Manuskript

Mathematik I

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart

Campus Horb

Dozent

Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Inhaltsverzeichnis

Allgemeines

Einteilung der Unterrichtseinheiten

Vor jeder neuen Unterrichtseinheit stelle ich Aufgaben zur Wiederholung des in der letzten Unterrichtseinheit behandelten Themas. Der Umfang beträgt je nach Thema zwischen 20-40 Minuten.

Zu jedem Thema erhalten die Studenten „Hausaufgaben“ zum selbstständigen bearbeiten des behandelten Stoffs. Diese werden den Studenten anhand einer Aufgabensammlung zur Verfügung gestellt.

Parallel biete ich sogenannte Stützkurse an, um die Themen noch ausgiebig üben zu können.

In der Klausur dürfen die Studenten den ausgeteilten Taschenrechner und die Formelsammlung aus dem Projekt StudiStartUp verwenden. Diese Formelsammlung enthält leere Seiten, auf denen weitere für den einzelnen Studenten wichtige Formeln vermerkt werden dürfen. Es dürfen aber keine Beispiele eingetragen werden.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Mathematikvorlesung

Roland Geiger

1. Semester

Lineare Algebra:

- Matrizen,
- lineare Gleichungssysteme,
- Determinanten,
- Vektoren (Grundlagen; Anwendungen, z.B. aus der analytischen Geometrie und / oder der Technischen Mechanik),

Vektorrechnung

- Eigenwerte und Eigenvektoren.
- Vektorraum,
- lineare Abbildungen,
- symmetrische Matrizen und quadratische Formen,
- Diagonalisierung.

Komplexe Zahlen

- Rechnen
- Darstellungsformen
- Gleichungen lösen
- LGS

Analysis

- Grundlagen,
- Funktionen (allgemeine Eigenschaften),
- Grenzwerte,
- Stetigkeit,
- spezielle elementare Funktionstypen,
- Einführung in die Differentialrechnung mit Funktionen einer Variablen

Simplex-Algorithmus als Schnittmenge zur Betriebswirtschaft

- Grafische Lösung
- Rechnerische Lösung
- Lösung mit Hilfe einer Pivot-Tabelle
- Dualer Simplex-Algorithmus

Lineare Algebra

Grundlegende Definitionen zu Matrizen

Eine Matrix sieht z.B. so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

oder z.B. auch so:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, werden in einer Matrix Zahlen ähnlich wie in einer Tabelle angeordnet.

Daher spricht man auch von Zeilen und Spalten einer Matrix.

Definition 1:

Wenn also eine Matrix m Zeilen und n Spalten hat, spricht man von einer (mxn)-Matrix.

Aber auch das ist eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1:

Jeden Vektor kann man auch als Matrix auffassen, in diesem Fall als (3x1)-Matrix. Dabei steht die erste Zahl für die Anzahl der Zeilen, also in diesem Fall 3 und die zweite Zahl für die Anzahl der Spalten, hier also 1.

Warum werden Matrizen verwendet?

Ein wichtiges Prinzip in der Mathematik ist die **Abstraktion realer Probleme in mathematische Konzepte und Systeme**, was dann häufig dazu führt, auf schnellerem Weg zur Lösung kommen zu können.

Eine dieser Abstraktionen, welche in vielen Fällen Anwendungsmöglichkeiten bereithält, ist die Matrizen-Schreibweise.

Im Folgenden wollen wir zunächst definieren, um was es sich dabei genau handelt, und einige Ergebnisse aufzeigen, die uns in die Lage versetzen, diese Schreibweise sinnvoll und hilfreich einsetzen zu können.

Matrizenarten und die Darstellung

Quadratische Matrizen

Inder Folge bezieht sich alles auf quadratische Matrizen. Auf andere Matrizen kann dieses nicht bezogen werden. Auf das Ende der quadratischen Matrizen wir nochmals gesondert hingewiesen.

Wie schon oben erwähnt, handelt es sich bei den quadratischen Matrizen um solche, bei denen die Zahl der Spalten gleich der Zahl der Zeilen ist. Eine typische quadratische Matrix hat also die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition 2:

Matrizen, die die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten (m=n) besitzen, heißen quadratisch.

Aufgrund ihrer speziellen Gestalt können nun unter den quadratischen Matrizen einige weitere interessante Spezialfälle auftreten:

Diagonalmatrizen D

Definition 3:

Hierbei handelt es sich um quadratische Matrizen, welche höchstens auf der Diagonalen (von links oben nach rechts unten) von Null verschiedene Einträge besitzen,

d.h. $a_{ij} = 0$ gilt, falls $i \neq j$ ist.

Allgemeine Gestalt:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 1:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix E

Definition 4:

Die Einheitsmatrix ist ein Spezialfall der Diagonalmatrizen. Sie ist nämlich diejenige Diagonalmatrix, bei der alle von Null verschiedenen Einträge gleich 1 sind,

d.h. $a_{ii} = 1$ für alle $i=1,...,n$ und $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Gestalt:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix R (bzw. L)

Definition 5:

Bei oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen handelt es sich um solche quadratischen Matrizen, bei denen nur die Einträge auf oder rechts oberhalb (bzw. auf oder links unterhalb) der Diagonalen von Null verschieden sein dürfen,

d.h. für R gilt $a_{ij} = 0$, falls $i > j$ ist und für L gilt $a_{ij} = 0$, falls $i < j$ ist.

Allgemeine Gestalt:

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Spur einer quadratischen Matrix

Definition 6:

Für quadratische Matrizen **A** definiert man die **Spur sp(A)** als Summe der Einträge auf der Diagonalen,

d. h. sp(A) = $a_{11} + a_{22} + a_{nn}$.

Bemerkung 2:

- Bei der Einheitsmatrix **E** erhält man damit genau die Anzahl der Zeilen (bzw. Spalten): sp(**E**) = n.
- Ist sp(a)=0 so spricht man: "Die Matrix ist spurfrei"
- Es gilt $sp(A) = sp(A^{-1})$
- Anwendung in der Physik

Beispiel 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow sp(A) = 1 + 5 + 9 = 15$$

Definition 7:

Für beliebige quadratische Matrizen gilt

Spur(AB) = Spur(BA)

Beispiel 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ -2 & 33 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{sp(AB) = sp(BA)} = 33$$

Symmetrische Matrizen

Definition 8:

Bei symmetrischen Matrizen handelt es sich um solche quadratischen Matrizen, die gleich ihrer transponierten Matrix sind,

d.h. für die A = A^T gilt.

Das ist genau dann der Fall, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i,j=1,...,n gilt.

Beispiel 6:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Anschaulich bedeutet A = A^T, dass man die Einträge der Matrix längs der Diagonalen spiegeln kann.

Antisymmetrische oder schiefsymmetrische Matrizen

Definition 9:

Der Unterschied zu den symmetrischen Matrizen besteht hier darin, dass nicht die Gleichung

$A = A^T$, sondern

$A = -A^T$ erfüllt sein muss.

Es muss also

$a_{ij} = -a_{ji}$

für alle i,j=1,...,n gelten.

Wegen $a_{ii} = -a_{ii}$ müssen in diesem Fall die Einträge auf der Diagonalen alle Null sein.

Beispiel 7:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -A^T$$

Bemerkung 3:

Leicht zu erkennen ist, dass die Spur einer antisymmetrischen Matrix gleich Null ist, da ja alle Einträge auf der Diagonalen gleich Null sind.

(Beachte aber, dass die Umkehrung nicht gilt. Es gibt sehr wohl Matrizen mit Spur 0, die nicht antisymmetrisch sind.)

Nullmatrix

Definition 10:

Sind alle Elemente einer Matrix gleich Null, so heißt sie Nullmatrix.

Beispiel 8:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Normale Matrizen

Eine letzte Klasse von besonderen quadratischen Matrizen wollen wir an dieser Stelle noch vorstellen, auch wenn wir erst später genau erläutern können, was genau mit dieser Eigenschaft eigentlich gemeint ist.

Definition 11:

Normale Matrizen sind solche quadratischen Matrizen, für die die Gleichung

$A \cdot A^T = A^T \cdot A$ erfüllt ist.

Wobei wir erst im nächsten Abschnitt sehen werden, was mit der Multiplikation der Matrizen A und A^T gemeint ist.

Trotzdem können wir bereits einige Matrizen als normal identifizieren:

Bemerkung 4:

Sicherlich ist die geforderte Eigenschaft für symmetrische Matrizen erfüllt, da für diese ja sogar $A = A^T$ gilt.

Ebenso sollte es nicht überraschen, dass sich herausstellen wird, dass auch antisymmetrische Matrizen normal sind, da sich in diesem Fall ja schließlich A und A^T nur um ein Vorzeichen unterscheiden, welches bei der Vertauschung der Multiplikationsreihenfolge keine Probleme bereiten wird.

Hier ist die Einschränkung auf quadratische Matrizen zu Ende.

Rechenoperationen für Matrizen

Hier wollen wir die möglichen Rechenoperationen für Matrizen einführen, also die Frage klären, unter welchen Umständen es beispielsweise möglich ist, Matrizen zu addieren oder zu multiplizieren. Dass dies nicht in jedem Fall möglich ist, sollte verständlich erscheinen, da die Frage nach der Addition von Matrizen mit unterschiedlicher Anzahl von Zeilen oder Spalten doch schwierig zu beantworten erscheint.

Transponieren einer Matrix

Definition 12:

Ein Matrix A wird transponiert, indem man die Zeilen und Spalten vertauscht. Anschaulich entsteht die transponierte Matrix durch Spiegelung der Ausgangsmatrix an ihrer Hauptdiagonale.

Es gibt keine Voraussetzungen. Jede Matrix lässt sich transponieren.

Beispiel 9:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Typ oder Ordnung einer Matrix

Definition 13:

Der Typ oder die Ordnung einer Matrix ist die Angabe der Zeilen- und Spalten-Zahl, die (in dieser Reihenfolge!) mit einem "Multiplikations-Kreuz" × oder einem Komma verbunden werden. Hat eine Matrix also n Zeilen und m Spalten, dann ist ihr Typ bzw. ihre Ordnung n× m oder Typ (n,m).

Gleichheit von Matrizen

Auch für spätere Rechnungen ist es natürlich wichtig zu wissen, was wir meinen, wenn wir sagen zwei Matrizen seien gleich. Die Definition dafür ist naheliegend:

Definition 14:

Zwei Matrizen $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ sind genau dann gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind (d.h. wenn sie die gleiche Anzahl Zeilen wie Spalten besitzen) und jeder ihrer Einträge gleich ist, d.h. für alle i=1,...,m und j=1,...,n gilt $a_{ij} = b_{ij}$.

Bemerkung 5:

Matrizen von verschiedenem Typ können nicht gleich sein. So ist beispielsweise die Nullmatrix vom Typ (3,2) nicht gleich der Nullmatrix vom Typ (2,3), auch wenn sie mit dem gleichen Namen bezeichnet wird.

Addition/Subtraktion von Matrizen

Auch hierbei muss man sich auf Matrizen vom gleichen Typ beschränken, um eine Addition erklären zu können. Die funktioniert dann wie folgt:

Definition 15:

Sind A = (a_{ij}) mit i=1,...,m, j=1,...,n und B = (b_{ij}) mit i=1,...,m, j=1,...,n vom gleichen Typ (m,n), so ist A + B := (a_{ij}+b_{ij}) mit i=1,...,m, j=1,...,n.

Es werden also die einzelnen Einträge der Matrizen addiert.

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b12 & \cdots & a_{1n}+b1n \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 10:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion wird analog definiert.

Allgemein

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b1n \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 11:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für die Addition/Subtraktion:

Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz:

Definition 16:

A + B = B + A

(A + B) + C = A + (B + C)

Die Regeln folgen direkt aus den Rechenregeln für reelle Zahlen.

Außerdem gilt die Gleichung $(A+B)^T = A^T + B^T$, was direkt aus der Definition der transponierten Matrix und der Addition folgt.

Für die Subtraktion gilt keines der Gesetze.

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl (Skalar)

Definition 17:

Eine Matrix A von beliebigem Typ (m,n) kann mit einer beliebigen reellen Zahl α multipliziert werden, indem jeder Eintrag der Matrix a_{ij} mit α multipliziert wird, d.h.

$\alpha * A = \alpha * (a_{ij}) = (\alpha * a_{ij})$.

Allgemein:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 12:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

Auch hier gelten die zu erwartenden Rechenregeln:

Definition 18:

Kommutativgesetz α*A = A*α (wobei hier erwähnt werden muss, dass die Multiplikation mit α von links natürlich analog zu der Multiplikation von rechts definiert ist.)

Assoziativgesetz α*(β*A) = (α*β)*A

Distributivgesetz (α+β)*A = α*A + β*A und α*(A+B) = α*A + α*B

Analog zur Multiplikation mit einer reellen Zahl α wird die Division durch eine reelle Zahl γ ≠ 0 durch die Multiplikation mit 1/γ erklärt.

Multiplikation von Matrizen

An dieser Stelle wird es nun etwas komplizierter, da im Allgemeinen zwei Matrizen vom gleichen Typ (m,n) nicht miteinander multipliziert werden können.

Wir werden sehen, dass dies nur für quadratische Matrizen gilt.

Definition 19:

Zwei Matrizen A und B sind genau dann miteinander multiplizierbar, wenn die Anzahl der Spalten von A der Anzahl der Zeilen von B entspricht. Ist also **A** eine Matrix vom Typ (m,n), so muss B eine Matrix vom Typ (n,k) sein.

Wie man bereits hier sehen kann, ist die Multiplikation von Matrizen i.A. nicht kommutativ.

Es gilt sogar: Ist das Produkt **A*****B** definiert, so existiert das Produkt **B*****A** i.A. gar nicht, denn ist **A** eine Matrix vom Typ (n,m) und **B** eine Matrix vom Typ (k,n), so passen zwar die Spalten von **A** und die Zeilen von **B** zusammen, jedoch nicht die Spalten von **B** und die Zeilen von **A** (zumindest nicht, so lange m ≠ k ist).

Definition 20:

Das Ergebnis der Multiplikation der beiden Matrizen A und B hat so viele Zeilen wie die Matrix A und so viele Spalten wie die Matrix B.

Daraus folgt natürlich auch, dass die Reihenfolge bei der Multiplikation (d.h. welche Matrix links und welche rechts steht) wichtig ist, da dies ja gerade die Nichtkommutativität bedeutet.

Definition 21:

Ist nun **A** = **(a_{ij})**mit i=1,...,m, j=1,...,n eine Matrix vom Typ (m,n) und **B** = **(b_{ij})**mit i=1,...,n, j=1,...,k eine Matrix vom Typ (n,k), so definieren wir **A*B** als Matrix **C** = **(c_{ij})**mit i=1,...,m, j=1,...,k, d.h. als Matrix vom Typ (m,k), wobei die einzelnen Einträge definiert sind als

$$c_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} \cdot b_{\lambda j} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Der Eintrag **c_{ij}** ergibt sich also als Summe der Produkte der Einträge der i-ten Zeile von **A** mit der j-ten Spalte von **B**.

Man erhält also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda k} \end{pmatrix}$$

Beispiel 13:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 8 \\ 0 & 50 & -5 \\ 6 & -28 & 6 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Da die Rechenregel doch etwas komplizierter ist, gibt es eine Möglichkeit, sich das Ganze etwas anschaulicher aufzuschreiben:

Falk-Schema

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda k} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

An dieser Darstellung kann man gut erkennen, was tatsächlich gemacht wird. Der Eintrag in der Ergebnismatrix ist immer die Summe der Produkte der Zeile und Spalte der beiden ursprünglichen Matrizen, welche sich, wenn man sie sich verlängert denkt, genau an dieser Stelle treffen würden.

Unser Beispiel sieht also folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & 16 & 8 \\ 0 & 50 & -5 \\ 6 & -28 & 6 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Inverse Matrizen

Es bleibt uns hier noch eine letzte Definition zu klären.

Beispiel 14:

Wiederholung: Potenzgesetze

Laut den Potenzgesetzen gilt:

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$5^1 \cdot 5^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$4^1 \cdot 4^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Multipliziert man eine Zahl mit ihrem Kehrwert, lautet das Ergebnis stets 1.

Was für Zahlen funktioniert, geht auch bei Matrizen (zumindest so ähnlich).

Bemerkung 6:

Vor einigen Jahrzehnten hat man zur inversen Matrix noch "Kehrmatrix" gesagt. Bei diesem Begriff hört man wenigstens noch die Verwandtschaft zum "Kehrwert" heraus.

Da wir nun eine Multiplikation von Matrizen eingeführt haben, stellt sich natürlich die Frage, ob man auch durch Matrizen teilen kann, was ja letztendlich die gleiche Frage ist, ob es zu einer gegebenen Matrix **A** eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ gibt, so dass $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ ergibt.

Die Einheitsmatrix spielt, wie man bei den Rechenregeln zur Multiplikation von Matrizen gesehen hat, die Rolle der **1**, da sie bei der Multiplikation mit anderen Matrizen diese nicht verändert.

Die Frage ist nicht so einfach zu beantworten, da man für eine allgemeine Antwort noch weitere mathematische Konzepte benötigt, was hier allerdings den Rahmen sprengen würde.

Wir sehen uns als Beispiel eine (2,2)-Matrix an.

Sei eine Matrix **A** mit folgender Gestalt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Gilt für diese Matrix **A**: ad-bc ≠ 0, so können wir eine inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ definieren, durch

Definition 22:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Durch einfaches Ausmultiplizieren erhält man dann

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Beispiel 15:

Nehmen wir folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Dann ist ad-bc = 1*4-2*3 = -2, und somit erhalten wir unsere inverse Matrix

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Rechenregeln:

Definition 23:

$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^p$

Gauß-Jordan-Algorithmus

Bei den reellen Zahlen ist zu jeder Zahl x eine Inverse X^{-1} definiert mit der Eigenschaft, dass $X*X^{-1} = 1$. Ähnlich definiert man bei Matrizen:

Eine Inverse Matrix existiert wenn:

Definition 24:

Sei $\boldsymbol{X}$ eine quadratische Matrix. Die Inverse von $\boldsymbol{X}$ ist, sofern sie überhaupt existiert, jene Matrix $\boldsymbol{X}^{-1}$, für die gilt: $\boldsymbol{X}*\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}^{-1}*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ *(Einheitsmatrix)*

Im Gegensatz zu reellen Zahlen (außer der Zahl Null), bei denen die Inverse immer existiert, existiert die Inverse einer Matrix $\boldsymbol{X}$ nur, wenn X quadratisch ist und wenn außerdem gilt:

Existenz der Inversen:

Definition 25:

$\boldsymbol{X}^{-1}$ existiert nur dann, wenn $\det(\boldsymbol{X}) \neq 0$.

Regeln für die Bildung der Inversen

Definition 26:

Man bildet die Inverse am einfachsten wie folgt:

1. Man setzt rechts neben X die Einheitsmatrix I

2. Man transformiert durch elementare Zeilenumformungen (Nicht Spaltenumformungen!!) die Matrix X in die Einheitsmatrix. Alle diese elementaren Zeilenumformungen werden gleichzeitig auch mit der Matrix I durchgeführt. Dadurch wird I zu X-1

3. Zeilen dürfen vertauscht werden.

Beispiel 16:

Berechnen der Inversen von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vertauschen der 1. und der 2. Zeile:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Addieren des -1-fachen der 1. Zeile auf die 2. Zeile:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Addieren des -3-fachen der 1. Zeile auf die 3. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ Addieren des -1-fachen der 2. Zeile auf die 3. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ Addition der 3. Zeile auf die erste Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ Multiplikation der 3. Zeile mit -1/2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$ Addieren des 3-fachen der 3. Zeile auf die 2. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5/2 & 2 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Probe: Multiplikation der Matrix mit ihrer Inversen muss ***I*** ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5/2 & 2 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reguläre Matrix

Definition 27:

Die **reguläre**, **invertierbare** oder **nichtsinguläre Matrix** ist ein Begriff aus dem mathematischen Teilgebiet der linearen Algebra. Eine quadratische Matrix A ist invertierbar, wenn eine weitere Matrix *B* existiert, so dass

$$A \cdot B = E$$

gilt, wobei *E* die Einheits-Singulär-Matrix bezeichnet. In diesem Fall gilt auch

$$B \cdot A = E.$$

Also Matrizen die invertierbar sind heißen reguläre Matrizen.

Singuläre Matrix

Definition 28:

Umgekehrt werden nicht-invertierbare Matrizen als singuläre Matrizen bezeichnet.

Zeilenstufenform

Definition 29:

Jede beliebige Matrix kann in Zeilenstufenform umgewandelt werden. Doch was ist diese Zeilenstufenform überhaupt und wie berechnet man sie?

Bevor wir die Zeilenstufenform definieren können, müssen wir einige Begriffe einführen.

Eine Nullzeile ist eine Zeile, in der nur Nullen stehen, die anderen Zeilen sind Nichtnullzeilen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Beispiel ist die dritte Zeile eine Nullzeile. Die erste und zweite Zeile sind Nichtnullzeilen.

Das erste von Null verschiedene Element einer Nichtnullzeile nennen wir den **Zeilenführer** dieser Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenführer sind im Beispiel rot markiert.

Jetzt können wir endlich die Zeilenstufenform definieren.

Definition 30:

Eine Matrix ist in Zeilenstufenform, falls gilt:

Alle Nichtnullzeilen stehen oberhalb aller Nullzeilen.

Ein Zeilenführer steht stets in einer Spalte rechts vom Führer der Zeile darüber.

Alle Einträge unterhalb des Zeilenführers sind Null.

Beispiel einer Matrix in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & \color{red}{6} & 7 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{5} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 7:

Charakteristisch für die Zeilenstufenform ist, dass die Zeilenführer wie Treppenstufen angeordnet sind - also nach unten wandern. Demnach kann in einer Spalte maximal ein Zeilenführer auftreten!

Bemerkung 8:

Praktische Bedeutung

Liegt eine Matrix in Zeilenstufenform vor, kann man ganz leicht den Rang der Matrix ablesen.

Berechnung der Zeilenstufenform

So weit, so gut. Jetzt wissen wir, was die Zeilenstufenform ist. Doch wie berechnet man sie?

Definition 31:

Die Zeilenstufenform erhält man durch sog. "elementare Zeilenumformungen".

Man darf Zeilen...

vertauschen

mit einer Zahl multiplizieren

durch eine Zahl dividieren

addieren

subtrahieren

Bemerkung 9:

Der Gauß-Algorithmus ist ein populäres Verfahren, welches ein Gleichungssystem bzw. eine Matrix in Zeilenstufenform umwandelt.

Beispiel 17:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III) - I)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II) + I)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 18:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III) - I)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II) + 2 \cdot I)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III) + II)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Normierte Zeilenstufenform

Eine Matrix in Zeilenstufenform ist in normierter Zeilenstufenform, wenn sie zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

Definition 32:

Jeder Zeilenführer hat den Wert 1

Jeder Zeilenführer ist der einzige Eintrag in seiner Spalte, der nicht gleich Null ist.

Beispiel 19:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$ lauten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Rang von Matrizen

Vorbetrachtung

Wir wissen, dass man eine Matrix als eine Anordnung von Spaltenvektoren bzw. Zeilenvektoren sehen kann. Diese Vektoren können linear abhängig oder linear unabhängig sein.

Lineare Abhängigkeit: besteht dann, wenn ein Vektor ein Vielfaches eines anderen Vektors ist, z.B.:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dann sind a und b linear abhängig, weil

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} b$$

Definition 33:

Lineare Abhängigkeit: Das bedeutet, es existiert eine reelle Zahl c $(c \in \mathbb{R})$, so dass $c \cdot a = b$, dann sind die beiden Vektoren a und b linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit: falls es kein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $c \cdot a = b$ gilt,
dann sind die beiden Vektoren a und b linear unabhängig.

Beispiel 20:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man findet hier keinen Faktor c.

Bemerkung 10:

Der Nullvektor nimmt eine “Sonderstellung” ein. Kein Vektor ist linear unabhängig vom Nullvektor, da jeder Vektor durch “Stauchung” mit dem Faktor 0 in den Nullvektor überführt werden kann.

Definition 34:

In einer Matrix A ist die größte Anzahl r der linear unabhängigen Spaltenvektoren stets gleich der größten Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Diese Zahl r wird als Rang der Matrix bezeichnet (r=Rg(A)).

Beispiel 21:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zuerst die Spalten der Matrix, also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da zwischen einem Nullvektor und einem beliebigen anderen Vektor stets lineare Abhängigkeit besteht, haben wir einen linear unabhängigen Spaltenvektor.

Nun betrachten wir die Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist unschwer zu erkennen, dass die beiden Vektoren identisch sind (linear abhängig)

$1 \cdot (2 \quad 0) = (2 \quad 0)$

Also haben wir auch hier einen linear unabhängigen (Zeilen-)Vektor.

Der Rang der Matrix A ist dementsprechend 1.

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zuerst wieder die Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

der erste und der dritte Spaltenvektor sind linear abhängig.

Der zweite Vektor,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist vom ersten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Linear unabhängig.

Wir haben zwei unabhängige Spaltenvektoren.

Jetzt betrachten wir die Zeilenvektoren

$(1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 0 \quad 3), (2 \quad 0 \quad 6)$

man erkennt, dass

$3 \cdot (1 \quad 0 \quad 3) = (2 \quad 0 \quad 6)$

der zweite und der dritte Zeilenvektor sind linear abhängig.

Wir haben also zwei linear unabhängige Zeilenvektoren.

Der Rang ist demnach 2.

Definition 35:

Das unterscheiden zwischen Spaltenrang und Zeilenrang ist nicht notwendig, denn es handelt sich dabei immer um die gleiche Zahl handelt. Man spricht daher auch allgemein vom **Rang der Matrix** A und bezeichnet diesen mit Rang A.

Eine Matrix A wird mit dem Gauss'schen Eliminationsverfahren auf Stufenform gebracht. Der Rang von A ist dann die Anzahl der Zeilen, die nicht aus lauter Nullen bestehen.

Die Berechnung erfolgt immer mit dem Gauß'schen Algorithmus.

Beispiel 22:

Zeilenrang:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal (-2) und auf die dritte Zeile addieren

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Also ergibt sich der Rang=2

Spaltenrang:

Ich nehme hier nur die Transponierte, damit man wie beim Gauß'schen Algorithmus rechnen kann. (Dreieck mit Nullen)

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal (-1) und auf die dritte Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal (-2) und auf die vierte addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Wie man hier sieht sind die letzten drei Zeilen l. a. also ist der Spaltenrang=2

Beispiel 23:

Zeilenrang:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Gauss ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenrang=2

Spaltenrang:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ Die erste Zeile mal (-2) und auf die zweite Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ Die erste Zeile mal (-3) und auf die dritte Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wie man hier sieht sind die letzten beiden Zeilen l. a. also ist der Spaltenrang=2

Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen

Der Rangbegriff ist bei der Aufklärung der Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme von fundamentaler Bedeutung.

Die Lösbarkeit von LGS lässt sich mit Hilfe von erweiterten (Koeffizienten-)Matrizen untersuchen.

Rangkriterien zur Lösbarkeit von LGS

Definition 36:

Ein LGS mit n Variablen besitzt

keine Lösung, falls

$Rang(A) < Rang(A \Leftarrow \vec{b})$

genau eine Lösung, falls

$Rang(A) = Rang(A \Leftarrow \vec{b}) = n$

unendlich viele Lösungen, falls

$Rang(A) = Rang(A \Leftarrow \vec{b}) < n$

Beispiel 24:

$3x + 2y = 5$

$x - 4y = 9$

Koeffizientenmatrix A (linke Seite des LGS):

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile mal (-3) und auf die erste addieren

$\begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

daraus ergibt sich der Rang=2

Erweiterte Koeffizientenmatrix (die rechte Seite wird hinzugenommen) b:

$$b = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Ich nehme hier nur die Transponierte, damit man wie beim Gauß'schen Algorithmus rechnen kann. (Dreieck mit Nullen)

$b^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile geteilt durch (2)

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile mal (-3) und auf die erste Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile mal (-5) und auf die dritte Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -2 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal $\left(-\frac{19}{7}\right)$ und auf die dritte Zeile addieren

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

daraus ergibt sich der Rang=2

Folgerung für die Lösbarkeit von diesem LGS:

$$Rang(A) = Rang\left(A \Leftarrow \vec{b}\right) = n$$

Damit ist das LGS eindeutig lösbar.

Bild einer Matrix

Gegeben ist folgende Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition 37:

> Wir multiplizieren eine Matrix A mit einem beliebigen Vektor x und erhalten den Lösungsvektor b.
>
> Das Bild einer Matrix gibt an, welche Menge an Vektoren als Lösungen auftreten können. Bei Funktionen würde man Wertebereich oder Wertemenge dazu sagen. Das Bild einer Matrix kann man sich also als die Wertemenge der Matrix vorstellen.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, wie wir den Wertebereich der Matrix berechnen können.

Was ist das Bild einer Matrix?

Beispiel 25:

Schauen wir uns folgende Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix multiplizieren wir jetzt nacheinander mit den drei Einheitsvektoren des R^3 und schauen, was passiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die drei Spaltenvektoren unserer Matrix A. Diese drei Vektoren sind ein Bild, d.h. ein Teil der Wertemenge, der Matrix A. Bevor wir weitermachen, halten wir diese Lösung in mathematischer Schreibweise fest:

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Es gibt jedoch noch mehr Bilder (besser gesagt: unendlich viele), was sich leicht zeigen lässt. Wir multiplizieren die Matrix mit irgendeinem Vektor.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Auch dieser Vektor gehört zum Bild (= Wertemenge) der Matrix.

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

Wir haben gerade festgestellt, dass es unendlich viele Bilder einer Matrix gibt.

Alle Vektoren, die aus der Multiplikation der Matrix A mit einem beliebigen Vektor hervorgehen, gehören zum Bild der Matrix.

Diese Lösungsvektoren haben jedoch - wie gerade gezeigt wurde - eine bestimmte Gestalt: Die letzten beiden Vektoren sind z.B. Vielfache voneinander.

Allgemein kann man sagen, dass alle Linearkombinationen dieser Vektoren auch zum Bild der Matrix gehören. Mit diesem Wissen können wir den vierten Vektor bedenkenlos aus dem Bild streichen, da der dritte Vektor diesen gewissermaßen miteinschließt.

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Stopp! Der dritte Vektor ist ein Vielfaches des ersten Vektors! Was machen wir mit diesem? Richtig, auch von der Liste streichen.

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Die verbleibenden beiden Vektoren sind nicht Vielfache voneinander.

Mathematisch gesprochen: Die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

Wir können das Bild an dieser Stelle nicht weiter vereinfachen, ohne einen Teil der Lösungsmenge zu verlieren. Die Lösungsmenge besteht jetzt also aus diesen beiden Vektoren sowie ihren Linearkombinationen (d.h. auch ihren Vielfachen).

Mit Hilfe der Kenntnisse, die wir uns gerade angeeignet haben, können wir endlich das Bild einer Matrix definieren:

Definition 38:

Das Bild einer Matrix ist gleich den linear unabhängigen Spalten.

Bild einer Matrix berechnen

Definition 39:

Um die linear unabhängigen Spalten zu berechnen, gehen wir folgendermaßen vor:

Transponieren der Matrix

Erzeugen der Zeilenstufenform (ZSF) mittels Gauß-Algorithmus

Transponieren der Matrix

Ablesen der Lösung -> alle Spalten, in denen nicht ausschließlich Nullen vorkommen, gehören zum Bild der Matrix

Beispiel 26:

Von folgender Matrix soll das Bild berechnet werden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.) Transponieren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.) Erzeugen der Zeilenstufenform (ZSF) mittels Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.) Transponieren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

4.) Ablesen der Lösung

Alle Spalten, in denen nicht ausschließlich Nullen vorkommen, gehören zum Bild der Matrix.

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Interpretation der Lösung:

Bemerkung 11:

Jede Linearkombination der Lösungsvektoren gehört ebenfalls zum Bild der Matrix A.

Da sich zwei Vektoren in der Lösungsmenge befinden, hat das Bild der Matrix die Dimension 2. Übrigens haben wir damit auch direkt den Rang der Matrix berechnet, da dieser der Dimension des Bildes entspricht.

rang(A)=dim(img(A))=2

Inverse Matrix nach Cramer

Im Folgenden wollen wir mit Hilfe der Cramer'schen Regel die Inverse einer Matrix berechnen.

Oftmals lohnt es sich, vorher zu überprüfen, ob eine Matrix überhaupt eine Inverse besitzt.

Bemerkung 12:

Zu Matrizen in denen Zeilen oder Spalten linear abhängig sind, deren Determinante also 0 beträgt, gibt es keine inverse Matrix.

Dementsprechend kann nur die inverse Matrix berechnet werden, wenn gilt

det(A)≠0

Beispiel 27:

Gegeben ist eine Matrix A. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Die Komponenten der inversen Matrix berechnen sich folgendermaßen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Wie man auf diese Lösungsmatrix kommt, wird im Folgenden gezeigt.

1. Spalte der Lösungsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Multipliziert man die Matrix A mit der 1. Spalte der gesuchten Inversen erhält man das folgende Gleichungssystem. Die 1. Spalte der Einheitsmatrix bildet dabei die rechte Seite des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x_{11} - x_{21} &= 1 \\ x_{11} + 2x_{21} - 2x_{31} &= 0 \\ -x_{21} + x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Wendet man die Cramersche Regel an, erhält man folgende Lösungsformeln für die Unbekannten (der 1. Spalte der inversen Matrix)

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

2. Spalte der Lösungsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Multipliziert man die Matrix A mit der 2. Spalte der gesuchten Inversen erhält man das folgende Gleichungssystem. Die 2. Spalte der Einheitsmatrix bildet dabei die rechte Seite des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x_{12} - x_{22} &= 0 \\ x_{12} + 2x_{22} - 2x_{32} &= 1 \\ -x_{22} + x_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Wendet man die Cramersche Regel an, erhält man folgende Lösungsformeln für die Unbekannten (der 2. Spalte der inversen Matrix)

$$x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

3. Spalte der Lösungsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Multipliziert man die Matrix A mit der 3. Spalte der gesuchten Inversen erhält man das folgende Gleichungssystem. Die 3. Spalte der Einheitsmatrix bildet dabei die rechte Seite des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x_{13} - x_{23} &= 0 \\ x_{13} + 2x_{23} - 2x_{33} &= 0 \\ -x_{23} + x_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Wendet man die Cramersche Regel an, erhält man folgende Lösungsformeln für die Unbekannten (der 3. Spalte der inversen Matrix)

$$x_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Unterdeterminante

Definition 40:

D_{ij} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

Ist die Determinante A gegeben,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

so gibt es z. B. folgende Unterdeterminanten:

D_{11} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die 1-te Zeile und die 1-te Spalte streicht.

$$D_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

D_{13} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die 1-te Zeile und die 3-te Spalte streicht.

$$D_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

D_{32} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die 3-te Zeile und die 2-te Spalte streicht.

$$D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Vorzeichenfaktor

Definition 41:

Der Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+j}$ ordnet jeder Unterdeterminante ein Vorzeichen zu. Dabei ist i der Zeilenindex und j der Spaltenindex. Ist i+j gerade, so ist das Vorzeichen positiv. Ist i+j ungerade, so ist das Vorzeichen negativ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Bemerkung 13:

Als Merkhilfe dient das schachbrettartige Muster. Jeder Position ist eindeutig ein Vorzeichen zugeordnet. Man beginnt oben links mit einem Plus-Zeichen und wechselt anschließend in den Zeilen (und Spalten) Minus und Plus ab.

Kofaktor

Definition 42:

Die Formel für den Kofaktor lautet:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Dabei ist A_{ij} der Kofaktor, der sich aus der Multiplikation eines Vorzeichenfaktors $(-1)^{i+j}$ mit einer Unterdeterminante D_{ij} zusammensetzt.

Bemerkung 14:

Anwendung:

Laplace Entwicklungssatz zur Berechnung von Determinanten

Inverse Matrix berechnen mit Hilfe der Adjunkten

Kofaltormatrix

Aufstellen einer Kofaktormatrix

Definition 43:

Die Elemente der Kofaktormatrix Cof(A) sind die entsprechenden Kofaktoren.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 28:

Berechnen Sie den Kofaktor A_{32}.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Beispiel 29:

Kofaktormatrix einer 2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{vmatrix} = d$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{vmatrix} = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{vmatrix} = -b$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a & \cancel{b} \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{vmatrix} = a$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Wegen dem Vorzeichenfaktor erhalten Elemente, deren Summe aus Zeilennummer i und Spaltennummer j ungerade ist, ein negatives Vorzeichen.

Beispiel 30: Kofaktormatrix einer 3x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & \cancel{e} & f \\ g & \cancel{h} & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ g & \cancel{h} & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & \cancel{c} \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c \\ d & \cancel{e} & f \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & \cancel{c} \\ d & e & \cancel{f} \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Wegen dem Vorzeichenfaktor erhalten Elemente, deren Summe aus Zeilennummer i und Spaltennummer j ungerade ist, ein negatives Vorzeichen.

