Also folgt:
$n(0) = 450$
$n(1) = n(0) + d = 475$
$n(2) = n(0) + 2d = 500$
$n(30) = n(0) + 30d = 450 + 750 = 1200$
$n(120) = n(0) + 120\cdot d = 450 + 3000 = 3450$

$n(t) = n(0) + t\cdot d = 450 + t\cdot 25$

Hier liegt eine arithmetische Folge vor, die aber bereits bei der Nummer 0 beginnt.
Wenn die Variable die Zeit t ist, schreibt man meistens statt a_n $a(t)$ oder weil man n oft für Anzahl nimmt: $n(t)$.

Beispiel 167:

$n(t)$ sei die Anzahl von Objekten irgendeiner Art. Ihre Anzahl genüge der Gleichung

$$n(t) = 2450 - 28 \cdot t$$

Beschreibe die Situation.

Lösung:

$n(0) = 2450$ ist die vorhandene Menge zur Zeit $t = 0$ (Startmenge).

Pro Zeiteinheit (das können je nach Angabe Minuten, Stunden usw. sein) nimmt die Anzahl um 28 ab.
So hat man dann beispielsweise nach 10 Zeiteinheiten:
$n(10) = 2450 - 280 = 2170$ Objekte.

Diese Gleichung beschreibt eine gleichförmige Abnahme pro Zeiteinheit. Damit geht die Menge auch irgendwann mal zu Ende. Dazu berechnet man die Nullstelle: $n(t) = 0$ d.h. $2450 - 28 \cdot t = 0$

$$28 \cdot t = 2450 \Rightarrow t_N = \frac{2450}{28} = 87{,}5$$

d.h. 87 Zeiteinheiten lang nimmt die Menge gleichmäßig ab, dann eine halbe Zeiteinheit später ist nichts mehr vorhanden. Also gilt

$$n(88) = n(89) = \ldots = 0.$$

Geometrische Wachstumsfolgen

Beispiel 168:

Ein Bakterienstamm vermehrt sich so, daß pro Minute 15% neue Bakterien entstehen,
Die Startmenge sei z(0) = 40

Es folgt: $z(1) = z(0) + \underbrace{0{,}15 \cdot z(0)}_{15\%\ \text{Zunahme}} = z(0) \cdot [1 + 0{,}15] = z(0) \cdot 1{,}15 = 46$

$$z(2) = z(1) + \underbrace{0{,}15 \cdot z(1)}_{15\%\ \text{Zunahme}} = z(1) \cdot [1 + 0{,}15] = z(1) \cdot 1{,}15 = 52{,}9 \approx 53$$

Achtung: 52,9 Bakterien sind eigentlich sinnlos. Aber die Wachstumsrate von 15% muß als statistischer Mittelwert angesehen werden. Man runde also.

$$z(3) = z(2) + \underbrace{0{,}15 \cdot z(2)}_{15\%\ \text{Zunahme}} = z(2) \cdot [1 + 0{,}15] = z(2) \cdot 1{,}15 = 60{,}835 \approx 61$$

usw.

Man erkennt, daß eine geometrische Folge entstanden ist, denn der jeweils nächste Wert entsteht aus dem vorangehenden durch Multiplikation mit 1,15, dies entspricht einem Wachstum von 15 %.

$$z(0) \xrightarrow[\cdot q]{} z(1) \xrightarrow[\cdot q]{} z(2) \xrightarrow[\cdot q]{} z(3) \xrightarrow[\cdot q]{} z(4) \xrightarrow[\cdot q]{} \ldots$$

$$40 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} 46 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} 52{,}9 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} 60{,}835 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} \ldots$$

Damit kann man eine Formel für die geometrische Folge aufstellen:

$$z(t) = z(0) \cdot q^t$$

also: $z(2) = z(0) \cdot q^2$, $z(3) = z(0) \cdot q^3$ usw.

Definition 48:

Prozentuales Wachstum führt zu einer geometrischen Folge, also zu einer Exponentialfolge.
Das Anfangsglied trägt hierbei meist die Nummer 0.
und die Variable ist in der Regel die Zeit t.

$$z(t) = z(0) \cdot q^t$$

In unserem Beispiel war $q = 1{,}15$ und q ist entstanden aus der Addition von altem Wert plus Zuwachs. Bei einer Wachstumsrate von $p = 15\% = 0{,}15$ gilt:

$$z(1) = z(0) + z(0) \cdot 0{,}15 = z(0) \cdot \underbrace{[1 + 0{,}15]}_{=q} = z(0) \cdot q$$

Allgemein: $z(1) = z(0) + z(0) \cdot p = z(0) \cdot \underbrace{[1 + p]}_{=q} = z(0) \cdot q$ also ist $q = 1 + p$!

Geometrische und arithmetische Reihen

Definition 49:

Zu jeder Folge { a_n } kann man **Teilsummen** berechnen:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a$ d.h. $s_2 = s_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ d.h. $s_3 = s_2 + a_3$

. . . .

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Die Folge dieser Teilsummen nennt man eine ***Reihe***.

Definition 50:

Verwendung des Summenzeichens

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Gelesen: Summe für i=1 bis 5 über a_i .

Beispiel 169:

Die Folge $a_n = n$ mit 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ....

ergibt diese Reihe:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + 2 = 3$

$s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

usw.

Es gilt allgemein: $s_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (Beweis später)

Beispiel 170:

Die Folge $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ mit $\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{3\cdot 4};\ \frac{1}{4\cdot 5};\ \ldots$

ergibt diese Reihe:

$$s_1 = \frac{1}{2},\quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4};\ \ldots$$

Es gilt allgemein:

$s_n = \frac{n}{n+1}$. Der Beweis wird schwer !

Arithmetische Reihe

Definition 51:

> Die zu einer arithmetischen Folge gehörende Folge der Teilsummen heißt eine arithmetische Reihe.

Dies ist nun ein Prinzip, das man auf jede arithmetische Folge anwenden kann:

c) Die Folge sei $a_n = 4n + 1$, also $5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \ldots$

Wir wollen die ersten 30 Glieder dieser Folge addieren, d.h. die Summe s_{30} ist gesucht. Dazu müssen wir zuerst $a_{30} = 4\cdot 30 + 1 = 121$ berechnen.

$$\begin{aligned} s_{30} &= 5 + 9 + 13 + \ldots + 113 + 117 + 121 \\ s_{30} &= 121 + 117 + 113 + \ldots + 13 + 9 + 5 \end{aligned}$$

$$2\cdot s_{30} = 30\cdot 126 \Rightarrow s_{30} = 15\cdot 126 = 1890$$

d) Daraus machen wir nun eine Formel. Man sollte jetzt erkennen, daß bei n Summanden n Summen auftreten, die alle so groß sind, wie $a_1 + a_n$:

$$s_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + \underbrace{(a_1+(n-3)d)}_{a_{n-3}} + \underbrace{(a_1+(n-2)d)}_{a_{n-2}} + \underbrace{(a_1+(n-1)d)}_{a_{n-1}}$$

$$s_n = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-3)d) + \ldots + (a_1+2d) + (a_1+d) + a_1$$

Auf Grund der unterschiedlichen Länge dieser Summanden-Terme können die nicht sauber untereinander stehen. Daher zeigen die Pfeile, wer zusammengehört. Rechnen wir also nach:

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_1 + (n-2)d) = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_1 + (n-3)d) = 2a_1 + (n-1)d$$

usw.

Zwischenergebnis: $2\cdot s_n = n\cdot(a_1 + a_n) = n\cdot(2a_1 + (n-1)d)$.

Es folgt: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

Wenn man das ausmultipliziert, erhält man $s_n = na_1 + \frac{1}{2}n^2 d - \frac{1}{2}dn = \frac{1}{2}d \cdot n^2 + (a_1 - d) \cdot n$ also einen quadratischen Term. Doch diese Formel merkt sich keiner. Man sollte fies jedoch wissen:

Für eine arithmetische Reihe gilt:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (1)$$

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \qquad (2)$$

s_n ist ein quadratischer Term.

Die Formel (1) ist leicht zu merken, wenn man das Gaußsche Prinzip kennt.
Aus (2) folgt übrigens $s_n = \frac{n}{2} \cdot 2a + \frac{n}{2}(n-1)d = na + \frac{1}{2}dn^2 - \frac{1}{2}dn = \frac{1}{2}dn^2 + (a - \frac{1}{2}d) \cdot n$
Also ist s_n stets ein term dieser Bauart: $s_n = r \cdot n^2 + s \cdot n$ Ein Absolutglied ist also nicht vorhanden !

Beispiel 171:

Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 17 bis 63

Die konstante Differenz d = 1 zeigt, daß eine arithmetische Reihe vorliegt.
Wir müssen zuerst herausfinden, wieviele Glieder addiert werden sollen.
Hier hilft das Lattenzaunprinzip. Haben wir 4 Lattenzäune, dann befinden sich darin 3 Zwischenräume. Tragen also die Latten die Nummern 17 , 18 , 19 , 20 dann erhalten wir durch Subtraktion 20 – 17 = 3 die Anzahl der Zwischenräume. Folglich sind es 4 Latten.
Hier tragen die Latten die Nummern 17 bis 63, also liegen 63 – 17 = 46 Zwischenräume vor, d.h. wir haben 47 Zahlen zu addieren.

$$s_{47} = 17 + 18 + \ldots + 63 = \frac{47}{2}(17 + 63) = \frac{47}{2} \cdot 80 = 47 \cdot 40 = 1880$$

Geometrische Reihen

Herleitung der Summenformel:

Von einer geometrischen Folge mit der Berechnungsvorschrift

$$a_n = a_1\, q^{\,n-1}$$

können natürlich auch Teilsummen berechnet werden. Die Berechnungsformel für die geometrische Reihe entsteht durch einen einfachen Rechentrick: Man schreibt zuerst die Summe auf, und darunter die q-fache Summe, die man dann subtrahiert:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1\, q^{\,n-2} + a_1 q^{\,n-1} \qquad (1)$$

$$q\, s_n = \qquad a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1\, q^{\,n-2} + a_1 q^{\,n-1} + a_1 q^{\,n} \qquad (2)$$

(1) – (2): $s_n - q\, s_n = a_1 - a_1\, q^n$

Alle untereinander stehenden Summanden der rechten Seite sind gleich und fallen daher bei der Subtraktion weg. Nun klammert man links und rechts aus und erhält:

$$s_n\,(\,1 - q\,) = a_1\,(\,1 - q^{\,n}\,)$$

Daraus folgt:

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

Beispiel 172:

Eine geometrische Folge wird durch $a_1 = 16$ und $q = {}^1/_2$ definiert.
Dann können wir zunächst einmal die Folge aufschreiben:
$a_1 = 16$; $a_2 = 16 * {}^1/_2 = 8$; $a_3 = 4$; $a_4 = 2$; $a_5 = 1$; ... $a_6 = {}^1/_2$; $a_7 = {}^1/_4$ . . .
und die allgemeine Berechnungsformel wird zu

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 16 \cdot (\tfrac{1}{2})^{n-1} = 2^4 \cdot 2^{-n+1} = 2^{5-n}}$$

Die Partialsummen dazu sind

$s_1 = a_1 = 16$
$s_2 = a_1 + a_2 = 16 + 8 = 24$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 24 + 4 = 28$
$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 28 + 2 = 30$

Für größere Teilsummen empfiehlt sich die Verwendung der Berechnungsformel für die geometrische Reihe:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

Da hier $q < 1$ ist, verwenden wir die erste Bruchdarstellung und erhalten:

$$s_6 = 16 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot (1-(\tfrac{1}{2})^6) = 32 \cdot (1-\tfrac{1}{64}) = 32 \cdot \tfrac{63}{64} = 31{,}5$$

Oder $$s_{20} = 16 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{20}}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot [1-(\tfrac{1}{2})^{20}] = 32 - 32 \cdot (\tfrac{1}{2})^{20} \approx 31{,}999\,969$$

$$s_n = 16 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot (1-(\tfrac{1}{2})^n)$$

Beispiel 173:

Berechne das Ergebnis der geometrischen Reihe $1 + 4 + 16 + \ldots + 4^{10}$.

Wir müssen zuerst die geometrische Folge genau identifizieren:
$a_1 = 1$, $q = 4$ (denn der Quotient aufeinanderfolgender Zahlen ist immer 4)
ferner werden 11 Zahlen der Folge aufsummiert.
Es sind 11, weil man die Reihe auch so schreiben kann: $4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{11}$ *,*
also liegen 11 Summanden vor. Jetzt verwendet man die Summenformel:

$$s_{11} = 1 \cdot \frac{4^{11}-1}{4-1} = \frac{4^{11}-1}{3} = 1398\,101$$

Beispiel 174:

Berechne $4 + 2 + 1 + \ldots + {}^1/_{32}$.
Identifizierung der geometrischen Folge:
$a_1 = 4$; $q = {}^1/_2$. Um die Anzahl der Summanden zu ermitteln, schreibt in diesem Fall alle Zahlen der Folge als Zweierpotenzen: $2^2 + 2^1 + 2^0 + \ldots + 2^{-5}$
Durch Subtraktion der Exponenten $2 - (-5) = 7$ erhält man die Zahl der Zwischenräume (also der Pluszeichen), folglich ist $n = 8$.
Wem dies suspekt erscheint, der verwende die Berechnungsformel für die *Folge:* $a_n = a_1\, q^{n-1}$ d.h. $\frac{1}{32} = 4 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$. Wir schreiben die ganze Gleichung in Zweierpotenzen um: $2^{-5} = 2^2 \cdot 2^{-n+1} = 2^{-n+3}$
Durch Exponentenvergleich folgt $-5 = -n + 3$ d.h. $n = 8$!!

$$s_8 = 4 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^8}{1-\frac{1}{2}} = 8 \cdot (1-(\tfrac{1}{2})^8) = 8 \cdot (1-\tfrac{1}{256}) = 8 \cdot \tfrac{255}{256} = \tfrac{255}{32} \text{ !!!}$$

Beispiel 175:

Berechne: $$\boxed{3-\frac{3}{5}+\frac{3}{25}-+\ldots+\frac{3}{390\,625}}$$

Identifizierung der Folge:

$a_1=3$; $\quad q=\frac{a_2}{a_1}=-\frac{3}{5\cdot 3}=-\frac{1}{5}$

Berechnung von n:

Man sucht mittels Taschenrechner, welche Fünferpotenz die Zahl 390 625 ist und entdeckt $5^8 = 390\,625$.

Da zu a_1 der Nenner 5^0 „gehört" und der letzte Nenner 5^8 ist, liegen 9 Summanden vor, d.h. $n = 9$

Also kann man die Summe s_9 berechnen:

$$\boxed{s_9=3\cdot\frac{1-(-\frac{1}{5})^9}{1+\frac{1}{5}}=3\cdot\frac{5}{6}(1+(\frac{1}{5})^9)=\frac{5}{2}(1+(\frac{1}{5})^9)\approx 2{,}500.001.3}$$

Beispiel 176:

Umkehrung der Aufgabe:

Gegeben ist eine geometrische Reihe durch $s_n = 8 - 0{,}5^{\,n-3}$.
Welche geometrische Folge liegt ihr zugrunde ?

Man berechnet zuerst s_1 und s_2 :

$s_1=8-(\frac{1}{2})^{-2}=8-4=4$ d.h. $a_1 = 4$ (1)

$s_2=8-(\frac{1}{2})^{-1}=8-2=6$ d.h. $a_1 + a_2 = 6$ (2)

Aus (2) – (1) folgt $a_2 = 2$.

Also gilt $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$$\boxed{a_n=a_1\cdot q^{n-1}=4\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=2^2\cdot 2^{-n+1}=2^{3-n}=\frac{8}{2^n}}$$

Beispiel 177:

Welche geometrische Folge hat die Reihe $s_n = 2^{n-1} - \frac{1}{4}$?

$s_1 = 2^{-1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ d.h. $a_1 = \frac{1}{4}$

$s_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ d.h. $a_1 + a_2 = \frac{3}{4}$

Also wird $a_2 = \frac{1}{2}$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = 2^{-2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-3} = \frac{2^n}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^n}$$

Summenzeichen, Produktzeichen, Binomialkoeffizient und Fakultät

Summenzeichen

Summen über endliche oder unendliche Reihen können statt mit Auslassungspunkten auch mit dem **Summenzeichen** notiert werden.

Schreibweise mit Auslassungspunkten:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

Schreibweise mit Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

Definition 52:

Die allgemeine Schreibweise einer Summe ist:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Eine Summe besteht ausfolgenden Komponenten:

Σ: Summenzeichen und die Festlegung der Rechenoperation für die Folge

i: Laufindex oder Zählvariable mit Anfangs- und Endwert.

a_i: Berechnungsformel

Beispiel 178:

$$\sum_{i=2}^{7} (i-1) = (2-1) + (3-1) + (4-1) + (5-1) + (6-1) + (7-1)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Rechenregeln

$$\sum_{i=m}^{n} a = (n - m + 1) \cdot a$$

Beispiel 179:

$$\sum_{i=3}^{7} 4 = (7 - 3 + 1) \cdot a = 7 \cdot 4 = 28$$

Definition 53:

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a$$

Beispiel 180:

$$a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 6; a_4 = 9; c = 2$$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot a_i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (2 + 4 + 6 + 9) = 2 \cdot (21) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} a_i$$

Definition 54:

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} (a_i) \pm \sum_{i=m}^{n} (b_i)$$

Beispiel 181:

$$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6; b_1 = 5; b_2 = -2; b_3 = 4;\ c = 2$$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot a_i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (2 + 4 + 6 + 9) = 2 \cdot (21) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} a_i$$

$$\sum_{i=5}^{3} (a_i + b_i) = \sum_{i=5}^{3} (a_i) + \sum_{i=5}^{3} (b_i) = (3 + 5 + 6) + (5 - 2 + 4) = 14 + 7 = 21$$

Definition 55:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{für } k \leq m < n$$

Beispiel 182:

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{i=1}^{2} i^2 + \sum_{i=3}^{4} i^2 = (1^2 + 2^2) + (3^2 + 4^2) = 5 + 25 = 30$$

Folgende Regeln gelten nicht, diese werden aber fälschlicherweise oft verwechselt.

Definition 56:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i \ \text{ mit } m > 1$$

Beispiel 183:

$$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6; \mathrm{b}_1 = 5; \mathrm{b}_2 = -2; b_3 = 4$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot \mathrm{b_i} = 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 = 29$$

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{3} \mathrm{a_i} \cdot \sum_{\mathrm{i=1}}^{3} \mathrm{b_i} = (3 + 5 + 6) \cdot (5 - 2 + 4) = 14 \cdot 70$$

Definition 57:

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{a_i^2} \neq \left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{a_i}\right)^2$$

Beispiel 184:

$$\mathrm{a_1} = 3; \mathrm{a_2} = 5; \mathrm{a_3} = 6$$

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{3} \mathrm{a_i^2} = (3^2 + 5^2 + 6^2) = 9 + 25 + 36 = 70$$

$$\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{a_i}\right)^2 = (3 + 5 + 6)^2 = 14^2 = 196$$

Produktzeichen

Das Produktzeichen π wird dazu benutzt, um die Schreibung von Produkten abzukürzen.

Definition 58:

$$\prod_{i=1}^{m} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_m$$

Rechenregeln

Definition 59:

$$\prod_{i=k}^{m} a = a^{m-k+1}$$

Beispiel 185:

$$\prod_{i=1}^{4} 3 = 3^{4-1+1} = 3^4 = 81$$

Definition 60:

$$\prod_{i=k}^{m} c \cdot a_i = c^{m-k+1} \prod_{i=k}^{m} a_i$$

Beispiel 186:

$$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6$$

$$\prod_{i=1}^{3} 5 \cdot a_i = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 11.250$$

$$c^{m-k+1} \prod_{i=k}^{m} a_i = 5^{3-1+1} \prod_{i=1}^{3} a_i = 5^3 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 6) = 125 \cdot 90 = 11.250$$

Definition 61:

$$\prod_{i=k}^{m} (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=k}^{m} (a_i) \cdot \prod_{i=k}^{m} (b_i)$$

Beispiel 187:

$$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6; \mathrm{b}_1 = 5; \mathrm{b}_2 = -2; b_3 = 4$$

$$\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}} (\mathrm{a_i} \cdot b_i) = (3 \cdot 5) \cdot \big(5 \cdot (-2)\big) \cdot (6 \cdot 4) = 15 \cdot (-10) \cdot 24 = 3.600$$

$$\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}} (\mathrm{a_i}) \cdot \prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}} (b_i) = (3 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (5 \cdot (-2) \cdot 4) = 3.600$$

Definition 62:

$$\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}} a_i^2 = \left(\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}} a_i^2\right)^2$$

Beispiel 188:

$$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6$$

$$\prod_{\mathrm{i=1}}^{3} a_i^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 = 8.100$$

$$\left(\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}} a_i^2\right)^2 = (3 \cdot 5 \cdot 6)^2 = 8.100$$

Fakultät

Eine Multiplikation von verschiedenen Zahlen, beginnend bei Eins und fortlaufend, nennt man auch Fakultät. Dies ist eine verkürzte Schreibweise für das Produktzeichen.

Definition 63:

$$\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i} = \mathrm{a_1} \cdot \mathrm{a_2} \cdot \dots \cdot \mathrm{a_m} = \mathrm{n!}$$

Beispiel 189:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist eine mathematische Funktion, mit der sich eine der Grundaufgaben der Kombinatorik lösen lässt.