Adjunkten

Definition 44:

Die Adjunkte einer Matrix ist die Transponierte der Kofaktormatrix.

$Adj(A)=Cof(A)^T$

Adjunkte berechnen:

Beispiel 31:

Gegeben ist die Matrix A. Berechnen Sie zu A die Adjunkte.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Kofaktoren berechnen:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 7 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ 5 & \cancel{7} \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & 3 \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = 4$$

Kofaktormatrix aufstellen:

Die Elemente der Kofaktormatrix Cof(A) sind die entsprechenden Kofaktoren.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Kofaktormatrix transponieren:

Die Adjunkte einer Matrix ist die Transponierte der Kofaktormatrix.

$$Adj(A) = Cof(A)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix mit Adjunktenverfahren berechnen

Definition 45:

Die Formel zur Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe der Adjunkten lautet

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)$$

Da die Adjunkte die Transponierte der Kofaktormatrix ist, kann man die obige Formel auch umschreiben zu

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Cof}(A)^T$$

Bemerkung 15:

Vorgehen:

- Berechnen sie die Determinante von A. Wenn die Determinante von A gleich Null ist, gibt es keine Inverse und sie können mit dem Rechnen aufhören
- Ist die Determinante von A ungleich Null, berechnen sie die Kofaktoren.
- Stellen sie die Kofaktormatrix auf.
- Transponieren sie die Kofaktormatrix, um die Adjunkte zu erhalten.
- Setzen Sie die Zwischenergebnisse in die Formel zur Berechnung der inversen Matrix ein

Beispiel 32:

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Berechnen sie die inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten.

1.) Determinante berechnen

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = 13$$

Da die Determinante ungleich Null ist, existiert eine Inverse der Matrix A und wir können weiterrechnen.

2.) Kofaktoren berechnen

Die Formel für den Kofaktor lautet

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Dabei ist A_{ij} der Kofaktor, der sich aus der Multiplikation eines Vorzeichenfaktors $(-1)^{i+j}$ mit einer Unterdeterminante D_{ij} zusammensetzt.

Der Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+j}$ ordnet jeder Unterdeterminante ein Vorzeichen zu. Elemente, deren Summe aus Zeilennummer i und Spaltennummer j ungerade ist, bekommen ein negatives Vorzeichen.

D_{ij} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{7}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ 5 & \cancel{7} \end{vmatrix} = \mathbf{-5}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & 3 \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = \mathbf{-3}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = \mathbf{4}$$

3.) Kofaktormatrix aufstellen

Die Elemente der Kofaktormatrix $Cof(A)$ sind die entsprechenden Kofaktoren.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

4.) Kofaktormatrix transponieren

Die Adjunkte einer Matrix ist die Transponierte der Kofaktormatrix.

$$Adj(A) = Cof(A)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -3 \\ -5 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

5.) Einsetzen der Zwischenergebnisse in die Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -3 \\ -5 & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

Probe:

Haben wir die inverse Matrix richtig berechnet, so sollte bei der Multiplikation mit der Matrix A die Einheitsmatrix herauskommen.

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Zur Multiplikation der beiden Matrizen verwenden wir das Falk-Schema, welches in dem Artikel Matrrizenmultiplikation vorgestellt wird.

$$\begin{array}{cc|cc} & & \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} \\ & & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ \hline 4 & 3 & x_{11} & x_{12} \\ 5 & 7 & x_{21} & x_{22} \end{array}$$

Die Elemente der Ergebnismatrix berechnen sich zu

$$x_{11} = 4 \cdot \frac{7}{13} + 3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \mathbf{1}$$

$$x_{12} = 4 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + 3 \cdot \frac{4}{13} = \mathbf{0}$$

$$x_{21} = 5 \cdot \frac{7}{13} + 7 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \mathbf{0}$$

$$x_{22} = 5 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + 7 \cdot \frac{4}{13} = \mathbf{1}$$

Als Ergebnis der Multiplikation erhalten wir somit die Einheitsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Damit wurde gezeigt, dass wir die inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten korrekt berechnet haben.

Beispiel 33:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zuerst die Determinante von A,

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 8 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{array}$$

$$= (3 \cdot 0 \cdot 1) + (8 \cdot 1 \cdot 7) + (4 \cdot 1 \cdot 2) - (7 \cdot 0 \cdot 4) - (2 \cdot 1 \cdot 3) - (1 \cdot 1 \cdot 8) = 50.$$

Dann verwenden wir die Adjunktenregel:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 6 & -25 & 1 \\ 2 & 50 & -8 \end{pmatrix}.$$

Anwendungsaufgaben Verflechtungsmatrizen (Textaufgaben)

Verflechtungsmatrix

Stücklistenprobleme treten in der Wirtschaft auf. Dabei geht es um die Verflechtung von Produktionsschritten und deren Zwischen- und Endprodukten.

Produziert eine Firma ein Produkt, so setzt sich dieses zumeist aus mehreren verschiedenen Einzelprodukten zusammen, die wiederum aus unterschiedlichen Komponenten bestehen können.

Bei der Fertigung dieser Produkte muss die Anzahl der einzelnen Komponenten bzw. Zwischenprodukte bekannt sein, um einen reibungslosen Betrieb sicherzustellen.

Wenn nicht nur das Endprodukt, sondern auch die Zwischenprodukte verkauft werden, wie es z. B. in der Automobilindustrie üblich ist, erhöhen sich die Stückzahlen der Einzelprodukte nicht nur um die geforderte Nachfrage, sondern auch um den Bedarf, der benötigt wird, um die Einzelprodukte herzustellen.

Es geht daher um die Frage, wie groß die Anzahl der verschiedenen Zwischen- und Endprodukte jeweils sein muss, um die Anfrage von außen decken zu können.

Diese Frage kann mit Linearen Gleichungssystemen beantwortet werden. In der Praxis jedoch bedient man sich der Matrizenrechnung aufgrund der Vielzahl von Zwischen- und Endprodukten.

Zu Beginn der Überlegungen steht die graphische Darstellung der Verflechtung der einzelnen Produkte untereinander, ein sogenannter "**Gozintograph**", der anschaulich beschreibt, welche Produkte und welche Anzahl (Mengeneinheiten) der jeweiligen Produkte für die Fertigung der übergeordneten Produkte nötig sind.

Beispiel 34:

In einer Möbelfabrik werden aus Holz, Metall und Stoff Tische, Bänke und Stühle produziert, die einzeln bzw. als Sitzgruppen verkauft werden.

Für einen Tisch werden 12 Einheiten Holz und 3 Einheiten Metall,

für eine Bank 6 Einheiten Holz, 2 Einheiten Metall und 5 Einheiten Stoff,

für einen Stuhl 2 Einheiten Holz, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Stoff benötigt.

Eine Sitzgruppe A besteht aus einem Tisch und vier Stühlen,

eine Sitzgruppe B aus einem Tisch, einer Bank und drei Stühlen.

a) Geben Sie die Verflechtungsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Einzelprodukten und für den Zusammenhang von Einzelprodukten und Sitzgruppen an und bestimmen Sie aus diesen durch Matrizenmultiplikation die Verflechtungsmatrix für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Sitzgruppen!

b) Ein Kunde bestellt 40 Sitzgruppen A, 60 Sitzgruppen B und zusätzlich 10 Bänke. Ermitteln Sie unter Verwendung der Verflechtungsmatrizen aus a), welche Mengen der Ausgangsmaterialien benötigt werden!

Lösung:

Gozinto-Graph

Ist ein Graph, der in der Fertigungsplanung zur Produkt- und Teilbedarfsrechnung sowie als Vorstufe zur Fertigungstermin- und Maschinenbelegungsplanung dient.

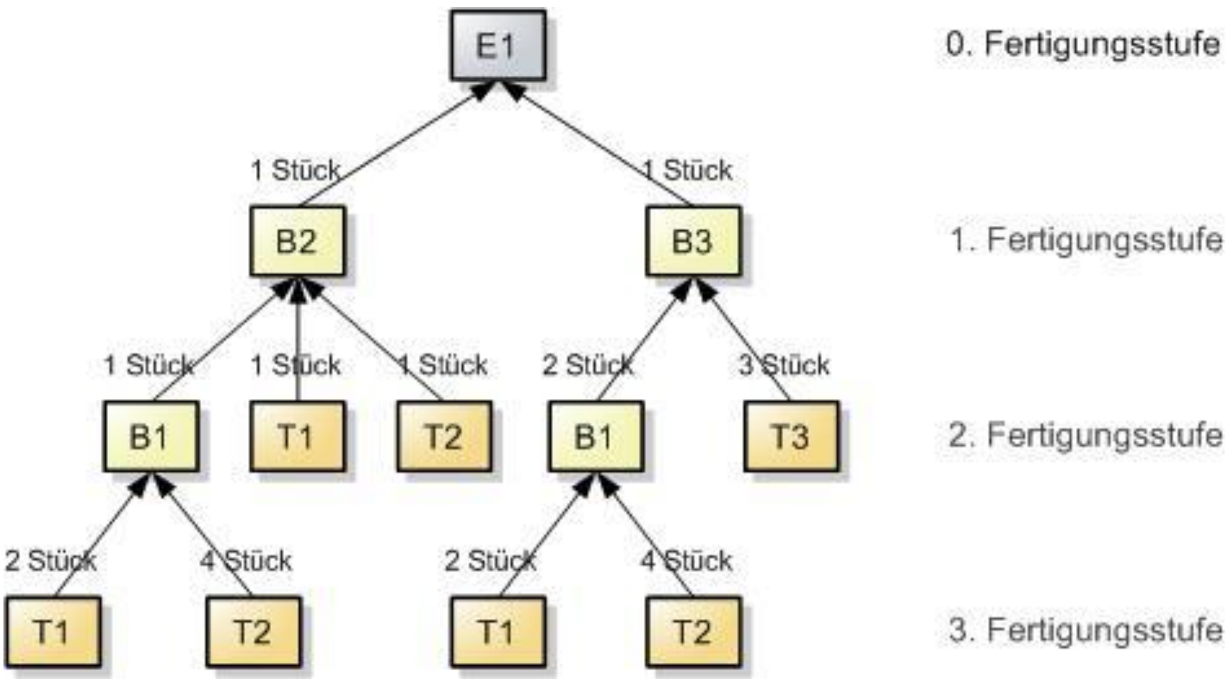
Im Gozinto-Graph treten alle Teile und Beziehungen nur einmal auf, sodass eine Datenredundanz vermieden wird. Der Gozinto-Graph dient somit der grafischen Veranschaulichung der heute zumeist in Datenbanksystemen gespeicherten Stücklisten.

Definition 46:

Ein Gozintograph ist ein gerichteter, bewerteter Graph, der durch Knotenmengen und Pfeilmengen beschrieben wird. Die Knoten des Graphen stellen die Endprodukte, Baugruppen und Rohstoffe dar, während die Pfeile die Input-Outputbeziehungen angeben.

Ausgangspunkt sind Stücklisten, die die Struktur von Teilen beschreiben. Angenommen wir haben ein Endprodukt E1, welches selber aus den beiden Baugruppen B2 und B3 und diese wiederum aus der Baugruppe B1 und den Teilen T1 und T2, sowie T3 bestehen.

Die Baugruppe B1 besteht aus den Teilen T1 und T2. Die Struktur der Stückliste hat als Baum folgende Struktur:



Daraus ergibt sich die Erstellung einer **Verflechtungstabelle in technologischer Reihenfolge**.

Determinanten

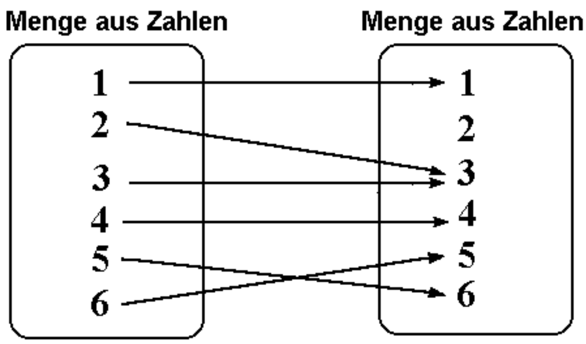
Grundlagen zu Determinanten

Wiederholung: Was ist eine Funktion?

Um das folgende zu verstehen, muss der Begriff der "Funktion" kurz wiederholt werden:

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnungsvorschrift die jedem Element einer Menge genau ein Element einer zweiten Menge zuordnet.

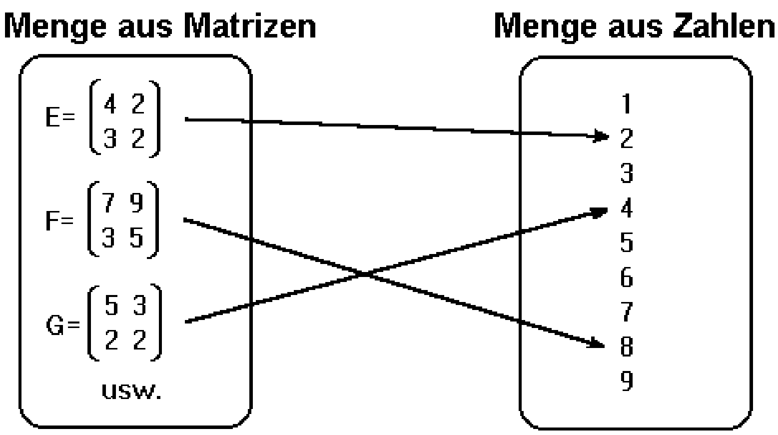
Bei einer "ganz normalen" Funktion wird also einer Zahl wieder eine Zahl zugeordnet. Das Bild zeigt eine solche Funktion:



Diese Funktion ordnet den Zahlen 1 bis 6 der linken Menge eindeutig eine Zahl zu, d.h. jeder Zahl der linken Menge wird genau eine Zahl der rechten Menge zugeordnet.

Die Determinantenfunktion

Man kann aber auch Funktionen definieren, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnen. Zu dieser Art von Funktionen gehört die Determinantenfunktion:



Determinanten

Die Determinantenfunktion ordnet Matrizen einen Funktionswert (Zahl) zu. Diesen Funktionswert nennt man "Determinanten".

Im vorigen Bild gilt z.B.:

Die Determinante der Matrix E ist die Zahl 2, die Determinante der Matrix F ist die Zahl 8 und die Determinante der Matrix G ist die Zahl 4.

Berechnung von zweireihigen Determinanten

Vorbemerkung zur Definition:

Auf der vorigen Seite hatten wir gesagt, dass die Determinanten-Funktion einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet.

Diese Zahl hatten wir den Namen Determinante gegeben.

Nun müssen wir natürlich noch definieren, welchen Wert diese Zahl hat. Zuerst definieren wir 2-reihige Determinanten:

Definition 1:

Matrix A: **Determinate der Matrix A:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Bemerkung 16:

Die Determinanten-Funktion ordnet nur quadratischen Matrizen eine Zahl zu.

Für nichtquadratische Matrizen ist die Determinanten-Funktion nicht definiert.

Bemerkung 17:

Natürlich ist die Determinanten-Funktion wie jede andere Funktion eindeutig, d.h. jeder quadratischen Matrix wird genau eine Determinante (Zahl) zugeordnet.

Beispiel 35:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 45 + 6 = 51$

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 = 0$

(e) $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8$

Zusatzfrage: Wann ist diese Determinante 0 ? Ergebnis: für $k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

(f) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Folgerungen

Über die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Definition 47:

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt genau eine Lösung, wenn die Koeffizienten-Determinante nicht verschwindet.

$$D = det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

Beispiel 1:

$3x + 2y = 5$

$-6x - 4y = 6$

Daraus ergibt sich folgende Determinante:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$

Beispiel 36:

Wir berechnen die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 + 10 = 22$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) - (-10) \cdot 3 = -30 + 30 = 0$$

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

In diesem Abschnitt werden wir uns mit den wesentlichen Eigenschaftender 2-reihigen Determinanten vertraut machen und sie zu Regeln zusammenfassen.

Sie gelten im Übrigen sinngemäß auch für die später noch zu definierenden Determinanten höherer Ordnung.

Regel 1:

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden. Man bezeichnet diesen Vorgang auch als "Stürzen der Determinante".

Beispiel 2:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - (-3) \cdot 5 = 16 + 15 = 31$$

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 16 + 15 = 31$$

Somit gilt erwartungsgemäß:

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{A} = 31$$

Regel 2:

Beim Vertauschen der beiden Zeilen (oder Spalten) ändert eine 2-reihige-Determinante ihr Vorzeichen.

Beispiel 3:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -7 - 12 = -19$$

Wir vertauschen nun beide Spalten. Die Determinante ändert dabei ihr Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 7 \cdot (-1) = 12 + 7 = 19 = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Regel 3:

Werden die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante mit einem reellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Beweis:

Wir multiplizieren die Elemente der 1. Zeile der zweireihigen Determinante

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Mit dem Skalar λ und erhalten:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} a_{22} - \lambda a_{12} a_{21} = \lambda (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det \mathbf{A}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir die Elemente der 2. Zeile mit λ multiplizieren oder die 1. Oder 2. Spalte mit λ multiplizieren.

Daraus ergeben sich zwei weitere Regeln:

Regel 4:

Eine 2-reihige Determinante wird mit einem reellen Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

Regel 5:

Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante einen gemeinsamen Faktor λ, so darf dieser vor die Determinante gezogen werden.

Bemerkung 18:

Man beachte den folgenden Unterschied:

Eine Matrix wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem **jedes Matrixelement** mit λ multipliziert wird.

Im Gegensatz dazu erfolgt die Multiplikation einer Determinante mit einem Skalar λ, indem man die Elemente **einer beliebigen Zeile (oder Spalte)** mit λ multipliziert.

Beispiel 37:

In der Determinante

$$\begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix}$$

Besitzen die Elemente der 1. Spalte den gemeinsamen Faktor -8, den wir nach Regel 5 vor die Determinante ziehen dürfen. Es ist somit:

$$\begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-8 \cdot 3) & 7 \\ (-8 \cdot 4) & 1 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8(3 \cdot 1 - 4 \cdot 7) =$$

$$= -8(3 - 28) = -8 \cdot (-25) = 200$$

Regel 6:

Eine 2-reihige Determinante besitzt den Wert Null, wenn sie (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind Null.

Beweis:

Wir nehmen an, dass sämtliche Elemente der 1. Zeile gleich null sind.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0$$

Für die zweite Zeile ist der Beweis gleich.

2. Beide Zeilen (oder Spalten) stimmen überein.

Beweis:

Die Determinante besitzt zwei gleiche Zeilen.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} a_{12} - a_{11} a_{12} = 0$$

3. Die Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional.

Bemerkung 19:

Zwei Zeilen (Spalten) sind gleich, wenn sie in ihren entsprechenden Elementen übereinstimmen.

Proportionalität zweier Zeilen (Spalten) bedeutet: Einander entsprechende Elemente stehen in einem festen Zahlenverhältnis.

Beweis:

Die zweite Zeile ist das λ-fache der ersten Zeile.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}_{0} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Beispiel 38:

Die folgenden Determinanten verschwinden

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weil

Det(A)=0: Die Elemente der 2. Zeile sind Null.

Det(B)=0: Die beiden Zeilen (bzw. Spalten) sin proportional zueinander.

Det(C)=0: Die beiden Zeilenvektoren stimmen überein.

Det(D)=0: Die Elemente der zweiten Zeile (bzw. zweiten Spalte) sind Null.

Regel 7:

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches der anderen Zeile (bzw. anderen Spalte) elementweise addiert. Bereits veränderte Zeilen oder Spalten dürfen zum weiteren rechnen nicht mehr verwendet werden.

Beweis:

Zu der ersten Zeile der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

addieren wir das λ-fache der zweiten Zeile. Daraus ergibt sich folgendes:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} + \lambda a_{21}) & (a_{12} + \lambda a_{22}) \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + \lambda a_{21}) a_{22} - (a_{12} + \lambda a_{22}) a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} + \lambda a_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{21}a_{22} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Das entsprechend gleiche Ergebnis erhalten wir zu der zweiten Zeile das λ-fache der ersten Zeile addiert wird.

Beispiel 39:

Addieren wir zur *1. Zeile* der Determinante $\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ das *6-fache* der *2. Zeile*, so hat sich nach **Regel 7** der Wert der Determinante *nicht* geändert. Es ist somit:

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-6+6) & (5+24) \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 29 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 1 \cdot 29 = -29$$

Wir bestätigen dieses Ergebnis, indem wir die Ausgangsdeterminante *direkt* berechnen:

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = -24 - 5 = -29$$

■

Regel 8:

Multiplikationstheorem für Determinanten

Für zwei 2-reihige Matrizen A und B gilt stets:

det(A·B)=det(A)·det(B)

d. h. die Determinante eines Matrizenproduktes A ·B ist gleich dem Produkt der Determinanten der beiden Faktoren A und B.

Beispiel 40:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Determinante des *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ geschieht am einfachsten nach dem *Multiplikationstheorem* (**Regel 8**). Wir erhalten mit

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = -2 - 20 = -22$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = -2 + 12 = 10$$

den folgenden Wert:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = (-22) \cdot 10 = -220$$

Zur *Kontrolle* berechnen wir jetzt die Determinante $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ auf einem *anderen* Wege, müssen dabei allerdings einen Mehraufwand an Zeit und Arbeit in Kauf nehmen. Zunächst bilden wir nach dem Anordnungsschema von *Falk* das Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und im Anschluss daran die Determinante $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

$$\begin{array}{c|cc|cc}
 & & \mathbf{B} & -2 & -3 \\
 & & & 4 & 1 \\
\hline
\mathbf{A} & 1 & 4 & 14 & 1 \\
 & 5 & -2 & -18 & -17 \\
\hline
 & & & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{vmatrix} = 14 \cdot (-17) - (-18) \cdot 1 =$$

$$= -238 + 18 = -220 \qquad \blacksquare$$

Regel 9:

Die Determinante einer 2-reihigen Dreiecksmatrix A besitzt den Wert

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22}$$

d. h. die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Bemerkung 20:

Da die Diagonalmatrix ein Sonderfall der Dreiecksmatrix ist, gilt es für ihre Determinante ebenfalls

Die Einheitsmatrix E und Nullmatrix 0 wiederum sind Sonderfälle der Diagonalmatrix.

Für ihre Determinanten gilt daher:

$$\det \mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\det \mathbf{0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 = 0$$

Beweis:

Hier anhand der oberen Dreiecksmatrix gezeigt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11} a_{22}$$

Beispiel 41:

Die Determinanten der folgenden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

besitzen folgende Werte:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) = -15$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 = 35$$

Beispiel 42:

Die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ist eine Diagonalmatrix.

Ihre Determinante besitzt den folgenden Wert

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-4) = 24$$

Beispiel 43:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 45 + 6 = 51$

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 = 0$

(e) $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8$

Zusatzfrage: Wann ist diese Determinante 0 ? Ergebnis: für $k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

(f) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Folgerungen

Über die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Definition 48:

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt genau eine Lösung, wenn die Koeffizienten-Determinante nicht verschwindet.

$$D = det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad .$$

Beispiel 44:

$3x + 2y = 5$

$-6x - 4y = 6$

Daraus ergibt sich folgende Determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

3-reihige Determinanten oder Determinante 3. Ordnung

Auf der vorigen Seite hatten wir die Determinanten-Funktion für 2-reihige Matrizen definiert. Jetzt wollen wir das gleiche für 3-reihige Matrizen machen.

Auf 3-reihige Determinanten stößt man beispielsweise, wenn man ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten vom Typ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

auf seine Lösbarkeit hin untersucht.

Wir werden später zeigen, dass ein solches System nur dann genau eine Lösung besitzt, wenn der aus den Elementen der 3-reihigen Koeffizienten-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gebildete Term

$$\begin{aligned} D = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

einen von Null unterschiedlichen Wert besitzt.

Die Zahl D heißt Determinante von A. Sie wird in diesem Zusammenhang meist als Koeffizienten-Determinante des Gleichungssystems bezeichnet.

Definition 49:

Unter der Determinanteeiner3-reihigen, quadratischen Matrix versteht man die Zahl

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & & |\mathbf{A}| = \mathbf{D} = \mathbf{det\ A} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}$$

mit $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Beispiel 45:

Als Beispiel sei folgende Matrix gegeben:

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten-Funktion ordnet der Matrix A die Determinante |A| zu:

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Will man nun die Determinante berechnen, so muss man die obige Definition benutzen:

$|A| = 0\cdot5\cdot1 + 2\cdot4\cdot3 + 5\cdot6\cdot2 - 3\cdot5\cdot5 - 2\cdot4\cdot0 - 1\cdot6\cdot2 = 0+24+60-75-0-12 = -3$

Die Determinante |A| hat also den Wert -3.

Bemerkung 21:

Die Determinante D heißt auch3-reihige Determinante oder Determinante 3. Ordnung.

Gebräuchliche Schreibweisen sind:

$$D, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \det \mathbf{A}, \quad |\mathbf{A}|, \quad |a_{ik}|$$

Sarrus-Regel

Was ist die Sarrus-Regel?

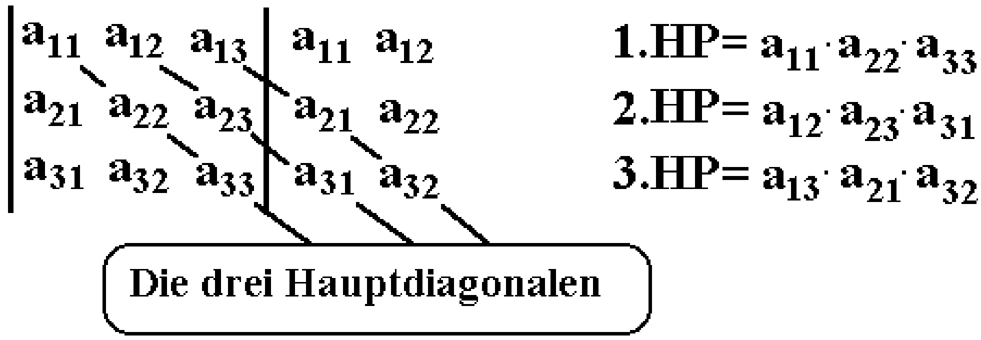
Die auf der vorigen Seite gelernte Definition für 3-reihige Determinanten kann man sich mit der Regel von Sarrus merken. Sie ist also keine neue Definition, sondern eine simple Merkhilfe.

Erklärung der Regel:

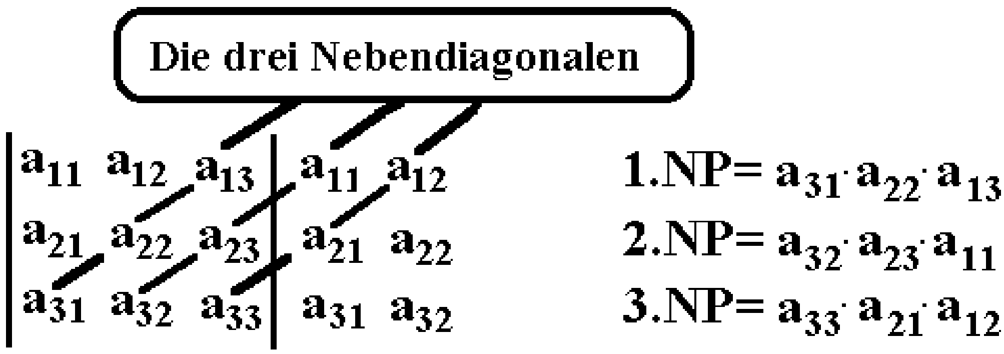
Zuerst schreiben wir die zwei ersten Spalten der Determinante |A| nochmals rechts neben dieselbe:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Die drei im folgenden Bild eingezeichneten Diagonalen nennt man die Hauptdiagonalen. Das Produkt je einer Hauptdiagonalen nennt man Hauptdiagonalenprodukt. Wir haben also drei Hauptdiagonalenprodukte (kurz HP's):



Die anderen drei Diagonalen nennt man Nebendiagonalen bzw. ihre Produkte die Nebendiagonalen-Produkte.



Addiert man die drei Hauptdiagonalen-Produkte und subtrahiert davon die drei Nebendiagonalen-Produkte, so erhält man die von der Vorseite bekannte Formel für |A|:

$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$

Bemerkung 22:

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Regel von Sarrus nur für 3-reihige Determinanten gilt.

Rechenregeln für 3-reihige Determinanten

Für 3-reihige Determinanten gelten sinngemäß die gleichen Rechenregeln wie für 2-reihigeDeterminanten (Regel 1 bis Regel 9) aus dem vorherigen Abschnitt)

Beispiel 46:

(a) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right. = 2\cdot 2\cdot 5+3\cdot 2\cdot(-1)+1\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 1-1\cdot 2\cdot 2-5\cdot 3\cdot 3$$

$$= 20-6+3+2-4-45=-30$$

(b) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right. = -3+16+0-(-30)-(-4)-0=47$$

(c) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right. = 32+90-10-(-12)-100-24=0$$

Beispiel 47:

Im nächsten Beispiel ziehen wir zuerst zwei Faktoren vor die Determinante, um kleinere Zahlen zu erhalten:

$$\begin{vmatrix} 12 & 24 & 48 \\ 5 & 10 & -5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 60\cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right.$$

=60(40+10)=3000

Hier wurde am Ende die erste Zeile von der 2. subtrahiert, was die beiden Nullen ergeben hat.

Beispiel 48:

$$\begin{vmatrix} k & 12 & 3 \\ 2k & 6 & 1 \\ k & 6 & 1 \end{vmatrix} = k\cdot 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6k\cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right. = 6k\cdot(2-1)=6k$$

Hier wurde am Ende die 2. Spalte von der dritten subtrahiert.

Beispiel 49:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -3\\ 7 & 2 & -5\end{vmatrix}$$

Hier entdeckt man keine einfache Methode, die einem auf einmal zwei Nullen beschert. Aber in zwei Schritten kann man an den markierten Stellen Nullen erzeugen.

1. Schritt: Addiere das Dreifache der 1. **Spalte** zur 2. Spalte
2. Schritt: Addiere das (-4)-fache der 1. **Spalte** zur 3. Spalte:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -3\\ 7 & 2 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3+3 & 4-4\\ 2 & 5+6 & -3-8\\ 7 & 2+21 & -5-28\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 11 & -11\\ 7 & 23 & -33\end{vmatrix}$$

Nun kann man noch den Faktor (-11) aus der letzten Spalte herausziehen:

$$=-11\cdot\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 11 & 1 & 2 & 11\\ 7 & 23 & 3 & 7 & 23\end{array}\right.=-11\cdot(33-23)=-110$$

Einreihige Determinanten

Bis jetzt haben wir noch keine einreihigen Determinanten definiert.

Die Definition der "Einreihigen Determinante" ist kurz und simpel.

Definition 50:

Eine einreihige Determinante hat den gleichen Wert wie ihr (einziges) Element. Die Formel dazu:

$|a_{11}| = a_{11}$

Beispiel 50:

Welchen Wert hat die Determinante |4711|?

Antwort:

Die Determinante hat den Wert 4711.

n-reihige Determinanten

Anmerkung

Genauso wie für 2- und 3-reihige Determinanten müssten wir auch für 4-, 5-, 6-, ... , n-reihige Determinanten eine Formel angeben, mit der man sie berechnen kann.

Dabei stößt man aber schnell an Grenzen, denn schon eine Determinante mit 5 Reihen hat eine Lösungsformel mit 120 Summanden! Das ist zu viel Arbeit!

Wir werden aber bald eine Definition (=Lösungsformel) der Determinantenfunktion kennen lernen, die wesentlich kürzer und eleganter ist.

Da die Berechnung von Determinanten mit mehr als 3 Reihen sehr aufwendig aber doch Routinearbeit ist, werden sie oft mit Computerprogrammen oder Taschenrechnern berechnet!

Laplace'scher Entwicklungssatz (Unterdeterminanten)

Unterdeterminante

Definition 51:

Die aus einer 3-reihigen Determinante D durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte erhaltene 2-reihige Determinante heißt Unterdeterminante von D und wird durch das Symbol D_{ik} gekennzeichnet (i, k=1,2,3)

Schnittpunktelement

Definition 52:

Streicht man in einer Determinante eine beliebige Zeile i und außerdem eine beliebige Spalte k, so nennt man das Element, das im Schnittpunkt der gestrichenen Zeile und Spalte entsteht, a_{ik} das Schnittpunktelement.

Das Schnittpunkt-Element a_{ik} ist also genau das Element, dass sowohl in der gestrichenen Zeile als auch in der gestrichenen Spalte steht.

Beispiel 51:

Als Beispiel sei eine 3-reihige Determinante gegeben:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Als Beispiel streichen wir die dritte Zeile und die zweite Spalte:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Das Schnittpunkt-Element ist dann das Element a_{32}:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Schnittpunkt-Element ist das Element } a_{32}$$

Beispiel 52:

Gegeben sei eine dreireihige Determinante |A|:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nun streichen wir eine Zeile i und eine Spalte k.

Als Beispiel streichen wir die 3.Zeile und die 2.Spalte:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Es bleiben vier Elemente übrig die nicht gestrichen wurden.

Diese vier Elemente bilden die so genannte Unterdeterminante D_{32}:

$$D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Beachte:

Hat die Determinante n Reihen, so haben alle Unterdeterminanten n-1 Reihen.

Vorzeichen-Faktor

Vorbemerkung zur Definition

Man kann eine Funktion definieren, die jeder Unterdeterminante D_{ik} einen Vorzeichenfaktor zuordnet.

Der Vorzeichenfaktor kann den Wert (+1) oder (-1) haben.

Die Funktion nennen wir die "Vorzeichenfunktion".

Definition 53:

Der Unterdeterminante D_{ik} wird durch die Vorzeichenfunktion
der Vorzeichenfaktor V_{ik} zugeordnet. Dieser berechnet sich so:
$D_{ik} \rightarrow V_{ik} = (-1)^{i+k}$

Beispiel 53:

Nehmen wir an, wir streichen in einer Determinante z.B. die 3.Zeile und die 2.Spalte, so dass die Unterdeterminante D_{32} entsteht:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Der Unterdeterminante D_{32} wird dann der Vorzeichenfaktor V_{32} zugeordnet, der sich nach obiger Definition berechnen lässt:

$V_{ik} = (-1)^{i+k} = (-1)^{3+2}=(-1)^5=(-1)$

Bemerkung 23:

Das Produkt aus Vorzeichenfaktor V_{ik} und Unterdeterminante D_{ik} nennt man auch "algebraisches Komplement" A_{ik}:

$A_{ik} = V_{ik} \cdot D_{ik}$

Entwicklungsformel

Jetzt definieren wir eine n-reihige Determinante durch ihre Unterdeterminanten.

Die Formel nennen wir Entwicklungsformel. Auf den nächsten Seiten werden wir dann sehen, wozu diese Formel zu gebrauchen ist.

Definition 54:

Gegeben sei eine n-reihige-Determinante, im Beispiel eine 3-reihige:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Hat die Determinante n-Reihen, so schreiben wir sie n-mal nebeneinander, d.h. in unserem Beispiel 3-mal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nun streichen wir in allen Determinanten die erste Reihe, sowie in der n-ten Determinante die n-te Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Es entstehen n Unterdeterminanten (im Beispiel entstehen drei):

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Diese Unterdeterminanten addieren wir: $D_{11}+D_{12}+D_{13}+\ldots+D_{1n}$

Jetzt multiplizieren wir noch jede Unterdeterminante mit dem gleichnamigen Vorzeichenfaktor und Schnittpunkt-Element:

$V_{11}a_{11}D_{11} + V_{12}a_{12}D_{12} + \ldots + V_{1n}a_{1n}D_{1n}$

Schließlich definieren wir, dass diese Formel gleich der gegebenen Determinante D sein soll:

$D = V_{11}a_{11}D_{11} + V_{12}a_{12}D_{12} + \ldots + V_{1n}a_{1n}D_{1n}$

Meist schreibt man die Entwicklungsformel mit dem $\sum$-Zeichen:

$$D = \sum_{k=1}^{n} V_{1k} \cdot a_{1k} \cdot D_{1k}$$

Beispiel 54:

Als Beispiel sei eine 3-reihige-Determinante gegeben:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Laut Definition müssen wir die Determinante 3x aufschreiben:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Dann müssen wir die erste Zeile streichen und je eine der Spalten:

$$\begin{vmatrix} \cancel{7} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ \cancel{5} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{7} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 5 & \cancel{2} & 3 \\ 4 & \cancel{1} & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{7} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 5 & 2 & \cancel{3} \\ 4 & 1 & \cancel{6} \end{vmatrix}$$

Es entstehen drei Unterdeterminanten:

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Jetzt addieren wir diese drei Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Jede Unterdeterminante multiplizieren wir mit ihrem gleichnamigen Vorzeichenfaktor und Schnittpunktelement:

$$V_{11} \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + V_{12} \cdot 9 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + V_{13} \cdot 8 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Die drei Vorzeichenfaktoren müssen wir noch berechnen:

$V_{11} = (-1)^{1+1} = 1$ $\quad V_{12} = (-1)^{1+2} = -1$ $\quad V_{13} = (-1)^{1+3} = 1$

Die 3-reihige Determinante D, ausgedrückt durch 2-reihige Unterdeterminanten, lautet somit:

$$\mathbf{D} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -123$$

Bemerkung 24:

Der Wert einer 3-reihigen Determinante ist unabhängig von der Zeile oder Spalte, nach der entwickelt wird.