Definition 64:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel 190:

$$\binom{49}{6} = 13.983.816$$

Potenzreihen

Potenzreihen sind Reihen, die die Potenzen $x^0, x^1, x^2, \ldots$ einer Unbestimmten x enthalten, wie zum Beispiel

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

oder

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der folgenden Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_k x^k + \ldots$$

mit einer *Variablen* x und (konstanten) *Koeffizienten* $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Viele wichtige ingeneurmathematische Funktionen lassen sich durch Potenzreihen darstellen (oder: „in Potenzreihen entwickeln", wie man auch sagt).

Drei wichtige Potenzreihen-Beispiele

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2\,k)!}$$

Wieso das so ist und wie man die Potenzreihenentwicklung einer Funktion finden kann, werden wir bald noch sehen.

Wenn man die Potenzreihe einer Funktion nach der n-ten Potenz abbricht, erhält man eine Näherungsformel für diese Funktion.

Je mehr Terme man dabei berücksichtigt, umso genauer ist diese Näherungsformel.

Außerdem spielt die Größe von x eine wichtige Rolle: je näher x bei Null liegt, umso genauer ist ebenfalls diese Näherung.

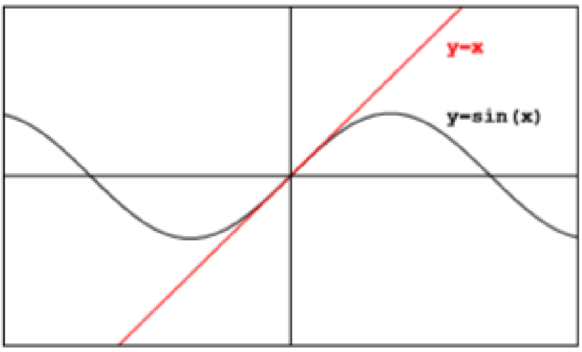
Das bedeutet: will man Näherungen haben, die auch für größere x-Werte genau sind, so muss man entsprechend höhere Potenzen der Reihenentwicklung berücksichtigen, darf die Reihe also erst später abbrechen.

Beispiel 191:

Beispiel Näherung erster Ordnung für $\sin(x)$
Bricht man die Sinus-Reihe gleich nach dem ersten Term, d.h. nach der Potenz x^1, ab so erhält man

$$\sin(x) \approx x$$

Diese Näherung (lineare Näherung durch die Tangente) ist natürlich nur für kleine Werte von x zu gebrauchen. Siehe das nebenstehende Diagramm.

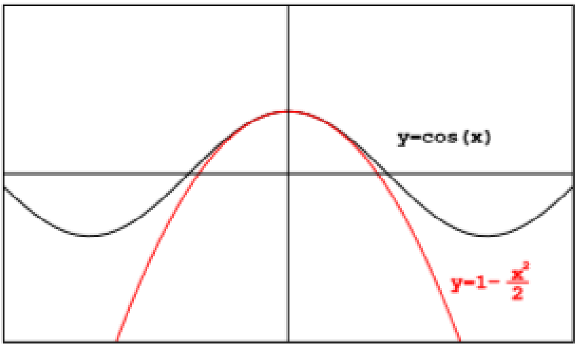


Beispiel 192:

Beispiel Näherung zweiter Ordnung für $\cos(x)$
Bricht man die Kosinus-Reihe nach dem quadratischen Term ab, so ergibt sich

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Die Näherungskurve ist eine nach unten geöffnete Parabel, die sich in den Bogen der Kosinus-Kurve in der Umgebung des zentralen Maximums bei $x = 0$ einschmiegt.

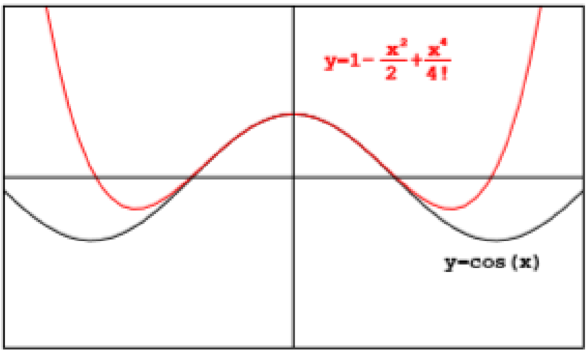


Beispiel 193:

Beispiel Näherung vierter Ordnung für $\cos(x)$
Bricht man die Kosinus-Reihe nach dem Term vierter Ordnung ab, so

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Man sieht, wie die Näherungskurve nun über einen etwas größeren Bereich in der Nähe der Kosinus-Kurve bleibt, bzw. entsprechend bessere Näherungswerte liefert.



Schauen wir uns nun noch einmal unser allererstes simples Beispiel einer Potenzreihe an:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Wird dadurch auch eine Funktion dargestellt, wie ja die Bezeichnung $P(x)$ suggeriert? Und, wenn ja, welche? Wenn wir einzelne Werte für x einsetzen, erhalten wir z.B.

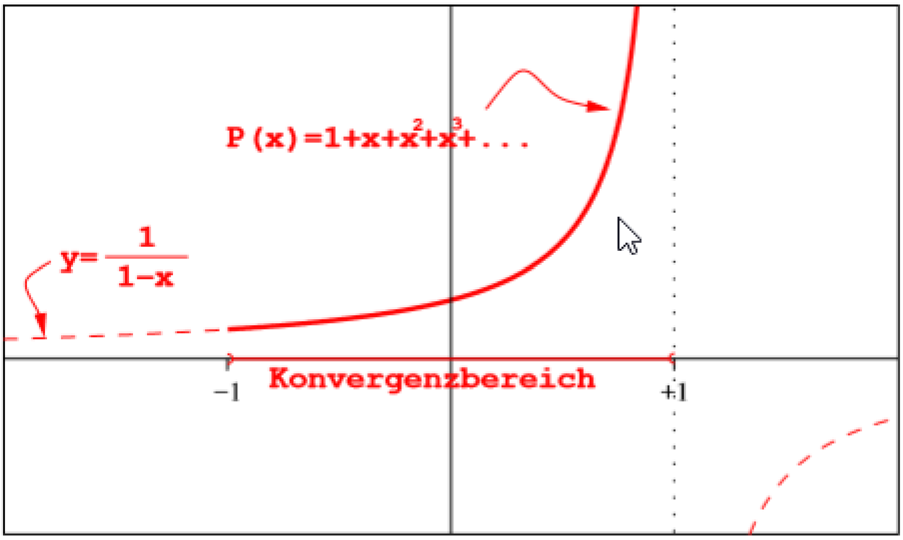
$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$P\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{7}$$

Es ergibt sich ja jedesmal eine geometrische Reihe. Der eingesetzte Wert x entspricht dem konstanten Quotienten q. Die Reihe konvergiert, wenn der eingesetzte x-Wert betragsmäßig kleiner ist als Eins. Also generell:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{falls} \quad -1 < x < +1$$

Diese Potenzreihe stellt also in der Tat eine Funktion dar, nämlich die durch $y = \frac{1}{1-x}$ mit $x \neq 1$ beschriebene Funktion. ABER die Darstellung beschränkt sich auf den Konvergenzbereich $-1 < x < +1$ dieser Potenzreihe.



Dieses Phänomen ist typisch für Potenzreihen im allgemeinen:

Konvergenzbereich einer Potenzreihe
Jede Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

besitzt einen sogenannten *Konvergenzradius* R mit $0 \leq R \leq \infty$. Es gilt:

- Innerhalb des Intervalls $-R < x < +R$ ist die Reihe konvergent.
- Außerhalb, also für $x < -R$ oder $x > +R$, divergiert die Reihe.

(Für die Randstellen $x = -R$ bzw. $x = +R$ ist eine allgemeine Aussage nicht möglich.)

Übrigens kann man in einigen Fällen den Konvergenzradius aus den Koeffizienten a_k folgendermaßen berechnen: Man bestimmt den Grenzwert[1]

$$Q = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

Wenn das gelingt, so ist R einfach der Kehrwert:

$$R = \frac{1}{Q}$$

Beispiel Konvergenzradien zur geometrischen sowie Exponential-, Sinus- und Kosinus-Reihe.

- Die geometrische Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ hat den Konvergenzradius $R = 1$.
- Die Reihenentwicklungen von e^x, von $\sin(x)$ und von $\cos(x)$ haben jeweils den Konvergenzradius $R = \infty$. Diese Reihen sind *überall konvergent*.

Beispiel Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^k \cdot x^k = 1 + x + 4\,x^2 + 27\,x^3 + 256\,x^4 + \ldots$

… hat Konvergenzradius 0: sie ist *nirgends konvergent* (außer natürlich bei $x = 0$).

Rechnen mit Potenzreihen
Im Inneren des Konverbereichs der beteiligten Reihen lassen sich Potenzreihen[a] addieren, subtrahieren, multiplizieren, differenzieren und integrieren wie Polynome. Der Konvergenzbereich der Ergebnisreihe ist jeweils mindestens so groß wie der kleinste der beteiligten Ausgangsreihen.

[a] Nur beim Dividieren muss man etwas vorsichtig sein …

Beispiel Ableitung der Exponentialreihe
Wir gehen aus von der überall konvergenten Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

die wir Term für Term differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^x &= 0 + 1 + \frac{2 \cdot x}{2!} + \frac{3 \cdot x^2}{3!} + \frac{4 \cdot x^3}{4!} + \dots \\ &= 0 + 1 + \quad x \quad + \quad \frac{x^2}{2!} \quad + \quad \frac{x^3}{3!} \quad + \dots \end{aligned}$$

Wir erhalten das wohlbekannte Resultat:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Beispiel Reihenentwicklung für $\sin(x) - x \cdot \cos(x)$
Da die beteiligten Reihen überall konvergieren, sind unsere Rechnungen für beliebige x-Werte gültig. Wir gehen aus von der Sinus-Reihe:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}$$

und der mit x multiplizierten Kosinus-Reihe:

$$x \cdot \cos(x) = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \frac{x^9}{8!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2\,k)!}$$

Wir berechnen die Differenz Potenz für Potenz und Koeffizient für Koeffizient. Der x-Term fällt dabei vollständig heraus. Es ergibt sich

$$\frac{-1}{3!} - \frac{-1}{2!} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{+1}{5!} - \frac{+1}{4!} = \frac{-1}{30}, \qquad \frac{-1}{7!} - \frac{-1}{6!} = \frac{1}{840}, \qquad \frac{1}{9!} - \frac{1}{8!} = \frac{-1}{45\,360}, \qquad \text{usw.}$$

und man erhält die für alle x konvergente Reihenentwicklung

$$\sin(x) - x \cdot \cos(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} - \frac{x^9}{45\,360} + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k-1)! \cdot (2k+1)}$$

Beispiel Die Arkustangensreihe

Wir gehen aus von der für $-1 < x < +1$ konvergenten geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

und ersetzen dort x durch $-x^2$. (Es ist $-1 < x < +1 \Leftrightarrow -1 < -x^2 < 1$.) Wir bekommen

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots$$

Durch Integration erhalten wir eine Reihendarstellung des Arkustangens:

$$\begin{aligned}
\arctan(X) &= \int_0^X \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \int_0^X \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots\right)\,dx \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots\right]_{x=0}^{x=X} \\
&= X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} - \frac{X^7}{7} + - \ldots
\end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe übrigens auch noch auf dem Rand für $X = 1$ konvergent. Man erhält:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Beispiel $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \cdots = \frac{3}{4}$

Wir gehen wieder aus von der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

die wir Term für Term differenzieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

und anschließend mit x multiplizieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Die Reihen konvergieren für $-1 < x < +1$, sodass wir $x = \frac{1}{3}$ einsetzen dürfen. Das ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$$

Hier beschäftigen wir uns mit Potenzreihen sowie mit der Bestimmung des Konvergenzradius von Potenzreihen.