In der Praxis entwickelt man stets nach derjenigen Zeile oder Spalte, die die meisten Nullen enthält, da diese Elemente keinen Beitrag zum Determinanten-Wert leisten.

Bei einer 3-reihigen Determinante bringt die Entwicklung nach Laplace in der Regel keine nennenswerte Erleichterung. Meist ist es bequemer, die Determinante nach der Regel von Sarrus zu berechnen.

Für das algebraische Komplement A_{ik} ist auch die Bezeichnung Adjunkte gebräuchlich.

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Die hergeleiteten Rechenregeln für 2-reihigeDeterminanten gelten sinngemäß auch für Determinanten höherer Ordnung (n-ter Ordnung).

Diese Regeln in allgemeiner Form:

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Regel 1: Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn Zeilen und Spalten miteinander *vertauscht* werden, d. h. die Determinante „gestürzt“ wird.

Regel 2: Beim *Vertauschen* zweier Zeilen (oder Spalten) ändert eine Determinante ihr *Vorzeichen*.

Regel 3: Werden die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit einem reellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Regel 4: Eine Determinante wird mit einem reellen Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

Regel 5: Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen *gemeinsamen* Faktor λ, so darf dieser *vor* die Determinante gezogen werden.

Regel 6: Eine Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. *Alle* Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind *Null*.
2. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind *gleich*.
3. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind zueinander *proportional*.
4. Eine Zeile (oder Spalte) ist als *Linearkombination* der übrigen Zeilen (oder Spalten) darstellbar.

Regel 7: Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (oder Spalte) addiert.

Regel 8: Multiplikationstheorem für Determinanten

Für zwei n-reihige Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt stets

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) \qquad \text{(I-83)}$$

d. h. die Determinante eines *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist gleich dem *Produkt* der Determinanten der beiden Faktoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

Regel 9: Die Determinante einer n-reihigen *Dreiecksmatrix* $\mathbf{A}$ besitzt den Wert

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \qquad \text{(I-84)}$$

d. h. die Determinante der Dreiecksmatrix ist gleich dem *Produkt* der Hauptdiagonalelemente. Diese Regel gilt auch für den Sonderfall einer *Diagonalmatrix*.

Beispiel 55:

Wir berechnen die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 + 10 = 22$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) - (-10) \cdot 3 = -30 + 30 = 0$$

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Anwendungsaufgaben

Siehe Aufgabensammlung

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Eine Gleichung, die nur eine Unbekannte hat, kann man (in allen euch bekannten Fällen) nach dieser Unbekannten auflösen und somit die Lösungsmenge bestimmen. Unter der Lösungsmenge sind alle Zahlen zu verstehen, die man für die Unbekannte einsetzen kann, so dass die Gleichung wahr ist, also "stimmt".

Manche Fragestellungen beinhalten jedoch zwei oder mehr Unbekannte, wobei man aber auch zwei oder mehr voneinander unabhängige Gleichungen aufstellen kann. Zum Beispiel eine kleine Textaufgabe:

Christina kauft vom Artikel A zehn Stück und zwölfmal Artikel B. Daniel dagegen kauft fünfzehn Stück von A, aber nur zwei von B. Christina bezahlt 38 Euro, Daniel 19,40 Euro.

Unbekannt sind die Einzelpreise von A und B. Da für beide Einkäufer die einzelnen Stückzahlen und der Gesamtpreis bekannt sind, kann man zwei Gleichungen aufstellen, die beschreiben, wie sich der jeweilige Gesamtpreis zusammensetzt. Der Einzelpreis von A wird hierbei durch die Variable a beschrieben und der Einzelpreis von B durch die Variable b:

$10a + 12b = 38$ (1) (Christinas Einkauf)

$15a + 2b = 19{,}4$ (2) (Daniels Einkauf)

Leider kann man hier keine der einzelnen Gleichungen für sich genommen so nach einer Variablen auflösen, dass man den Einzelpreis ablesen kann, denn man bekommt die andere Variable nicht weg.

Man weiß aber, dass die zu findenden Lösungen für a und b für beide Gleichungen gleichzeitig gelten müssen. Man hat hier dadurch ein System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Alle Verfahren, das Problem zu knacken, beruhen darauf, aus den n Gleichungen mit n Unbekannten (wobei mit n die Anzahl der Gleichungen und Variablen gemeint ist) nur noch **eine Gleichung mit einer Unbekannten** zu machen. Es gibt dabei im Wesentlichen neben dem Erraten und dem graphischen Lösungsverfahren vier algebraische Verfahren:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Eliminationsverfahren nach Gauß
- Cramer’sche Lösungsverfahren

Hat man mehr als zwei Gleichungen, dann führt in jedem Verfahren immer jeder einzelne Schritt zu einer Gleichung, die jeweils eine Variable weniger enthält.

Gaußscher Algorithmus

Dieses Verfahren dient zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Es eignet sich zur Bestimmung einer speziellen Lösung als auch zur Angabe der gesamten Lösungsmannigfaltigkeit.

Durch moderne Rechneranlagen lässt sich das Gauß‘sche Eliminationsverfahren sehr gut durchführen und hat deshalb an Bedeutung gewonnen.

Seine Idee besteht darin, aus einem System von m linearen Gleichungen mit n Variablen m-1 Gleichungen so umzuformen, dass eine der Variablen, etwa x_1, in diesen m-1 Gleichungen nicht mehr vorkommt, also eliminiert wird.

Aus m-2 von diesen m-1 neuen Gleichungen lässt sich nun z.B. x_2 entfernen. Indem man so fortfährt, erhält man schließlich eine einfach zu lösende Gleichung, die nur noch eine Variable x_n aufweist.

Das Gleichungssystem lässt sich dann einfach nach allen anderen Variablen auflösen, da immer nur eine unbekannte Variable vorhanden ist.

Rechenschema:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \quad (2)\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \quad (3)\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1')\\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \quad (2')\\
a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 &= b'_3 \quad (3')\\
a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 &= b'_4 \quad (4')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1'')\\
x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \quad (2'')\\
a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \quad (3'')\\
a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 &= b''_4 \quad (4'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \quad (1''')\\
x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \quad (2''')\\
x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \quad (3''')\\
x_4 &= b'''_4 \quad (4''')
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Teil wird ein Gleichungssystem mit 4 Variablen veranschaulicht:

(1‘) erhalten wir durch Division von (1) durch a_{11} (Vor. $a_{11} \neq 0$)

Dann multiplizieren wir (1‘) mit a_{21} und subtrahieren von (2) und erhalten (2‘).

Dann multiplizieren wir (1‘) mit a_{23}und subtrahieren von (3) und erhalten (3‘).

Entsprechend erhält man (4‘)

Anschließend wird (2‘) zu (2‘‘) vereinfacht und zur Umformung von (3‘) in (3‘‘) und von (4‘) in (4‘‘) verwendet.

Dies wird analog bis (4‘‘‘) fortgesetzt, so dass man nach der Variablen auflösen kann.

Determinanten-Verfahren nach Cramer (Cramer‘sche Regel)

Gabriel Cramer (1704 - 1752, von Beruf Mönch) entwickelte ein stark formalisiertes Lösungsverfahren für LGS.

(Bedingung: Gleichviel Variablen und Gleichungen)

Ein Zahlenschema der Form:

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \blacksquare & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \blacksquare & \blacksquare & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \blacksquare & a_{n,n} \end{pmatrix} \right| \qquad \text{mit allen} \quad a_{i,j} \in R$$

heißt Determinante (n-reihig).

Die Entwicklung von Determinanten

(Wie rechnet man den Wert einer Determinante aus?)

Eine 2-reihige Determinante wird folgendermaßen berechnet:

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \right| = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$$

Hauptdiagonale (links oben nach rechts unten)

Nebendiagonale (links unten nach rechts oben)"

Eine beliebige Determinante wird nun nach einer Zeile oder Spalte entwickelt.

Am Beispiel: (Entwicklung nach der 1. Zeile)

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \right| - 7 \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 & 9 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} \right| + 4 \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \right| - 6 \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right|$$

Man nimmt die Elemente der 1. Zeile als Faktoren vor Unterdeterminanten, die entstehen, wenn man die Zeile und Spalte streicht, in der der jeweilige Faktor steht. Die Produkte aus Faktor und Unterdeterminante wird addiert oder subtrahiert. Das Vorzeichen wird nach Zeilennummer/Spaltennummer bestimmt. Man addiert die Zeilen- und Spaltennummer: Ergebnis gerade: +, ungerade: -

(Ein Beispiel: Entwicklung nach der 6. Zeile: Das erste Element steht in der 6. Zeile, 1. Spalte, 6+1=7, ungerade, also wird mit - begonnen.)

Das gleiche Beispiel nach der 2. Zeile entwickelt:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| + 5 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| - 9 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}\right| + 6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

Eine dieser Unterdeterminanten kann dann weiter entwickelt werden, z. B.:

$$\left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\right| - 4 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\right| + 6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

Die entstandenen 2-reihigen Determinanten lassen sich mit obiger Methode berechnen, z. B.:

$$\left|\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot 9 - 2 \cdot 8$$

Obiges Beispiel im letzten Entwicklungsschritt:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -10 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 9 - 2 \cdot 8) ..$$

Insgesamt werden zwölf 2-reihige Determinanten berechnet!

Wer das Beispiel nachrechnen möchte:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -2516$$

Für die Berechnung von 3-reihigen Determinanten kann man die **Regel von Sarrus** heranziehen, die die Entwicklung der 3-reihigen und anschließenden Berechnung von 2-reihigen Determinanten bereits enthält:

Beispiel 56:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \cdot 6 + 8 \cdot 0 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0 \cdot 0 = -137$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{matrix}$$

Die ersten zwei Spalten rechts danebenschreiben, dann:

Hauptdiagonalen – Nebendiagonalen

Die Cramer'sche Regel

Definition 55:

(1) Bilde die Koeffizientendeterminante:

Ist D≠0, so hat das LGS eine eindeutige Lösung.

(Ist D=0 und alle D_i=0, so gibt's eine Parameterlösung.

Ist D=0und ein D_i≠0, so gibt's keine Lösung.)

$$D = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \blacksquare \\ a_{2,1} & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}\right|$$

(2) Bilde alle Formdeterminanten D_i:

$$D1 = \left|\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & \blacksquare \\ b_2 & a2,2 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}\right|$$

Die 1. Spalte wird durch die rechte Seite (die b_s) ersetzt.

Die 2. Spalte wird durch die rechte Seite ersetzt.

$$D2 = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 & \blacksquare \\ a_{2,1} & b_2 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}\right|$$

usw.

(3) Berechne die Lösungen:

$$x_1 = \frac{D1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D2}{D}$$

...

$$x_n = \frac{Dn}{D}$$

Beispiel 57:

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$

$$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$D := \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$D = 3$$

Es existiert eine eindeutige Lösung

$$D1 := \left|\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$D1 = 3$$

$$x_1 := \frac{D1}{D}$$

$$x_1 = 1$$

$$D2 := \left|\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -5 & -5 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$D2 = 6$$

$$x_2 := \frac{D2}{D}$$

$$x_2 = 2$$

$$D3 := \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$D3 = 9$$

$$x_3 := \frac{D3}{D}$$

$$x_3 = 3$$

Beispiel 58:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & |\cdot(-2) \\
\mathrm{II} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 15x_4 & = & 6 & \\
\mathrm{III} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 6 & \\
\mathrm{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & \\
\hline
\mathrm{I} & -4x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & - & 24x_4 & = & 12 & \\
\mathrm{II} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 15x_4 & = & 6 & |\mathrm{I}+\mathrm{II} \\
\mathrm{III} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 6 & |\mathrm{I}+\mathrm{III} \\
\mathrm{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & \\
\hline
\mathrm{I} & -4x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & - & 24x_4 & = & 12 & |:(-2) \\
\mathrm{II} & & - & 9x_2 & + & 9x_3 & - & 9x_4 & = & 18 & |\cdot(-\frac{15}{9}) \\
\mathrm{III} & & - & 15x_2 & + & 12x_3 & - & 18x_4 & = & 18 & \\
\mathrm{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & |\cdot 5 \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & 15x_2 & - & 15x_3 & + & 15x_4 & = & -30 & |:15 \\
\mathrm{III} & & - & 15x_2 & + & 12x_3 & - & 18x_4 & = & 18 & |\mathrm{II}+\mathrm{III} \\
\mathrm{IV} & & - & 15x_2 & + & 25x_3 & - & 10x_4 & = & 70 & |\mathrm{II}+\mathrm{IV} \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\mathrm{III} & & & & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -12 & |\cdot\frac{10}{3} \\
\mathrm{IV} & & & & & 10x_3 & + & 5x_4 & = & 40 & \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\mathrm{III} & & & & - & 10x_3 & - & 10x_4 & = & -40 & |:(-10) \\
\mathrm{IV} & & & & & 10x_3 & + & 5x_4 & = & 40 & |\mathrm{III}+\mathrm{IV} \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\mathrm{III} & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 4 & \\
\mathrm{IV} & & & & & & - & 5x_4 & = & 0 & |:(-5) \\
\hline
\mathrm{IV} & & & & & & & x_4 & = & 0 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_4 \text{ eingesetzt in III:}} & \\
& & & & & x_3 & & & = & 4 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_3 \text{ und } x_4 \text{ eingesetzt in II:}} & \\
& & & x_2 & - & 4 & & & = & -2 & |+4 \\
& & & x_2 & & & & & = & 2 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_2,\ x_3 \text{ und } x_4 \text{ eingesetzt in I:}} & \\
& 2x_1 & + & 6\cdot 2 & - & 3\cdot 4 & & & = & -6 & |:2 \\
& x_1 & & & & & & & = & -3 &
\end{array}
$$

Beispiel 59:

$$\begin{array}{rrcrcrcrl}
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & 7x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 & |3\cdot\text{II}+(-7)\cdot\text{I} \\
\text{III} & -x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & = & -5 & |3\cdot\text{III}+\text{I} \\
\hline
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & - & 5x_2 & - & 17x_3 & = & -13 & \\
\text{III} & & - & 10x_2 & - & 34x_3 & = & -14 & |(-\frac{1}{2})\cdot\text{III}+\text{II} \\
\hline
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & - & 5x_2 & - & 17x_3 & = & -13 & \\
\text{III} & & & & & 0 & = & 6 & \\
\hline
\end{array}$$

Durch Anwendung von Gauß erhält man in der letzten Gleichung einen Widerspruch, d.h. das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

$$L = \{\}$$

Beispiel 60:

$$\begin{array}{rrcrcrcrl}
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & 4x_1 & - & 12x_2 & + & 8x_3 & = & 4 & |\text{II}+(-2)\cdot\text{I} \\
\text{III} & 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 & |2\cdot\text{III}+(-3)\cdot\text{I} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 & \\
\text{III} & & & 17x_2 & - & 13x_3 & = & 9 & |2\cdot\text{III}+17\cdot\text{II} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 & \\
\text{III} & & & & & 8x_3 & = & -16 & \\
\hline
\end{array}$$

Man erhält mit Gauß eine Dreiecksform, d.h. das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung:

$$L = \{(2;-1;-2)\}$$

Textaufgaben zum Erstellen von Linearen Gleichungssystemen

Definition 56:

Hier müssen die Gleichungen als erstes aufgestellt werden. Die Lösung erfolgt über eines der bereits dargestellten Verfahren.

Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

In Linearen Gleichungssystems tauchen weitere Parameter auf.

Hier lautet die grundsätzliche Frage:

Definition 57:

Welche Zahlen müssen eingesetzt werden um

eine eindeutige Lösung

keine Lösung

unendlich viele Lösungen

zu bekommen.

Simplex-Algorithmus

Grafische Lösung von linearen Optimierungsproblemen

Lineare Optimierungsprobleme lassen sich auch ohne Probleme grafisch lösen, vorausgesetzt man hat **nur zwei Entscheidungsvariablen**. Lediglich zwei Entscheidungsvariablen deshalb, da wir so das lineare Optimierungsproblem in der Ebene lösen können.

Eigenschaften:

Vorbereitung optimaler Entscheidungen

Verwendung mathematischer Modelle zur Optimierung

Problemstellungen

Allgemein sind Gegenstand von OR-Untersuchungen: Probleme der wirtschaftlichen, gesellschaftlichen Praxis, die sich durch mathematische Modelle beschreiben lassen.

Solche Probleme können sein:

Zuteilungsprobleme:

Eine vorgegebene Leistung ist durch den Einsatz beschränkter Mittel auf wirtschaftliche Weise zu erzielen bzw. mit gegebenen Mitteln ist ein maximaler Ertrag zu erzielen.

Am häufigsten zur Lösung von Zuteilungsproblemen verwendete mathematische Verfahren: Lineare Planungsrechnung (lineare Optimierung, lineare Programmierung)

Konkurrenzprobleme:

Entscheidungen des einen Partners werden durch Entscheidungen des anderen Partners beeinflusst.

Konkurrenzprobleme werden mit Hilfe von Spielen (z.B. Zweipersonen- Nullsummenspiele) beschrieben, d.h. charakterisiert durch eine bestimmte Anzahl von Spielern, Spielregeln, Gewinn und Verlust.

Das grundlegende mathematische Verfahren ist in der Spieltheorie beschrieben.

Lagerhaltungsprobleme:

In diesen Problemen sind die Kosten der Lagerung abzuwägen gegen Auftragskosten bzw. Bestellkosten und Kosten, die durch verzögerte Lieferung wegen Erschöpfung des Lagerbestands entstehen.

Mathematische Hilfsmittel sind hier: Gleichungssysteme und Verfahren der linearen und dynamischen Planungsrechnung.

Wartezeitprobleme:

Personen und Güter werden durch (eine oder mehrere) Stellen abgefertigt. Von Ausnahmefällen abgesehen, müssen dabei zu bedienende Einheiten oder Bedienungsstellen warten. Es entstehen Kosten. Die Summe dieser Kosten soll einen möglichst geringen Wert annehmen.

Problemlösungen

Bemerkung 25:

Mit Hilfe eines Algorithmus wird das mathematische Modell unter Verwendung der Daten gelöst.

OR im weitesten Sinn beschäftigt sich mit Modellbildung und Lösungsfindung (Entwicklung und / oder Anwendung von Algorithmen) sowie Methoden zur Datenermittlung.

Modelle spielen im OR eine zentrale Rolle. Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild eines realen Systems oder Problems. OR benutzt im wesentlichen Entscheidungs- bzw. Optimierungs- – sowie Simultaionsmodelle.

Ein Entscheidungs- bzw. Optimierungsmodell ist eine (formale) Darstellung eines Entscheidungs- oder Planungsproblems, das in seiner einfachsten Form mindestens eine Alternativmenge und eine bewertende Zielfunktion enthält.

Es wird aufgestellt, um mit geeigneten Verfahren optimale und suboptimale Lösungsvorschläge ermitteln zu können.

Ein Optimierungsmodell lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Definition 58:

Maximiere (oder Minimiere) eine Zielfunktion unter den Nebenbedingungen.

Häufig sind aber die angegebenen Probleme so komplex, dass zu den mathematischen Modellen keine bzw. nur sehr komplizierte, direkte analytische Lösungsmethoden vorliegen. In solchen Fällen setzt man auf Simulationsverfahren.

Darunter wird das Zielgerichtete Experimentieren an Modellen, die der Wirklichkeit nachgebildet sind verstanden. Durch die Simulation, d.h. die Bearbeitung von Modellen bei Zielgerichteter Veränderung der Einflussgrößen, sollen Rückschlüsse auf das reale System möglich werden.

Simulation als Methode des OR wird dann angewandt, wenn sich das Problem nicht durch ein mathematisches Modell beschreiben lässt oder wenn es kein analytisches Lösungsverfahren gibt oder wenn ein solches einen zu hohen Rechenaufwand erfordern würde. Zielsetzung der Simulation ist das Bestimmen sog. Suboptima, z.B. die optimale Bestellmenge, optimale Ersatzzeitpunkte, u. ä. Häufig werden lediglich Suboptimale Lösungen erreicht, da die Modelle nur Teilzusammenhänge realer Systeme nachbilden. Simulationen gehören somit zu den heuristischen Verfahren.

Lineare Planungsrechnung

Einführung

Lineare Optimierung, was ist das?

Mit linearer Optimierung bezeichnet man ein Teilgebiet der Optimierungsrechnung. Diese ist ein wichtiges Hilfsmittel zur optimalen Entscheidungsfindung bei komplizierten Problemen.

Die lineare Optimierung wird verwendet, um das **Minimum** beziehungsweise das **Maximum** einer linearen Funktion unter einschränkenden Bedingungen zu ermitteln. Die zu maximierende Funktion ist dabei meistens die Gleichung für den Gewinn, die zu minimierende Funktion die Gleichung für die Kosten eines Unternehmens.

Um das Minimum oder das Maximum zu bestimmen, muss man die einschränkenden Bedingungen, die Einfluss auf das Ergebnis haben herausfinden und mit dem zu erreichenden Minimum/Maximum in Verbindung setzten.

Erste Schritte:

Diejenigen Bedingungen zu bestimmen, die eine Wirkung auf das Optimierungsergebnis haben, ist eine wichtige Aufgabe, die vor der eigentlichen Rechnung gelöst werden muss. Hierbei ist die exakte Formulierung der Aufgabe sehr wichtig, die meistens aus zwei Teilen besteht: die Bestimmung des Ziels und die Bedingungen, die dafür notwendig sind.

Mathematischer Zusammenhang:

Die lineare Optimierung hat sich aus der linearen Algebra herausgebildet. Die Bestimmung eines Extremwertes ist aus der Differenzialrechnung bekannt.

Sie wird dort auf nichtlineare Funktionen einer oder mehrerer unabhängiger Variablen angewendet. Für die Extremwertberechnungen linearer Funktionen versagen die Methoden der Differenzialrechnung. Lineare Funktionen sind zwar differenzierbar, da aber ihre erste Ableitung stets konstant ist, kann die für einen Extremwert bestehende notwendige Bedingung nicht erfüllt werden.

Die Frage nach einem Extremwert einer linearen Funktion geht bei den Problemen der linearen Optimierung von wesentlich anderen Gesichtspunkten aus als bei der Differenzialrechnung. Sie wird erst sinnvoll durch die stets mit auftretenden Nebenbedingungen, die die Form von linearen Gleichungen und Ungleichungen haben.

Sind Entscheidungen Glücksache?

„OR oder Optimalplanung bedeutet das Vorbereiten optimaler Entscheidungen“.

Entscheidungen sind aber häufig von zufälligen Ereignissen abhängig, d.h. "Entscheidungen sind Glücksache".

Gegeben ist das folgende Problem

Beispiel 61:

Aus einem bestimmten Kontingent an Rohmaterial können 2 Erzeugnisse (Produkte) hergestellt werden.

Der Stückgewinn des einen Produkts (Produkt 2) ist doppelt so hoch wie der Stückgewinn des anderen Produkts (Produkt 1).

Die aus dem gegebenen Rohmaterial mögliche Produktion ist in jedem Fall ganz absetzbar.

Wie viel ist von beiden Produkten zu fertigen, wenn ein optimaler Gewinn erreicht werden soll?

Dazu wollen wir versuchen verschiedene Dispositionsregeln aufzustellen.

Dispositionsregel (1):

Es ist nur das Produkt zu fertigen, das den höchsten Gewinn abwirft.

Das bedeutet:

Nur das Produkt 2 ist zu fertigen. Ist diese Entscheidung richtig? Sie kann auch falsch sein.

Das vorhandene **Rohmaterialkontingent** ist:

Rohmaterial 1: 6t

Rohmaterial 2: 10t

Rohmaterial 3: 16t

Davon wird für die Fertigung je eines Stücks benötigt:

Produkt 1:	1t Rohmaterial 1
	2t Rohmaterial 2
	1t Rohmaterial 3
Produkt 2:	1t Rohmaterial 1
	1t Rohmaterial 2
	3t Rohmaterial 3

Fertigt man 5 Stück von Produkt 2, dann bleiben noch übrig:

Rohmaterial 1: 1t

Rohmaterial 2: 5t

Rohmaterial 3: 1t

Diese Rohmaterialien reichen zur Fertigung von Produkt 2 nicht mehr aus, wohl aber zur Herstellung eines Stücks von Produkt 1.

Dispositionsregel (1) ist zu diesem speziellen Fall falsch.

Dispositionsregel (2):

Es wird so viel wie möglich von dem Produkt gefertigt, das den höchsten Gewinn abwirft. Vom etwa übrig gebliebenem Rohmaterial wird so viel wie möglich vom anderen Produkt erzeugt.

Auch diese Regel muss nicht allgemeingültig sein.

Deshalb versuchen wir es mit einem anderen Beispiel:

Zur Fertigung eines Produkts A bzw. B braucht man

Produkt A: 1t Rohmaterial A

2t Rohmaterial B

1t Rohmaterial C

Produkt B: 1t Rohmaterial A

1t Rohmaterial B

3t Rohmaterial C

Das vorhandene **Rohmaterialkontingent** ist:

Rohmaterial 1: 6t

Rohmaterial 2: 10t

Rohmaterial 3: 16t

Der Gewinn für ein Stück von Produkt 2 ist wieder doppelt so groß wie für ein Stück von Produkt 1 (z.B. 200.- Euro gegenüber 100.- Euro).

Nach Dispositionsregel (2) ist der Gesamtgewinn = 1.100.- Euro. Es könnte ein Höchstgewinn von 500.- Euro erreicht werden, wenn 6 Stück von Produkt A hergestellt werden.

Dispositionsregel (3):

Fertigung des Produkts, das den niedrigeren Stückgewinn bringt.

Auch hier erhalten wir einen Gewinn von 600.- Euro

Bemerkung 26:

Offensichtlich ist es Glücksache, eine Dispositionsregel zu finden, die zum optimalen Ergebnis führt.

Vom Zufall zur Methode

Eine Methode in jedem Fall eine optimale Dispositionsregel zu finden, besteht aus folgenden Schritten:

Definition 59:

Stelle systematisch sämtliche Möglichkeiten (der Fertigung von Produkten) auf unter Berücksichtigung von 1. Zielfunktion aufstellen, was soll optimiert werden 2. Materialanforderungen 3. Beschränkung der Materialkapazität, aufstellen der Nebenbedingungen 4. Nichtnegativitätsbedigungen formulieren.

Von der Methode zum praktischen Verfahren

Unbefriedigend an dem bisher entwickelten, methodisch einwandfreien Verfahren ist:

Das Verfahren ist nicht mehr in dieser Form durchführbar, wenn mehr als 2 zu fertigende Produkte behandelt werden müssen.

Auch bei 2 Produkten kann die Prozedur, die nach den 3 Schritten abläuft, sehr langwierig sein, z.B. dann, wenn die Zahl der grundsätzlich möglichen Fertigungskombinationen sehr groß ist.

Wie muss ein Verfahren beschaffen sein, das diese beiden Schwachpunkte vermeidet, dennoch systematisch in jedem Fall eine optimale Dispositionsregel bestimmt?

Dazu sind 3 Fragen zu klären:

Wie stellt man das Problem formelmäßig dar? (Voraussetzung für die Lösung durch einen formalen Rechenprozess)

Gibt es einen Rechenprozess, der immer, auch bei beliebig vielen Produkten, systematisch zu einer optimalen Lösung führt?

Gibt es einen solchen Rechenprozess, der mit möglichst wenigen Rechenschritten auskommt?

Die Klärung der unter 2. und 3. ausgeführten Fragen erfordert umfangreiche mathematische Beweisverfahren.

Ergebnis dieser mathematischen Untersuchungen:

Es gibt tatsächlich einen Rechenprozess, der immer zum Ziel führt. Dazu brauchen nur die Punkte eines „**Simplex**“ für die Berechnung des Optimums herangezogen werden. Eine optimale Lösung liegt in dem Punkt eines „Simplex“.

Simplex oder n-Simplex (Mehrzahl: Simplexe und Simplizia) ist ein Begriff aus der Geometrie und beschreibt einen n-dimensionalen Körper (eigentlich ein Polytop).

Das auf diese Weise angedeutete Rechenverfahren heißt Simplexverfahren.

Die Antwort auf die erste Frage zeigt die folgende mathematische Formulierung des Problems:

Mögliche Stückzahl des Produkts 1: x_1

Mögliche Stückzahl des Produkts 2: x_2

Allgemein gilt: $x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$

Die grafische Darstellung lässt sich dann folgendermaßen beschreiben:

Dazu nochmals die Daten:

Annahme: Gewinn für ein Stück des Produkts 1 ... 1 GE

Gewinn für ein Stück des Produkts 2 ... 2 GE

Zur Wiederholung nochmals die Vorgaben

Das vorhandene **Rohmaterialkontingent** ist:

Rohmaterial 1: 6t

Rohmaterial 2: 10t

Rohmaterial 3: 16t

Davon wird für die Fertigung je eines Stücks benötigt:

Produkt 1: 1t Rohmaterial 1

2t Rohmaterial 2

1t Rohmaterial 3

Produkt 2: 1t Rohmaterial 1

1t Rohmaterial 2

3t Rohmaterial 3

$x_1 + x_2 <= 6$

$2x_1 + x_2 <= 10$

$x_1 + 3x_2 <= 16$

Gewinn: $Z = x_1 + 2x_2$

Wähle aus den möglichen Lösungen des Systems von Ungleichungen die heraus, die den Wert der Zielfunktion Z zu einem Maximum macht. Das Auswählen erfolgt nach einem speziellen Rechenformalismus, dem (bereits erwähnten) Simplex-Verfahren.

Dieses Verfahren werden wir später noch kennen lernen.

Lineares Optimierungsproblems

Ein LOP besteht grundsätzlich aus folgenden Punkten:

Definition 60:

die Zielfunktion

den Restriktionen (Nebenbedingungen

den Nichtnegativitätsbedingungen (Vorzeichenbeschränkungen)

Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

LOP:	lineares Optimierungsproblem
Z:	Zielfunktion
NB:	Nebenbedingungen
NNB:	Nichtnegativitätsbedingungen

Eine zulässige Lösung, für die die Zielfunktion einen optimalen (maximalen oder minimalen) Wert annimmt, heißt **optimale Lösung** (Optimallösung) des LOP.

Graphische Lösung

Bemerkung 27:

NNB schränken die Lösung auf positive Werte ein.

NB schränken im ersten Quadranten die Lösungsmenge weiter ein.

Mit der Zielfunktion ergibt sich dann die optimale Lösung (minimal oder maximal).

Beispiel 62:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB:
$$x_1 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 36$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Zunächst werden die zu den Restriktionen gehörenden Hyperebenen gezeichnet und die entsprechenden Halbebenen gekennzeichnet. Unter Berücksichtigung der NNB erhält man den schraffierten Bereich der zulässigen Lösungen.

Jeder Punkt des Lösungsbereiches stellt eine zulässige Lösung des LOP dar. Von diesen Punkten wird derjenige (im Fall einer eindeutigen Optimallösung) bzw. werden diejenigen (im Falle einer mehrdeutigen Optimallösung) gesucht, in dem bzw. in denen die Zielfunktion einen maximalen Wert Z annimmt.

Die Zeichnung der Zielfunktion und in der Folge die Ermittlung der Optimallösung geschieht im Allgemeinen in zwei Schritten:

- man zeichnet eine erste Zielfunktion für einen beliebigen Wert von Z
- man verschiebt diese Zielfunktion so lange parallel, bis Z einen maximalen Wert annimmt

Diese Vorgehensweise ist deswegen möglich, weil die Zielfunktion für alle Werte von Z die gleiche Steigung hat. Im vorliegenden Fall formt man die Gleichung

$$Z = 2.000x_1 + 3.000x_2$$

in ihre Normalform

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{Z}{3.000}$$ um:

für beliebige Werte von Z beträgt die Steigung -2/3, und die Zielfunktionen verlaufen für verschiedene Werte von Z parallel, d. h. die zuerst gezeichnete Zielfunktion kann parallel verschoben werden.

Vielfach wird für die erste Zielfunktion der Wert Z=0 vorgegeben. Dann lautet die Normalform $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$, und die Zielfunktion verläuft durch den Nullpunkt. Eine Parallelverschiebung in Richtung zunehmender werte für Z ist möglich bis zum Punkt P.

Solange die Zielfunktion zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt P verläuft, ist die Lösung noch nicht optimal; wird die Zielfunktion aber über den Punkt p hinaus verschoben, so ist die Lösung nicht mehr zulässig.

Somit stellt der Punkt p die (eindeutige) Optimallösung des gegebenen LOP dar.

Anschließend müssen die Koordinaten (x_1, x_2) des Punktes P sowie der Wert Z der Zielfunktion ermittelt werden.

Für den Punkt P(4,8) und die Zielfunktion

$$Z = 2.000 \cdot 4 + 3.000 \cdot 8 = 32.000$$

Eine Alternative für die Zeichnung der ersten Zielfunktion ist die folgende. Man verwendet die Achsen-Abschnitts-Form und gibt für Z einen solchen Wert vor, dass die Schnittpunkte mit den beiden Achsen in der Zeichnung eingetragen werden können; damit ist der für Z vorzugebende Wert vom Maßstab der Zeichnung abhängig.

Für dieses Beispiel lautet die Achsen-Abschnitts-Form der Zielfunktion

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{2.000}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3.000}} = 1$$

Gibt man z. B. Z=18.000 vor, so erhält man

$$\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Gegenüber der oben praktizierten Verwendung der Normalform mit Z=0 dürfte diese Vorgehensweise den Vorteil einer höheren Genauigkeit haben.

Beispiel 63:

Gegeben ist das LOP

Z: Min $z=3x_1+4x_2$

$$2x_1+5x_2\geq 25$$
$$4x_1+4x_2\geq 32$$
NB: $$6x_1+2x_2\geq 24$$

NNB: $x_1,x_2\geq 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}=1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{3}}+\frac{x_2}{\frac{Z}{4}}=1$$

Lösung:

Der optimale Punkt ist P(5,3).

Dadurch ergibt sich für Z=27

Beispiel 64:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$

NB: $x_1 + 4x_2 \le 36$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der optimale Punkt ist P(4,8).

Dadurch ergibt sich für Z=28

Beispiel 65:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:

$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der optimale Punkt ist P(4,0).

Dadurch ergibt sich für Z=4

Beispiel 66:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$

NB: $x_1 + 4x_2 = 36$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der Bereich der zulässigen Lösungen besteht nur aus einem Geradenstück.

Der optimale Punkt ist P(4,8).

Dadurch ergibt sich für Z=28.

Beispiel 67:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:

$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Der Bereich der zulässigen Lösungen besteht nur aus einem Geradenstück.

Der optimale Punkt ist P(0,9).

Dadurch ergibt sich für Z=27

Beispiel 68:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=8x_1+4x_2$

NB:
$$3x_1 + 5x_2 \leq 32$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 32$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 28$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{8}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{4}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=24

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Lösung:

Dieses LOP unterscheidet sich von den vorangehenden dadurch, dass sich in einem Punkt mehr als zwei Geraden (hier alle zu den drei Restriktionen gehörenden Geraden) schneiden. Solche Probleme werden als ausgeartet, entartet oder degeneriert bezeichnet.

Der optimale Punkt ist P(4,4).

Dadurch ergibt sich für Z=48

Beispiel 69:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=2x_1+3x_2$

NB:
$$6x_2 \leq 30$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 36$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 38$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{2}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{3}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} = 1$$

Lösung:

Verschiebt man nach Ermittlung des zulässigen Bereichs und Eintragung einer ersten Zielfunktion, diese in Richtung der Grenzen des Lösungsbereichs nach rechts oben, so stellt man folgendes fest.

Es existiert nicht genau ein Punkt, in dem die parallel verschobene Zielfunktion den Lösungsbereich gerade noch berührt; vielmehr überdeckt die Zielfunktion exakt eine der Begrenzungslinien des Lösungsbereichs. Damit stellen alle Punkte zwischen den Eckpunkten P und Q einschließlich dieser beiden Punkte eine Optimallösung dar, d. h. die Optimallösung ist mehrdeutig.

Der optimale Punkt ist P(2,5).

Dadurch ergibt sich für Z=19

bis

Der optimale Punkt ist Q(5,3).

Dadurch ergibt sich für Z=19

Beispiel 70:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1 - x_2 \geq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \geq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{4}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Lösung:

Man erkennt, dass der Bereich der zulässigen Lösungen gleich der leeren Menge ist. Grund dafür ist, dass ein Widerspruch zwischen den Restriktionen vorliegt. Den Widerspruch erkennt man deutlicher, wenn man die dritte Restriktion mit (-1) multipliziert.