Um direkt zu den Aufgaben zu kommen klicke hier!

Eine allgemeine Potenzreihe hat immer die Form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n$$

wobei a eine beliebige Folge im reellen oder im komplexen ist. x_o wird als der sogenannte Entwicklungspunkt bezeichnet und ist fest gegeben.

In der Regel interessieren wir uns dafür, für welche x diese Funktion konvergiert, das bedeutet hier also auch, wo sie überhaupt richtig definiert ist.

Es gilt: f(x) konvergiert entweder nur in x_0 oder auf einem bestimmten Intervall (im Falle einer reellen Folge) bzw einem Kreis (im Falle einer komplexen Folgen) um x_0 herum oder sie konvergiert auf allen reellen bzw komplexen Zahlen.

Die betragsmäßig größte Zahl, für die gilt, dass alle betragsmäßig kleineren Zahlen konvergieren wird als der Konvergenzradius R bezeichnet:

$$R = \sup \left\{ |x - x_0| \middle| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n \right\}$$

Wichtig ist hier, dass die Potenzreihe für R selber nicht unbedingt konvergieren muss, sondern nur für alle Zahlen, die betragsmäßig kleiner sind als R! Die Menge, auf der f(x) konvergiert kann also offen sein (muss es aber nicht).

Für die Berechnung des Konvergenzradius einer Potenzreihe gelten grundsätzlich natürlich die gleichen Regeln, wie für alle anderen Reihen auch.

Am einfachsten lässt sich R jedoch mit folgenden Formeln berechnen:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Das ist die Formel von Euler und ist meist relativ einfach anwendbar, führt aber leider nicht immer zum Ziel, während die Formel von Cauchy-Hadamard immer funktioniert:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a_n})}$$

wobei der lim sup nichts anderes ist als der größte Häufungspunkt der Folge – im Falle einer konvergenten Folge also gleich dem lim.

Als Beispiel berechnen wir den Konvergenzradius der Exponentialfolge:

$$f(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Entwicklungspunkt in diesem Fall – und in vielen anderen Fällen ebenfalls – ist einfach 0. Wir betrachten also nur die Folge:

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Mit der ersten Formel sind wir schnell fertig:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty$$

Die Exponentialfunktion ist also auf allen reellen Zahlen definiert (was wir auch schon vorher wussten...)

Eine praktische Anwendung der Potenzreihen ist, dass sie innerhalb des Konvergenzradius komponentenweise integriert werden dürfen, was normalerweise nur für endliche Summen gilt. So kann man beispielsweise auch durch Integration und Rückdifferentiation den Wert einer Reihe bestimmen!

https://homepages.thm.de/~hg12496/b2/02.01-potenzreihen

http://www.mathe-online.at/mathint/potr/i.html

http://mathe-im-studium.de/mathestudium/potenzreihen/

Taylorreihen

Fourierreihen

Differentialgleichungen

Einleitung

Differentialgleichungen spielen in der höheren Mathematik und Physik eine wichtige Rolle, werden aber nicht vom Lehrplan der gymnasialen Kollegstufe erfasst und sind, wenn überhaupt, lediglich ein Randthema in den Analysisstunden.

Das Bemerkenswerte an Differentialgleichungen ist, dass vor allem Veränderungen von bestimmten Größen relativ einfach als Differentialgleichung formuliert werden können, was die Berechnung wesentlich vereinfachen kann.

Die vorliegende Arbeit will nun zunächst in das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen einführen, wichtige Grundbegriffe erklären, Lösungsmethoden für Differentialgleichungen aufzeigen, wobei auch mathematische Sonderfälle wie die Bernoulli'sche und Riccati'sche Differentialgleichung behandelt werden, anschließend auf einige praktische Anwendungen von Differentialgleichungen aus der Physik, Biologie und der zwischenmenschlichen Kommunikation eingehen und schließlich zwei Algorithmen zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen vorstellen.

Dabei werden die einzelnen Themenschwerpunkte durch Beispiele und Graphen verdeutlicht; Lösungsmethoden, Gleichungen und Modelle werden nachvollziehbar hergeleitet.

Wo aus Gründen der Komplexität des Themas die Behandlung nicht mehr möglich ist, wird auf weitere Literatur verwiesen, so dass man, falls Interesse bestehen sollte, auch selbstständig weiter in die Materie vordringen kann.

Definition einer Differentialgleichung

Die ersten Gleichungen, denen man begegnet, sind solche wie

$1+1=2$ oder $2 \cdot 3=6$

Der Term auf der linken Seite ist gegeben und der Schüler hat die Aufgabe, die Lösung auf der rechten Seite einzusetzen.

Später lernt man dann, Gleichungen der Form

$$x^2-2x-3=0$$

zu lösen, beispielsweise mit der quadratischen Lösungsformel:

$$x_{1/2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

folgt

$$x_1=-1 \quad \text{und} \quad x_2=3$$

Wir beschäftigen uns zunächst weiter mit der Gleichung $x^2-2x-3=0$

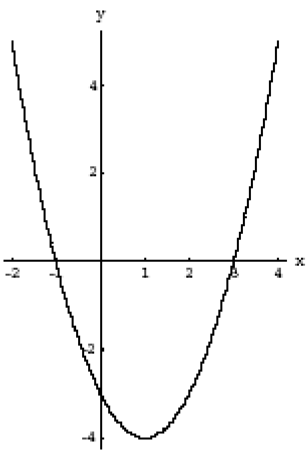
Diesem Problem kann man nun eine geometrische Bedeutung geben, indem man die Gleichung durch eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift

$$y(x)=x^2-2x-3=0$$

ausdrückt und nach den Nullstellen dieser Funktion sucht.

Die Zahlenpaare (-1;0) und (3;0) stellen Punkte auf der x -Achse und gleichzeitig auch die Lösungen dieses Problems dar.

Wird y keinen solchen Beschränkungen unterworfen, so erhält man unendlich viele Zahlenpaare (x;y), die die Gleichung erfüllen und den Graphen der Funktion, in diesem Fall eine Parabel (siehe folgende Abbildung), bilden.



$y=x^2-2x-3$

Nun wird die erste Ableitung der Funktion betrachtet:

$$y'(x)=2x-2$$

Wäre nur diese letzte Gleichung gegeben, so stünde man jetzt vor der Frage, wie die ursprüngliche Funktion y(x)lautet. Gelingt die Beantwortung dieses Problems, so hat man schon eine erste, sehr einfache Differentialgleichung gelöst.

Da die Differentialgleichung durch das Ableiten einer Funktion entstanden ist, liegt es nahe, die Lösung mit Hilfe der Integration zu suchen. Beide Seiten werden nun unbestimmt nach *x* integriert:

$$\int y'(x)dx = \int (2x-2)dx$$

Man erhält:

$$y(x) + k = x^2 - 2x + l \qquad \text{mit } k, l \in R$$

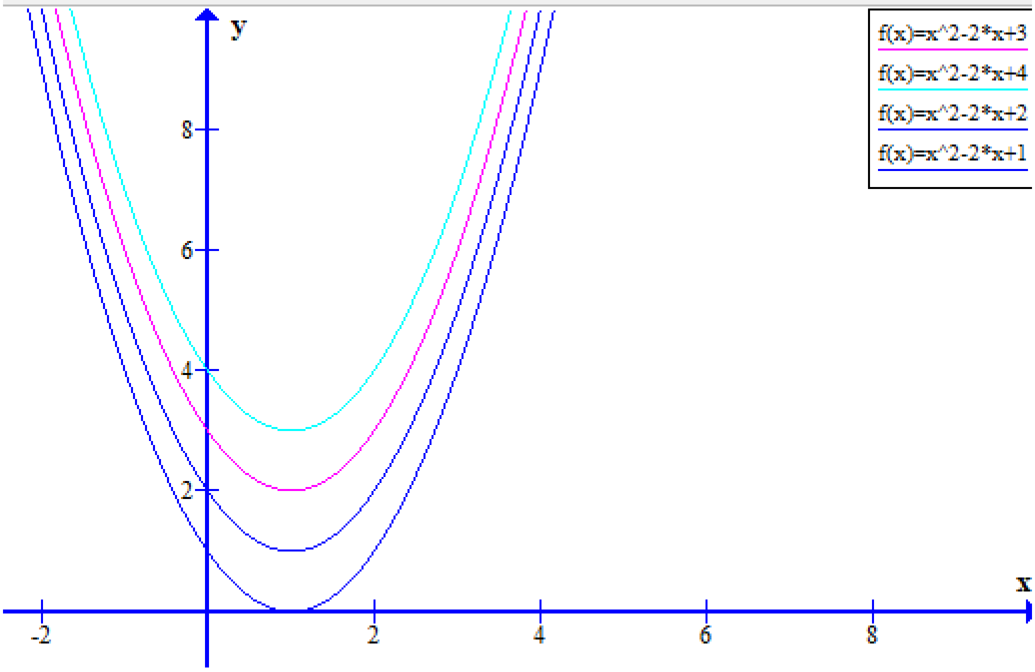
und ersetzt die Differenz der Integrationskonstanten *k* und *l* durch eine neue Konstante *c:*

Aus

$$y(x) = x^2 - 2x + (l - k)$$

folgt

$$y(x) = x^2 - 2x + c \qquad \text{mit } c \in R$$



Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 2x - 2$ ist also eine Parabelschar mit einer willkürlichen Konstanten. Da sich die ursprüngliche Parabel in dieser Schar befinden muss, setzt man beispielsweise einen bekannten Punkt von vorher ein:

Einsetzen von (-1;0)

$$0 = (-1)^2 - 2(-1) + c$$

zeigt, dass *c* den Wert $c = -3$ annimmt; man erhält also wieder die Parabel

$$y(x) = x^2 - 2x - 3$$

Auch das Einsetzen eines beliebigen Punktes

$P_0(x_0, y_0) = (x_0, x_0 - 2x_0 - 3)$

der ursprünglichen Parabel führt auf

$x_0^2 - 2x_0 - 3 = x_0^2 - 2x_0 + c$

und damit wieder auf $c = -3$.