Man erhält dann

$$2x_1 - x_2 \leq -3$$

was der ersten Restriktion

$$2x_1 - x_2 \geq 6$$

widerspricht.

Da die Lösungsmenge dieses LOP leer ist, existiert natürlich auch keine Optimallösung.

Beispiel 71:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1 - x_2 \le 6$$
$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$-2x_1 + x_2 \le 3$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{4}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Lösung:

Hier ist der Bereich der zulässigen Lösungen nicht leer. Da sich aber die Geraden (1) und (3) nicht schneiden, ist er ("nach oben") unbeschränkt. D a er unbeschränkt ist, existieren unendlich viele Lösungen. Da die Zielfunktion zu maximieren ist, existiert jedoch keine Optimallösung.

Beispiel 72:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=-3x_1+2x_2$

NB:
$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$-x_1 + x_2 \le 4$$
$$-2x_1 + x_2 \le 3$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Es wird zunächst der mögliche Lösungsbereich ermittelt.

Anschließendes Umformen der Zielfunktion:

$$\frac{x_1}{-\frac{Z}{3}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

z. B. Vorgabe Z=12

$$\frac{x_1}{-4} + \frac{x_2}{6} = 1$$

Lösung:

Hier ist der Bereich der zulässigen Lösungen zwar ebenfalls unbeschränkt, aber man erkennt, dass mit dem Punkt P eine eindeutige Lösung existiert

P (1,5) Z=7

Die besondere Bedeutung der Eckpunkte erkennt man ebenfalls an den vorangegangenen Beispielen: falls eine Optimallösung existiert, so liegt sie in einem Eckpunkt, falls mehrere optimale Lösungen existieren, so liegen sie zwischen zwei Eckpunkten (einschließlich dieser beiden Punkte).

Allgemeine Vorgangsweise beim graphische Lösen von linearen Optimierungsaufgaben:

Bemerkung 28:

Festlegen der Variablen

Nebenbedingungen als Ungleichungen formulieren

Zielfunktion aufstellen

Koordinatensystem zeichnen (geeigneter Maßstab)

Alle Restriktionen (Begrenzungen) in das Koordinatensystem eintragen

Zulässigen Bereich markieren

Zielfunktion eintragen

Parallel verschieben der Zielfunktion nach rechts (Maximierung), bis der letzte Punkt des zulässigen Bereichs erreicht ist → Koordination dieses Punktes: optimale Kombination von x und y

Berechnen des optimalen Zielfunktionswerts durch Einsetzen des oben gefundenen Punktes in die Koordination in die Zielfunktion.

Die optimale Lösung eines linearen Optimierungsproblems liegt immer in einer Ecke des zulässigen Bereichs.

Falls die Zielfunktion parallel zu einer der den zulässigen Bereich abgrenzenden Restriktionen liegt, so gibt es mehr als ein Optimum, aber unter diesen Optima ist auch mindestens eine Ecke.

Es gilt daher auf jeden Fall: sofern ein lineares Optimierungsproblem überhaupt ein Optimum besitzt, so wird dieses in einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen. Dies nutz der Simplex-Algorithmus aus.

Mit dem Simplex-Algorithmus durchwandert mit höherem Zielfunktionswert so lange, bis es keine Nachbarecke mit höherem Zielfunktionswert mehr gibt. Dann hat man das Optimum erreicht.

Rechnerische Lösung von LOP'S

Das Simplex-Verfahren (auch Simplex-Algorithmus) ist im Operations-Research ein Optimierungsverfahren zur Lösung linearer Programme (LPs).

Es löst ein solches Problem nach endlich vielen Schritten exakt oder stellt dessen Unlösbarkeit oder Unbeschränktheit fest.

Die Grundidee des Simplex-Verfahrens wurde 1947 von George Dantzig vorgestellt. Seitdem hat es sich durch zahlreiche Verbesserungen zum wichtigsten Lösungsverfahren der linearen Optimierung in der Praxis entwickelt.

Historie

Die Grundlagen der linearen Optimierung wurden 1939 von dem russischen Mathematiker Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch in seinem Buch „Mathematische Methoden in der Organisation und Planung der Produktion" gelegt.

Kurz danach präsentierte der Amerikaner F.L. Hitchcock eine Arbeit zu einem Transportproblem.

Im Jahre 1947 veröffentlichte George Dantzig das Simplex-Verfahren, mit dem lineare Programme erstmals systematisch gelöst werden konnten. Eine der ersten dokumentierten Anwendungen der neuen Methode war das Diäten-Problem von G.J. Stigler, dessen Ziel eine möglichst kostengünstigste Nahrungszusammensetzung für Soldaten war, die bestimmte Mindest- und Höchstmengen an Vitaminen und anderen Inhaltsstoffen erfüllte. An der optimalen Lösung dieses linearen Programms mit neun Ungleichungen und 77 Variablen waren damals neun Personen beschäftigt, die zusammen etwa 120 Manntage Rechenarbeit benötigten.

Interesse an dieser Arbeit zeigte zunächst das amerikanische Militär, speziell die US Air Force, die militärische Einsätze optimieren wollte. In den Folgejahren entwickelten John von Neumann und Oskar Morgenstern das Verfahren weiter.

Mit dem Aufkommen von Computern Mitte der 1950er Jahre konnte man auch größere Probleme lösen. Man entwickelte spezielle Varianten der Simplexmethode wie das revidierte Simplex-Verfahren, das sehr sparsam mit dem damals knappen und teuren Hauptspeicher umging. Im Jahre 1954 brachte William Orchard-Hays die erste kommerzielle Implementierung dieses Verfahrens auf den Markt. Im selben Jahr veröffentlichten Lemke und Beale das duale Simplex-Verfahren, das sich heute – nach weiteren Verbesserungen – zu einer der Standardmethoden zur Lösung linearer Programme entwickelt hat.

Die theoretische Komplexität des Simplex-Verfahrens war lange Zeit unklar. Erst im Jahre 1972 konstruierten V. Klee und G.J. Minty ein Beispiel, bei dem der Algorithmus alle exponentiell vielen Ecken eines Polyeders abläuft, und zeigten damit die exponentielle Laufzeit des Verfahrens. Ähnliche Beispiele wurden bisher für alle bekannten Varianten des Verfahrens gefunden.

Ab den 1970er Jahren profitierte der Simplex-Algorithmus – wie auch andere Verfahren der Linearen Optimierung – von algorithmischen Fortschritten der numerischen linearen Algebra, insbesondere bei der Lösung großer linearer Gleichungssysteme. Vor allem die Entwicklung numerisch stabiler LR-Zerlegungen für dünnbesetzte Matrizen trug maßgeblich zum Erfolg und der Verbreitung des Simplex-Verfahrens bei.

Seit Mitte der 1970er bis Anfang der 1990er Jahre wurde das Verfahren durch die Entwicklung neuer Pivotstrategien deutlich verbessert. Vor allem die wachsende Bedeutung der ganzzahligen linearen Optimierung in den 1980er Jahren sowie die Entwicklung des dual steepest edge pricing in der Implementierung von Forrest und Goldfarb (1992) machten das duale Simplex-Verfahren zum ernsthaften Konkurrenten für andere Lösungsmethoden. Umgekehrt hatte diese Verbesserung des dualen Simplex-Algorithmus einen maßgeblichen Anteil am Erfolg von Schnittebenenverfahren und Branch-and-Cut zur Lösung ganzzahliger linearer Programme. Darüber hinaus sorgten neue Preprocessing-Methoden in den 1990er Jahren dafür, dass immer größere LPs gelöst werden konnten. Unter der – in praktischen Anwendungen fast immer erfüllten – Voraussetzung, dass die auftretenden LP-Matrizen dünn besetzt sind, können heute lineare Programme mit mehreren Hunderttausend Variablen oder Ungleichungen innerhalb weniger Stunden optimal gelöst werden.

Der primale Simplex-Algorithmus bei bekannter zulässiger Basislösung

Beispiel 73:

Wir gehen von unserem Gärtnerproblem aus:

Ein Gärtner möchte einen 100 qm großen Garten mit Rosen und/oder Nelken bepflanzen.

Er möchte max. 720 Euro an Arbeits- und Materialkosten investieren und höchstens 60qm für Nelken reservieren.

Folgende Tabelle enthält weitere Daten des Problems.

	Rosen	Nelken
Arbeits- und Materialkosten (in Euro/qm)	6	9
Gewinn	1	2

Wie viele qm sollen mit jeder Sorte bepflanzt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird?

Lösung: P(30,60) Z=150

x_1: mit Rosen zu bepflanzende Fläche

x_2: mit Nelken zu bepflanzende Fläche

Damit erhalten wir folgendes Modell

Max $Z=x_1+2x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$6x_1 + 9x_2 \leq 720$$
$$x_2 \leq 60$$

Schritt1:

Durch die **Schlupfvariablen** wird aus dem linearen Ungleichungssystem ein LGS gemacht.

Definition 61:

Die Schlupfvariablen sind die nicht genützten Kapazitäten der einzelnen Restriktionen.

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die **Strukturvariablen** des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$6x_1 + 9x_2 + x_4 = 720$$
$$x_2 + x_5 = 60$$
$$z = x_1 + 2x_2 = 0$$

Durch Umformung ergibt sich folgende Darstellung:

$$x_3 = 100 - x_1 - x_2$$
$$x_4 = 720 - 6x_1 - 9x_2$$
$$x_5 = 60 - x_2$$
$$z = 0 + x_1 + 2x_2$$

Daraus folgt die erste zulässige Lösung:

$$x_3 = 100$$
$$x_4 = 720$$
$$x_5 = 60$$
$$x_1 = x_2 = 0$$
$$Z = 0$$

Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um 2GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Schritt 2:

Definition 62:

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht.

In unserem Beispiel wird daher x_2 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 60 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt $x_3=40 > 0$; $x_4=180 > 0$; x_5 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_1 bleibt Nichtbasisvariable.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

Man erhält sie durch einsetzen von $x_2=60-x_5$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

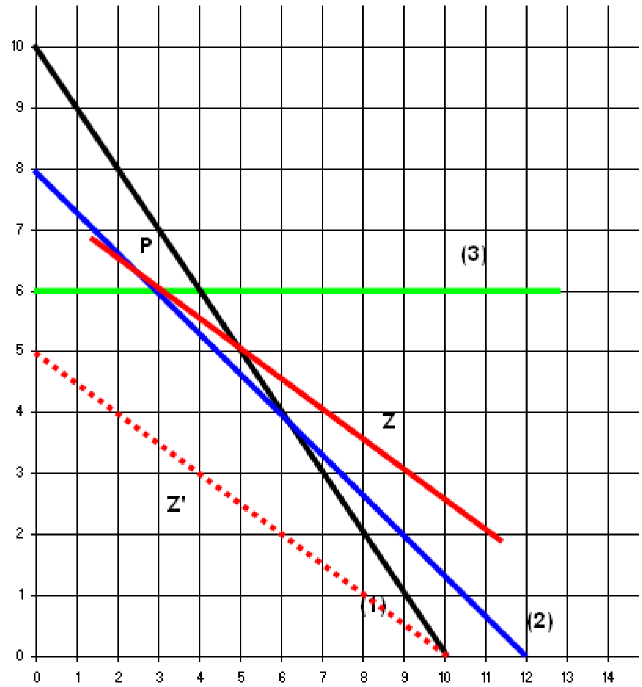
$$x_3 = 100 - x_1 - (60 - x_5) = 40 - x_1 + x_5$$
$$x_4 = 720 - 6x_1 - 9 \cdot (60 - x_5) = 180 - 6x_1 + 9x_5$$
$$x_5 = 60 - x_2 \Leftrightarrow x_2 = 60 - x_5$$
$$z = 0 + x_1 + 2 \cdot (60 - x_5) = 120 + x_1 - 2x_5$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_3 = 40 - x_1 + x_5$$
$$x_4 = 180 - 6x_1 + 9x_5$$
$$x_2 = 60 - x_5$$
$$z = 120 + x_1 - 2x_5$$

Vergleichen wir die gefundene Zwischenlösung

($x_1=0$; $x_2=60$; $x_3=40$; $x_4=180$; $x_5=0$)



Im Simplex-Algorithmus wandern Sie entlang der Ecken, bis Sie die optimale Lösung gefunden haben.

Bemerkung 29:

In dieser Form kann dieses Verfahren nur angewandt werden, wenn der Punkt (0|0) innerhalb der Lösungsmenge liegt.

Jetzt beginnt der Algorithmus wieder von vorne.

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und fällt um 2GE, wenn x_5 um 1 ME erhöht wird.

x_1 wird somit neue Basisvariable mit dem Wert 30, damit ergibt sich

x_1=30; x_2=60; x_3=10; x_4=0; x_5=0,

wobei x_5 Nichtbasisvariable bleibt).

Dritte zulässige Basislösung:

Man erhält durch einsetzen von

$$x_4 = 180 - 6x_1 + 9x_5$$

$$6x_1 = 180 - x_4 + 9x_5$$

$$x_1 = 30 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{3}{2}x_5$$

in die Gleichungen der zweiten Basislösung:

$$x_3 = 40 - x_1 + x_5 = 40 - (30 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{3}{2}x_5) + x_5 = 10 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_4 = 180 - 6x_1 + 9x_5 \Leftrightarrow x_1 = 30 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{3}{2}x_5$$

$$x_2 = 60 - x_5$$

$$z = 120 + x_1 - 2x_5 = 120 + (30 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{3}{2}x_5) - 2x_5 = 150 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x_5$$

Zusammengefasst:

$$x_1 = 30 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{3}{2}x_5$$

$$x_2 = 60 - x_5$$

$$x_3 = 40 - x_1 + x_5 = 40 - (30 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{3}{2}x_5) + x_5 = 10 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{3}{2}x_5$$

$$z = 150 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x_5$$

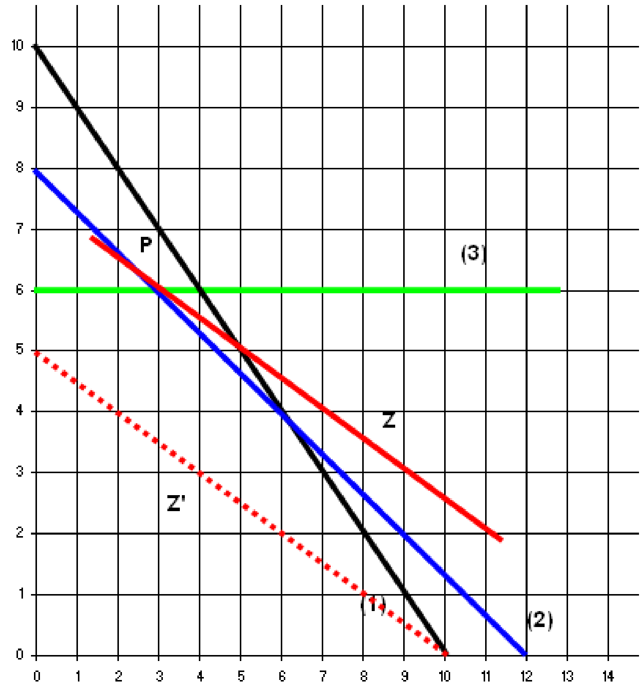
Diese Basislösung mit **x_1=30; x_2=60**; x_3=10; x_4=0; x_5=0 und Z=150 ist optimal, denn eine Erhöhung von x_4 bzw. x_5 würde zu einer Verminderung des Gewinns führen.

Definition 63:

Die optimale Lösung ist gefunden, wenn in der Zielfunktion nur noch negative Variablen enthalten sind. Das Ergebnis kann nicht mehr weiter verbessert werden.

Da x_3 Schlupfvariable ist (taucht nicht mehr auf), kann sie vernachlässigt werden.

Vergleichen Sie jetzt bitte die gefundene Zwischenlösung (**x_1=30; x_2=60**; x_3=10; x_4=0; x_5=0) mit der im vorherigen Kapitel ermittelten graphischen Lösung.



Jetzt sind wir bei dem Maximum angekommen.

$L = \{x_1 = 30; x_2 = 60; Z = 150\}$

Beispiel 74:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=x_1+3x_2$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 60$$

NB: $x_1 \leq 10$

$$x_2 \leq 8$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Lösung: $x_1=5$; $x_2=8$; $Z=29$

Lösung:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1 \leq 10$$
$$x_2 \leq 8$$
$$Z = x_1 + 3x_2$$

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die Strukturvariablen des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 60$$
$$x_1 + x_4 = 10$$
$$x_2 + x_5 = 8$$
$$Z = 0 + x_1 + 3x_2$$

Durch Umformung ergibt sich folgende Darstellung:

$$x_3 = 60 - 4x_1 - 5x_2$$
$$x_4 = 10 - x_1$$
$$x_5 = 8 - x_2$$
$$Z = 0 + x_1 + 3x_2$$

Dadurch folgt die erste zulässige Lösung:

$$x_3 = 60$$
$$x_4 = 10$$
$$x_5 = 8$$
$$x_1 = x_2 = 0$$
$$Z = 0$$

Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um 3 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Schritt 2:

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_2 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 8 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt $x_3=20 > 0$; $x_4=10 > 0$; x_5 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_1 bleibt Nichtbasisvariable.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

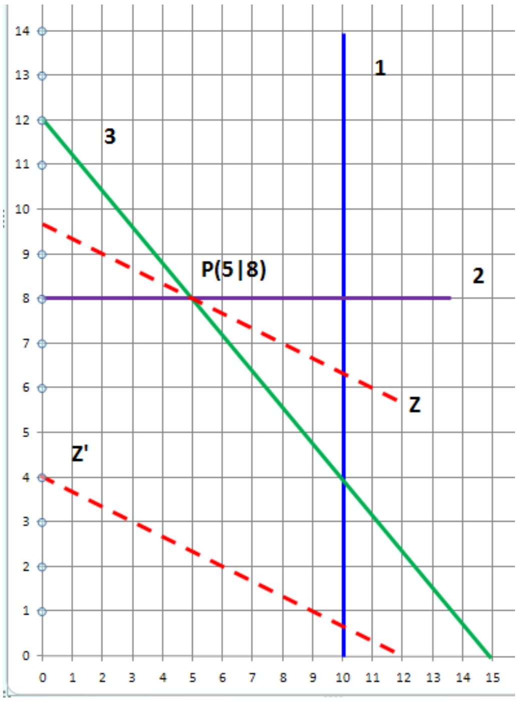
Man erhält sie durch einsetzen von $x_2=8-x_5$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$\begin{aligned} x_3 &= 60-4x_1-5x_2 = 60-4x_1-5(8-x_5) = 20-4x_1+5x_5 \\ x_4 &= 10-x_1 \\ x_5 &= 8-x_2 \Leftrightarrow x_2 = 8-x_5 \\ Z &= 0+x_1+3(8-x_5) = 24+x_1-3x_5 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$\begin{aligned} x_2 &= 8-x_5 \\ x_3 &= 20-4x_1+5x_5 \\ x_4 &= 10-x_1 \\ Z &= 24+x_1-3x_5 \end{aligned}$$

Vergleichen wir die gefundene Zwischenlösung (**$x_1=0$; $x_2=8$**; $x_3=20$; $x_4=10$; $x_5=0$)



Im Simplex-Algorithmus wandern Sie entlang der Ecken, bis Sie die optimale Lösung gefunden haben.

In dieser Form kann dieses Verfahren nur angewandt werden, wenn der Punkt (0|0) innerhalb der Lösungsmenge liegt.

Jetzt beginnt der Algorithmus wieder von vorne.

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und fällt um 3GE, wenn x_5 um 1 ME erhöht wird.

x_1 wird somit neue Basisvariable mit dem Wert 5 (damit ergibt sich **$x_1=5$; $x_2=8$**; $x_3=0$; $x_4=5$; $x_5=0$, wobei x_5 Nichtbasisvariable bleibt).

Dritte zulässige Basislösung:

Man erhält durch einsetzen von $x_1 = 5 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5$

$$x_2 = 8 - x_5$$

$$x_3 = 20 - 4x_1 + 5x_5 \Leftrightarrow x_1 = 5 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5$$

$$x_4 = 10 - (5 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5) = 5 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_5$$

$$Z = 24 + 5 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5 - 3x_5 = 29 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_5$$

Zusammengefasst:

$$x_1 = 5 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5$$

$$x_2 = 8 - x_5$$

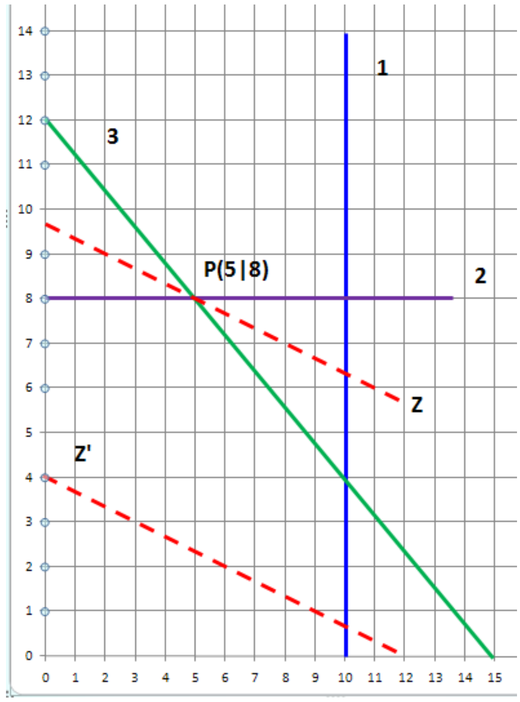
$$x_4 = 5 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_5$$

$$Z = 29 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_5$$

Diese Basislösung mit **$x_1=5$; $x_2=8$**; $x_3=0$; $x_4=5$; $x_5=0$ und Z=29 ist optimal, denn eine Erhöhung von x_3 bzw. x_5 würde zu einer Verminderung des Gewinns führen.

Da x_3 Schlupfvariable ist (taucht nicht mehr auf), kann sie vernachlässigt werden.

Vergleichen Sie jetzt bitte die gefundene Zwischenlösung (**$x_1=5$; $x_2=8$**; $x_3=0$; $x_4=5$; $x_5=0$) mit der ermittelten graphischen Lösung.



Beispiel 75:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=120x_1+90x_2$

NB:
$$x_1 + x_2 \leq 1000$$
$$x_1 \leq 600$$
$$x_2 \leq 800$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 2400$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Lösung: $x_1=400$; $x_2=600$; $Z=102.000$

Lösung:

$$x_1 + x_2 \leq 1000$$
$$x_1 \leq 600$$
$$x_2 \leq 800$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 2400$$

Schritt 1:

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die Strukturvariablen des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$
$$x_1 + x_4 = 600$$
$$x_2 + x_5 = 800$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 2400$$
$$Z = 0 + 120x_1 + 90x_2$$

Durch Umformung ergibt sich folgende Darstellung:

$$x_3 = 1000 - x_1 - x_2$$
$$x_4 = 600 - x_1$$
$$x_5 = 800 - x_2$$
$$x_6 = 2400 - 3x_1 - 2x_2$$
$$Z = 0 + 120x_1 + 90x_2$$

Dadurch folgt die erste zulässige Lösung:

$$x_3 = 1000$$
$$x_4 = 600$$
$$x_5 = 800$$
$$x_6 = 2400$$
$$x_1 = x_2 = 0$$
$$Z = 0$$

Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 120 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um 90 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Schritt 2:

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_1 neue Basisvariable.

x_1 kann maximal den Wert 600 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt x_3=20 > 0; x_4=10 > 0; x_5 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

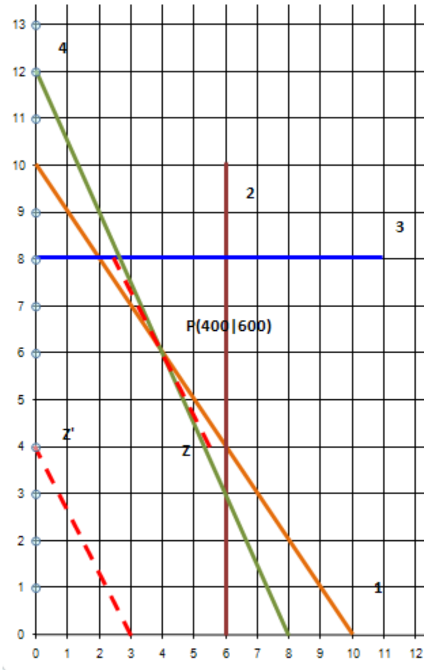
Man erhält sie durch einsetzen von x_1=600-x_4 in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_3 = 1000 - (600 - x_4) - x_2 = 400 - x_2 + x_4$$
$$x_1 = 600 - x_4$$
$$x_5 = 800 - x_2$$
$$x_6 = 2400 - 3(600 - x_4) - 2x_2 = 600 - 2x_2 + 3x_4$$
$$Z = 0 + 120(600 - x_4) + 90x_2 = 72.000 + 90x_2 - 120x_4$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 600 - x_4$$
$$x_3 = 400 - x_2 + x_4$$
$$x_5 = 800 - x_2$$
$$x_6 = 600 - 2x_2 + 3x_4$$
$$Z = 72.000 + 90x_2 - 120x_4$$

Vergleichen wir die gefundene Zwischenlösung (**x_1=600; x_2=0**; x_3=400; x_4=0; x_5=800; x_6=600)



Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_2 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 300 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt x_1=600; x_3=100 > 0; x_4=0 > 0; x_5=500; x_6=0 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_1 bleibt Nichtbasisvariable.

Man erhält sie durch einsetzen von $x_2 = 300 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_1 = 600 - x_4$$

$$x_3 = 400 - (300 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6) + x_4 = 100 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_5 = 800 - (300 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6) = 500 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_6 = 600 - 2x_2 + 3x_4 \Leftrightarrow x_2 = 300 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6$$

$$Z = 72.000 + 90(300 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6) - 120x_4 = 99.000 + 15x_4 - 45x_6$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 600 - x_4$$

$$x_2 = 300 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6$$

$$x_3 = 100 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_5 = 500 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$

$$Z = 99.000 + 15x_4 - 45x_6$$

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_4 neue Basisvariable.

x_4 kann maximal den Wert 200 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt $x_1=400$; $x_2=600$; $x_3=0$; $x_4=200 > 0$; $x_5=200$; $x_6=0$) wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable.

Man erhält sie durch einsetzen von $x_4 = 200 - 2x_3 + x_6$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_1 = 600 - (200 - 2x_3 + x_6) = 400 + 2x_3 - x_6$$

$$x_2 = 300 + \frac{3}{2}(200 - 2x_3 + x_6) - \frac{1}{2}x_6 = 600 - 3x_3 + x_6$$

$$x_3 = 100 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 \Leftrightarrow x_4 = 200 - 2x_3 + x_6$$

$$x_5 = 500 - \frac{3}{2}(200 - 2x_3 + x_6) + \frac{1}{2}x_6 = 200 - 3x_3 - x_6$$

$$Z = 99.000 + 15(200 - 2x_3 + x_6) - 45x_6 = 102.000 - 30x_3 - 30x_6$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 400 + 2x_3 - x_6$$

$$x_2 = 600 - 3x_3 + x_6$$

$$x_4 = 200 - 2x_3 + x_6$$

$$x_5 = 200 + 3x_3 - x_6$$

$$Z = 102.000 - 30x_3 - 30x_6$$

Diese Basislösung mit **x_1=400; x_2=600**; $x_3=0$; $x_4=200$; $x_5=200$; $x_6=0$ und Z=102.000 ist optimal, denn eine Erhöhung von x_3 bzw. x_6 würde zu einer Verminderung des Gewinns führen.

Beispiel 76:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=3x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1+x_2\leq 100$$
$$x_1+x_2\leq 80$$
$$x_1\leq 40$$

NNB: $x_1,x_2\geq 0$

Lösung: $x_1=20$; $x_2=60$; $Z=180$

Lösung:

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die Strukturvariablen des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$2x_1+x_2+x_3=100$$
$$x_1+x_2+x_4=80$$
$$x_1+x_5=40$$

Durch Umformung ergibt sich folgende Darstellung:

$$x_3=100-2x_1-x_2$$
$$x_4=80-x_1-x_2$$
$$x_5=40-x_1$$
$$Z=0+3x_1+2x_2$$

Dadurch folgt die erste zulässige Lösung:

$$x_3=100$$
$$x_4=80$$
$$x_5=40$$
$$x_1=x_2=0$$
$$Z=0$$

Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 3 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um 2 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_1 neue Basisvariable.

x_1 kann maximal den Wert 40 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt $x_3=20>0$; $x_4=10>0$; x_5 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

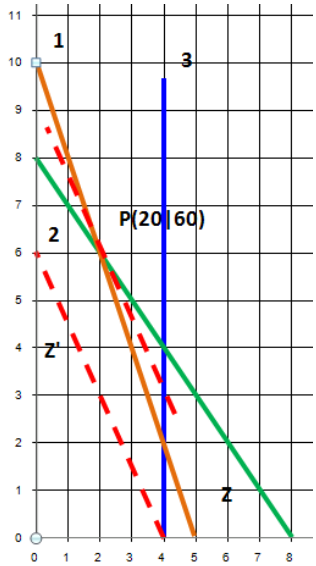
Man erhält sie durch einsetzen von x_1=40-x_5 in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_3 = 100 - 2(40 - x_5) - x_2 = 20 - x_2 + 2x_5$$
$$x_4 = 80 - (40 - x_5) - x_2 = 40 + x_5 - x_2$$
$$x_5 = 40 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = 40 - x_5$$
$$Z = 0 + 3(40 - x_5) + 2x_2 = 120 + 2x_2 - 3x_5$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 40 - x_5$$
$$x_3 = 20 - x_2 + 2x_5$$
$$x_4 = 40 + x_5 - x_2$$
$$x_2 = x_5 = 0$$
$$Z = 120 + 2x_2 - 3x_5$$

Vergleichen wir die gefundene Zwischenlösung (**x_1=40; x_2=0**; x_3=20; x_4=40; x_5=0)



Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_2 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 20 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (**x_1=40; x_2=20**; x_3=0; x_4=20; x_5=0) und neue Nichtbasisvariable, x_3 bleibt Nichtbasisvariable.

Man erhält sie durch einsetzen von $x_2 = 20 - x_3 + 2x_5$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_1 = 40 - x_5$$
$$x_3 = 20 - x_2 + 2x_5 \Leftrightarrow x_2 = 20 - x_3 + 2x_5$$
$$x_4 = 40 + x_5 - (20 - x_3 + 2x_5) = 20 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = x_5 = 0$$
$$Z = 120 + 2(20 - x_3 + 2x_5) - 3x_5 = 160 - 2x_3 + x_5$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 40 - x_5$$
$$x_2 = 20 - x_3 + 2x_5$$
$$x_4 = 20 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = x_5 = 0$$
$$Z = 160 - 2x_3 + x_5$$

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_5 neue Basisvariable.

x_5 kann maximal den Wert 20 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (**x_1=20; x_2=60**; x_3=0; x_4=0; x_5=20) und neue Nichtbasisvariable, x_4 bleibt Nichtbasisvariable.

Man erhält sie durch einsetzen von $x_5 = 20 + x_3 - x_4$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_1 = 40 - (20 + x_3 - x_4) = 20 - x_3 - x_4$$
$$x_2 = 20 - x_3 + 2(20 + x_3 - x_4) = 60 + x_3 - x_4$$
$$x_4 = 20 + x_3 - x_5 \Leftrightarrow x_5 = 20 + x_3 + x_4$$
$$x_2 = x_4 = 0$$
$$Z = 160 - 2x_3 + 20 + x_3 - x_4 = 180 - x_3 - x_4$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 20 - x_3 - x_4$$
$$x_2 = 60 + x_3 - x_4$$
$$x_5 = 20 + x_3 + x_4$$
$$x_3 = x_4 = 0$$
$$Z = 180 - x_3 - x_4$$

Diese Basislösung mit **x_1=20; x_2=60**; x_3=0; x_4=0; x_5=20 und Z=180 ist optimal, denn eine Erhöhung von x_3 bzw. x_4 würde zu einer Verminderung des Gewinns führen.

Beispiel 77:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=x_1+3x_2$

NB:
$$\begin{aligned}&x_1+x_2\le 15\\&x_2\le 12\\&3x_1+2x_2\le 36\\&x_1\le 10\end{aligned}$$

NNB: $x_1,x_2\ge 0$

Lösung: $x_1=3$; $x_2=12$; $Z=39$

Lösung:

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die Strukturvariablen des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3=15\\&x_2+x_4=12\\&3x_1+2x_2+x_5=36\\&x_1+x_6=10\end{aligned}$$

Durch Umformung ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}&x_3=15-x_1-x_2\\&x_4=12-x_2\\&x_5=36-3x_1-2x_2\\&x_6=10-x_1\\&Z=0+x_1+3x_2\end{aligned}$$

Dadurch folgt die erste zulässige Lösung:

$$\begin{aligned}&x_3=15\\&x_4=12\\&x_5=36\\&x_6=10\\&x_1=x_2=0\\&Z=0\end{aligned}$$

Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um 3 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_1 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 12 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt x_1=0; x_2=12; x_3=15; x_4=; x_4 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable x_5=36; x_6=10.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

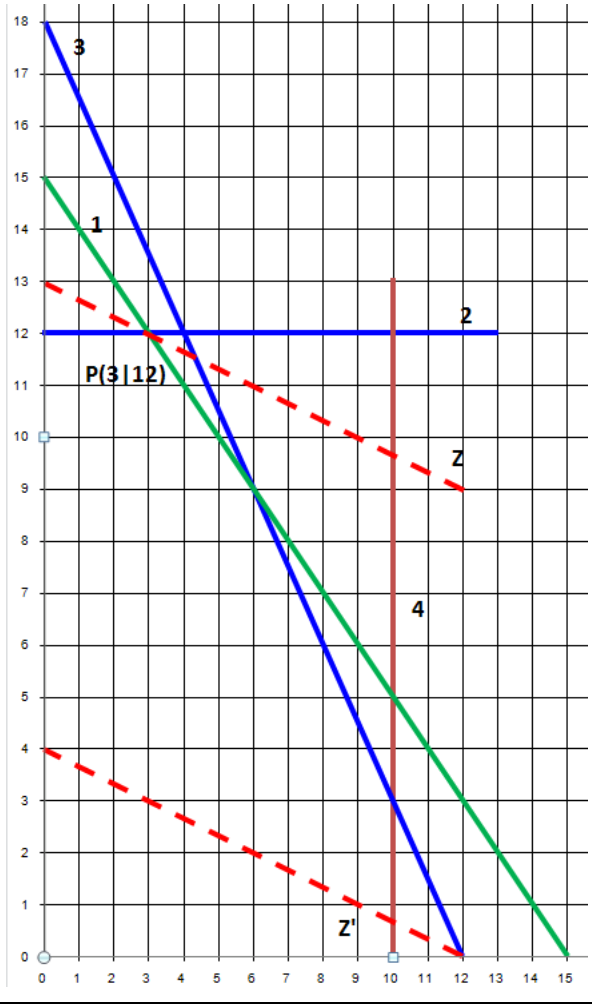
Man erhält sie durch einsetzen von x_2=12-x_4 in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 15 - x_1 - (12 - x_4) = 3 - x_1 + x_4 \\
x_4 &= 12 - x_2 \Leftrightarrow x_2 = 12 - x_4 \\
x_5 &= 36 - 3x_1 - 2(12 - x_4) = 12 - 3x_1 + 2x_4 \\
x_6 &= 10 - x_1 \\
Z &= 0 + x_1 + 3(12 - x_4) = 36 + x_1 - 3x_4
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 12 - x_4 \\
x_3 &= 3 - x_1 + x_4 \\
x_5 &= 12 - 3x_1 + 2x_4 \\
x_6 &= 10 - x_1 \\
Z &= 36 + x_1 - 3x_4
\end{aligned}
$$

Vergleichen wir die gefundene Zwischenlösung (**x_1=0; x_2=12**; x_3=3; x_4=0; x_5=12; x_6=10)



Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um -3 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_1 neue Basisvariable.

x_1 kann maximal den Wert 3 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt x_1=3; x_2=12; x_3=15; x_4=; x_4 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable x_5=36; x_6=10.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

Man erhält sie durch einsetzen von $x_1=3-x_3+x_4$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$
\begin{aligned}
&x_2 = 12 - x_4 \\
&x_3 = 3 - x_1 + x_4 \Leftrightarrow x_1 = 3 - x_3 + x_4 \\
&x_5 = 12 - 3(3 - x_3 + x_4) + 2x_4 = 3 + 3x_3 - 3x_4 \\
&x_6 = 10 - (3 - x_3 + x_4) = 7 + x_3 - x_4 \\
&Z = 36 + (3 - x_3 + x_4) - 3x_4 = 39 - x_3 - 2x_4
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 3 - x_3 + x_4 \\
&x_2 = 12 - x_4 \\
&x_5 = 3 + 3x_3 - 3x_4 \\
&x_6 = 7 + x_3 - x_4 \\
&Z = 39 - x_3 - 2x_4
\end{aligned}
$$

Diese Basislösung mit **x_1=3; x_2=12**; x_3=0; x_4=0; x_5=3; x_6=7 und Z=39 ist optimal, denn eine Erhöhung von x_3 bzw. x_4 würde zu einer Verminderung des Gewinns führen.

Beispiel 78:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB:
$$
\begin{aligned}
&x_1 \le 6 \\
&2x_1 + x_2 \le 16 \\
&x_1 + 4x_2 \le 36
\end{aligned}
$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Lösung: x_1=4; x_2=8; z=32.000

Lösung:

$\cancel{Z = 2.000x_1}$ $Z = 2.000x_1 + 3.000x_2 \rightarrow Max$

NB: $x_1 \leq 6$

$2x_1 + x_2 \leq 16$

$x_1 + 4x_2 \leq 36$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Umwandlung Lineares Ungleichungssystem in LGS

$x_1 + x_3 = 6$ $x_3 = 6 - x_1$ (0)

$2x_1 + x_2 + x_4 = 16$ $x_4 = 16 - 2x_1 - x_2$ (16)

$x_1 + 4x_2 + x_5 = 36$ $x_5 = 36 - x_1 - 4x_2$ ✓ (9)

Erste zulässige Lösung

$x_1, x_2 = 0$; $x_3 = 6$; $x_4 = 16$; $x_5 = 36$

Meisten Gewinn bei x_2

Max Wert für x_2 ermitteln $\Rightarrow x_2 = 9$

Die Gleichung umformen:

$x_5 = 36 - x_1 - 4x_2$

$4x_2 = 36 - x_1 - x_5$

$\underline{x_2 = 9 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5}$ (diese in die anderen Gleichungen einsetzen)

$x_4 = 16 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = 16 - 2x_1 - 9 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5 = 7 - \frac{7}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5$

$\underline{x_4 = 7 - \frac{7}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5}$

$\underline{x_3 = 6 - x_1}$

$Z = 0 + 2000x_1 + 3000x_2 = 0 + 2000x_1$
$+ 3000(9 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5)$

$Z = 2000x_1 + 27.000 - 750x_1 - 750x_5$

$\underline{Z = 27.000 + 1250x_1 - 750x_5}$

Zusammenfassung der Gleichungen und nächste verbesserte Lösung:

$x_2 = 9 - \frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_5$ (9)

$x_4 = 7 - \frac{7}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_5$ ($\cancel{7}$ 4) ✓

$x_3 = 6 - x_1$ (6)

$z = 27.000 + 1250 x_1 - 750 x_5$

Verbesserte Lösung

$x_1 = x_5 = 0$; $x_2 = 9$; $x_4 = 7$; $x_3 = 6$

Weiter verbesserte optimale Lösung nur durch x_1 in der Zielfunktion möglich (meister Gewinn
Max Wert für $x_1 = 4$

Die Gleichungen umformen

~~$x_3 = 6 - x_1 \Rightarrow x_1 = 6 - x_3$~~

~~(diese wieder einsetzen)~~

~~$x_4 = 7 - \frac{7}{4}(6 - x_3) - \frac{1}{4} x_5 = 7 - 10,5 + \frac{7}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_5$~~

~~$x_4 = -3,5 + \frac{7}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_5$~~

~~$x_2 \Leftarrow$~~ $x_4 = 7 - \frac{7}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_5$

$\frac{7}{4} x_1 = 7 - x_4 - \frac{1}{4} x_5$

$x_1 = 4 - \frac{4}{7} x_4 - \frac{1}{7} x_5$

$x_2 = 9 - \frac{1}{4}(4 - \frac{4}{7} x_4 - \frac{1}{7} x_5) - \frac{1}{4} x_5$

$x_2 = 9 - 1 + \frac{1}{7} x_4 + \frac{1}{28} x_5 - \frac{1}{4} x_5$

$x_2 = 8 + \frac{1}{7} x_4 - \frac{6}{28} x_5$

$x_3 = 6 - x_1 = 6 - 4 + \frac{4}{7} x_4 + \frac{1}{7} x_5$

$x_3 = 2 + \frac{4}{7} x_4 + \frac{1}{7} x_5$

$z = 27.000 + 1250(4 - \frac{4}{7} x_4 - \frac{1}{7} x_5) - 750 x_5$ Rückseite →

$= 32.000 - \frac{4}{7} x_4 \cdot 1250 - \frac{1250}{7} x_5 - 750 x_5$

Zielfkt alle negativ, keine weitere Verbesserung mehr möglich.

<u>Opt. Lösung:</u>

$x_1 = 4$; $x_2 = 8$; $Z = 32.000$

Beispiel 79:

Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten.

Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 Euro je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 Euro je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 Euro für die Zelte ausgeben.

Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?

Lösung: P(5,2)

Lösung:

Aufgabe 6:

$Z = 10x_1 + 15x_2 \rightarrow Max$

NB: $x_1 \leq 5$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 9$

LGS:

$x_1 + x_3 \leq 5$	$x_3 = 5 - x_1$	(–)
$x_2 + x_4 \leq 4$	$x_4 = 4 - x_2$	(4) ✓
$x_1 + 2x_2 + x_5 = 9$	$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2$	(4,5)

Meister Gewinn bei $x_2 \Rightarrow x_2$

$x_4 = 4 - x_2 \Rightarrow \underline{x_2 = 4 - x_4}$ (–)

$\underline{x_3 = 5 - x_1}$ (5)

$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2 = 9 - x_1 - 2(4 - x_4) = 9 - x_1 - 8 + 2x_4$

$\underline{x_5 = 1 - x_1 + 2x_4}$ (1) ✓

$Z = 10x_1 + 15x_2 = 10x_1 + 15(4 - x_4)$

$\underline{Z = 60 + 10x_1 - 15x_4}$

Verbesserung bei $x_1 \Rightarrow x_1 = 1$

$\cancel{x_1 = 5 - x_3}$

$\cancel{x_2 = 4 - x_1}$

$\cancel{Z = 60 + 10 \cdot (5 - x_3) - 15x_4}$

$\cancel{Z = 60 + 50 - 10x_3 - 15x_4}$

$\cancel{Z = 110 - 10x_3 - 15x_4}$

$x_5 = 1 - x_1 + 2x_4$

$\underline{x_1 = 1 + 2x_4 - x_5}$ (2)

$\underline{x_2 = 4 - x_4}$ (4)

$x_3 = 5 - x_1 = 5 - 1 - 2x_4 + x_5$

$\underline{x_3 = 4 - 2x_4 + x_5}$ (2) ✓

$z = 60 + 10x_1 - 15x_4$

$z = 60 + 10(1 + 2x_4 - x_5)$

$z = 60 + 10 + 20x_4 - 10x_5$

$\underline{z = 70 + 20x_4 - 10x_5}$

Meiste Zuwachs bei x_4 $\Rightarrow x_4 =$

$\cancel{x_1 = 1 +} 2x_4 - x_5$

$x_3 = 4 - 2x_4 + x_5$

$2x_4 = 4 - x_3 + x_5$

$\underline{x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5}$

$x_1 = 1 + 2(2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5) - x_5$

$x_1 = 5 + \ldots$

$x_2 = 4 - 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$

$x_2 = 4 + \ldots$

$z = 70 + 20(2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5) - 10x_5$

$z = 110 - 10x_3 + 10x_5 - 10x_5$

$\underline{z = 110 - 10x_3}$

$\Rightarrow$ Lösung: $x_1 = 5$; $x_2 = 2$; $z = 110$

Der Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

Zur Veranschaulichung des Verfahrens und für Handrechnungen benutzt man ein Simplex-Tableau.

Das Tableau wollen wir uns wieder mit dem Gärtner-Beispiel anschauen.

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die Strukturvariablen des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$6x_1 + 9x_2 + x_4 = 720$$
$$x_2 + x_5 = 60$$
$$z = x_1 + 2x_2 = 0$$

Die letzte Zeile des Tableaus, ist die so genannte Ergebnis oder Z-Zeile (auf eine Seite gebracht).

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	1	1	0	0	100
x_4	6	9	0	1	0	720
x_5	0	1	0	0	1	60
Z	-1	-2	0	0	0	0

Definition 64:

Die anfängliche Eintragung der Zielfunktions-Koeffizienten für die Nichtbasisvariablen mit negativen Vorzeichen führt dazu, dass (im Gegensatz zu unserer vorherigen Darstellung) eine Lösung stets dann verbessert werden kann, wenn eine Nichtbasisvariable mit negativer Eintragung in der Z-Zeile vorliegt.

Das Iterations-Verfahren für den Simplex-Algorithmus

Voraussetzung:

Es existiert eine zulässige Basislösung.

Durchführung:

Jede Iteration des Simplex-Algorithmus besteht aus folgenden Schritten.

Schritt 1:

Enthält die Z-Zeile nur nichtnegative Werte, so ist die aktuelle Basislösung optimal und das Verfahren wird abgebrochen.

Sonst suchen Sie nach derjenigen Spalte mit dem kleinsten (negativen) Wert in der Z-Zeile (sind mehrere vorhanden, wählen Sie eine beliebige aus). Die zugehörige Nichtbasisvariable wird neu in die Basis aufgenommen. Diese Spalte nennt man Pivot-Spalte.

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	1	1	0	0	100	
x_4	6	9	0	1	0	720	
x_5	0	1	0	0	1	60	
Z	-1	-2	0	0	0	0	

Schritt 2:

Sind in der Pivot-Spalte alle Einträge ≤ 0 so kann für das betrachtete Problem keine optimale Lösung angegeben werden. Abbruch des Verfahrens.

Sonst bestimmen Sie die Zeile, für die gilt:

Definition 65:

$$Min\left(\frac{b}{b_p}\right) \; in\ unserem\ Fall \quad Min\left(\frac{100}{1};\frac{720}{9};\frac{60}{1}\right) = Min(100; 80; 60) = 60$$

Hierbei sind nur positive Quotienten erlaubt.

Nun wählt man die Zeile aus, mit dem kleinsten nichtnegativen Quotienten und erhält am Schnittpunkt zwischen dieser so genannten Pivot-Zeile und der Pivot-Spalte das Pivot-Element.

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	1	1	0	0	100	
x_4	6	9	0	1	0	720	
x_5	0	1	0	0	1	60	
Z	-1	-2	0	0	0	0	

Dieses Pivot-Element sehen Sie in der obigen Tabelle abgebildet.

Schritt 3:

Berechnung der neuen Basislösung, des neuen Simplex-Tableaus.

Definition 66:

Durch lineare Transformation des Nebenbedingung-Systems wird unter der neuen Basisvariablen ein Einheitsvektor mit dem Pivot-Element=1 geschaffen.

Durch vertauschen der Spalten der beiden beim Basistausch beteiligten Variablen einschließlich der Variablenbezeichnung kann ein neues Tableau ermittelt werden.

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	1	1	0	0	100	(1)-(3)
x_4	6	9	0	1	0	720	(2)-9*(3)
x_5	0	[1]	0	0	1	60	
Z	-1	-2	0	0	0	0	2*(3)+Z

Damit ergibt sich:

BV	x_1	x_5	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	0	1	0	-1	40	
x_4	6	0	0	1	-9	180	
x_2	0	1	0	0	1	60	
Z	-1	0	0	0	2	120	

Hier wird jetzt wieder mit dem Schritt 1 begonnen,

BV	x_1	x_5	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	0	1	0	-1	40	
x_4	[6]	0	0	1	-9	180	
x_2	0	1	0	0	1	60	
Z	-1	0	0	0	2	120	

Bemerkung 30:

Eine Multiplikation/Division darf nur mit der Pivot-Zeile durchgeführt werden

b darf nicht negativ werden

keine anderen Zeilen multiplizieren

Wieder den Einheitsvektor für das Pivot-Element erstellen

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	0	1	0	-1	40	(1)-(2)/6
x_4	[6]	0	0	1	-9	180	:6
x_2	0	1	0	0	1	60	
Z	-1	0	0	0	2	120	(2)/6+Z

Damit ergibt sich:

BV	x_4	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	10	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$	30	
x_2	0	1	0	0	1	60	
Z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	150	

Enthält die Z-Zeile nur nichtnegative Werte, so ist die aktuelle Basislösung optimal und das Verfahren wird abgebrochen.

Die Lösung lautet:

BV	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**b**	
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	10	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$	30	
x_2	0	1	0	0	1	60	
Z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	150	

$$L = \{x_1 = 30; x_2 = 60; Z = 150\}$$

Beispiel 80:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellen-Form.

Z: Max $Z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 + x_2 \le 15$$
$$x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 36$$
$$x_1 \le 10$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Lösung: $x_1=3$; $x_2=12$; $Z=39$

Lösung:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_3	1	1	1	0	0	0	15	(1)-(2)
x_4	0	[1]	0	1	0	0	12	
x_5	3	2	0	0	1	0	36	(3)*2-(2)
x_6	1	0	0	0	0	1	10	
Z	-1	-3	0	0	0	0	0	3*(2)-Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_3	[1]	0	1	-1	0	0	3	
x_2	0	1	0	1	0	0	12	
x_5	3	0	0	-2	1	0	12	(3)-3*(1)
x_6	1	0	0	0	0	1	10	(4)-(1)
Z	-1	0	0	3	0	0	36	Z+(1)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_1	1	0	1	-1	0	0	3	
x_4	0	1	0	1	0	0	12	
x_5	0	0	-3	1	1	0	3	
x_6	0	0	-1	1	0	1	7	
Z	0	0	1	2	0	0	39	

$$L = \{x_1 = 3; x_2 = 12; Z = 39\}$$

Beispiel 81:

Folgendes Problem der Produktionsprogrammplanung:

Auf zwei Maschinen A und B werden zwei Produkte 1 und 2 gefertigt. Die technischen Produktionskoeffizienten, Maschinenkapazitäten und Deckungsbeiträge (DB) pro ME jedes Produktes sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

	Technische Produktionskoeffizienten		
	Produkt 1	Produkt 2	Maschinen-kapazität
Maschine A	1	2	8
Maschine B	3	1	9
DB/ME	6	4	

Gesucht sei unter den gegebenen Restriktionen das Produktionsprogramm mit dem maximalen Deckungsbeitrag. Wenden Sie hier für den Simplex-Algorithmus in Pivot-Darstellung an.

Lösung:

Lösung:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_3	1	2	1	0	8	(1)-(2)/3
x_4	[3]	1	0	1	9	/3
Z	-6	-4	0	0	0	2*(2)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_2	0	[5/3]	1	-1/3	5	*3/5
x_1	1	1/3	0	1/3	3	(2)-(1)/5
Z	0	-2	0	2	18	(1)*6/5+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_2	0	1	3/5	-1/5	3	
x_1	1	0	-1/5	6/15	2	
Z	0	0	6/5	8/5	24	

$$L = \{x_1 = 2; x_2 = 3; Z = 24\}$$

Beispiel 82:

Es ist ein Produktionsproblem mit folgenden Bedingungen gegeben:

Z: Max $Z=120x_1+90x_2$

NB:
$$x_1+x_2\le 1000$$
$$x_1\le 600$$
$$x_2\le 800$$
$$3x_1+2x_2\le 2400$$

NNB: $x_1,x_2\ge 0$

Lösung: $x_1=400$; $x_2=600$; $Z=102.000$

Lösung:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_3	1	1	1	0	0	0	1000	(1)-(2)
x_4	[1]	0	0	1	0	0	600	
x_5	0	1	0	0	1	0	800	
x_6	3	2	0	0	0	1	2400	4-3*(2)
Z	-120	-90	0	0	0	0	0	120*(2)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_3	0	1	1	-1	0	0	400	(1)-0,5*(4)
x_1	1	0	0	1	0	0	600	
x_5	0	1	0	0	1	0	800	3-0,5*(4)
x_2	0	[2]	0	-3	0	1	600	/(2)
Z	0	-90	0	120	0	0	72.000	45*(4)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_3	0	0	1	[1/2]	0	-1/2	100	*2
x_1	1	0	0	1	0	0	600	2-2*(1)
x_5	0	0	0	3/2	1	-1/2	500	(3)-3*(1)
x_2	0	1	0	-3/2	0	1/2	300	(4)+3*(1)
Z	0	0	0	-15	0	45	99.000	30*(1)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_4	0	0	2	1	0	-1	200	
x_1	1	0	-2	0	0	1	400	
x_5	0	0	-3	0	1	1	200	
x_2	0	1	3	0	0	-1	600	
Z	0	0	30	0	0	30	102.000	

$$L = \{x_1 = 400; x_2 = 600; Z = 102.000\}$$

Beispiel 83:

Ein Maximumproblem mit folgenden Bedingungen ist gegeben:

Z: Max $Z=2x_1+x_2+3x_3+x_4$

$$2x_1+4x_2+x_4 \le 20$$

NB: $$x_1+x_2+5x_3+x_4 \le 30$$

$$x_2+x_3+x_4 \le 10$$

NNB: $x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$

Lösung: $x_1=10$; $x_2=0$; $x_3=4$; $x_4=0$; Z=32

Lösung:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	2	4	0	1	1	0	0	20	
x_3	1	1	[5]	1	0	1	0	30	/5
x_7	0	1	1	1	0	0	1	10	(3)-(2)/5
Z	-2	-1	-3	-1	0	0	0	0	(2)*3/5+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	[2]	4	0	1	1	0	0	20	/2
x_6	1/5	1/5	1	1/5	0	1/5	0	6	2-0,1*(1)
x_7	-1/5	4/5	0	4/5	0	-1/5	1	4	3+0,1*(1)
Z	-7/5	-2/5	0	-2/5	0	3/5	1	18	0,7*(1)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_1	1	2	0	1/2	1/2	0	0	10	
x_6	0	-1/5	1	1/10	-1/10	1/5	0	4	
x_7	0	6/5	0	9/10	1/10	-1/5	1	6	
Z	0	12/5	0	3/10	7/10	3/5	1	32	

$$L=\{x_1=10; x_2=0; Z=32\}$$

Beispiel 84:

Ein Maximums-Problem mit zwei Variablen

Z: Max $Z=x_1+3x_2$

NB:
$$4x_1+5x_2\le 60$$
$$x_1\le 10$$
$$x_2\le 8$$

NNB: $x_1,x_2\ge 0$

Lösung: $x_1=5$; $x_2=8$; Z=29

Lösung:

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	4	5	1	0	0	60	1-5*(3)
x_4	1	0	0	1	0	10	
X_2	0	[1]	0	0	1	8	
Z	-1	-3	0	0	0	0	3*(3)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_1	[4]	0	1	0	-5	20	/4
x_4	1	0	0	1	0	10	(2)-(1)/4
x_2	0	1	0	0	1	8	
Z	-1	0	0	0	3	24	(1)/4+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_1	1	0	1/4	0	-5/4	5	
x_4	0	0	1/4	1	5/4	5	
x_2	0	1	0	0	1	8	
Z	0	0	¼	0	7/4	29	

$$L=\{x_1=5; x_2=8; Z=29\}$$

Beispiel 85:

Ein Maximums-Problem mit zwei Variablen

Z: Max $Z=4000x_1+3000x_2$

NB:
$$x_1+x_2\le 100$$
$$2x_1+x_2\le 160$$
$$x_1+2x_2\le 160$$

NNB: $x_1,x_2\ge 0$

Lösung: $x_1=60$; $x_2=40$ Z=360.000

Lösung:

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	1	1	0	0	100	(1)-(2)/2
x_4	[2]	1	0	1	0	160	/2
x_5	1	2	0	0	1	160	(3)-(2)/2
Z	-4000	-3000	0	0	0	0	2000*(2)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	[1/2]	1	-1/2	0	20	*2
x_1	1	1/2	0	1/2	0	80	(2)-(1)
x_5	0	3/2	0	-1/2	1	80	(3)-3*(1)
Z	0	-1000	0	2000	0	320.000	2000*(1)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_2	0	1	2	-1	0	40	
x_1	1	0	-1	1	0	60	
x_5	0	0	-3	1	1	20	
Z	0	0	2000	1000	0	360.000	

$$L=\{x_1=60; x_2=40; Z=360.000\}$$

Beispiel 86:

Ein Maximums-Problem mit zwei Variablen

Z: Max $Z=5x_1+2x_2+4x_3$

NB:
$$x_1+x_2+2x_3 \le 28$$
$$2x_1+3x_2+x_3 \le 50$$
$$x_1 \le 12$$
$$x_2+x_3 \le 13$$

NNB: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Lösung: $x_1=12$; $x_2=0$; $x_3=8$ Z=92

Lösung:

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_4	1	1	2	1	0	0	0	28	(1)-(3)
x_5	2	3	1	0	1	0	0	50	(2)-2*(3)
x_6	[1]	0	0	0	0	1	0	12	
x_7	0	1	1	0	0	0	1	13	
Z	-5	-2	-4	0	0	0	0	0	5*(3)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_4	0	1	[2]	1	0	-1	0	16	/2
x_5	0	3	1	0	1	-2	0	26	(2)-(1)/2
x_1	1	0	0	0	0	1	0	12	
x_7	0	1	1	0	0	0	1	13	(4)-(1)/2
Z	0	-2	-4	0	0	5	0	60	2*(1)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_3	0	1/2	1	1/2	0	-1/2	0	8	
x_5	0	5/2	0	-1/2	1	-3/2	0	18	
x_1	1	0	0	0	0	1	0	12	
x_7	0	1/2	0	-1/2	0	1/2	1	5	
Z	0	0	0	2	0	3	0	92	

$$L=\{x_1=12; x_2=0; x_3=8; Z=92\}$$

Beispiel 87:

Ein Maximums-Problem mit zwei Variablen

Z: Max $Z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 + x_2 \leq 15$$
$$x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 36$$
$$x_1 \leq 10$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Lösung: $x_1=3$; $x_2=12$; $Z=39$

Lösung:

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_3	1	1	1	0	0	0	15	(1)-(2)
x_4	0	[1]	0	1	0	0	12	
x_5	3	2	0	0	1	0	36	(3)-2*(2)
x_6	1	0	0	0	0	1	10	
Z	-1	-3	0	0	0	0	0	3*(2)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_3	[1]	0	1	-1	0	0	3	
x_2	0	1	0	1	0	0	12	
x_5	3	0	0	-2	1	0	12	(3)-3*(1)
x_6	1	0	0	0	0	1	10	(4)-(1)
Z	-1	0	0	3	0	0	36	(1)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_1	1	0	1	-1	0	0	3	
x_2	0	1	0	1	0	0	12	
x_5	0	0	3	1	1	0	3	
x_6	0	0	-1	1	0	1	7	
Z	0	0	1	2	0	0	39	

$$L = \{x_1 = 3; x_2 = 12; Z = 39\}$$

Multiple Lösungen

Mehrdeutige Lösungen können auftreten, wenn die Zielfunktion parallel zu einer den zulässigen Bereich begrenzenden Hyperebene verläuft.

Dazu betrachten wir wieder eine Variante des Standardmaximumproblems:

Beispiel 88:

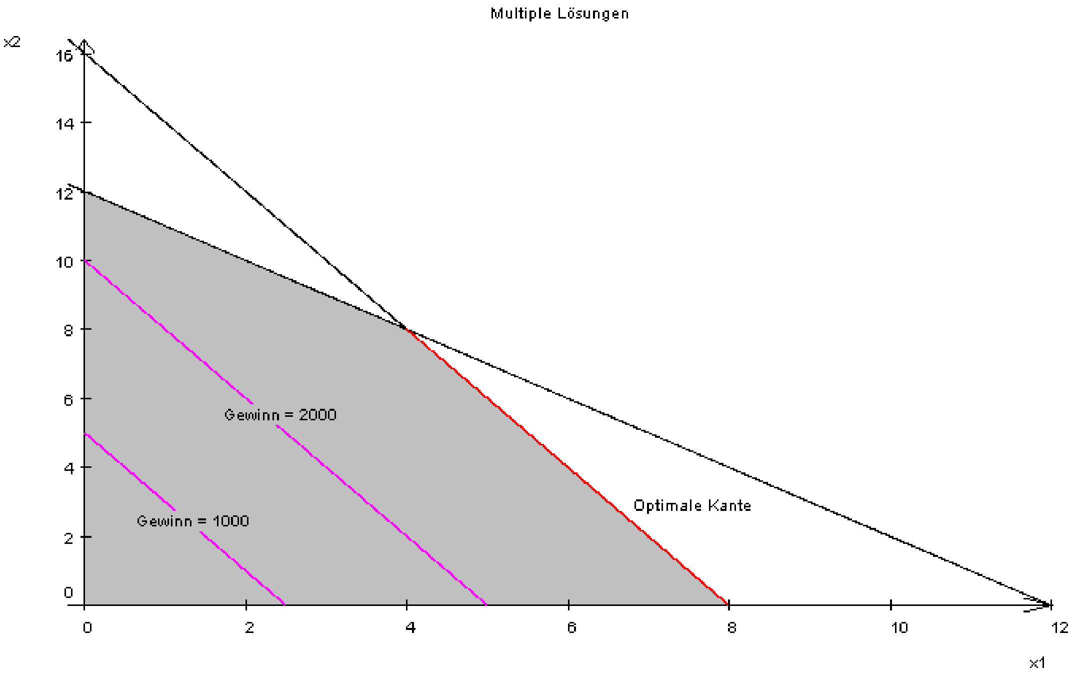
Z: Max $Z=200x_1+100x_2$

NB: $2x_1 + 2x_2 \leq 24$

$2x_1 + x_2 \leq 24$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Die Mehrdeutigkeit der Lösung ist in der Grafik erkennbar:



In der rechnerischen Lösung zeigt sich die Mehrdeutigkeit im Endtableau.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
x_1	2	2	1	0	24	
x_2	2	1	0	1	24	
Z	-200	-100	0	0	0	

Wie man hier sehr leicht sieht, erhält man kein eindeutiges Pivot-Element. Dann kann man mit einer Pivotzeile weiterrechnen und erhält dann eine optimale Lösung. Das gleiche wäre passiert, wenn man die andere Pivot-Zeile genommen hätte. Es gibt also mehrere optimale Lösungen.

Degeneration

Definition 67:

Das Phänomen der Degeneration tritt auf, wenn im Verlauf des Simplexalgorithmus gleiche charakteristische Koeffizienten auftreten, so dass eine Auswahlmöglichkeit für die Pivotzeile entsteht.

Dadurch entsteht im nächsten Tableau mindestens eine Basisvariable, die den Wert Null erhält.

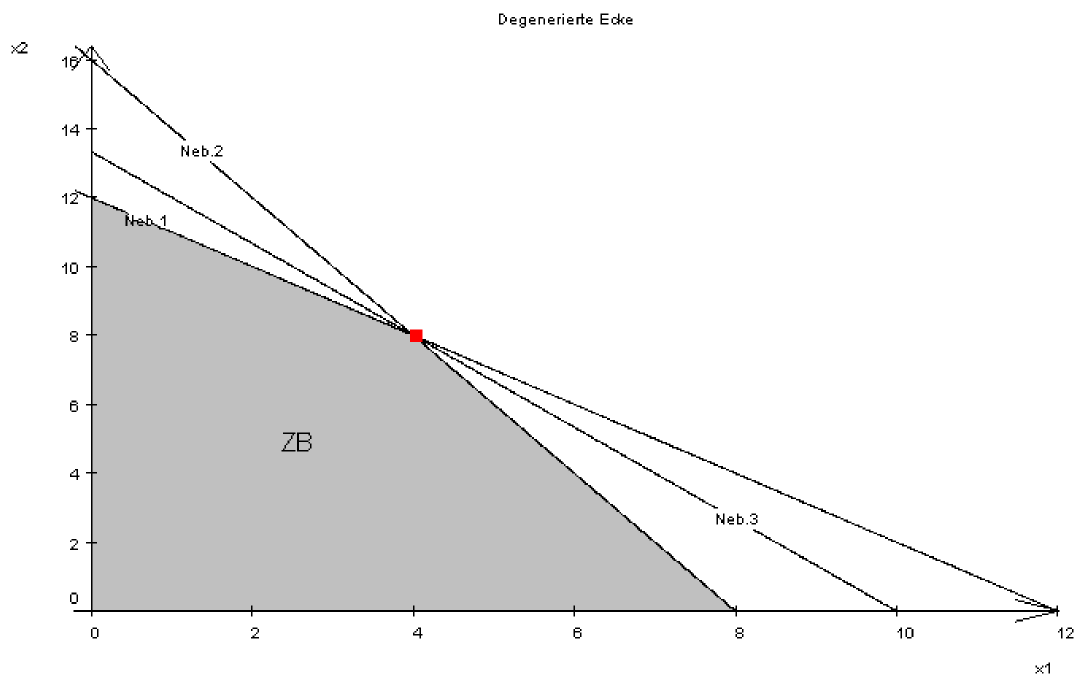
Eine Basislösung heißt degeneriert, wenn mindestens eine Basisvariable Null ist.

Anschaulich tritt die Degeneration in einem Problem mit n Kontrollvariablen immer dann ein, wenn sich in einer Ecke des zulässigen Bereiches mehr als n Hyperebenen schneiden.

Z: Max $Z=240x_1+160x_2$

NB:
$$2x_1 + 2x_2 \leq 24$$
$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 40$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$



Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	2	2	1	0	0	24	(1)-(2)
x_4	[2]	1	0	1	0	16	/2
x_5	4	3	0	0	1	40	3-2*(2)
Z	-240	-160	0	0	0	0	120*(2)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	1	1	-1	0	8	
x_1	1	1/2	0	1/2	0	8	/2
x_5	0	1	0	-2	1	8	
Z	0	-40	0	120	0	1920	

Hiermit ergibt sich kein eindeutiges Pivot-Element. Die Probe jeweils mit einem Pivot–Element.

Pivot-Element 1:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	[1]	1	-1	0	8	
x_1	1	1/2	0	1/2	0	8	2-0,5*(1)
x_5	0	1	0	-2	1	8	(3)-(1)
Z	0	-40	0	120	0	1920	40*(1)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_2	0	1	1	-1	0	8	
x_1	1	0	-1/2	1	0	4	
x_5	0	0	-1	-1	1	0	
Z	0	0	40	80	0	2240	

$L = \{x_1 = 4; x_2 = 8; Z = 2240\}$

Pivot-Element 2:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	1	1	-1	0	8	(1)-(3)
x_1	1	1/2	0	1/2	0	8	(2)-0,5*(3)
x_5	0	[1]	0	-2	1	8	
Z	0	-40	0	120	0	1920	40*(3)+Z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	0	1	1	-1	0	
x_1	1	0	0	1	-1/2	4	
x_2	0	1	0	-2	1	8	
Z	0	0	0	40	40	2240	

$$L = \{x_1 = 4; x_2 = 8; Z = 2240\}$$

Im bisher geschilderten Verfahren ist garantiert dass der Wert der Zielfunktion (bei der Maximierung) nicht kleiner wird. Sind degenerierte Basislösungen vorhanden, dann ist es theoretisch nicht ausgeschlossen, dass das Verfahren über mehrere Basislösungen (Tableaus) führt, ohne die Zielfunktion zu verbessern, um schließlich wieder auf eine zuvor berechnete Basislösung zu gelangen. Auf diese Weise können Zyklen entstehen, die verhindern, dass das Verfahren zum Optimum gelangt.

Der Algorithmus gelangt in eine "Endlosschleife".

In solchen Fällen muss der Zyklus erkannt werden; der Algorithmus wird dann durch Wahl einer anderen Pivotzeile und damit eines anderen Pivot-Elementes fortgesetzt. Er verlässt damit den Zyklus und arbeitet mit einer anderen Ecke weiter.

Es existiert eine zusätzliche Pivotauswahlregel, die sicherstellt, dass bei jedem Schritt eine neue Basislösung berechnet wird und damit Zyklen verhindert. In der Praxis hat sich jedoch eine geringe Relevanz dieses Problems herausgestellt. So zeigt es sich, dass die bei der numerischen Berechnung innerhalb eines Computers unvermeidlichen Rundungsfehler dazu führen, dass sich im Verfahren, nach dem Durchlaufen hinreichend vieler Zyklen, ein Wert in den Nachkommastellen soweit verändert hat, dass der Simplexalgorithmus ein anderes Pivotelement auswählt und den Zyklus verlässt.

Daher wird hier lediglich das Problem als solches dargestellt und auf die Behandlung der zusätzlichen Pivotauswahlregel verzichtet.

Beispiel 89:

Ein Maximums-Problem mit vier Variablen

Z: Max $Z=17x_1+9x_2 + 20x_3 +8x_4$

NB:
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 87$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 55$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 61$$

NNB: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Lösung: $x_1=12$; $x_2=13$; ; $x_3=6$; $x_4=0$; Z=441

Lösung:

Dies stellen wir in einem Tableau dar:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	2	3	4	1	1	0	0	87	(1)-(2)*4/5
x_6	1	1	5	2	0	1	0	55	:5
x_7	3	1	2	1	0	0	1	61	(2)-(2)*2/5
Z	-17	-9	-20	-8	0	0	0	0	(2)*4+(z)

BV	x_1	x_2	x_6	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	1,2	2,2	0	-0,6	1	-0,8	0	43	(1)-(3)/2,6*1,2
x_3	0,2	0,2	1	0,4	0	0,2	0	11	(2)-(3)/2,6*0,2
x_7	2,6	0,6	0	0,2	0	-0,4	1	39	:2,6
Z	-13	-5	0	0	0	4	0	220	(3)/2,6*13+(z)

BV	x_7	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	0	1,92307692	0	-0,69230769	1	-0,61538462	-0,46153846	25	:1,923
x_3	0,00	0,15	1,00	0,38	0,00	0,23	-0,08	8,00	(2)-(1)/1,92*0,15
x_1	1,00	0,23	0,00	0,08	0,00	-0,15	0,38	15,00	(3)-(1)/1,923*0,23
Z	0	-2	0	1	0	2	5	415	(1)/1,923*2+(z)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_2	0	1	0	-0,36	0,52	-0,32	-0,24	13	
x_3	0,00	0,00	1,00	0,44	-0,08	0,28	-0,04	6	
x_1	1,00	0,00	0,00	0,16	-0,12	-0,08	0,44	12	
Z	0,00	0,00	0,00	0,28	1,04	1,36	4,52	441,00	

Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung

Wir beschreiben Verfahren zur Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung. Ein Verfahren dieser Art ist erforderlich, wenn in einem LOP keine zulässige Basislösung erkennbar ist. In unseren bisherigen Fällen, haben wir jeweils die Basislösung 0 angenommen.

Der duale Simplex-Algorithmus

Schauen wir uns die folgende Problematik an.

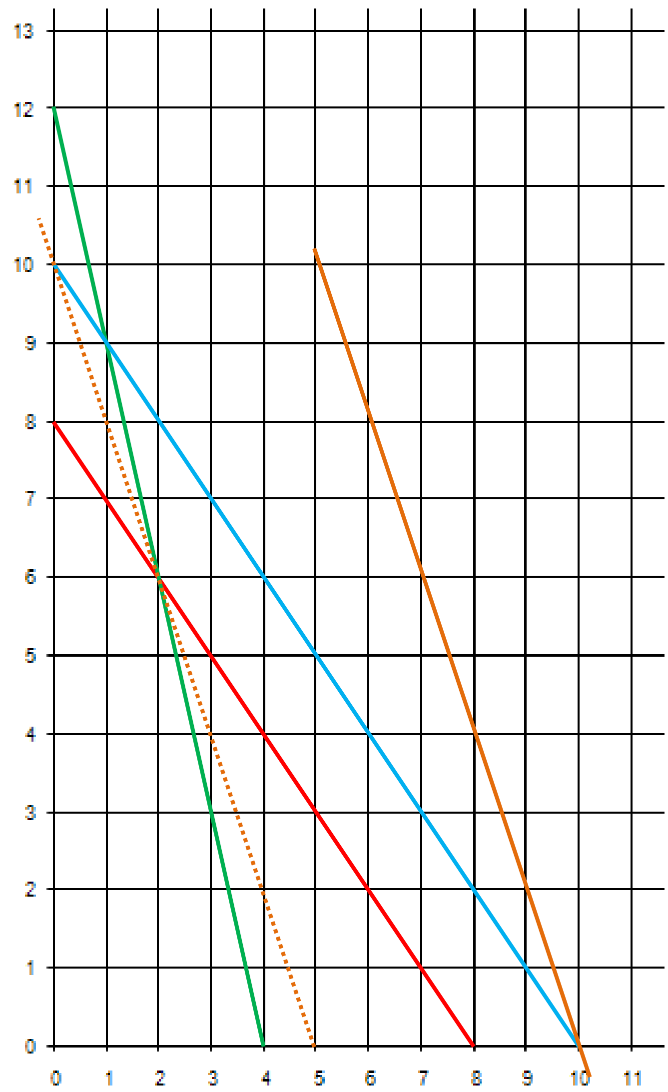
Beispiel 90:

Z: Max $Z=2x_1+x_2$

NB:
$$x_1+x_2 \geq 8$$
$$3x_1+x_2 \geq 12$$
$$x_1+x_2 \leq 10$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Lösen wir als erstes diese Problematik mit der grafischen Methode:



Wir bekommen als Lösung $x_1=10$, $x_2=0$ und $Z=20$.