An Hand dieses einfachen Beispiels lassen sich bereits einige wichtige Begriffe erklären:

Definition 65:

Als Differentialgleichung bezeichnet man eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion von einer oder mehreren Variablen, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen.

Beispiel 194:

$f(x) = f'(x)$

Allgemeine und partikuläre Lösung

Definition 66:

Da die Lösung der Differentialgleichung durch Integration erhalten wurde, werden die Lösungen einer Differentialgleichung auch ihre Integrale genannt.

Definition 67:

Eine Differentialgleichung zu lösen heißt demnach, alle Funktionen y(x) zu bestimmen, die mit ihren Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt für alle *x* der Schnittmenge der Definitionsbereiche der Funktionen und ihrer Ableitungen eine wahre Aussage ergeben.

Dies setzt natürlich voraus, dass als Lösungen lediglich differenzierbare – und damit stetige – Funktionen in Frage kommen.

Weiterhin werden in diesem Skript lediglich reelle Funktionen betrachtet.

Im Beispiel $y(x) = x^2 - 2x + c$ erhielt man zunächst in eine unendliche Menge von Funktionen, die die Differentialgleichung $y'(x) = 2x - 2$ erfüllten und sich nur durch eine willkürliche Konstante unterschieden.

Definition 68:

Die Gesamtheit dieser Funktionen wird als allgemeine Lösung oder allgemeines Integral der Differentialgleichung bezeichnet, wohingegen eine einzelne Funktion der Schar **partikuläre Lösung oder partikuläres Integral** genannt wird.

Anfangswertproblem

Die partikuläre Lösung $y(x)=x^2-2x-3$ wurde im Beispiel durch die Bedingung erhalten, dass die Lösungskurve durch einen bestimmten Punkt P_0 gehen sollte.

Definition 69:

Einen solchen vorgegebenen Wert $y(x_0)=y_0$ bezeichnet man als Anfangswert. Eine Differentialgleichung mit vorgegebenen Anfangswerten wird als Anfangswertproblem bezeichnet.

Begriff der Differentialgleichung (DGL)

Bei den Differentialgleichungen handelt es sich um Gleichungen, die zur Berechnung einer bestimmten Funktion dienen.

Diese Gleichungen können die gesuchte Funktion oder die unabhängige Veränderliche enthalten.

Das wesentliche einer Differentialgleichung ist aber, dass in ihr mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion auftritt. Folgende wichtige Aussagen gelten für Differentialgleichungen:

- Jede Gleichung, die eine oder mehrere Ableitungen der gesuchten Funktion enthält, heißt eine Differentialgleichung.
- Jede Funktion, welche die Differentialgleichung erfüllt, ist eine Lösung oder ein Integral der Differentialgleichung.
- Tritt in einer Differentialgleichung die n-te Ableitung der gesuchten Funktion als höchste Ableitung auf, so nennt man die Differentialgleichung von n-ter Ordnung.
- Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält genau *n* unbestimmte Integrationskonstanten

Gewöhnliche Differentialgleichung, Ordnung der Differentialgleichung

Definition 70:

Kommen in einer Differentialgleichung nur Ableitungen von lediglich einer unabhängigen Veränderlichen vor, so bezeichnet man diese Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung, wobei n der Grad der höchsten ist.

Beispiel 195:

$$x \cdot y' + y = 0$$

Lineare Differentialgleichungen

Definition 71:

Treten weiterhin die unbekannte Funktion y(x) und ihre Ableitungen y'(x), y''(x),′ usw. nur in der ersten Potenz auf und nicht in gemischten Gliedern wie beispielsweise y(x)·y'(x), so bezeichnet man diese Differentialgleichung als **gewöhnliche lineare Differentialgleichung *n* - ter Ordnung.**

Beispiel 196:

$$y'' - \alpha \cdot x \cdot y = 0$$

Explizite und implizite Differentialgleichungen

Des Weiteren können Differentialgleichungen in explizite und implizite Differentialgleichungen eingeteilt werden, wobei jedoch in der Literatur verschiedene Definitionen verwendet werden.

Während einige Autoren definieren, dass eine Differentialgleichung genau dann „explizite Differentialgleichung" hieße, wenn sie nur nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösbar sei, kann man auch oft die Definition finden, dass eine Differentialgleichung genau dann „explizite Differentialgleichung" hieße, wenn sie bereits nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist; explizite Differentialgleichungen stellen also nach dieser Definition lediglich eine Teilmenge der nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösbaren Funktionen dar.

Da die Unterscheidung zwischen expliziten und impliziten Differentialgleichungen jedoch nur zeigen soll, dass für implizite Differentialgleichungen nicht die selben Lösungsverfahren verwendet werden können wie für explizite Differentialgleichungen, wird in dieser Arbeit nach der ersten, weiter gefassten Definition verfahren.

Definition 72:

Differentialgleichungen, die nicht nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösbar sind, heißen „**implizite Differentialgleichungen**". Somit heißen dann Differentialgleichungen "**explizite Differentialgleichungen**" wenn sie nicht nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösbar sind

Homogene und inhomogene Differentialgleichungen

Schließlich lassen sich Differentialgleichungen noch nach ihrer Homogenität unterscheiden:

Zunächst geht man von einer einfachen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung aus:

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$$

Aus der Eigenschaft „1. Ordnung“ folgt

$$a(x)\neq 0$$

und man dividiert ohne Einschränkung der Allgemeinheit beide Seiten durch a(x):

$$y'(x)+k(x)y(x)=l(x)$$

Definition 73:

Die Funktion c(x)beziehungsweise l(x) werden als Störglied bezeichnet.

Definition 74:

Ist c(x)=0 beziehungsweise l(x)=0, so bezeichnet man die Differentialgleichung als homogen, andernfalls als inhomogen.

Der Existenzsatz von Cauchy

Nach dieser Klassifizierung der Differentialgleichungen ist noch festzustellen, dass es nicht immer möglich ist, eine allgemeine Lösung durch eine Formel auszudrücken.

Definition 75:

Nach dem Existenzsatz von Cauchy existiert jedoch für die Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y)$ (eine Differentialgleichung 1. Ordnung) wenigstens eine Lösung, die den Anfangswert $y(x_0) = y_0$ erfüllt und in einem Intervall um x_0 definiert und stetig ist, wenn die Funktion f(x,y) in einer Umgebung G des Punktes (x_0,y_0), die durch das Rechteck $\left[|x - x_0| < a\right] \times \left[|y - y_0| < b\right]$ festgelegt ist, stetig ist.

Dieser Existenzsatz gilt auch für explizite Differentialgleichungen *n* -ter Ordnung, da diese immer auf ein System von *n* Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt werden können, welches ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem besitzt.

Möglichkeiten der graphischen Darstellung von Differentialgleichungen

Die Tatsache, dass eine allgemeine Lösung einer Differentialgleichung jedoch immer von mindestens einer willkürlichen Konstanten abhängig ist, führt zu Problemen bei der graphischen Darstellung der Lösung von Differentialgleichungen.

Zeichnen von Differentialgleichungen

Schauen wir uns einmal die Differentialgleichung

$$y' - x^2 = y^2$$

an und versuchen sie zu zeichnen.

Umstellen der DGL:

$$y' = x^2 + y^2$$

Bereich wählen

Nun müssen wir den zu zeichnenden Bereich wählen. Der Ausdruck

$$x^2 + y^2$$

ist symmetrisch um Null, d.h. wenn man −x bzw. −y statt x bzw. y einsetzt, kommt wieder das gleicher heraus. Also nehmen wir doch einen Bereich um den Ursprung.

Es macht außerdem Sinn, einen nicht zu großen Bereich zu wählen, da sich sonst die einzelnen Strecken nicht großartig unterscheiden. Wir legen also unseren Bereich als

$-2 \leq x \leq 2$ und $-2 \leq y \leq 2$

fest, d.h. dass wir auf der x- und der y-Achse Werte von −2 bis 2 betrachten.

Raster festlegen

Um nicht zu viel zu zeichnen, setzen wir als Raster einfach alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten fest. Manchmal nennt man den Abstand zwischen zwei nebeneinander liegenden Punkten auch Schrittweite. In diesem Fall wäre das eine Schrittweite von 1.

Werte bestimmen und Steigung einzeichnen

Nun geht es ans Rechnen - und Zeichnen. Wir setzen jetzt Punkt für Punkt in die Funktion

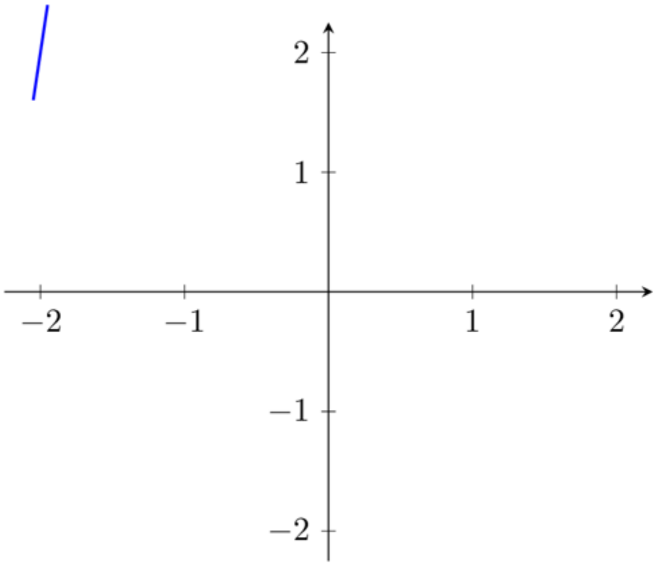
$f(x, y) = x^2 + y^2$

ein und zeichnen je eine kleine Strecke mit dem Ergebnis als Steigung ein.