Dabei sehen wir, dass an dieser Stelle nicht unsere sonst gewählte erste gültige Basislösung (0,0) in der möglichen Lösungsmenge enthalten ist.

Es fehlt uns jetzt diese Lösung.

Aufgabe des nachfolgenden Verfahrens ist es eine gültige Basislösung zu bestimmen, oder auch ohne gültige Basislösung ans Ziel (Lösung) zu gelangen.

Ablauffolge des Algorithmus:

Definition 68:

1. Schritt:

Jede ≥-Bedingung transformieren zunächst durch Multiplikation mit -1 in eine ≤-Bedingung. Ergänzen nun wie bereits bekannt jede dieser Ungleichungen durch Hinzunahme einer Schlupfvariablen zu einer Gleichung. Dabei erhalten wir das unten dargestellte Tableau und die dort ausgewiesene nicht zulässige Basislösung.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	-1	-1	1	0	0	-8	
x_4	-3	-1	0	1	0	-12	
x_5	1	1	0	0	1	10	
Z	-2	-1	0	0	0	0	

Nicht zulässige Basislösung $x_1=x_2=0$, $x_3=-8$, $x_4=-12$ $x_5=10$, $Z=0$.

Definition 69:

Im Gegensatz zum primalen beginnt der duale Simplex-Algorithmus mit der Wahl der Pivotzeile. Daran schließen sich die Spaltenwahl und die Tabellentransformation an.

Im Folgenden wird Ihnen eine detaillierte Beschreibung gegeben.

2. Schritt:

Definition 70:

Gibt es kein $b'_i<0$, so liegt bereits eine zulässige Basislösung vor; Abbruch des dualen Simplex-Algorithmus und Weiterführung mit dem primalen Simplex-Algorithmus.

Sonst wählen Sie diejenige Zeile s mit dem kleinsten $b'_s<0$ als Pivot-Zeile. Stehen mehrere Zeilen mit dem kleinsten Wert zur Auswahl, so wählen Sie unter diesen eine beliebige.

3. Schritt:

Findet man in dieser Pivotzeile kein Element $a'_{sj}<0$, so besitzt das Problem keine zulässige Basislösung. Abbruch des Verfahrens.

Definition 71:

Sonst wählen Sie die Spalte t mit $max\left\{\frac{z_t}{a'_{st}}\right\}$ als Pivot-Spalte. a'_{st} ist dann Pivot-Element.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	-1	-1	1	0	0	-8	(2)*-1+1
x_4	-3	-1	0	1	0	-12	(-1)
x_5	1	1	0	0	1	10	(2)+(3)
Z	-2	-1	0	0	0	0	(2)*-1+Z
	0,67	1		0			

4. Schritt:

Definition 72:

Tabellentransformation wie beim primalen Simplex-Algorithmus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	2	0	1	-1	0	4	
x_2	3	1	0	-1	0	12	
x_5	-2	0	0	1	1	-2	
Z	1	0	0	-1	0	12	

Nicht zulässige Basislösung $x_1=x_4=0$, $x_3=4$, $x_2=12$ $x_5=-2$, Z=12.

Wieder Wahl der Pivotzeile und anschließend des Pivot-Elements.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	2	0	1	-1	0	4	
x_2	3	1	0	-1	0	12	
x_5	-2	0	0	1	1	-2	
Z	1	0	0	-1	0	12	
	-0,5			-1			

Transformation nach dem primalen Simplex-Algorithmus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	2	0	1	-1	0	4	(1)+(3)
x_2	3	1	0	-1	0	12	(2)+(3)*3/2
x_5	-2	0	0	1	1	-2	/-2
Z	1	0	0	-1	0	12	(3)*0,5+Z
	-0,5			-1			

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	0	1	0	1	2	
x_2	0	1	0	0,5	1,5	9	
x_1	1	0	0	-0,5	-0,5	1	
Z	0	0	0	-0,5	0,5	11	

Nicht zulässige Basislösung $x_5=x_4=0$, $x_3=2$, $x_2=9$ $x_1=1$, Z=12.

Die vorliegende Lösung ist noch nicht optimal, aber ist eine zulässige Basislösung. Nun kann mit dem primalen Simplex-Algorithmus weitergerechnet werden.

Verfolgt man den Lösungsweg anhand der oben dargestellten grafischen Lösung, so wird ersichtlich, dass beginnend im Ursprung, zunächst eine erste unzulässige Basislösung erreicht wird. Danach gelangt man an die erste zulässige Basislösung. Jetzt muss nur noch mit dem primalen Simplexalgorithmus die optimale Lösung gefunden werden.

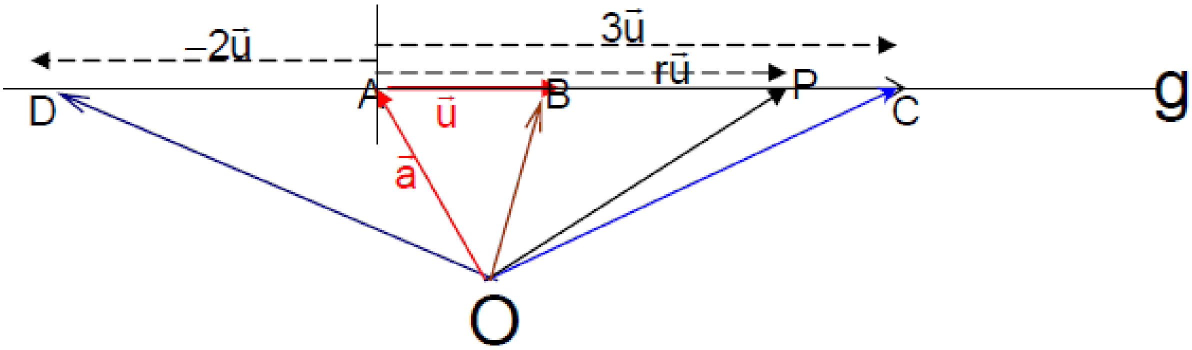
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	0	1	0	1	2	
x_4	0	2	0	1	3	18	
x_1	1	1	0	0	1	10	
Z	0	1	0	0	2	20	

Optimale Lösung: $x_2=09$ $x_1=10$, Z=20

Vektoren

Die Vektorgleichung einer Geraden

Wir betrachten eine Gerade als eindimensionale Punktmenge im 3-dimensionalen affinen Raum. Dies bedeutet, dass wir alle Punkte einer Geraden über ihre Ortsvektoren erreichen können. Doch die Lage der Geraden muss fixiert werden. Im ersten Fall tun wir dies durch einen Punkt A, der auf der Geraden liegen muss, und durch einen Vektor $\vec{u}$, dessen Richtung die Richtung der Geraden vorgibt.



In dieser Abbildung steckt das ganze Geheimnis der vektoriellen Geradengleichung.

- Die Gerade ist festgelegt durch den **Aufpunkt** A, d.h. durch dessen Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, den man auch **Stützvektor** der Geraden g nennt, und durch ihren Richtungsvektor $\vec{u}$.
- Da wir Vektorrechnung betreiben und nicht Punktrechnung können wir nie direkt einen Punkt berechnen, sondern immer nur dessen Ortsvektor.

Die Abbildung enthält nun 5 Punkte von g, die wir der Reihe nach ansehen:

$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{u}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + 3\vec{u}$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} - 2\vec{u}$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + r\vec{u}$$

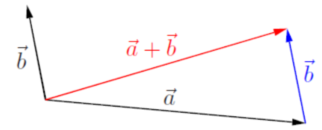
Nun erkennt man *das Prinzip*: Entlang des Pfeiles $\overrightarrow{OA}$ kommen wir zunächst einmal auf die Gerade. Dann verwenden wir als weiteres Transportmittel den Vektor $\vec{u}$, und zwar so oft, wie wir wollen, so bleiben wir auf g und gelangen zu einem weiteren Punkt der Geraden g. Addieren wir also $\overrightarrow{OA}$ mit einem beliebigen Vielfachen des Richtungsvektors, also mit $r\vec{u}$, dann erhalten wir den Ortsvektor des neuen Geradenpunktes.

Mathematische Operationen für Vektoren

Addition

$\vec{a}+\vec{b}$

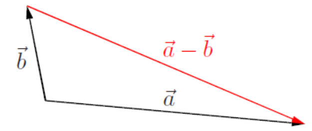
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$



Subtraktion

$\vec{a}-\vec{b}$

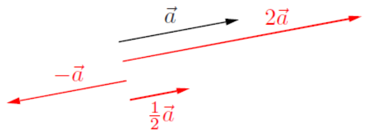
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$$



Skalare Multiplikation

$\lambda \cdot \vec{a}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Definition 73:

Als **vektorielle Geradengleichung** bezeichnet man diese Vorschrift zur Berechnung der Ortsvektoren der Geradenpunkte:

$$\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$$

wobei $\vec{u}$ der **Richtungsvektor** ist und $\vec{a}$ der Ortsvektor des **Aufpunktes** A der Geraden, $\vec{a}$ nennt man auch **Stützvektor** von g.

Beispiel 91:

Gegeben ist der Punkt $A(4|-2|1)$ von g und der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Dann lautet die Gleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bemerkung 31:

Was ändert sich, wenn man für dieselbe Gerade einen anderen Aufpunkt wählt?

Wir nehmen einfach einen neuen Aufpunkt $P_2(6|0|-3)$.

Dann sieht die Gleichung natürlich anders aus:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vom neuen Aufpunkt aus erreicht man natürlich ebenfalls alle Punkte von g, nur eben mit einem anderen Parameterwert.

Bemerkung 32:

Kann man auch einen anderen Richtungsvektor verwenden? Aber sicher!

Jeder Vielfache von $\vec{u}$ hat dieselbe Richtung und legt damit auch die Richtung von g fest.

Also könnten wir

$$2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

verwenden. Dessen Pfeile sind doppelt so lang. Dies wirkt sich dann wieder bei der Wahl des Parameters r aus. Vergleichen wir also die erste Gleichung mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ mit der neuen mit dem Richtungsvektor $2\vec{u}$:

Gleichung 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Gleichung 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

r = 2 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ r = 1 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

r = - 6 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$ r = - 3 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$

Beispiel 92:

Gegeben sind 3 Gleichungen:

(1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, (2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, (3) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

a) Beweise, daß alle drei Gleichungen dieselbe Gerade darstellen.

b) Für welchen Wert von r erhält man den Geradenpunkt $D(15|-6|23)$ aus jeder dieser drei Gleichungen ?

Lösung: Erste Beobachtung: Alle drei Gleichungen verwenden denselben Stützvektor, d.h. die zugehörigen Geraden gehen alle durch den Punkt $A(3|0|-1)$.

Zweite Beobachtung: Die drei Richtungsvektoren sind **kollinear** (d.h. sie sind Vielfache voneinander):

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ Und es gilt: $\vec{u}_1 = -2\vec{u}_2$, $\vec{u}_3 = -3\vec{u}_2 = \frac{3}{2}\vec{u}_1$.

Daher haben alle Richtungsvektoren dieselbe Richtung, d.h. alle drei Geraden geben dieselbe Gerade an.

b) $D(15|-6|23)$ liegt auf dieser Geraden. Doch weil diese hier drei verschiedene Darstellungen besitzt, kann man D auch mit unterschiedlichen Parametern berechnen:

(1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, Setzt man den Ortsvektor von D ein, folgt:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 4r = 12 \\ -2r = -6 \\ 8r = 24 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow r = 3$$

(2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, Setzt man den Ortsvektor von D ein, folgt:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} -2r = 12 \\ r = -6 \\ -4r = 24 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow r = -6$$

(3) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ Setzt man den Ortsvektor von D ein, folgt:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 6r = 12 \\ -3r = -6 \\ 12r = 24 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow r = 2$$

Das vektorielle Zugmodell

Dieser Tatbestand, dass man völlig verschieden aussehende Gleichungen für dieselbe Gerade aufstellen kann, ist für den Anfänger verwirrend, weil er es gewohnt ist, immer irgendwie eindeutige Ergebnisse in der Mathematik zu bekommen.

Man muss aber daran denken, dass die Geradengleichung ja nur ein Hilfsmittel zur Berechnung der Ortsvektoren ist, und somit noch nicht das Ergebnis.

Beispiel 93:

Gegeben sind 2 Punkte $A(2|5|-2)$ und $B(5|-1|-3)$.
Stelle die Gleichung der Geraden $g = (AB)$ auf.

Lösung: Wir verwenden den Vektor, der zum Pfeil $\overline{AB}$ gehört als Richtungsvektor und berechnen ihn so:

$$\vec{u} = \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dann folgt:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

je nachdem, ob man A oder B als Aufpunkt verwenden will !

Beispiel 94:

Prüfe nach, ob die Punkte $P(2|5|-2)$ bzw. $Q(11|-3|2)$ auf der Geraden g liegen mit $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

<u>**1. Lösung**</u>: Wir setzen für $\vec{x}$ die Ortsvektoren von P ein und überprüfen die Gültigkeit der entstandenen Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{bedeutet} \quad \begin{Bmatrix} 2 = 8 - 3r \\ 5 = 1 + 2r \\ -2 = 6 - 4r \end{Bmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{Bmatrix} 3r = 6 \\ 2r = 4 \\ 4r = 8 \end{Bmatrix}$$

Man stellt fest, daß alle drei Koordinatengleichungen mit r = 2 gelöst werden.

Also gilt auch $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ d.h. P liegt auf der Geraden g.

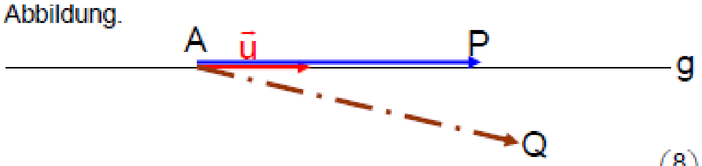
Dasselbe mit Q:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{bedeutet} \quad \begin{Bmatrix} 11 = 8 - 3r \\ -3 = 1 + 2r \\ 2 = 6 - 4r \end{Bmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{Bmatrix} 3r = -3 \\ 2r = -4 \\ 4r = 4 \end{Bmatrix}$$

Für die erste Gleichung würde man r = - 1 benötigen, für die zweite r = - 2 und für die dritte r = 1. Es gibt also keinen (einheitlichen) Wert für r, so daß man damit $\overline{OQ}$ über die Geradengleichung berechnen könnte !
Q liegt also nicht auf der Geraden g.

Die Überprüfung, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt, kann durch Einsetzen seines Ortsvektors in die Geradengleichung erfolgen. Er liegt auf der Geraden, wenn man für den Parameterwert (r) einen einheitlichen Wert findet.

Es gibt eine viel **elegantere Methode**, die wir als **2. Lösung** erproben wollen.
Dazu eine Abbildung.



Die Geradengleichung enthält den Ortsvektor des Aufpunktes A $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Also ist der Aufpunkt $A(8|1|6)$.

Nun Berechnen wir durch Abziehen der Ortsvektoren den Vektor $\overline{AP}$:

$\overline{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ und vergleichen ihn mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

der Geraden g. Man sieht, daß $\overline{AP} = 2\vec{u}$ gilt, daß also $\overline{AP}$ und $\vec{u}$ kollinear sind.
Daher liegt P auf g.

Analog dazu berechnen wir $\overline{AQ} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Weil dieser Vektor kein

Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{u}$ ist, verläuft der Pfeil $\overline{AQ}$ nicht parallel zu g, d.h.
$Q \notin g$!

> Ein Punkt P liegt auf einer Geraden g, wenn der Vektor $\overline{AP}$ zum Richtungsvektor der Geraden kollinear ist (wobei A ein Punkt von g ist).

Beispiel 95:

Gegeben ist der Punkt $C(2|-1|0)$ und die Gerade g durch

$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Welche Gleichung hat die **Parallele** h zu g durch C ?

Lösung:

Parallele Geraden haben dieselbe Richtung, also kann man jedes Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden g als Richtungsvektor für h nehmen, also auch denselben. Da C auf h liegt, nehmen wir ihn als Aufpunkt. Sein Ortvektor tritt dann in der Geradengleichung als Stützvektor auf:

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 96:

Gegeben sind zwei Geraden. Überprüfen Sie, ob sie parallel sind.

$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind $\vec{u}=\begin{pmatrix}6\\-3\\12\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-8\end{pmatrix}$.

Da $\vec{u}=-\frac{3}{2}\vec{v}$ oder $\vec{v}=-\frac{2}{3}\vec{u}$ ist, sind die Richtungsvektoren kollinear (d.h. sie haben dieselbe Richtung - wozu auch die Gegenrichtung zählt !!!): $g \parallel h$

ACHTUNG: Die Lösung ist noch nicht fertig ! Wenn zwei Geraden parallel sind, können sie auch gleich sein. Diesen Sonderfall muß man stets noch untersuchen.

Dazu gibt es drei Wege. Um diese exakt beschreiben zu können, gibt man den Aufpunkten von g und h Namen. Se sei also $A(2|1|-5)$ und $B(4|5|1)$.

1. Lösungsweg: Man überprüft, ob der Aufpunkt B von h auf g liegt. (Wenn ja, dann sind die parallelen Geraden sogar identisch). Dazu setzt man den Ortvektor von B in die Gleichung von g ein und rechnet nach, ob es dazu eine passende Lösung für r gibt:

$$g: \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\-3\\12\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}6\\-3\\12\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}6r=2\\-3r=4\\12r=6\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}r=\frac{1}{3}\\r=-\frac{4}{3}\\r=\frac{1}{2}\end{Bmatrix}$$

Nur wenn es einen einheitlichen Wert für alle drei Gleichungen gibt, läßt sich damit der Ortsvektor von B aus der Gleichung von g berechnen. Also liegt B nicht auf g, d.h. g und h sind nicht gleich.

2. Lösungsweg: Man überprüft, ob der Aufpunkt A von g auf h liegt. Dazu setzt man den Ortvektor von B in die Gleichung von g ein und rechnet nach, ob es dazu eine passende Lösung für s gibt:

$$g: \begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\2\\-8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-4\\2\\-8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}-4r=-2\\2r=-4\\-8r=-6\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}r=\frac{1}{2}\\r=-2\\r=\frac{3}{4}\end{Bmatrix}$$

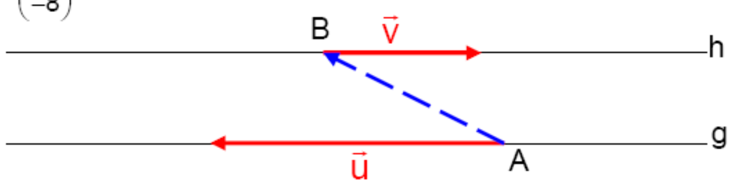
Da es keinen einheitlichen Wert für alle drei Gleichungen gibt, liegt B nicht auf g, d.h. g und h sind nicht gleich.

3. Lösungsweg: Man überprüft, ob der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches von $\vec{u}$ oder $\vec{v}$ ist.

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\neq k\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\-8\end{pmatrix}$$

Da dies nicht der Fall ist, gilt $g \neq h$

Wäre $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches von einem der Richtungsvektoren, dann würde der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ auf der Geraden g liegen, also auch B, also ganz h !!!



Beispiel 97:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der folgenden Geraden.

$$g:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\qquad h:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\11\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Lösung:

Wenn es einen Schnittpunkt gibt, dann liegt dieser auf g **und** auf h, d.h. man kann seinen Ortsvektor $\vec{x}_S$ aus beiden Gleichungen berechnen. Für den Schnittpunkt liefern also die beiden Gleichungen dasselbe. Daher setzen wir gleich.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\11\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}r-s=-1 & (1)\\2r+s=10 & (2)\\4r-2s=4 & (3)\end{matrix}\right\}$$

Man sieht, daß sich daraus ein System aus 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten r und s ergibt. Da in der Regel 2 Gleichungen ausreichen, um 2 Unbekannte zu berechnen, ist dieses System „überbestimmt“, d.h. wir müssen eine Gleichung für die Probe reservieren.

Hier rechnet man ganz einfach: (1) + (2) und erhält: $3r = 9$ also $r = 3$.
Aus (2) folgt dann $s = 10 - 2r = 10 - 6 = 4$.
Probe in (3) : $12 - 8 = 4$ ist eine wahre Aussage. Also existiert ein Schnittpunkt.
Diesen (d.h. dessen Ortsvektor !)können wir mit r = 3 aus der Gleichung von g berechnen, oder mit s = 8 aus der Gleichung von h.

Normalerweise reicht eine Rechnung. Hier sehen wir uns zur Übung beide an:

$$\vec{x}_S=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3\\1+6\\-2+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\10\end{pmatrix}\quad\text{bzw.}\quad \vec{x}_S=\begin{pmatrix}1\\11\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4\\11-4\\2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\10\end{pmatrix}.$$

Man sieht, daß beide Gleichungen denselben Ortsvektor liefern. Der zugehörige Schnittpunkt lautet also $S(5|7|10)$.

Beispiel 98:

Berechne den Schnittpunkt dieser Geraden.

$$g:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\qquad h:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\11\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Lösung:

Gegenüber dem Beispiel (5) wurde nur eine Zahl verändert, nämlich die 3. Koordinate des Aufpunktes von h. Sie heißt jetzt –2 statt 2. Schnittpunktsberechnung:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\11\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r-s=-1 & (1)\\ 2r+s=10 & (2)\\ 4r-2s=0 & (3)\end{matrix}\right\}$$

Die Berechnung von r und s aus Gleichung (1) und (2) liefert genau wie auf Seite 8 die Werte $r = 3$ und $s = 4$. Nur - die Probe in Gleichung (3) stimmt nicht mehr: $12 - 8 = 0$ ist falsch !

<u>Also schneiden sich g und h nicht.</u> Ja, aber parallel sind sie auch nicht, denn ddie beiden Richtungsvektoren sind nicht kollinear (d.h. sie haben verschiedene Richtungen, weil sie nicht Vilefache voneinander sind). Diese Situation kennt man in der Ebene nicht. Dort sind zwei Geraden parallel oder nicht parallel, und dann aber schneiden sie sich garantiert.

Es gibt im Raum Geraden, die nicht parallel sind und sich auch nicht schneiden. Sie heißen **<u>windschief.</u>**

Definition 74:

Nachweismethode für windschiefe Geraden

(1) Wenn sich zwei nicht parallele Geraden des Raumes nicht schneiden (die Probe stimmt nicht), dann sind sie windschief.

(2) Wenn die Richtungsvektoren von g und h zusammen mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Aufpunkte nicht komplanar sind (also linear unabhängig sind), dann sind g und h windschief.
Nachweis etwa durch $\left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AB}\right| \neq 0$

Beispiel 99:

Überprüfen Sie die Lage der folgenden Geraden.

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Schritt: Da die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind sie nicht kollinear, also sind die Geraden nicht parallel.

2. Schritt: Es sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A(1|0|-1)$, $B(0|-2|4)$

Untersuchung der Determinante

$$D = \left| \vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \overrightarrow{AB} \right| = \left| \begin{matrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -7 & 1 & 5 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{matrix} = -30 + 28 - 1 + 21 + 4 - 10 \neq 0$$

d.h. die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind nicht komplanar, also sind sie linear unabhängig, d.h. g und h sind windschief.

ACHTUNG

Schüler neigen erfahrungsgemäß zu dieser vereinfachten Lösung: Sie untersuchen nur diese Determinante $D = \left| \vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \overrightarrow{AB} \right|$. Das Problem tritt dann auf, wenn sie den Wert 0 hat. Dies heißt nämlich, daß die drei Vektoren komplanar sind. Und dies ist **auf zweierlei Arten** möglich:

Sie sind komplanar wenn die Geraden parallel sind, und sie sind komplanar, wenn sie sich schneiden.

Wer also eine Lagebeziehung mit dieser Determinante macht, und wenn dann D = 0 vorkommt, dann sollte man nicht vorschnell folgern: Sie schneiden sich! Sie könnten auch parallel sein. Dazu muß man anschauen, ob die Richtungsvektoren kollinear sind oder nicht.

Beispiel 100:

Überprüfen Sie die Lage der folgenden Geraden.

$$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn sie sich schneiden, dann berechnen Sie auch noch den Schnittpunkt.

Lösung:

Während in G7 alles offen bliebt, kann man der Fragestellung in G8 entnehmen, daß sie sich wahrscheinlich schneiden, denn wieso sollte man dann die Frage nach dem Schnittpunkt stellen.

Während also in G7 die Berechnung der Determinante ausreicht, (weil die Entscheidung $D \neq 0$ uns sagt, daß die Geraden windschief sind, und weil das Ergebnis $D = 0$ sagt, daß die Geraden parallel sind oder sich schneiden), müssen wir in G8 ja im Schnittfalle zusätzlich den Schnittpunkt ausrechnen.

Also: Bei der Fragestellung (G8) verzichten wir auf die Determinantenrechnung und suchen gleich den Schnittpunkt!

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-5\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2r-2s=6 & (1)\\ r+3s=-5 & (2)\\ -7r-s=-5 & (3)\end{matrix}\right\}$$

Elimination von r durch $(1)-2\cdot(2):\ -8s=16 \Rightarrow s=-2$

Eingesetzt in (2): $r=-5-3s=-5+6=1$

Probe in (3): -7 + 2 = -5

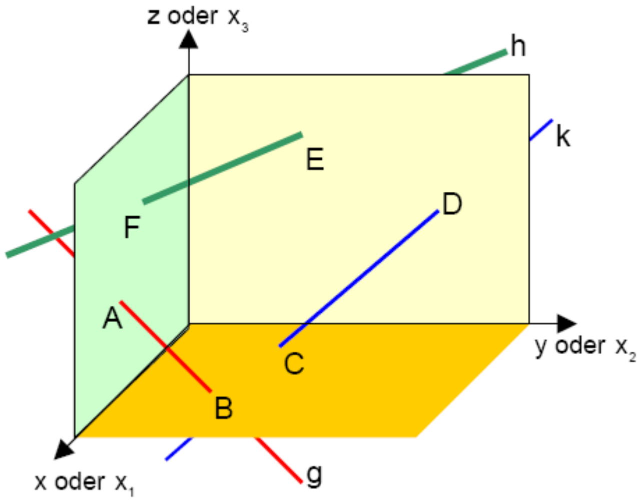
Die Probe stimmt, also schneiden sich die Geraden.

Berechnung des Schnittpunkts z.B. aus der Gleichung von g:

$$\vec{x}_S=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-8\end{pmatrix} \Rightarrow S(3|1|-8)$$

Hätten wir also zuerst mittels Determinante festgestellt, daß sie nicht windschief sind, und daß sie nicht parallel sind, dann hätten wir diese Schnittrechnung trotzdem machen müssen. **Es lohnt sich also, die Fragestellung gut zu überdenken und den Rechenweg dann erst festzulegen !**

Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen



Charakterisierung der Punkte auf den Koordinatenachsen

Wir haben gelernt, daß die Koordinaten von Punkten nichts anders sind, als die Koordinaten ihrer Ortsvektoren. Denn mit Vektoren können wir rechnen, mit Punkten aber nicht.

Nun legen wir einen Punkt auf der x-Achse fest. Dazu benötigen wir vom Ursprung aus einen Ortvektor, der ein Vielfaches des Basisvektors in x-Richtung ist. Dieser ist $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1} = 4\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bringt uns in x-Richtung um 4 weiter zum Punkt $P_1(4|0|0)$. Entsprechend führt uns $\overrightarrow{OP_2} = 7\vec{e}_2$ um 7 in y-Richtung zum Punkt $P_2(0|7|0)$ usw.

Definition 75:

Ein Punkt mit den Koordinaten $(x_1|0|0)$ liegt auf der x- oder x_1 –Achse.
Ein Punkt mit den Koordinaten $(0|x_2|0)$ liegt auf der y- oder x_2 –Achse.
Ein Punkt mit den Koordinaten $(0|0|x_3)$ liegt auf der z- oder x_3 –Achse.

Charakterisierung der Punkte in den Koordinatenebenen

Nun sehen wir uns die Abbildung an. Die Punkte B und C liegen ganz in der $x_1\,x_2$ – Ebene, also ist $x_3 = 0$, D und E liegen in der x_2x_3 – Ebene und haben $x_1 = 0$, während A und F in der x_1x_3-Ebene liegen mit $x_2 = 0$

Definition 76:

In der x_1x_2 - Ebene haben alle Punkte $x_3 = 0$.

in der x_2x_3 - Ebene haben alle Punkte $x_1 = 0$.

In der x_1x_3 - Ebene haben alle Punkte $x_2 = 0$.

Schnittpunkte von Geraden mit den Koordinatenebenen

Diese Punkte heißen auch Durchstoßpunkte oder Spurpunkte der Geraden.

Die folgenden drei Beispiele entsprechen nur ungefähr der Abbildung!

Beispiel 101:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gerade durchstößt natürlich alle drei Koordinatenebenen, auch wenn nur zwei Schnittpunkte in der Abbildung zu sehen sind:
A in der x_1x_3 –Ebene und B in der x_1x_2-Ebene.

Bedingung für den Schnitt mit der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$.
Die x_2 – Koordinate steht in der Geradengleichung in der 2. Zeile:

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also lautet diese Bedingung ausführlich: $4 - 2r = 0$
und daraus folgt $r = 2$.
Setzt man dies in die Geradengleichung ein, erhält man den Spurpunkt $A(3|0|3)$

Bedingung für den Schnitt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$.
Dies heißt $1 + r = 0$ also $r = -1$ ergibt den nächsten Spurpunkt $B(6|6|0)$

Und nun noch den 3. Spurpunkt, der nicht eingezeichnet ist:

Bedingung für den Schnitt mit der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$.
d.h. $5 - r = 0$ also $r = 5$ ergibt $R(0|-6|-4)$.

Beispiel 102:

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Gerade hat eine **spezielle Lage** !
Wir machen eine Reise und beginnen im Ursprung.
Dann folgen wir dem Richtungsvektor des
Aufpunktes und landen auf der Geraden im Punkt
$P_1(2|8|5)$. Von da aus lassen wir uns durch den
Richtungsvektor so wie tragen wie wir wollen.

Dieser Richtungsvektor orientiert sich wie folgt: Seine Pfeile zeigen um 4 in Richtung der x_1 -Achse und um –2 in Richtung der x_2 –Achse, d.h. um 2 nach links. Aber es gibt keine Komponente in die x_3 –Richtung. Das bedeutet, daß wir entlang der Geraden stets in derselben „Höhe" über der x_1x_2 – Achse bleiben, wie der Punkt A, und der hat $x_3 = 5$.

Unsere Gerade h verläuft also parallel zur x_1x_2 – Ebene im Abstand 5 !!!
Damit kann sie die x_1x_2-Ebene nicht schneiden !

Schnitt mit der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$ d.h. $8 - 2r = 0$ also $r = 4$ $\Rightarrow F(18|0|5)$

Schnitt mit der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$ d.h. $2 + 4r = 0$ also $r = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow E(0|9|5)$

Beispiel 103:

$$k: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$: $-3 + 3r = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow C(3|4|0)$

Schnitt mit der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$: $5 - 2r = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{2} \Rightarrow D(0|7|\frac{9}{2})$

Schnitt mit der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$: $2 + 2r = 0 \Rightarrow r = -1 \Rightarrow Q(7|0|-6)$

Q ist nicht in der Abbildung dargestellt. Er liegt in der x_1x_3-Ebene links unten.

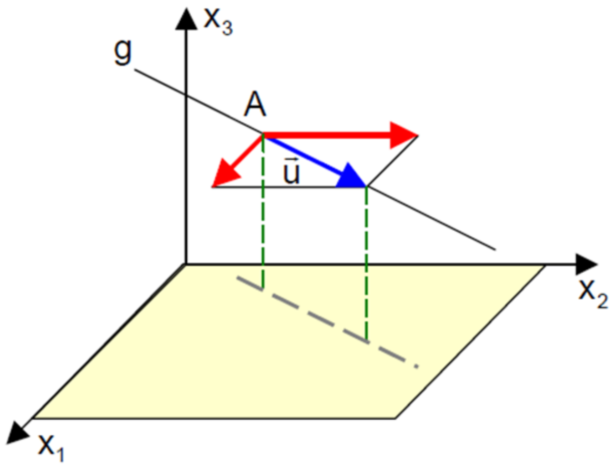
Besondere Lagen von Geraden

Ein Vektor, der **zur x_1x_2-Ebene parallel** ist, hat keine Komponente in x_3-Richtung und somit die 3. Koordinate 0. Wird er als Richtungsvektor einer Geraden verwendet, ist diese zur x_1x_2-Ebene parallel.

$$g: \quad \vec{x} = \vec{a} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ist **parallel zur x_1x_2-Ebene**

Die beiden Komponenten sind

$$u_1\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

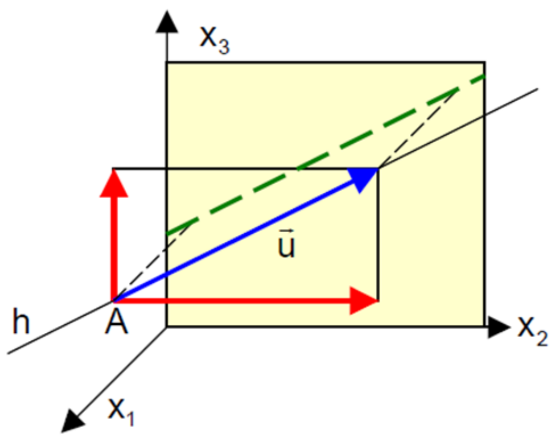


und die Abbildung zeigt: $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$. Dies ist der Grund für die Parallelität !

$$h: \quad \vec{x} = \vec{a} + r\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$ ist **parallel zur x_2x_3-Ebene**

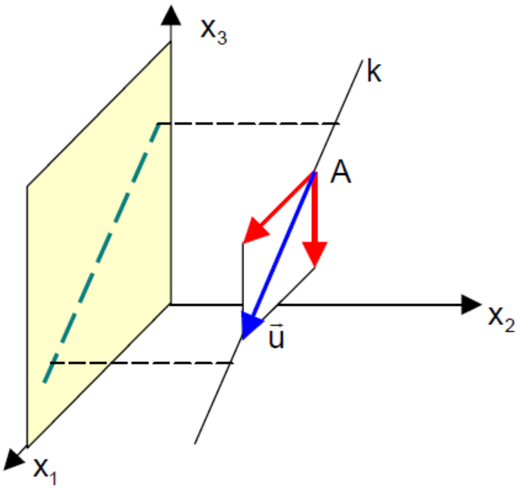
Die beiden Komponenten sind

$$u_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



und die Abbildung zeigt: $\vec{u} = u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$. Dies ist der Grund für die Parallelität !

$k: \quad \vec{x} = \vec{a} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}$ ist **parallel zur x_1x_3-Ebene**



Die beiden Komponenten sind

$$u_1\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

und die Abbildung zeigt: $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_3\vec{e}_3$.
Dies ist der Grund für die Parallelität !

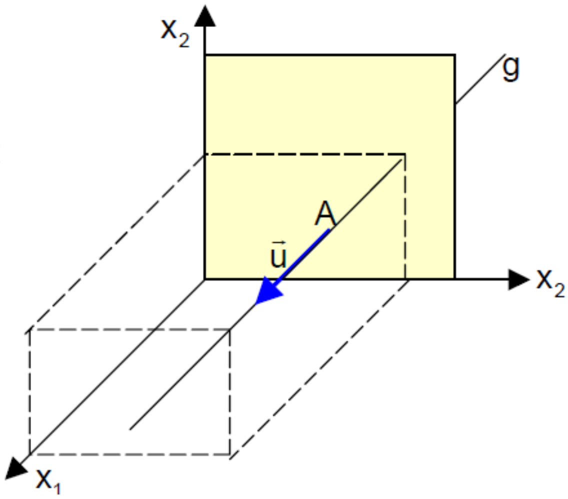
Geraden können auch zu einer Achse parallel sein. Dann ist ihr Richtungsvektor Vielfaches einer der Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Gerade g ist **parallel zur x_1-Achse**:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denn ihr Richtungsvektor zeigt nur in x_1-Richtung, ist also ein Vielfaches des Basisvektors $\vec{e}_1$.

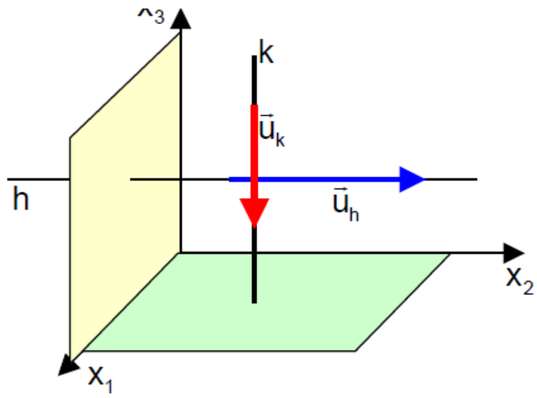


Die Gerade h ist **parallel zur x_2-Achse**

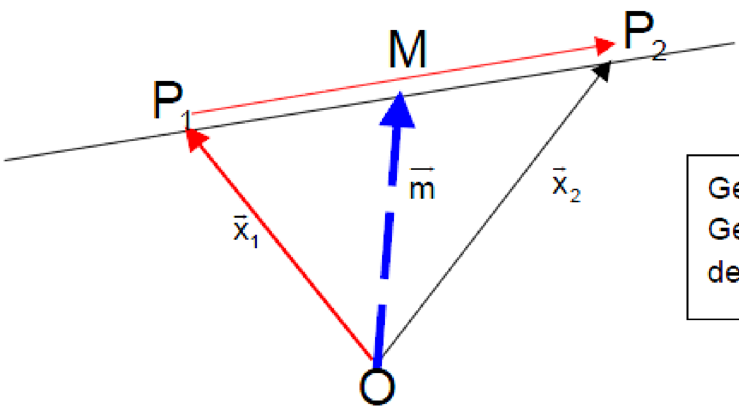
$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und k ist **parallel zur x_3 Achse**:

$$k: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Der Mittelpunkt einer Strecke.



Gegeben sind P_1 und P_2.
Gesucht ist der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2.

Herleitung der Mittelpunktsformel

Für die Gleichung der Geraden (P_1P_2) verwende ich P_1 als Aufpunkt und $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ als Richtungsvektor. Damit erhält man diese Gleichung:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + r \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$$
$$\vec{x} = \vec{x}_1 + r \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

Der Mittelpunkt halbiert die Strecke, also auch den Pfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$. Es gilt: $\overrightarrow{P_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$.

Man erhält also den Ortsvektor des Mittelpunktes M, indem man für r die Zahl $\frac{1}{2}$ einsetzt:

$$\vec{m} = \vec{x}_1 + \tfrac{1}{2}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{x}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{x}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{x}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{x}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{x}_2$$

$$\boxed{\vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}$$

Beispiel 104:

Beispiel: Ein Dreieck ist gegeben durch $A(2|1|-3)$, $B(5|-3|2)$, $C(4|0|8)$.

Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind dann:

$$m_{AB} = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{AB}\left(\tfrac{7}{2}|-1|-\tfrac{1}{2}\right)$$

Man kann dies sofort im Kopf rechnen: Man addiert die Koordinaten paarweise und halbiert das Ergebnis:

$$M_{BC}\left(\tfrac{9}{2}|-\tfrac{3}{2}|5\right), \quad M_{AC}\left(3|\tfrac{1}{2}|\tfrac{5}{2}\right)$$

Beispiel 105:

Gegeben sind eine Strecke AB durch $A(12|3|-9)$ und ihren Mittelpunkt $M(5|-2|2)$. Berechne den Endpunkt B der Strecke.

Lösung:

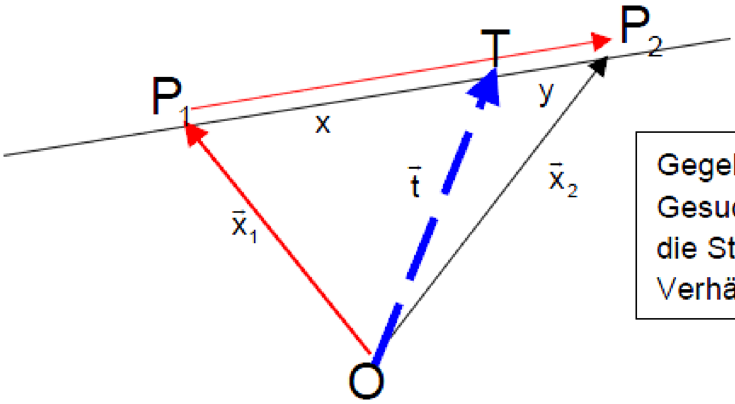
Wir verwenden die Mittelpunksformel und stellen sie um. Da die Punkte jetzt A und B heißen, passen wir die Formel so an:

$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{m} \Rightarrow \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{a}$$

Mit Zahlen:

$$\vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow B(-2|-7|13)$$

Teilpunkte einer Strecke.



Gegeben sind P_1 und P_2. Gesucht ist der Punkt, der die Strecke P_1P_2 im Verhältnis $x : y$ teilt.

Dies geht im Prinzip genauso wie bei der Berechnung des Mittelpunkts. Dort hatten wir das Teilverhältnis 1:1, und dies ergab $\overrightarrow{P_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$

Wenn wir jetzt wie in der Abbildung 3:1 nehmen, dann sind es im ganzen 4 Teile und es gilt $\overrightarrow{P_1T} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$.

Hätten wir ein Teilverhältnis von 5:2, dann benötigten wir 5 der 7 Teile: $\overrightarrow{P_1T} = \frac{5}{7} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$

Haben wir ganz allgemein das Teilverhältnis x:y, dann liegen insgesamt x+y Teile vor, von denen wir x Teile benötigen. (oder y – je nach Orientierung der Teilung)

$$\overrightarrow{OT} = \vec{t} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{x}{x+y} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\vec{t} = \vec{x}_1 + \frac{x}{x+y} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

$$\vec{t} = \overrightarrow{x_1} + \frac{x}{x+y}\vec{x}_2 - \frac{x}{x+y}\vec{x}_1$$

$$\vec{t} = \frac{x+y}{x+y} \cdot \overrightarrow{x_1} + \frac{x}{x+y}\vec{x}_2 - \frac{x}{x+y}\vec{x}_1$$

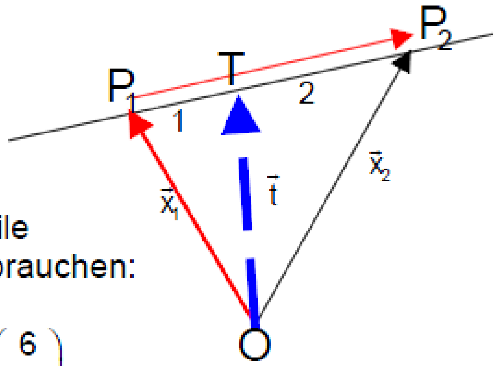
$$\boxed{\vec{t} = \frac{y}{x+y} \cdot \overrightarrow{x_1} + \frac{x}{x+y}\vec{x}_2}$$

Wenn man sich die Formel merken will, muß man folgendes festhalten:
In der Abbildung sind beim Vektor $\vec{x}_1$ x Teile, beim Vektor $\vec{x}_2$ y Teile.
In der Formel ist dies genau umgekehrt. Dort steht y bei $\vec{x}_1$ und x bei $\vec{x}_2$.

Doch ich empfehle, sich diese Formel keinesfalls zu merken. Es wird schnell zu viel! Das entscheidende ist, daß man die Fähigkeit gewinnt, die Lösung ohne Formel zu finden. Wichtig ist Methodenwissen, nicht Faktenwissen!

Beispiel 106:

Gegeben sind die Punkte $P_1(3|-2|5)$ und $P_2(9|7|2)$. Der Punkt T teile AB im Verhältnis 1:2. Berechne seine Koordinaten.



Musterlösung:

Man soll solche Aufgaben nie ohne eine Skizze lösen wollen !

Das Verhältnis 1:2 ergibt 1 Teil vorne, 2 Teile hinten, also insgesamt 3 Teile, von denen 1 brauchen:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 9-3 \\ 7+2 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow T(5|1|4)$$

Beispiel 107:

Gegeben sind die Punkte $A(1|-3|-2)$, $B(-7|-15|6)$, $P(-5|-12|4)$.

Prüfe nach, ob der Punkt P auf der ***Strecke*** AB liegt.
In welchem Verhältnis teilt er sie ?

Lösung:

Zunächst prüfen wir nach, ***ob*** P auf g=(AB) liegt.
Dazu vergleichen wir den Vektor $\overrightarrow{AP}$ mit $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, daß $\overrightarrow{AP} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ist, d.h. P liegt auf der Strecke AB und teilt die Strecke AB im Verhältnis 3:1 (denn er benötigt 3 der 4 Teile, 1 Teil liegt dann zwischen P und B.

Beispiel 108:

Gegeben sind die Punkte $A(1|-3|-2)$, $B(-7|-15|6)$, $Q(-9|-18|8)$.

Prüfe nach, ob der Punkt Q auf der ***Strecke*** AB liegt.
In welchem Verhältnis teilt er sie ?

Hier wurden dieselben Punkte A und B gewählt, wie in Aufgabe (2). Aber Q ist neu.

Lösung:

Zunächst prüfen wir nach, ***ob*** Q auf g=(AB) liegt.

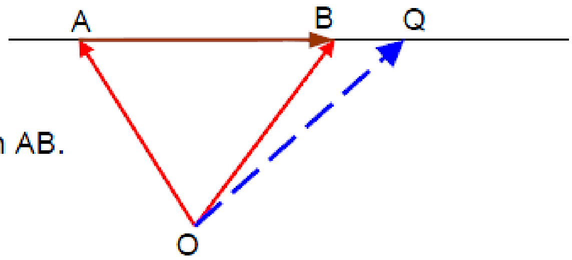
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Wir haben jetzt $\overrightarrow{AQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

Also liegt Q außerhalb der Strecke AB

Also ist P gar kein wirklicher Teilpunkt von AB.

d.h. wir haben auch kein Teilverhältnis.



Bemerkung:
Die Mathematiker nennen einen solchen Punkt verrückterweise einen **äußeren** Teilpunkt von AB.

Beispiel 109:

Gegeben sind die Punkte $A(1|-3|-2)$, $B(-7|-15|6)$, $R(9|-18|8)$.

Prüfe nach, ob der Punkt R auf der ***Strecke*** AB liegt.
In welchem Verhältnis teilt er sie ?

Lösung:

Nun haben wir nochmals die Strecke AB und einen neuen Punkt R:
Wir übernehmen sofort die Geradengleichung für g = (AB) und setzen ein

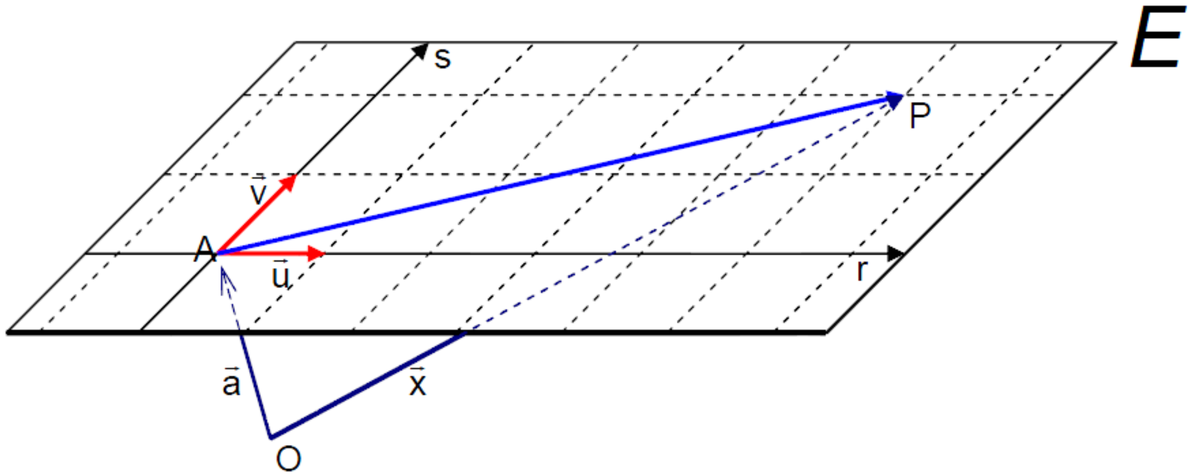
$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r = -1 \\ r = \frac{15}{12} = \frac{6}{4} \\ r = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{Bmatrix}$$

Da es keinen einheitlichen Wert für r gibt, liegt R nicht auf g, also auch nicht auf AB,

ist also kein Teilpunkt der Strecke AB.

Ebenen

Erreichbarkeit von Punkten auf einer Ebene



Eine Ebene ist ein zweidimensionaler affiner Raum, d.h. die Vektoren innerhalb der Ebene beziehen sich auf zwei Basisvektoren $\vec{u}, \vec{v}$. Genau wie bei der Geraden benötigen wir einen Aufpunkt A, um vom Ursprung erst einmal **auf** die Ebene zu kommen.
Von dort aus benützen wir das ebenen-interne Koordinatensystem, das durch $\vec{u}, \vec{v}$ installiert wird: In der Abbildung ist

$\overrightarrow{AP} = 5\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ also hat P innerhalb dieser Ebene die Koordinaten $P\left[5|2\right]$. .

Die Ebene enthält auch die r-Achse und die s-Achse, ganz analog zu dem was wir in der üblichen Zeichenebene als x-Achse und y-Achse kennen.
Vom Aufpunkt A aus hat ein Punkt P der Ebene 2 „Ebenenkoordinaten" :
$P\left[r|s\right]$, und das heißt, daß $\overrightarrow{AP} = r\vec{u} + s\vec{v}$ ist

Nun ist aber die Ebene Teil des Raumes und somit eingebettet in das räumliche, nunmehr dreidimensionale Koordinatensystem. In ihm hat jeder Punkt und jeder Vektor 3 Koordinaten und dies wenden wir nun so an:

Die Berechnung von Punkten geschieht im affinen Raum stets durch die Ortsvektoren der Punkte. Also können wir nie P berechnen, sondern immer nur $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$.

Und dies geschieht durch die einfache Vektorsumme: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$.
Wenn P in der Ebene E mit den Basisvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ liegt, dann können wir diese Berechnungsvorschrift so schreiben: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}}$$

Diese Berechnungsvorschrift für Ebenenpunkte nennen wir ***Ebenengleichung***.
Sie enthält den **Ortsvektor eines Aufpunktes** (genannt **Stützvektor**) und zwei linear unabhängige (Basis-)Vektoren der Ebene, man nennt sie auch die **Richtungsvektoren** der Ebene.

Die ebenen-internen Koorinaten $P[5|2]$ wurden deshalb in eckige Klammern gesetzt, um anzudeuten, daß es nicht die wirklichen Koordinaten sind. Es ist wie in einer Pension: Die Zimmernummer 52 bedeutet 5. Stock, 2. Zimmer. Aber damit ist ja über lie Lage des Zimmers in der Straße nichts gesagt. Wir brauchen noch weitere Angaben über Straße und Hausnummer.

Die tatsächliche Lage liefert uns das räumliche Koordiunatensystem.

Nehmen wir an, der Aufpunkt A unserer Ebene ist $A(2|3|-4)$, und die Richtungsvektoren der Ebene sind durch diese Koordinaten im Raum festgelegt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

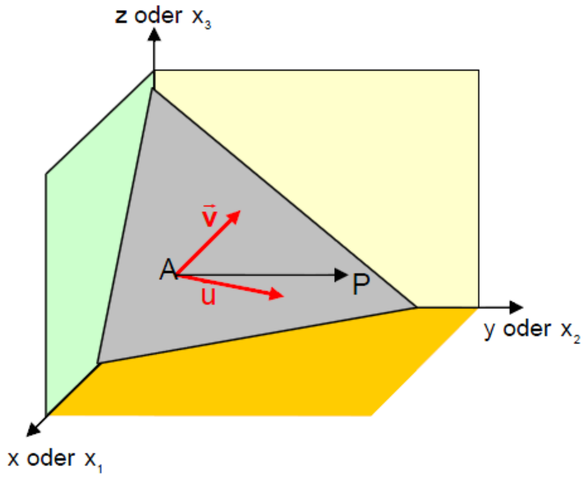
dann verändert sich unsere Ebenengleichung so:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tja, und unser Punkt $P[5|2]$ d.h. mit $r = 5$ und $s = 2$ erhält diese räumlichen Koordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5+4 \\ 3-15+10 \\ -4+10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow P(11|-2|8).$$

Hier noch eine Abbildung, die ein grau eingefärbtes Ebenenstück im 3-dimensionalen Achsenkreuz zeigt. Da der Ursprung verdeckt wird, sieht man auch nicht den Ortsvektor des Punktes A.



Grundaufgaben zur Ebenengleichung

Beispiel 110:

Gegeben sind 3 Punkte einer Ebene E. Stelle die Gleichung der Ebene auf.

Lösung:

Gegeben sind: $A(4|0|3)$, $B(1|-2|3)$ und $C(5|3|1)$.

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$ sind diese Vektoren nicht kollinear, d.h. A,B und C liegen **nicht auf einer Geraden** sondern bilden ein Dreieck.

Jeder der Punkte A, B oder C kann als Aufpunkt gewählt werden. Und in jedem dieser 3 Fälle kann man je zwei der drei Vektoren als Richtungsvektoren auswählen. Das gibt bis jetzt schon 9 Möglichkeiten für die Gleichung von E. Zwei seien angeschrieben:

$$E: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

In der zweiten Gleichung habe ich außerdem $-\overrightarrow{AB}$ als Richtungs-vektor verwendet.

Beispiel 111:

Gegeben ist eine Ebene E durch ihre Gleichung. Berechne die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung:

Punkte auf der x_1-Achse haben die Koordinaten $S_1(x_1|0|0)$. Für die Ebene der GA2 folgt damit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 3 + r + 4s & (1) \\ 2r - s = 0 & (2) \\ -3r + s = -4 & (3) \end{Bmatrix}$$

(2) + (3) liefert $r = 4$. Aus (2) folgt dann $s = 2r = 8$. Und damit aus (1): $x_1 = 39$.
$S_1(39|0|0)$

Schnitt mit der x_2-Achse: $S_2(0|x_2|0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r + 4s = -3 & (1) \\ x_2 = 2r - s & (2) \\ -3r + s = -4 & (3) \end{Bmatrix}$$

3(1)+(2) liefert s = - 1. Aus (1) folgt dann r = 1. Und damit erhält man aus (2): $x_2 = 3$
$S_2(0|3|0)$

Schnitt mit der x_3-Achse: $S_3(0|0|x_3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r + 4s = -3 & (1) \\ 2r - s = 0 & (2) \\ x_3 = 4 - 3r + s & (3) \end{Bmatrix}$$

(1)+ 4(2) liefert $r = -1/3$. Aus (2) folgt dann $s = 2r = -2/3$
Damit erhält man aus $S_3(0|0|4\tfrac{1}{3})$

Beispiel 112:

Gegeben ist eine Ebene E durch ihre Gleichung. Liegt ein gegebener Punkt P in der Ebene?

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P(-1|2|0)$$

Lösung:

1. Lösung:

Einsetzen des Ortsvektors von P in die Gleichung der Ebene E zur Bestimmung seiner $[r|s]$ - Koordinaten bzgl. $\vec{u}$, $\vec{v}$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4r - 2s = -2 & (1) \\ 2r + s = 5 & (2) \\ r - s = -2 & (3) \end{Bmatrix}$$

(2) + (3) ergibt $3r = 3$ also $r = 1$.
Aus (2) folgt dann $s = 5 – 2r = 3$
Probe in (1): $4 – 6 = - 2$ wahre Aussage.
Also hat P die ebenen-internen Koordinaten
$P[1|3]$ d.h. P liegt in E.

2. Lösung:

P liegt genau dann in E, wenn die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ komplanar sind:

$$D = \left|\vec{u} \ \vec{v} \ \overrightarrow{AP}\right| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$D = -8 - 10 + 4 + 2 + 20 - 8 = 0$$

Also sind diese Vektoren linear abhängig, d.h. P liegt in E.
Diese Rechnung ist kürzer, liefert aber nicht r oder s.

Die rechte Lösung ist die elegantere, weil hier eine Aussage wie die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren über das Ergebnis entscheidet.

Beispiel 113:

Gegeben ist eine Ebene E durch ihre Gleichung. Liegt ein gegebener Punkt P in der Ebene?

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad Q(3|1|4)$$

Lösung:

1. Lösung:

Einsetzen des Ortsvektors von Q in die Gleichung der Ebene E zur Bestimmung seiner $[r|s]$ - Koordinaten bzgl. $\vec{u}$, $\vec{v}$.

$$\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}4r-2s=2 & (1)\\ 2r+s=4 & (2)\\ r-s=2 & (3)\end{array}\right\}(1$$

(2) + (3) ergibt $3r = 6$ also $r = 2$.

Aus (2) folgt dann $s = 4 - 2r = 0$

Probe in (1): $8 - 0 = 2$ Falsche Aussage !

Q liegt also **nicht** in E.

2. Lösung:

Untersuchung, ob $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overline{AQ}$ komplanar sind:

$$D=\left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AQ}\right|=\begin{vmatrix}4&-2&2\\2&1&4\\1&-1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}4&-2\\2&1\\1&-1\end{matrix}$$

$$D=8-8-4-2+16+8\neq 0$$

Also sind diese Vektoren linear unabhängig, d.h. Q liegt **nicht** in E.

Der Pfeil $\overrightarrow{AQ}$ ragt aus der Ebene heraus !

Beispiel 114:

Gegeben sind die Punkte $A(6|3|-1)$, $B(-6|19|7)$, $C(14|11|19)$, $D(26|-5|11)$

a) Zeige, daß ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Stelle eine Gleichung der Ebene E durch ABCD auf.

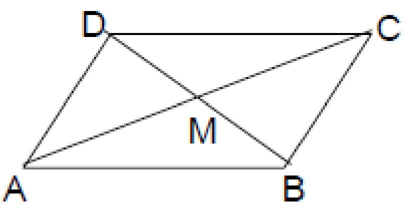
c) Gib die Gleichungen der Diagonalen g = (AC) und h = (BD) an.

d) Untersuche, wo die folgenden Punkt relativ zum Parallelogramm bzw. zu den Diagonalen AC und BD liegen:

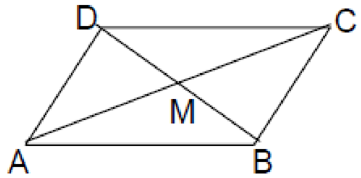
$Z(12|9|14)$, $F(18|1|10)$, $G(13|3|7)$, $H(7|11|11)$, $J(23|-1|13)$,

$K(16|13|24)$, $L(42|-17|13)$, $M(10|7|9)$. $N(2|27|27)$ $Q(-1|17|10)$

$R(8|12|-24)$



Lösung.



a) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overline{DC} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

Da $\overline{AB} = \overline{DC}$ liegt ein Parallelogramm vor.
ACHTUNG: Die Eckenbezeichnungen sind jetzt wie üblich angeordnet, also nicht so wie auf Seite 8.

b) Für die Gleichung der Ebene wählen wir $\vec{u} = \overline{AB}$ und $\vec{v} = \overline{AD}$ als Richtungs-vektoren:

$$\vec{u} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overline{AD} = \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

c) Für die Gerade g = (AC) gilt s = r , also folgt:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Für die Gerade h = (BD) gilt s = 1 – r , also folgt:

$$h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + (1-r)\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -32 \\ 24 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d) Die Lage dieser Punkte bestimmen wir dadurch, daß wir ihre ebenen-internen $[r|s]$ – Koordinaten ermitteln.

(1) Lage des Punktes Z:

$$\overline{AZ} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -12r + 20s = 6 \\ 16r - 8s = 6 \\ 8r + 12s = 15 \end{Bmatrix}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{3}{4}$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{3}{4}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:
$Z\left[\frac{3}{4}\middle|\frac{3}{4}\right]$ liegt in der Ebene, weil die Probe stimmt.
Weil r = s ist, liegt Z auf der Diagonalen (AD), weil 0 < r = s < 1 ist, liegt Z zwischen A und D, und weil r + s > 1 ist, sogar oberhalb von BD, also auf MD.

(2) Lage des Punktes F:

$$\overrightarrow{AF} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}12\\-2\\11\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-12\\16\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}20\\-8\\12\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-12r+20s=12\\16r-8s=-2\\8r+12s=11\end{cases}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{3}{4}$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{1}{4}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$F\left[\frac{1}{4}\middle|\frac{3}{4}\right]$ hat r + s = 1 , d.h. F liegt auf der anderen Diagonalen (BD) und wegen 0 < r,s < 1 liegt F sogar zwischen B und D.

(3) Lage des Punktes G:

$$\overrightarrow{AG} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}7\\0\\8\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-12\\16\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}20\\-8\\12\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-12r+20s=7\\16r-8s=0\\8r+12s=8\end{cases}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{1}{2}$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{1}{4}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$G\left[\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}\right]$ liegt im Innern des Parallelogramms ABCD und wegen r+s<1 sogar im Innern des Dreiecks ABD und wegen s > r oberhalb der Diagonalen AC.

(4) Lage des Punktes H:

$$\overrightarrow{AH} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\8\\12\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-12\\16\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}20\\-8\\12\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-12r+20s=1\\16r-8s=8\\8r+12s=12\end{cases}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{1}{2}$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{3}{4}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$H\left[\frac{3}{4}\middle|\frac{1}{2}\right]$ liegt im Innern des Parallelogramms ABCD und wegen r+s>1 im Teildreiec BDC, wegen s < r unterhalb der Diagonalen AC, also im Dreieck BCM.

(5) Lage des Punktes J:

$$\overrightarrow{AJ} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}17\\-4\\14\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-12\\16\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}20\\-8\\14\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-12r+20s=17\\16r-8s=-4\\8r+12s=14\end{cases}$$

(2)-2(3): ergibt $s = 1$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{1}{4}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$J\left[\frac{1}{4}\middle|1\right]$ liegt auf dem Rande des Parallelogramms ABCD auf der Strecke CD.
Wer Probleme hat, das zu erkennen, sehe sich die Abbildung auf Seite 8 an. Wenr man dort von A aus $\frac{1}{4}\vec{u} + \vec{v}$ abträgt kommt man zum Punkt J.

(6) Lage des Punktes K:

$$\overrightarrow{AK} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}10\\10\\25\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-12\\16\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}20\\-8\\14\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-12r+20s=10\\16r-8s=10\\8r+12s=25\end{cases}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{5}{4}$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{5}{4}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$K\left[\frac{5}{4}\middle|\frac{5}{4}\right]$ liegt auf der Geraden (AC) aber außerhalb des Parallelogramms, also außerhalb der Strecke AC hinter C.

(7) Lage des Punktes L:

$$\overline{AL} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 36 \\ -20 \\ 14 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -12r + 20s = 36 \\ 16r - 8s = -20 \\ 8r + 12s = 14 \end{Bmatrix}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{3}{2}$ und aus (2) folgt dann $r = -\frac{1}{2}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$L\left[\frac{3}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right]$ liegt außerhalb des Parallelogramms in der Ebene, da r+s=1 ist, liegt L auf der Geraden (BD), aber außerhalb der Strecke BD („links oben")

(8) Lage des Punktes M

$$\overline{AM} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -12r + 20s = 4 \\ 16r - 8s = 4 \\ 8r + 12s = 10 \end{Bmatrix}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{1}{2}$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{1}{2}$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$M\left[\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right]$ ist der Mittelpunkt des Parallelogramms.

(9) Lage des Punktes N

$$\overline{AN} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -12r + 20s = -4 \\ 16r - 8s = 24 \\ 8r + 12s = 28 \end{Bmatrix}$$

(2)-2(3): ergibt $s = 1$ und aus (2) folgt dann $r = 2$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$N[1|2]$ ist zwar ein Punkt der Ebene, liegt aber außerhalb des Parallelogramms. Er ist das Spiegelbild von B an C.

(10) Lage des Punktes Q

$$\overline{AQ} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -12r + 20s = -7 \\ 16r - 8s = 14 \\ 8r + 12s = 11 \end{Bmatrix}$$

(2)-2(3): ergibt $s = \frac{1}{4}$ und aus (2) folgt dann $r = 1$. Die Probe in (1) stimmt !!!

Interpretation:

$Q\left[1\middle|\frac{1}{4}\right]$ liegt auf dem Rand des Parallelogramms, und zwar auf der Strecke BC:

$$\overline{AQ} = \vec{u} + \tfrac{1}{4}\vec{v} = \overline{AB} + \tfrac{1}{4}\overline{BC}$$

(11) Lage des Punktes 5

$$\overline{AR} = r\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -23 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -12r + 20s = 2 \\ 16r - 8s = 18 \\ 8r + 12s = -23 \end{Bmatrix}$$

(2)-2(3): ergibt $s = -2$ und aus (2) folgt dann $r = \frac{1}{8}$. **Die Probe in (1) stimmt nicht, also liegt R nicht in E !**

Interpretation

Das vielleicht wichtigste Beispiel! Man wird nachlässig, wenn die Probe immer stimmt und läßt sich weg. Und gerade dann liefert sie eine falsche Aussage, d.h. der Punkt R liegt nicht einmal in der Ebene, denn der Vektor $\overline{AR}$ läßt sich gar nicht als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen !!!!!....!

Umrechnung: Koordinatengleichung in die Parametergleichung

Parametermethode

Beispiel 115:

Gegeben ist folgende Ebene in Koordinatengleichung:

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 24$$

Formen Sie diese Ebene in die Parameterform um.

Lösung:

a) Wähle $x_2 = r \in \mathbf{R}$ und $x_3 = s \in \mathbf{R}$, dann folgt $x_1 = 24 + 5r - 2s$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 + 5r - 2s \\ r \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten somit den Aufpunkt $A_1(24|0|0)$ und zwei Richtungsvektoren

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun hat man auch andere Wahlmöglichkeiten, etwa diese:

b) Wähle $x_1 = r \in \mathbf{R}$ und $x_2 = s \in \mathbf{R}$, dann folgt:

$2x_3 = 24 - x_1 + 5x_2 \ \Rightarrow \ x_3 = 12 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 12 - \frac{1}{2}r - \frac{5}{2}s$.

Eingesetzt ergibt das diesen allgemeinen Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 12 - \frac{1}{2}r + \frac{5}{2}s \end{pmatrix} \Rightarrow E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Dieselbe Ebene wird nun mit dem Aufpunkt $A_2(0|0|12)$ und diesen Richtungsvektoren dargestellt:

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Man kann die Brüche in den Richtungsvektoren umgehen, indem man eine geschicktere Wahl trifft. Wenn man nach x_3 auflösen will, sieht man daß der Term $2x_3 = 24 - x_1 + 5x_2$ die Division durch 2 erfordert, und man sieht auch, daß dies bei den Koeffizienten –1 uns 5 zu Brüchen führen muß. Daher wählt man zum Beispiel:

Wähle $x_1 = 2r \in \mathbf{R}$ und $x_2 = 2s \in \mathbf{R}$, dann folgt:

$2x_3 = 24 - x_1 + 5x_2 \ \Rightarrow \ x_3 = 12 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 12 - r + 5s$.

Eingesetzt ergibt das diesen allgemeinen Lösungsvektor:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2r\\2s\\12-r+5s\end{pmatrix}\Rightarrow E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}.$$

Jetzt haben sich dabei einfach die Richtungsvektoren verdoppelt. Damit ändert sich ja nicht deren Richtung, und die Länge spielt keine Rolle !

Beispiel 116:

Gegeben ist folgende Ebene in Koordinatengleichung:

$4x_1+5x_2-6x_3=2$

Formen Sie diese Ebne in die Parameterform um.

Lösung:

1. Möglichkeit:

Auflösen nach x_1: $4x_1=2-5x_2+6x_3 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}-\frac{5}{4}x_2+\frac{3}{2}x_3$

Wähle daher $x_2=4r,\ r\in\mathbf{R}$ und $x_3=2s,\ s\in\mathbf{R}$, $\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}-5r+3s$

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-5r+3s\\4r\\2s\end{pmatrix}\Rightarrow E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit:

Auflösen nach x_2: $5x_2=2-4x_1+6x_3 \Rightarrow x_2=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x_1+\frac{6}{5}x_3$

Wähle daher $x_1=5r,\ r\in\mathbf{R}$ und $x_3=5s,\ s\in\mathbf{R}$, $\Rightarrow x_2=\frac{2}{5}-4r+6s$

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5r\\\frac{2}{5}-4r+6s\\5s\end{pmatrix}\Rightarrow E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}$$

3. Möglichkeit:

Auflösen nach x_3: $6x_3=-2+4x_1+5x_2 \Rightarrow x_3=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x_1+\frac{5}{6}x_2$

Wähle daher $x_1=3r,\ r\in\mathbf{R}$ und $x_2=6s,\ s\in\mathbf{R}$, $\Rightarrow x_3=-\frac{1}{3}+2r+5s$

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}3r\\6s\\-\frac{1}{3}+2r+5s\end{pmatrix}\Rightarrow E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}$$

Parametergleichung in die Koordinatengleichung (Eliminationsmethode)

Umrechnung

Beispiel 117:

Gegeben Sei eine Ebene durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Koordinatengleichung auf.

Lösung:

Diese Vektorgleichung besteht aus drei Koordinatengleichungen:

$$\left\{\begin{matrix} x_1 = -1 + 2r + 3s & (1) \\ x_2 = 2 + 5r - s & (2) \\ x_3 = 4 - r + s & (3) \end{matrix}\right\}$$

Rechenweg: Wir berechnen r und s aus (2) und (3) und setzen die Ergebnisse dann in (1) ein. So bleiben nur x_1, x_2, x_3 übrig:

(2) + (3): $x_2 + x_3 = 6 + 4r \Rightarrow 4r = x_2 + x_3 - 6 \Rightarrow r = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{2}$

Eingesetzt in (2): $x_2 = 2 + 5\left(\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{2}\right) - s$

ergibt $x_2 = 2 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_3 - \frac{15}{2} - s$

$s = -\frac{11}{2} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_3$

r und s in (1) eingesetzt:

$$x_1 = -1 + 2\left(\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{2}\right) + 3\left(-\frac{11}{2} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_3\right)$$

$$x_1 = -1 + \frac{2}{4}x_2 + \frac{2}{4}x_3 - 3 - \frac{33}{2} + \frac{3}{4}x_2 + \frac{15}{4}x_3$$

$$x_1 = -\frac{41}{2} + \frac{5}{4}x_2 + \frac{17}{4}x_3 \quad |\cdot 4$$

$$4x_1 = -82 + 5x_2 + 17x_3$$

$$4x_1 - 5x_2 - 17x_3 = -82$$

Dies ist die gesuchte „Koordinatengleichung“ unserer Ebene E.

Beispiel 118:

Gegeben Sei eine Ebene durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Koordinatengleichung auf.

Lösung:

Umwandlung in Koordinatenform:

$$\left\{\begin{matrix} x_1 = 7 + 3r - s & (1) \\ x_2 = 3 + 2r & (2) \\ x_3 = -2 + r + 2s & (3) \end{matrix}\right\}$$

Aus (2) folgt sofort: $2r = x_2 - 3 \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}$

Setzen wir dies in (1) ein, folgt:

$$x_1 = 7 + 3\left(\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}\right) - s \;\Rightarrow\; x_1 = 7 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{9}{2} - s \;\Rightarrow\; s = \tfrac{5}{2} - x_1 + \tfrac{3}{2}x_2$$

r und s in (3): $x_3 = -2 + \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{5}{2} - x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)$

$$x_3 = -2 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{3}{2} + 5 - 2x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 - \tfrac{7}{2}x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2} \qquad |\cdot 2$$

$$E: \quad 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3$$

Die Achsenabschnittsform

Die Koordinatengleichung einer Ebene hat gegenüber der Parameterform viele Vorteile. Einer soll hier gezeigt werden.

1. Lösung:

> ***Wissen**: Die Punkte auf den Koordinatenachsen habe zwei Koordinaten 0:*
> *Punkte auf der x_1 –Achse haben diese Koordinaten:* $P_1(x_1|0|0)$
> *Punkte auf der x_2 –Achse haben diese Koordinaten:* $P_2(0|x_2|0)$
> *Punkte auf der x_3 –Achse haben diese Koordinaten:* $P_3(0|0|x_3)$.

Schnittpunkt mit der x_1-Achse: Wir setzen $x_2 = x_3 = 0$ in E ein und erhalten:
$6x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow P_1(4|0|0)$

Schnittpunkt mit der x_2-Achse: Wir setzen $x_1 = x_3 = 0$ in E ein und erhalten:
$4x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow P_1(0|6|0)$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse: Wir setzen $x_1 = x_2 = 0$ in E ein und erhalten:
$3x_3 = 24 \Rightarrow x_3 = 8 \Rightarrow P_1(0|0|8)$.

2. Lösung: Wir dividieren die Ebenengleichung durch 24, so daß rechts 1 steht:

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24 \quad \Big| :24$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{8} = 1$$

Wenn wir jetzt die Nenner ansehen, dann entdecken wir dort genau die Koordinaten der Schnittstellen: Die x_1-Achse wird bei 4 geschnitten, die x_2-Achse bei 6, und die x_3-Achse bei 8.

Definition 77:

Die Achsenabschnittsform der Ebenengleichung:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \quad \Big| :c \qquad (\text{falls } c \neq 0)$$

$$\frac{a_1}{c}x_1 + \frac{a_2}{c}x_2 + \frac{a_3}{c}x_3 = 1$$

Oder weiter umgeformt: $\frac{x_1}{d_1} + \frac{x_2}{d_2} + \frac{x_3}{d_3} = 1$

Die Achsenabschnittspunkte sind dann

$$P_1\left(d_1 = \frac{c}{a_1}|0|0\right), \quad P_2\left(0|d_2 = \frac{c}{a_2}|0\right), \quad P_3\left(0|0|d_3 = \frac{c}{a_3}\right)$$

Beispiel 119:

Berechne die Schnittpunkte der Ebene E: 4x + 8z = 16 mit den Koordinatenachsen.