Der Punkt $(-2, 2)$ (links oben) ergibt in die Funktion eingesetzt

$$f(-2, 2) = (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

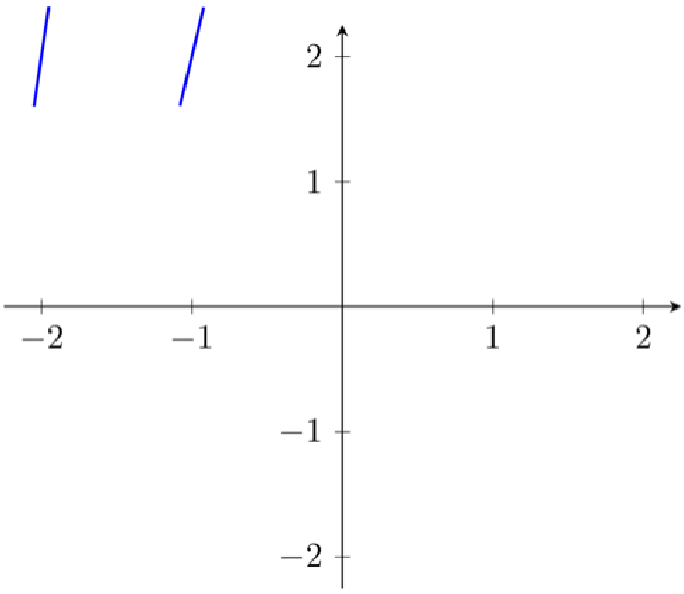
Also zeichnen wir bei $(-2, 2)$ eine kleine Strecke mit Steigung 8 ein:



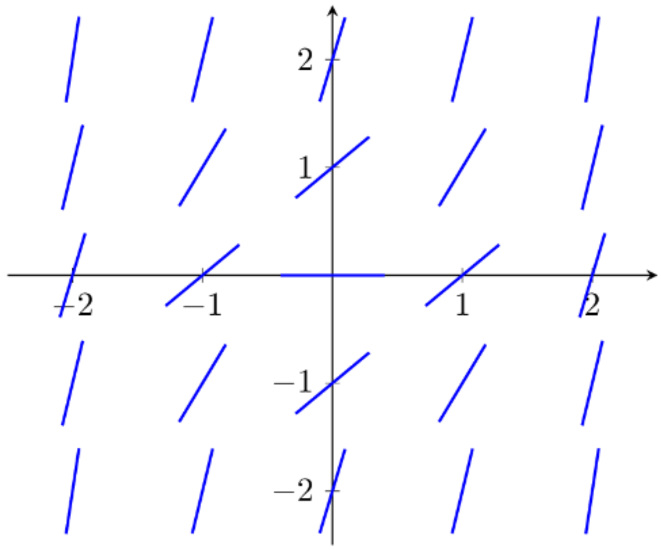
Bei dem Punkt $(-1, 2)$ (rechts daneben) errechnen wir

$$f(-1, 2) = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

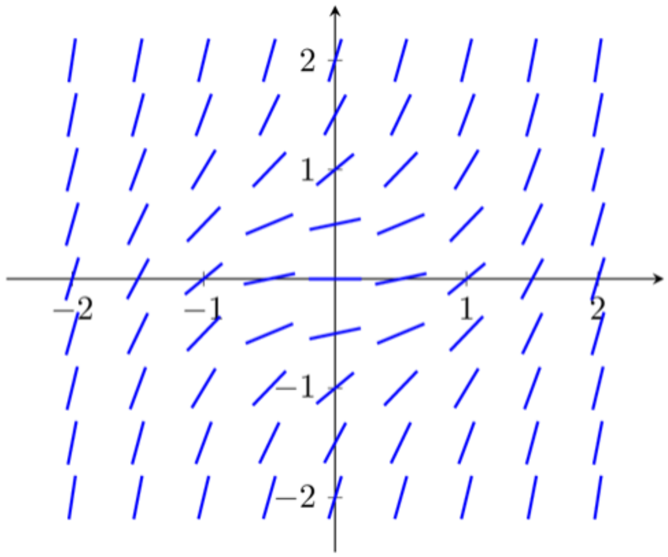
und zeichnen deswegen eine Strecke mit Steigung 5 an den Punkt $(-1, 2)$.



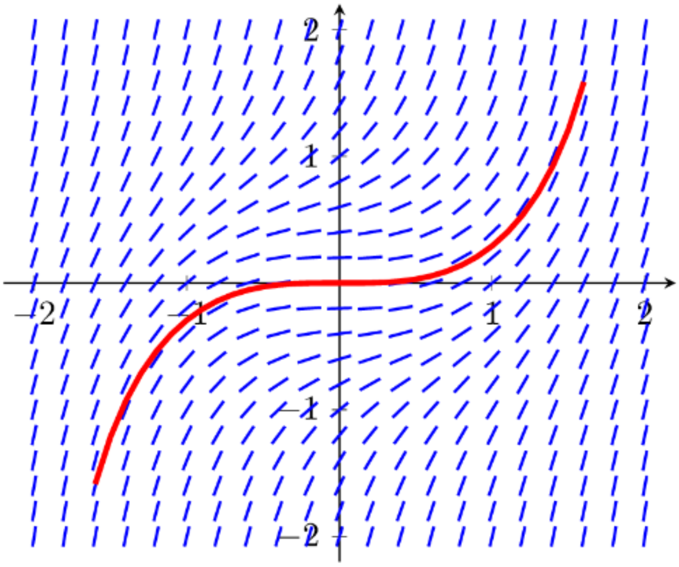
Nachdem wir das an allen Punkten gemacht haben, sieht das Bild so aus:



An je mehr Punkten man die Steigung einzeichnet, desto genauer wird das Bild. Hier das gleiche Beispiel, wenn an allen Vielfachen von $0,5$ die Steigungen eingezeichnet wurden:



Das Anschmiegen einer Lösung der DGL ist hier zu sehen:



In der Literatur sind drei Grundmodelle der graphischen Darstellung üblich:

- Die am häufigsten verwendete Methode ist das Einzeichnen von kleinen Tangentenstücken, die das so genannte Richtungsfeld der Lösungen bilden
- Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Tangentenstücke durch kleine Vektorpfeile zu ersetzen.
- Die dritte Methode ist das exakte Ausrechnen der allgemeinen Lösung und das anschließende Zeichnen der Funktionenschar für einige ausgewählte Werte der Konstanten

Trennung der Variablen

Eine weitere relativ einfache Integrationsmethode ist die so genannte Trennung der Variablen.

Definition 76:

Dieses Verfahren beschränkt sich auf gewöhnliche explizite Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Veränderlichen für die Funktion y=y(x) , also Differentialgleichungen der Form

$$y' = g(x)h(y)$$

g ist also ausschließlich von *x* ,*h* ausschließlich von *y* abhängig.

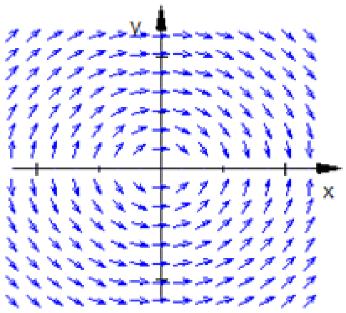
Beispiel 197:

(2) $$y' = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow y'y = -x \Rightarrow \int y\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2C.$$

Dies ist eine Kreisgleichung (Formel 15VR). Bei der Lösungsmenge handelt es sich also um konzentrische Kreise um den Ursprung. Dieses Beispiel zeigt auch, dass es nicht immer sinnvoll ist, nach einer expliziten Form der Lösung zu suchen, da uns dann eine Kreishälfte verloren ginge.

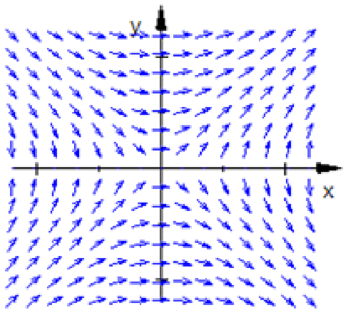


y'=-x/y

Ändern wir in der Differentialgleichung (2) das Vorzeichen: $y' = \frac{x}{y}$, so können wir den Rechenweg unter Beachtung des geänderten Vorzeichens übernehmen und erhalten als Lösung Kurven der Gestalt $y^2 - x^2 = 2C$, wobei es sich um Hyperbeln handelt.

Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so.

Richard Feynman



y'=x/y

Beispiel 198:

Mit dieser Methode lässt sich beispielsweise die Differentialgleichung

$y' = y + 1$ lösen:

Wie man sieht, ist in diesem Beispiel g(x)=1 und h(y)=y+1.

Zunächst wird die Funktion h(y) auf Nullstellen untersucht, da ihre Nullstellen bereits Lösungen der Differentialgleichung darstellen.

Man findet die Nullstelle $y_0 = -1$ und damit die erste Lösungsfunktion: die konstante Funktion y=-1.

Anschließend wird nach dem Lösungsmuster vorgegangen:

$$y' = y + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (y+1)$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int 1dx$$

$$\ln(|y+1|) = x + c \quad c \in R$$

$$|y+1| = e^{x+c}$$

$$|y+1| = e^{x} \cdot e^{c}$$

man subst. $c_1 = \pm e^{c}$

$$1 + y = c_1 e^{x} \quad c_1 \neq 0$$

und schreibt für die allgemeine Lösung (mit y(x)=-1)

$$y(x) = c_1 e^{x} - 1; c \in \mathbb{R}$$

Probe:

$$y' = y + 1$$

$$c_1 e^{x} = c_1 e^{x} - 1 + 1$$

$$c_1 e^{x} = c_1 e^{x}$$

Beispiel 199:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Lösung:

$g(x) = -x$ und $h(x) = \frac{1}{y}$

$$y' = -x \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{y}$$

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = \int -xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = 2c - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 2c$$

Setzt man $2c=r^2$ so erkennt man aus der Darstellung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

für das allgemeine Integral der Differentialgleichung, dass die Schar der Lösungskurven mit der Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt des Koordinatensystems identisch sind.

Beispiel 200:

Wir wollen die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1+y^2}{xy},$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ ermitteln.

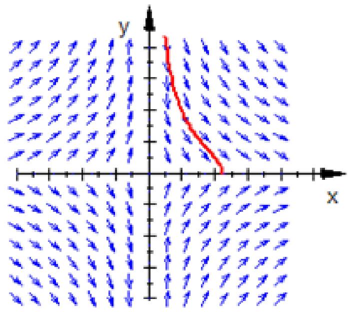
Die Trennung der Variablen lässt sich leicht herbeiführen: $\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = -\ln x + C$

$\Rightarrow 1+y^2 = e^{-2\ln x+2C} = e^{-2\ln x} \cdot e^{2C} \Rightarrow 1+y^2 = \frac{K}{x^2}$ (mit $K = e^{2C}$, $K > 0$)

Durch Einsetzen finden wir für das Anfangswertproblem die Lösung $K = 5$ und damit ergibt sich

$$y = \sqrt{\frac{5}{x^2} - 1}$$

Der negative Zweig der Wurzelfunktion kommt dabei nicht in Frage, da $y(1) = 2 > 0$ gelten muss.



y'=- (1+y^2)/(xy)

Beispiel 201:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$y' = \frac{y}{x^2}$ $(x \neq 0)$

Lösung:

$$y' = \frac{1}{x^2}\, y \qquad (x \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2} \qquad (y \neq 0)$$

$$ln|y| = -x^{-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{ln|y|} = e^{-\frac{1}{x}+C}$$

$$|y| = e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{x}} \cdot K \quad \text{mit} \quad K = \pm e^C, \quad \text{d. h. } K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Beispiel 202:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y' = \frac{y+1}{x-1} \; mit \; x > 1$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y+1}{x-1} \quad \text{mit } x > 1 \\
\int \frac{dy}{y+1} &= \int \frac{1}{x-1} dx \qquad (y \neq -1) \\
\ln|y+1| &= \ln|x-1| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
|y+1| &= |x-1|\, e^C \\
|y+1| &= (x-1)\, e^C \\
y &= -1 + (x-1) \cdot K, \quad K = \pm e^C, \quad \text{d.h. } K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Beispiel 203:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$y' = -4x\sqrt{y-1}, \qquad y \geq 1$

Lösung:

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = -4x\sqrt{y-1}$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = -\int 4x\,dx, \quad y > 1$$

Das linke Integral berechnet man sofort, wenn man den Integranden in Potenzschreibweise bringt.

$$\Rightarrow 2\sqrt{y-1} = -2x^2 + C$$
$$\sqrt{y-1} = -x^2 + \frac{C}{2}$$
$$y - 1 = \left(-x^2 + K\right)^2, \quad K = \frac{C}{2}$$
$$\Rightarrow y = 1 + \left(-x^2 + K\right)^2$$

Wegen $\sqrt{y-1} > 0$ muss auch $(-x^2 + K) > 0$ gelten.
Mit $x^2 < K$ folgt $K > 0$.

Die allgemeine Lösung wird gebildet aus der Kurvenschar

$$y(x) = 1 + \left(-x^2 + K\right)^2 \quad \text{für} \quad |x| \leq \sqrt{K}$$

und der Geraden $y(x) = 1$, siehe Abbildung 3.1.

Variation der Konstanten

Die Gleichung

$$y' + f(x) \cdot y + g(x) = 0$$

ist die allgemeine Form einer linearen inhomogenen Differenzialgleichung 1. Ordnung.

Hier können die Variablen nicht getrennt werden.

Mit Variation der Konstanten wird eine Methode zum Integrieren dieser Gleichung bezeichnet.

Die Vorgehensweise besteht darin, zuerst die zugehörige homogene Differenzialgleichung zu lösen, d.h., das Glied g(x) zu vernachlässigen.

In diese Lösung geht ein freier Parameter c ein.

Dieser wird dann als Funktion von x betrachtet und so bestimmt, dass die so modifizierte Lösung der linearen homogenen Differenzialgleichung der inhomogenen genügt.

Bei der folgenden Lösung der Differenzialgleichung wird die Existenz der Lösung in einem Bereich der xy-Ebene vorausgesetzt.

Zur Berechnung des Integrals von

$$y' + f(x) \cdot y + g(x) = 0$$

löst man zuerst

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Das ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen.

$$\frac{y'}{y} = -f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = -f(x)$$

$$\frac{1}{y} dy = -f(x)dx$$

Integration

$$\ln(y) = -\int f(x)dx + c$$

Umkehrfunktion

$$y = ce^{-\int f(x)dx}$$

Für c=c(x) ergibt sich nach der Ableitung

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} + c(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} \cdot \big(-f(x)\big)$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} - c(x) \cdot f(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

Einsetzen von y und y' in die inhomogene Differenzialgleichung ergibt

$$y' + f(x) \cdot y + g(x) = 0$$

$$c'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} - c(x) \cdot f(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} + f(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} + g(x) = 0$$

Zwei Summanden heben sich aufheben, folgt:

$$\mathrm{c'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} + g(x) = 0}$$

$$\mathrm{c'(x) = \frac{-g(x)}{e^{-\int f(x)dx}}}$$

$$\mathrm{c'(x) = -g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}}$$

$$\mathrm{c'(x) = -g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}}$$

$$\mathrm{c(x) = -\int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}\, dx}$$

Damit lautet das allgemeine Integral:

$$\mathrm{y = c(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}}$$

$$\mathrm{y = -\int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}\, dx \cdot e^{-\int f(x)dx}}$$

$$\mathrm{y = e^{-\int f(x)dx}\left\{\int -g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}\, dx\right\}}$$

Für das Integral durch den Punkt P(x_0; y_0) muss gelten

$$c(x_0) = y_0, also$$

$$c(x) = y_0 - \int_{x_0}^{x} g(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} f(x)dx} dx$$

$$y = \left(y_0 - \int_{x_0}^{x} g(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} f(x)dx} dx\right)\left(\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} f(x)dx}\right)\left\{-\int_{x_0}^{x} g(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} f(x)dx} \mathrm{dx}\right\}$$

Für das Integral durch den Punkt $P(x_0; y_0)$ muss gelten

$c(x_0) = y_0$, also $c(x) = y_0 - \int_{x_0}^{x} g(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(x)dx} dx$,.

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems:

$$y = (y_0 - \int_{x_0}^{x} g(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(x)dx} dx)(e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)dx})\left\{-\int_{x_0}^{x} g(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(x)dx} dx\right\}$$

Beispiel

Beispiel

Das Integral von $y' + 3\,\frac{y}{x} - x = 0, x \neq 0,$ soll berechnet werden.
Es ist:
$\frac{y'}{y} + 3\,\frac{1}{x} = 0$
$\frac{y'}{y} \;= -\,\frac{3}{x}$
$\ln|y| = -3\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|cx^{-3}\right|, alsoy = cx^{-3}$

Für c = c(x) folgt $y' = c'(x)x^{-3} - 3c(x)x^{-4}$.

Einsetzen von y und y' eingesetzt ergibt nach dem Zusammenfassen
$c'(x) = x^4$
$c(x) = \frac{1}{5}\,x^5 + c_0, d.\,h.\,y = c(x)x^5 = \frac{1}{5}\,x^2 + \frac{c_0}{x^3}\,.$

https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/loesen-von-linearen-inhomogenen-differenzialgleichungen-1

Die ***Variation der Konstanten*** ist eine Methode, die beim Lösen von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung benutzt wird.

Zu einer gegebenen linearen DGL 1. Ordnung

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

ist die homogene Lösung

$$y_h(x) = c \cdot e^{-A(x)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x$ bekannt. Dann liefert die ***Variation der Konstanten*** die allgemeine Lösung der DGL.

Algorithmus

I. Wir ersetzen die Konstante c aus der homogenen DGL durch eine von x abhängende Funktion $c(x)$:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}$$

Dieser Ansatz ist namensgebend für die Methode. Indem wir die Konstante durch eine Funktion ersetzen, wird sie ***variiert***.

II. Setzen wir nun diese Funktion in die DGL ein und formen etwas um, so erhalten wir:

$$c'(x) = b(x) \cdot e^{A(x)}$$

III. Aus der Gleichung für c' können wir c bestimmen, indem wir einmal Integrieren:

$$c(x) = \int b(x) \cdot e^{A(x)} \, \mathrm{d}x + k$$

mit der Integrationskonstante $k \in \mathbb{R}$.

IV. Wenn wir nun $c(x)$ in die Funktion $y(x)$ aus dem ersten Schritt einsetzen, erhalten wir die allgemeine Lösung der linearen DGL 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x) \cdot e^{-A(x)} \\ &= \left(\int b(x) \cdot e^{A(x)} \, \mathrm{d}x + k \right) \cdot e^{-A(x)} \end{aligned}$$

Bemerkung 5:

Lässt man die Integrationskonstante k im letzten Schritt weg, erhält man die ***spezielle Lösung*** der linearen DGL:

$$y(x) = \left(\int b(x) \cdot e^{A(x)} \, \mathrm{d}x \right) \cdot e^{-A(x)}$$

Addiert man diese zur homogenen Lösung $y_h(x) = ce^{-A(x)}$ erhält man genau dieselbe Lösung wie im letzten Schritt des Algorithmus. Man schreibt die Lösung nur manchmal als Summe von homogener und spezieller Lösung in Anlehnung an die Lösung linearer Gleichungssysteme.

Die Gleichung für $c'(x)$ im zweiten Schritt kann man sich wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} y' + a(x) \cdot y &= b(x) \\ \left(c(x) \cdot e^{-A(x)}\right)' + a(x) \cdot c(x) \cdot e^{-A(x)} &= b(x) \\ c'(x) \cdot e^{-A(x)} + c(x) \cdot (-a(x)) \cdot e^{-A(x)} + a(x) \cdot c(x) \cdot e^{-A(x)} &= b(x) \\ c'(x) \cdot e^{-A(x)} &= b(x) \\ c'(x) &= b(x) \cdot e^{A(x)} \end{aligned}$$

Beispiel 204:

Die lineare DGL 1. Ordnung

$$y' - 2y = 3e^{2x}$$

hat die homogene Lösung

$$y_h(x) = c \cdot e^{2x}$$

Schritt 1: Homogene Lösung erweitern

Wenn wir jetzt also eine ***Variation der Konstanten*** durchführen wollen, setzen wir die Funktion

$$y(x) = c(x) \cdot e^{2x}$$

in die DGL ein.

Schritt 2: Variierte Funktion einsetzen

Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 3e^{2x} \\ \left(c(x) \cdot e^{2x}\right)' - 2 \cdot c(x) \cdot e^{2x} &= 1 \\ c'(x) \cdot e^{2x} + 2 \cdot c(x) \cdot e^{2x} - 2 \cdot c(x) \cdot e^{2x} &= 3e^{2x} \\ c'(x) \cdot e^{2x} &= 3e^{2x} \\ c'(x) &= 3 \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist das genau die Funktion, die wir mit der allgemeinen Formel $c'(x) = b(x)e^{A(x)}$ bekommen hätten, denn $b(x) = 3e^{2x}$ und $A(x) = -2x$:

$$c'(x) = 3e^{2x}e^{-2x} = 3$$

Schritt 3: c' integrieren

Das Integral ist schnell bestimmt:

$$c(x) = \int 3 \,\mathrm{d}x = 3x + k$$

mit $k \in \mathbb{R}$.

Schritt 4: c in die Funktion vom ersten Schritt einsetzen

Setzen wir das wieder in unsere Funktion y ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x) \cdot e^{2x} \\ &= (3x + k) \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

Dies ist die allgemeine Lösung der DGL. Eine kleine Probe bestätigt uns, dass wir alles richtig gemacht haben:

$$\begin{aligned} y' - 2 \cdot y &= \left((3x + k) \cdot e^{2x}\right)' - 2 \cdot (3x + k) \cdot e^{2x} \\ &= 3 \cdot e^{2x} + (3x + k) \cdot 2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot (3x + k) \cdot e^{2x} \\ &= 3e^{2x} \end{aligned}$$

Beispiel 205:

Beispiel: $xy' - y = x^2 \cos x$

Lösung: Verstümmeln: $xy' - y = 0$

Trennung der Variablen! $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ → ***y=Cx***

Variation der Konstanten: *y = C(x) x* *y´= C´x+C*

Einsetzen: *x (C´x+C) – Cx = x² cos x*

C´= cos x

C = sin x + C₁

Demnach allgemeine Lösung: ***y = (C₁ + sinx) x***

Beispiel 206:

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}$$

Zuerst löst man die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen oder scharfes hinsehen:

$$y' - 3y = 0$$
$$y_0 = K \cdot e^{3x} \quad K \in \mathbb{R}$$

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, verwandelt man die Konstante *K* in eine Funktion von *x*:

$$y = K(x) \cdot e^{3x}$$

Nun bildet man noch die Ableitung von diesem *y*:

$$y' = K'(x) \cdot e^{3x} + 3\,K(x) \cdot e^{3x}$$

Dieses *y* und *y'* setzt man in die ursprüngliche inhomogene Dgl ein und vereinfacht:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= x \cdot e^{4x} \\ \Leftrightarrow K'(x) \cdot e^{3x} + 3\,K(x) \cdot e^{3x} - 3\,K(x) \cdot e^{3x} &= x \cdot e^{4x} \\ \Leftrightarrow K'(x) \cdot e^{3x} &= x \cdot e^{4x} \\ \Leftrightarrow K'(x) &= x \cdot e^{x} \end{aligned}$$

Jetzt kann man mit einer (mehr oder weniger) einfachen Integration *K(x)* bestimmen:

$$\begin{aligned} K(x) &= \int K'(x)\,dx \\ &= \int x \cdot e^{x}\,dx \\ &= (x-1) \cdot e^{x} + C \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies können wir wieder oben für *K(x)* einsetzen und erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y &= K(x) \cdot e^{3x} \\ &= ((x-1) \cdot e^{x} + C) \cdot e^{3x} \\ &= (x-1) \cdot e^{4x} + C \cdot e^{3x} \end{aligned}$$

Differentialgleichung nach Bernoulli

4.Typ: **Dgl. nach Bernoulli** ***a(x) y´ + b(x) y = c(x) yⁿ***

- **Dgl. von Bernoulli** läßt sich auf die lineare Dgl. zurückführen.
- Division durch y^n: $a(x)\frac{y'}{y^n} + b(x)\frac{y}{y^n} = c(x)$

neue Veränderliche: $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$

es ergibt sich: $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ $\qquad y' = \frac{1}{1-n} \cdot z^{\frac{n}{1-n}} \cdot z'$ $\qquad \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$

und die Differentialgleichung bekommt die Form:

$$\frac{a(x)}{1-n} z' + b(x) z = c(x)$$

Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung für die Funktion z(x).

Ihre Lösung sei $\boldsymbol{z = \phi(x) + C\zeta(x)}$.

Die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung ist dann:

$$\boxed{y = \{\phi(x) + C\zeta(x)\}^{\frac{1}{1-n}}}$$

Beispiel 207:

Beispiel: $xy' + 2y - xy^2 = 0$

Umformen: $\frac{xy'}{y^2} + \frac{2}{y} = x$

Substitution: $y = \frac{1}{z}$, $y' = -\frac{z'}{z^2}$ und somit $-xz' + 2z = x$

Verstümmeln, homogen lösen: $z = Cx^2$

Variation des Koeffizienten: $z = C(x) \cdot x^2$ $z' = C' \cdot x^2 + C \cdot 2x$

$$-x(C' \cdot x^2 + C \cdot 2x) + 2C \cdot x^2 = x$$

$$-C' \cdot x^3 = x$$

$$C = \frac{1}{x} + C_1$$

$$z = x + C_1 \cdot x^2 = x(1 + C_1 x)$$

$$y = \frac{1}{x(1 + C_1 x)}$$

Hinweis:

Lösungsmöglichkeit auch mit 2 aufeinander folgenden Substitutionen: $z = \frac{y}{x}$ und $u = \frac{z}{x}$

Euler-homogene Differentialgleichungen

Lösung durch Substitution

Eine Differentialgleichung heißt Euler-homogen, falls sie von der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist. Dabei kann $f(x)$ eine beliebige Funktion sein. Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der gebrochen rationalen Transformation.

Lösungsrezept

Um die allgemeine Lösung der DGL zu bestimmen, sollte man diesen Schritten folgen:

I. Wir führen zuerst die neue Variable

$$z = \frac{y}{x}$$

ein. Dann lautet die ursprüngliche DGL $y' = f(z)$ und es gilt

$$\begin{aligned} z &= \frac{y}{x} \\ z \cdot x &= y \\ z \cdot 1 + z' \cdot x &= y' \\ z + z' \cdot x &= f(z) \\ z' \cdot x &= f(z) - z \\ z' &= \frac{1}{x} \cdot (f(z) - z) \end{aligned}$$

Rechenschritte anzeigen

i. Mit x multiplizieren
ii. Beide Seiten ableiten
iii. $y' = f(z)$ einsetzen
iv. Minus z
v. Durch x teilen

II. Diese DGL ist in getrennten Variablen, d.h. wir können ihre allgemeine Lösung bestimmen.

$$z' = \frac{1}{x} \cdot (f(z) - z)$$

Wie das im Detail funktioniert steht hier.

III. Mit der Lösung $z(x)$ können wir nun zusammen mit der Gleichung aus Schritt 1:

$$z = \frac{y}{x}$$

die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL bestimmen:

$$y(x) = z(x) \cdot x$$

Beispiel 208:

Es sei die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = 1 + 2\frac{y}{x}$$

zu bestimmen.

Schritt 1: Transformation

Wir setzen

$$z = \frac{y}{x}$$

und erhalten damit

$$y' = 1 + 2z$$

Andererseits gilt

$$y' = (z \cdot x)' = z + z' \cdot x$$

Beides zusammengesetzt ergibt

$$\begin{aligned} 1 + 2z &= z + z' \cdot x \\ 1 + z &= z' \cdot x \\ \frac{1}{x} \cdot (1 + z) &= z' \end{aligned}$$

Schritt 2: Die neue DGL lösen

Das ist eine DGL in getrennten Variablen. Für $z = -1$ gilt $z' = 0$ und die DGL ist erfüllt. Falls aber $z \neq -1$ gilt, können wir durch $1 + z$ teilen:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{x} \cdot (1+z) \\ \frac{1}{1+z}\, z' &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{1+z}\, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{1+z}\, \mathrm{d}z &= \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \\ \int \frac{1}{1+z}\, \mathrm{d}z &= \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Lösen wir beide Integral auf, entsteht die Gleichung

$$\ln|1+z| = \ln|x| + c$$

Mit ein paar Umformungsschritten, stellen wir sie nach z um und bekommen

$$\begin{aligned} \ln|1+z| &= \ln|x| + c \\ |1+z| &= e^{\ln|x|+c} \\ |1+z| &= |x|\, e^{c} \\ 1 + z(x) &= c \cdot x \\ z(x) &= c \cdot x - 1 \end{aligned}$$

Durch die Rücktransformation ergibt sich dann die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x) \cdot x \\ &= (c \cdot x - 1) \cdot x \\ &= c \cdot x^2 - x \end{aligned}$$

Differentialgleichung 1. Ordnung

Die Differentialgleichung 1. Ordnung ist im allgemeinen Fall eine Gleichung zwischen der gesuchten Funktion **y = y(x)**, deren Ableitung $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ und der unabhängigen Veränderlichen *x*:

$$F(y, y', x) = 0$$

Wir setzen voraus, dass sich diese Gleichung nach *y´* auflösen lässt, so dass wir die Differentialgleichung in der expliziten Form

$$y' = f(x, y)$$

schreiben können.

Je nachdem wie die Differentialgleichung aufgebaut ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten der Lösung:

- Integration durch Trennen der Veränderlichen
- Integration durch Substitution

Differentialgleichungen sind allerdings bis auf die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung oft nicht leicht lösbar.

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat folgende allgemeine Form:

$$f_1(x)y' + f_0(x)y = s(x), \quad f_1(x) \neq 0$$

Nach Division durch $f_1(x)$ erhalten wir die sog. inhomogene linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$y' + f(x)y = S(x)$$

Ist schließlich S(x) = 0, so liegt eine homogenen lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vor:

$$y' + f(x)y = 0$$

Für diesen Typ von Differentialgleichung lässt sich nun eine Lösungsformel angeben:

homogene Lösung:

$$y = Ke^{-\int f(x)dx}$$

inhomogene Lösung:

$$y = Ke^{-\int f(x)dx}\left\{\int S(x)e^{\int f(x)dx}dx + c\right\}$$

dabei sind *K* und *C* Konstanten.

Beispiel 1:

Bei der mathematischen Behandlung vieler technischer und physikalischer Probleme treten Differentialgleichungen auf. Ein Beispiel hierfür ist etwa die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Gesucht ist dabei die Funktion $N(t)$, die angibt, wie viele Atome der ursprünglichen Anzahl N_0zur Zeit$t$ noch vorhanden sind. Wir finden:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Beispiel 2:

Ein weiteres Beispiel finden wir aus der Differentialgleichung für den senkrechten Wurf:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -gt + v_0$$

Die Lösung dieser Gleichung gibt die Weg-Zeit-Funktion wieder:

$$s(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Manuskript und Lösungen Mathematik II

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart
Campus Horb

Dozent
Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Auf der folgenden Seite finden Sie Unterlagen und die Lösungen der der Aufgabensammlung.

www.cs-geiger.de/wiw.htm

Computerseminare, Mathematik und Statistik

Mathematik 1 - 3 Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart Campus Horb

Skripte	**Lösungen**
Mathematik 1	
Manuskript	
Aufgabensammlung 1	
Aufgaben	Lösung
Mathematik 2	
Manuskript	
Aufgabensammlung 2	
Aufgaben	Lösung
Mathematik 3	
Manuskript	
Aufgabensammlung 3	
Aufgaben	Lösung
Formelsammlung	
Formelsammlung	

Klausuren

Alte Klausuren finden Sie in den jeweiligen Wiederholungsaufgaben am Ende des Kapitels in de Aufgabensammlung.

Lösung Stützkurs 1. Semester

1. Stützkurs	Lösung
2. Stützkurs	Lösung
3. Stützkurs	Lösung
4. Stützkurs	Lösung
5. Stützkurs	Lösung

Lösung Stützkurs 2. Semester

1. Stützkurs	Lösung
2. Stützkurs	Lösung
3. Stützkurs	Lösung
4. Stützkurs	Lösung
5. Stützkurs	Lösung

Lösung Stützkurs 3. Semester

1. Stützkurs	Lösung
2. Stützkurs	Lösung
3. Stützkurs	Lösung
4. Stützkurs	Lösung
5. Stützkurs	Lösung