Lösung:

Lösung: Jetzt habe ich die Variablen einmal mit x, y und **z** bezeichnet.
Allerdings fehlt y, besser gesagt: der Koeffizient von y ist 0 !!!
Division durch 16 liefert die Achsenabschnittsform:

$$4x + 8z = 16 \quad |:16$$
$$\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1$$

Die Ebene E schneidet also die x-Achse in $P_1(4|0|0)$, die z-Achse in $P_3(0|0|2)$ und sie ist parallel zur y-Achse! (*Man sollte dies künftig gleich erkennen !)*

Ein Normalenvektor

Ohne Angabe von Beweisen (das kommt viel später), soll noch eine wichtige Eigenschaft der Koordinatengleichung der Ebene angegeben werden.

Beispiel: Der Ebene E: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$ entnehmen wir links die drei Koeffizienten und bilden einen Vektor daraus: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Er hat die unglaubliche Eigenschaft, daß er senkrecht zur Ebene steht. Damit heißt er Normalenvektor zu E. Übrigens sind dann auch alle seine Vielfachen Normalenvektoren.

Mit diesen Normalenvektoren können wir später ganz viel berechnen.

Hier wollen wir damit nur eine kleine Anwendung starten:
Wir können jetzt spontan von jedem Punkt aus die ***Lotgerade zu E*** aufstellen.

Beispiel 120:

Welche Gleichung hat das Lot von $C(3|-1|2)$ auf die Ebene
E: x + 2y - z = 4 ?

Lösung:

Wir verwenden den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ von E als Richtungsvektor der Lotgeraden L:

$$L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schneiden von Geraden und Ebenen

*Wir können nun eine Ebene sowohl in Parameterform, wie auch in Normalenform verwenden und diese Ebene mit einer Geraden schneiden. Dabei kann dreierlei passieren: Es kann genau einen Schnittpunkt geben, die Gerade kann echt parallel zur Ebene verlaufen, dann ist die Schnittmenge leer, oder die Gerade kann ganz in der Ebene liegen (was ein Sonderfall zur Parallelität ist). Wir werden alle Fälle mit beiden Ebenengleichungen durchrechnen. Dazu verwenden wir **eine** Ebene in beiden Gleichungsformen:*

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad \text{und}\quad E:\ 3x_1-5x_2+x_3=4$$

Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt

Die Gerade g habe diese Gleichung:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren

E in Parameterform:	***E in Koordinatenform:***
$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$	$E:\ 3x_1-5x_2+x_3=4$
„Gleichsetzen von E und g":	***„Einsetzen von g in E":***
$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$	$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$
$\left\lbrace\begin{array}{ll} r+2s+t=4 & (1)\\ r+s-2t=0 & (2)\\ 2r-s-5t=-4 & (3)\end{array}\right\rbrace$	$3(5-t)-5(2t)+(-3+5t)=4$ $15-2t-10t-3+5t=4$ 12 - 8t = 4 t = 1
Nun kann man dieses System durch Elimination lösen (Gauß-Verfahren) oder mit Determinanten wie hier: Nennerdeterminante: $D=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&-2\\2&-1&-5\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\1&1\\2&-1\end{matrix}=...=-8$	Eingesetzt in die Geradengleichung: $\vec{x}_S=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow S(4\vert 2\vert 2)$
Weil diese Determinante ungleich 0 ist, gibt es eine eindeutige Lösung. **Es genügt jetzt die Berechnung der Variablen t, um den Schnittpunkt aus der Geradengleichung errechnen zu können !!!** $D_t=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&1&0\\2&-1&-4\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\1&1\\2&-1\end{matrix}=...=-8$ Nach der Cramerschen Regel folgt: $t=\frac{D_t}{D}=1$ In g: $\vec{x}_S=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow S(4\vert 2\vert 2)$	Wenn die Koordinatengleichung einer Ebene vorliegt, gelingt damit die Schnittrechnung am schnellsten

Gerade und Ebene sind echt parallel

Die Gerade g habe diese Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E in Parameterform:

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

„Gleichsetzen von E und g":

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} r + 2s - 3t = 4 & (1) \\ r + s - 2t = 0 & (2) \\ 2r - s - t = -4 & (3) \end{Bmatrix}$$

Nun kann man dieses System durch Elimination lösen (Gauß-Verfahren) oder mit Determinanten wie hier:
Nennerdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = \ldots = 0$$

Weil diese Determinante **gleich 0** ist, gibt es keine eindeutige Lösung. **Die in der Determinante stehenden Vektoren sind nun komplanar, d.h. E und g sind parallel.**

Nun muß nur geklärt werden, ob g echt parallel zu E ist, oder ob g in E liegt. Dazu überprüfen wir, ob der Aufpunkt $B(5|0|-3)$ in E liegt.

Dies kann man umständlich mit der Punktprobe machen, oder man prüft nach, ob $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overline{AB}$ komplanar sind:

$$D = \left| \vec{u} \ \ \vec{v} \ \ \overline{AB} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -8$$

Weil diese Determinante ungleich 0 ist, sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overline{AB}$ nicht komplanar, also liegt g nicht in E.

E in Koordinatenform:

$$E: \ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 4$$

„Einsetzen von g in E":

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3(5+3t) - 5(2t) + (-3+t) = 4$$
$$15 + 9t - 10t - 3 + t = 4$$
$$12 = 4$$

Dieser Widerspruch besagt, daß es keinen Wert für t gibt, d.h. g und E besitzen keine gemeinsamen Punkte.

Mit anderen Worten:

g ist echt parallel zu E !

Die Gerade ist Teil der Ebene

Die Gerade g habe diese Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E in Parameterform:

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

„Gleichsetzen von E und g":

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} r + 2s - 3t = 1 & (1) \\ r + s - 2t = -1 & (2) \\ 2r - s - t = 2 & (3) \end{Bmatrix}$$

Nun kann man dieses System durch Elimination lösen (Gauß-Verfahren) oder mit Determinanten wie hier:
Nennerdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = \ldots = 0$$

Weil diese Determinante ungleich 0 ist, gibt es keine eindeutige Lösung. **Die in der Determinante stehenden Vektoren sind nun komplanar, d.h. E und g sind parallel.**

Nun muß nur geklärt werden, ob g echt parallel zu E ist, oder ob g in E liegt. Dazu überprüfen wir, ob der Aufpunkt $B(2|1|3)$ in E liegt.

Dies kann man umständlich mit der Punktprobe machen, oder man prüft nach, ob $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overline{AB}$ komplanar sind:

$$D = \left| \vec{u} \ \ \vec{v} \ \ \overline{AB} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 0$$

Weil diese Determinante 0 ist, sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overline{AB}$ komplanar, d.h. B und somit g liegen in E.

E in Koordinatenform:

$$E: \ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 4$$

„Einsetzen von g in E":

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3(2+3t) - 5(1+2t) + (3+t) = 4$$
$$6 + 9t - 5 - 10t + 3 + t = 4$$
$$4 = 4$$

Diese Gleichung ist allgemeingültig, also für jedes $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Dies besagt, daß jeder Punkt von g auch in E liegt.

Mit anderen Worten:

g ist Teilmenge von E !

Es gibt eine reduzierte Fragestellung, in der es nicht darum geht, einen vorhandenen Schnittpunkt zu berechnen, sondern lediglich zu überprüfen, welche Lage eine Gerade und eine Ebene zueinander haben.

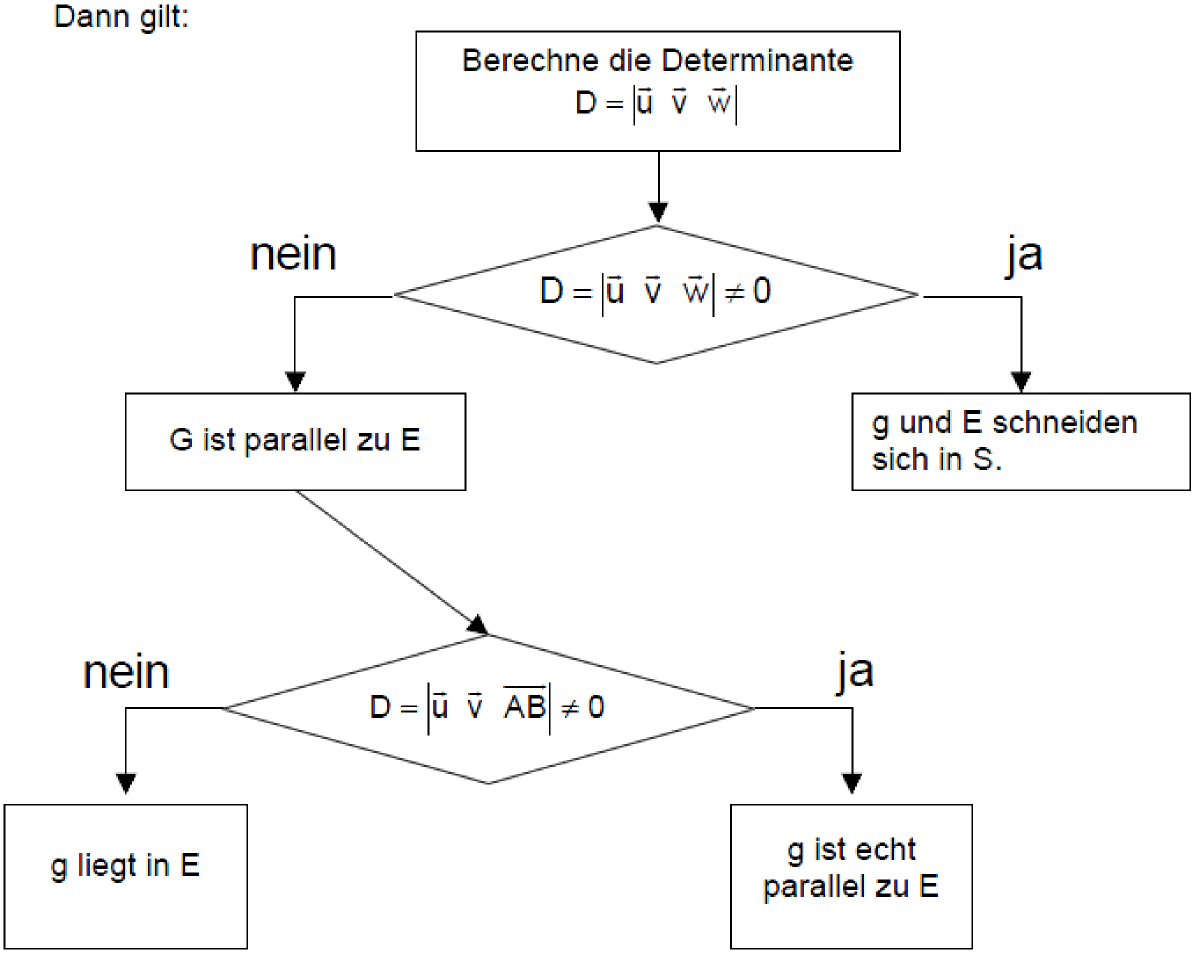
Liegt die Ebene in der Koordinatenform vor, dann können wir *derzeit* nichts anderes tun, als so zu rechnen, wie es zuvor dargestellt worden ist.

Liegt aber die Ebene in der Parameterform vor, dann können wir vor allem mit Determinanten schnelle Entscheidungen treffen. Hier die Übersicht dazu:

Dazu müssen wir die Bezeichnungen festlegen. Es sei

$$E: \ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{und} \quad g: \ \vec{x} = \vec{b} + t\vec{w}$$

Dann gilt:



Lage von zwei Ebenen

Beide Ebenen in Koordinatenform (mit Schnittgerade)

Eliminationsverfahren, wenn beide in Koordinatenform vorliegen.

Beispiel 121:

Gegeben sind $E_1: \; 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 4$ und $E_2: \; 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 16$.

Die Schnittgerade besteht aus allen Punkten, die in beiden Ebenen liegen. Sie ist also die Lösungsmenge des aus beiden Gleichungen bestehenden Systems.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= 4 \qquad (1) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 16 \qquad (2) \end{aligned}$$

Durch Subtraktikon kann man x_3 eliminieren:

$(1) - (2)$: $\quad x_1 - 8x_2 = -12$

Nun haben wir eine Gleichung mit 2 Unbekannten, und somit können wir für eine dieser beiden eine beliebige Zahl frei wählen:

Wähle $\quad x_2 = r, \; r \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x_1 = 8r - 12$

In (1): $\quad x_3 = 4 - 3x_1 + 5x_2 = 4 - 3(8r - 12) + 5r = 40 - 19r$

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8r - 12 \\ r \\ 40 - 19r \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Und dies ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Man verwendet auch gerne die mengentheoretische Schreibweise: $E_1 \cap E_2 = g$.
(das heißt: g ist die Schnittmenge der beiden Ebenen E_1 und E_2).

> **Ohne Beweis sei angegeben, wie man eine Probe machen kann:**
> Setzt man den Aufpunkt der Geraden *in die linke Seite* der beiden Ebenengleichungen ein, muß sich die rechte Seite ergeben. Setzt man aber die Koordinaten des Richtungsvektors ein, muß immer 0 heraus kommen!

Beide Ebenen in Koordinatenform (echt parallele Ebenen)

Beispiel 122:

Gegeben sind $E_1: \ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 4$ und $E_2: \ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 12$

Normalenvektor von E_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von E_2: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Weil $\vec{n}_2$ ein Vielfaches von $\vec{n}_1$ ist, sind diese Richtungsvektoren kollinear. Die Ebenen haben also gemeinsame Lotgeraden, also sind sie parallel.

Nun könnte der Sonderfall eintreten, daß sie sogar identisch sind. Dazu betrachten wir das aus beiden Ebenengleichungen gebildete Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= 4 \qquad (1) \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 12 \qquad (2) \end{aligned}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie man weiter machen kann.

1. Man multipliziert die zweite Gleichung mit (-1), so daß die linken Seiten übereinstimmen:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= 4 \qquad (3) \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -12 \qquad (4) \end{aligned}$$

   Dann aber stimmen sie rechts nicht mehr überein, also sind es verschiedene Ebenen !

2. Man addiert: (1) + (2) ergibt 0 = 16.
   Dieser Widerspruch zeigt, daß das system keine Lösungen hat.
   Mit anderen Worten:
   Weil beide Ebenen keine gemeinsamen Punkte haben sind sie parallel.

Beide Ebenen in Koordinatenform (identische Ebenen)

Beispiel 123:

Gegeben sind $E_1: \ 6x + 4y - 2z = 6$ und $E_2: \ 9x + 6y - 3z = 9$

Nun muß man erkennen, daß die zweite Gleichung das $\frac{3}{2}$ – fache der ersten ist.
Daher liegt gar keine neue Bedingung vor, also sind die Lösungsmengen, also die Punkte identisch !

Oder: Man dividiert die erste Gleichung durch 2 und die zweite durch 3. Dann liegt dieselbe Gleichung vor. Also sind die Ebenen identisch.

Beide Ebenen in verschiedenen Formen (mit Schnittgerade)

Einsetzungsverfahren wenn beide in unterschiedlichen Formen vorliegen.

Beispiel 124:

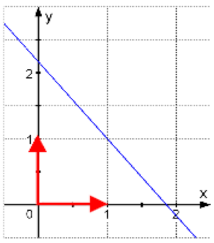
Gegeben sei $E_1:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $E_2:\quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 16$

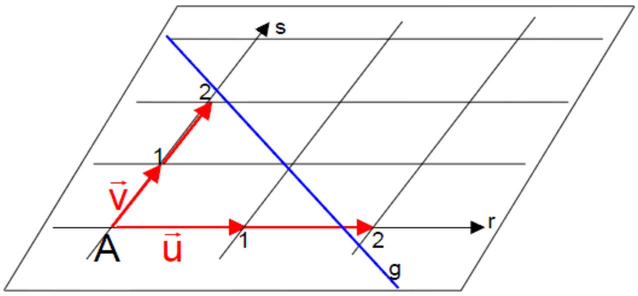
Nun sollte man sich daran erinnern, daß die Parametergleichung eine Berechnungs-Vorschrift für die Ortsvektoren der Ebenenpunkte ist. Und ausführlich geschrieben sind dies ja sogar drei Gleichungen für die einzelnen Koordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 1 + r + 2s & (1) \\ x_2 = \quad r + \quad s & (2) \\ x_3 = 1 + 2r - s & (3) \end{Bmatrix}$$

Jede dieser Gleichungen setzt man nun in die Koordinatengleichung ein:

$$2(1 + r + 2s) + 3(r + s) + (1 + 2r - s) = 16$$
$$2 + 2r + 4s + 3r + 3s + 1 + 2r - s = 16$$
$$7r + 6s = 13$$
$$s = -\tfrac{7}{6}r + \tfrac{13}{6} \quad (*)$$





Die linke Abbildung zeigt die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{7}{6}x + \frac{13}{6}$ im üblichen ebenen Koordinatensystem. Die rechte Abbildung zeigt eine Ebene mit einem Aufpunkt und den zwei Basisvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die damit ebenen-intern das r-s-Koordinatensystem erzeugen. Und in dieses System wurde die Gerade mit der Gleichung $s = -\frac{7}{6}r + \frac{13}{6}$ eingezeichnet. Bezogen auf unsere Aufgabe heißt dies: Die gezeichnete Ebene könnte E_1 sein, und die eingezeichnete Gerade ist dann die Schnittgerade.

Setzen wir ihre Gleichung (*) in E_1 ein, erhalten wir die übliche Parameterform der Schnittgeraden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \left(-\tfrac{7}{6}r + \tfrac{13}{6}\right)\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1+\frac{13}{3}\\ \frac{13}{6}\\ 1-\frac{13}{6}\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1-\frac{14}{6}\\ 1-\frac{7}{6}\\ 2+\frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\ \frac{13}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\frac{8}{6}\\ -\frac{1}{6}\\ \frac{19}{6}\end{pmatrix}$$

Da sich an der Gerade nichts ändert, wenn man ihren Richtungsvektor durch ein Vielfaches ersetzt, tun wir das und wählen als neuen Richtungsvektor das (-6)fache:

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\ \frac{13}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}8\\ 1\\ -19\end{pmatrix}$$

Ich habe nun eine kleine Überraschung parat: Dies waren genau die beiden Ebenen aus (1a), nur eben E_1 in Parameterform. Daher mußte sich dieselbe Schnittgerade ergeben. Daß deren Gleichung anders aussieht, ist normal. Wir haben eben einen anderen Aufpunkt für die Gerade.

Beide Ebenen in verschiedenen Formen (echt parallele Ebenen)

Beispiel 125:

Gegeben: $E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $E_2:\ -3x_1+5x_2-x_3=12$

Einsetzungsverfahren:
$$\begin{aligned}-3(1+r+2s)+5(r+s)-(1+2r-s)&=12\\-3-3r-6s+5r+5s-1-2r+s&=12\\-4&=12\end{aligned}$$

Diese Widerspruch besagt, daß die beiden Ebenen keine gemeinsamen Punkte haben, also sind sie echt parallel.

Beide Ebenen in verschiedenen Formen (identische Ebenen)

Beispiel 126:

Gegeben sind $E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $E_2:\ 3x_1-5x_2+x_3=4$

Einsetzungsverfahren:
$$\begin{aligned}3(1+r+2s)-5(r+s)+(1+2r-s)&=4\\3+3r+6s-5r-5s+1+2r-s&=4\\4&=4\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für jedes r und s erfüllt, d.h. alle Punkte aus E_1 erfüllen auch die Gleichung von E_2 . Somit sind E_1 und E_2 identisch !

Beide Ebenen in Parameterform (mit Schnittgerade)

Beispiel 127:

$$E_1:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix};\quad E_2:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Da die gemeinsamen Punkte auf beiden Ebenen liegen, gilt für sie auch jede der beiden Gleichungen. Daher darf man für sie gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Dies sind nun 3 Gleichungen mit 4 Variablen:

$$\left\{\begin{array}{ll} 4-2s=-2+2b & (1)\\ -r\ =3-b & (2)\\ -3+3s=-a+3b & (3)\end{array}\right\}$$

Nun muß man sich ganz über Ziel und Methode klar werden. Wir brauchen für eine der beiden Ebenen eine ebenen-interne Geradengleichung, also etwa eine Gleichung mit r und s oder eine mit a und b. Damit können wir dann aus der entsprechenden Ebene die vektorielle Geradengleichung berechnen.
Zur Methodik. Wir haben eine Unbekannte mehr als Gleichungen. Also dürfen wir eine Variable frei wählen.

Da b in allen drei Gleichungen vorkommt, wähle ich $b = t$.

Aus (1) folgt dann $4-2s=-2+2t \Rightarrow 2s=6-2t \Rightarrow s=3-t \quad (4)$
Und aus (2) folgt: $-r=3-t \Rightarrow r=t-3 \quad (5)$

Wir addieren $(4)+(5)$: $s+r=0 \Rightarrow s=-r$
Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden in E_1 !

Nun ersetzen wir s in E_1 und erhalten für diese Gerade diese Vektorgleichung:

$$g:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}-r\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Man ahnt, daß diese Rechnung bei komplizierteren Vektoren in E_1 und E_2 deutlich unübersichtlicher werden kann, wie das nächste Beispiel zeigt.

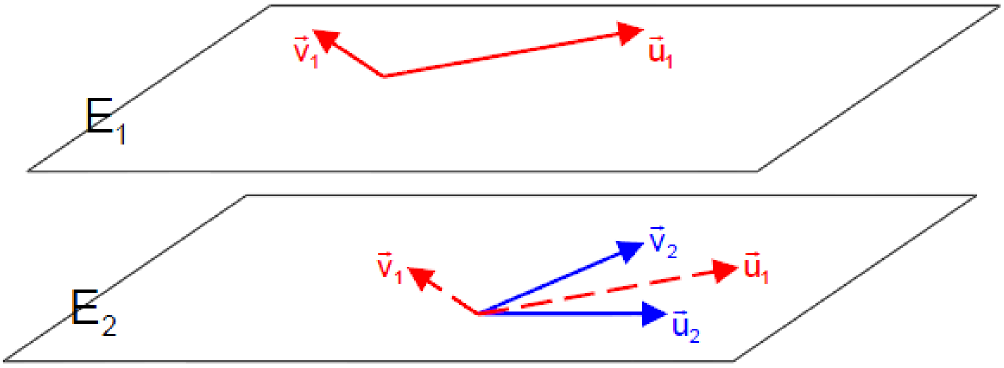
Bemerkung: Wir haben Gleichung (3) nicht mehr verwendet, weil sie das Ergebnis für a gebracht hätte, was aber nicht mehr benötigt worden ist.

Beispiel 128:

Gegeben sind die Ebenen $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir wollen nun zunächst die modifizierte Aufgabe lösen: Überprüfe, ob sich die Ebenen schneiden.

Jetzt ist also nur nach der Lage gefragt.



Diese Abbildung soll zwei parallele Ebenen mit ihren Richtungsvektoren zeigen. Wenn Sie parallel sind, dann gibt es in der jeweils anderen Ebene auch Pfeile der anderen Richtungsvektoren. So ist unten in E_2 gezeigt, daß man dort auch die Pfeile der Richtungsvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{v}_1$ von E_1 findet.

Umgekehrt: Wenn diese vier Vektoren kollinear sind, dann sind die Ebenen parallel.

Dies ergibt eine gute Möglichkeit, mit Determinanten die Lage zweier Ebenen zu kontrollieren. Wir brauchen aber leider 2 Determinanten für 4 Vektoren:

> Wenn $\left|\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{u}_2\right| = 0$ ist und wenn auch noch $\left|\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\right| = 0$ ist, dann sind E_1 und E_2 **parallel** (und vielleicht sogar identisch).
>
> Ist aber schon eine dieser beiden Determinanten ungleich Null, dann sind diese vier Vektoren nicht komplanar und die Ebenen besitzen eine **Schnittgerade**.

Sehen wir uns also unser Beispiel an:

$$\left|\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{u}_2\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right. = -1-2-4-2 \neq 0$$

Also sind wir sicher, daß sich diese Ebenen schneiden !

Schnittgleichung: $g = E_1 \cap E_2$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Dies sind nun 3 Gleichungen mit 4 Variablen:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 + r - s = 2 + 2a & (1) \\ 2 + s = a + b & (2) \\ 1 + 2r + 2s = -1 - a + b & (3) \end{array}\right\}$$

Nun muß man sich wieder über das weitere Vorgehen klar werden. Wir brauchen für eine der beiden Ebenen eine ebenen-interne Geradengleichung, also etwa eine Gleichung mit r und s oder eine mit a und b. Damit können wir dann aus der entsprechenden Ebene die vektorielle Geradengleichung berechnen.
Da in (1) bereits b fehlt, eliminieren wir b auch noch aus (2) und (3) durch Subtraktion. Dann haben wir 2 Gleichungen, die nur noch r, s und a enthalten. Durch Elimination von a erhalten wir die r-s-Geradengleichung, die wir dann in E_1 einsetzen.

Also nun: (2) **–** (3): $1 - 2r - s = 1 + 2a \quad (4)$

Hier also das System mir r, s und a:

$$\begin{array}{ll} 1 + r - s = 2 + 2a & (1) \\ 1 - 2r - s = 1 + 2a & (4) \end{array}$$

Jetzt spielt der Zufall eine wichtige Rolle: Durch (1) **–** (4) eliminieren wir a und erhalten die r-s-Geradengleichung:

$$3r = 1 \Rightarrow r = \tfrac{1}{3}$$

Dabei ist nun aber (und dies war der Zufall) auch s weggefallen.

Im geläufigen x-y-Koordinatensystem hätten wir jetzt die Gerade mit der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{3}$$

Und wüßten dann, daß diese Gerade parallel zur y-Achse ist.

Diese Analogie-Vorstellung brauchen wir jetzt um zu wissen, daß $r = \frac{1}{3}$ in der Ebene E_1 ebenso eine Gerade ist, die dort aber parallel zur s-Achse ist, also **parallel zum Richtungsvektor** $\vec{v}_1$. Wir setzten dies nun in E_1 ein und erhalten die vektorielle Form der Geradengleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\2\\\frac{5}{3}\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Und wie vorhergesagt ist $\vec{v}_1$ auch der Richtungsvektor der Schnittgeraden !

Beide Ebenen in Parameterform (echt parallel)

Beispiel 129:

Gegeben sind $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$

Lösung:

Untersuche die Lage der Ebenen E_1 und E_2 .

Es wird dringend davor abgeraten, den Versuch zu unternehmen, „die Ebenen gleich zu setzen“ (wie Schüler gerne unkorrekt formulieren). Der Versuch, eine Schnittgerade zu berechnen, war im Fall 1b, in dem beide Geraden in Koordinatenform vorlagen, und auch im Fall 2b, in dem die Ebenengleichungen verschiedenartig waren, ein guter Weg. Wir erhielten damals einen Widerspruch und folgerten daraus, daß es keine gemeinsamen Punkte gibt.

Wenn wir hier gleich setzen, erhalten wir 3 Gleichungen mit den 4 Parametern r, s, a und b. Dies ist unübersichtlich und birgt Gefahren. Wer die Determinantenrechnung beherrscht und die Überlegung von Seite 8 im Kopf hat, der kommt schnell zu einem Ergebnis. Sehen wir uns diesen Weg ausführlich an:

1. Determinante: Wir überprüfen, ob der Richtungsvektor $\vec{u}_2$ von E_2 zu den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{v}_1$ von E_1 komplanar ist:

$$D_1 = \left|\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{u}_2\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right. = -2+3-1=0$$

Dies ist offenbar der Fall. Die Ebenen könnten also parallel sein.

2. Determinante: Wir überprüfen, ob der Richtungsvektor $\vec{v}_2$ von E_2 zu den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{v}_1$ von E_1 komplanar ist:

$$D_2 = \left|\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right. = 5-6+4-3=0$$

Dies ist auch der Fall.

Nun ist sicher, daß (wie in der Abbildung auf Seite 8) alle vier Richtungsvektoren komplanar sind. Ergebnis: E_1 und E_2 sind parallel.

Nun ist es denkbar, daß dann die Ebenen sogar identisch sind. Dazu muß man nun überprüfen, ob der Aufpunkt B von E_2 in der Ebene E_1 liegt. Dazu prüfen wir nach, ob der Vektor $\overrightarrow{AB}$ auch noch zu $\vec{u}_1$ und $\vec{v}_1$ von E_1 komplanar ist:

$$D_3 = \left|\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right. = 1-2+4-1=2\neq 0 \quad \text{Also gilt } E_1 \neq E_2 .$$

Beide Ebenen in Parameterform (und sogar identisch)

Beispiel 130:

Gegeben sind $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$

Lösung:

Untersuche die Lage der Ebenen E_1 und E_2 .

Jetzt können wir es kurz machen. Dieses Beispiel unterscheidet sich gegenüber dem von Seite 10 nur durch eine einzige Zahl im Stützvektor der Ebene E_2 . Die hat also einen neuen Aufpunkt bekommen.

Weil die Richtungsvektoren unverändert geblieben sind, haben wir also folgende Ergebnisse:

$$D_1 = \left|\vec{u}_1 \;\; \vec{v}_1 \;\; \vec{u}_2\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right. = -2+3-1=0$$

$$D_2 = \left|\vec{u}_1 \;\; \vec{v}_1 \;\; \vec{v}_2\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right. = 5-6+4-3=0$$

Also liegen parallele Ebenen vor.

$$D_3 = \left|\vec{u}_1 \;\; \vec{v}_1 \;\; \overline{AB}\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right. = 1-2+2-1=0$$

Also liegt B in E_1 und die Ebenen sind sogar identisch !

Übersicht

1. Fall:

Sind beide Ebenen in Koordinatenform gegeben, berechnet man den allgemeinen Lösungsvektor des Gleichungssystems.

(1) Wenn er existiert, stellt er die Gleichung der Schnittgeraden dar.
(2) Wenn sich ein Widerspruch ergibt, dann sind die Ebenen echt parallel.
(3) Wenn sich eine allgemeingültige Aussage ergibt, folgt $E_1 = E_2$.

2. Fall:

Eine Ebene ist in Koordinatenform, die andere in Parameterform gegeben. Dann setzt man die drei Koordinatengleichungen aus der Parameterform in die Koordinatengleichung der ersten Ebene ein.

(1) Wenn sich eine r-s-Geradengleichung ergibt, setzt man diese in die Parameter-Ebenengleichung ein und erhält die vektorielle Geraden Gleichung.
(2) Wenn sich ein Widerspruch ergibt, dann sind die Ebenen echt parallel.
(3) Wenn sich eine allgemeingültige Aussage ergibt, folgt $E_1 = E_2$.

3. Fall:

Sind beide Ebenen in Parameterform gegeben, empfiehlt es sich, eine davon in Parameterform umzurechnen, wenn die Schnittgerade berechnet werden soll. Soll lediglich die Lage der beiden Ebenen relativ zueinander ermittelt werden, dann kann man mit drei Determinanten folgende Aussagen treffen:

Berechne $D_1 = |\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{u}_2|$

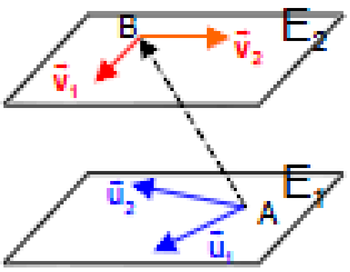
Ist $D_1 = 0$, berechne $D_2 = |\vec{u}_1\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{v}_2|$

Ist $D_1 \neq 0$ oder $D_2 \neq 0$ dann sind die Vektoren $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2$ oder $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ nicht komplanar, also sind die Ebenen nicht parallel, es existiert eine ***Schnittgerade***!

Ist auch noch $D_2 = 0$, dann gilt $E_1 \parallel E_2$

Berechne $E_1 \parallel E_2$

Ist auch noch $D_3 = 0$, dann gilt $E_1 = E_2$



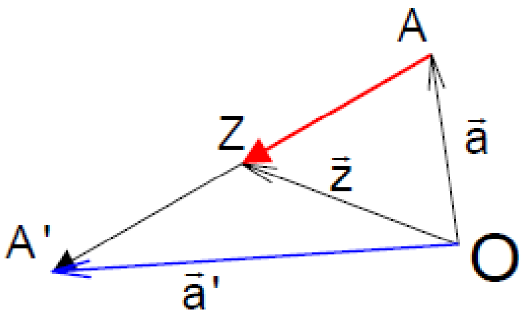
Spiegelungen

Spiegelungen an einem Punkt

Beispiel 131:

Gegeben ist das Zentrum $Z(4|-2|3)$ und ein Punkt $A(1|4|-7)$.
Das Spiegelbild von A an Z sei A'. Berechne die Koordinaten von A'.

Lösung:



In der Vektorrechnung werden keine Punkte sondern deren Ortsvektoren (d.h. die bei O beginnenden Pfeile) berechnet. Das muß man beachten !

Gesucht ist also $\overline{OA'} = \vec{a}\,'$ und gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{z}$.
Da eine Punktspiegelung den Abstand zum Spiegelungszentrum Z beibehält, gilt ganz einfach diese Gleichung:

$$\overline{OA'} = \overline{OA} + 2\cdot\overline{AZ} \quad \text{d.h.} \quad \vec{a}\,' = \vec{a} + 2\cdot(\vec{z} - \vec{a})$$

Durch Umformung folgt daraus:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + 2\vec{z} - 2\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a}\,' = 2\vec{z} - \vec{a}}$$

Mit Zahlen:

$$\vec{a}\,' = 2\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-6\\13\end{pmatrix} \Rightarrow A'(7|-6|13)$$

Spiegelung einer Geraden g an Z

Beispiel 132:

Gegeben ist das Zentrum $Z(4|-2|3)$ und eine Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$.
Das Spiegelbild von g an Z sei g'. Berechne die Gleichung von g'.

Lösung:

Diese Aufgabe ist unverändert das Beispiel 1. Man sollte hier folgendes wissen: Die Gleichung einer Geraden ist im Grund nur eine Berechnungsvorschrift für die Ortsvektoren der Punkte dieser Geraden. Also verwenden wir jetzt einfach $\vec{x}$ für den Ortsvektor, der oben $\vec{a}$ hieß !

Dann folgt die Rechnung von oben und das Ergebnis:

$$\vec{x}\,' = 2\vec{z} - \vec{x}$$

Wir setzen nun für $\vec{x}$ das ein, was die Geradengleichung angibt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}' = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g':\ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: **Die Bildgerade ist parallel zum Urbild!**
Dies kann man ganz allgemein nachrechnen, indem man ohne Zahlen arbeitet:

$g:\ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ eingesetzt in die Spiegelungsgleichung $\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x}$ ergibt

$$\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x} = 2\vec{z} - (\vec{a} + r\vec{u}) = (2\vec{z} - \vec{a}) - r\vec{u} = \vec{a}' + r \cdot (-\vec{u})$$

Wie man sieht, hat die Gerade den Richtungsvektor $-\vec{u}$, was die Parallelität ergibt.

Spiegelung einer Ebene E an Z

Beispiel 133:

a) Gegeben sei das Zentrum $Z(4|-2|3)$ und eine Ebene E **in Parameterform**:
etwa $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$

Die Punktspiegelung wird durch die Gleichung $\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x}$ durchgeführt. Setzt man hier den Ortsvektor eines beliebigen Ebenenpunktes ein, folgt für dessen Bildpunkt:

$$\vec{x}' = 2\vec{z} - \left(\vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}\right) = \underbrace{\left(2\vec{z} - \vec{a}\right)}_{\vec{a}'} + r \cdot \left(-\vec{u}\right) + s \cdot \left(-\vec{v}\right)$$

Ergebnis: *Das Bild einer Ebene ist bei der Punktspiegelung eine zum Urbild parallele Ebene.*

Mit Zahlen:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Bildebene: $$E': \quad \vec{x} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix}$$

b) Ist die Ebene **in Koordinatenform** gegeben, greift man zu folgendem Trick:

Da bekannt ist, daß die Bildebene E' zu E parallel ist, haben beide Ebenen dieselben Normalenvektoren. Also sieht die linke Seite der Ebene E' wie die von E aus:

E: $2x_1 + x_2 - 5x_3 = 18$ also E': $2x_1 + x_2 - 5x_3 = k$.

Die rechte Seite k ist noch zu bestimmen. Dazu wählen wir einen möglichst einfachen Punkt auf E, etwa für $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, ergibt $x_2 = 18$, also $A(0|18|0)$ und berechnen mit der Spiegelungsgleichung $\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x}$ seinen Bildpunkt:

$$\vec{a}' = 2\vec{z} - \vec{a} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -22 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(8|-22|6)$$

Nun wird A eingesetzt und man erhält $k = 2 \cdot 8 - 22 - 5 \cdot 6 = 16 - 22 - 30 = -36$

Ergebnis: E': $2x_1 + x_2 - 5x_3 = -36$.

Lotebenen zu Geraden

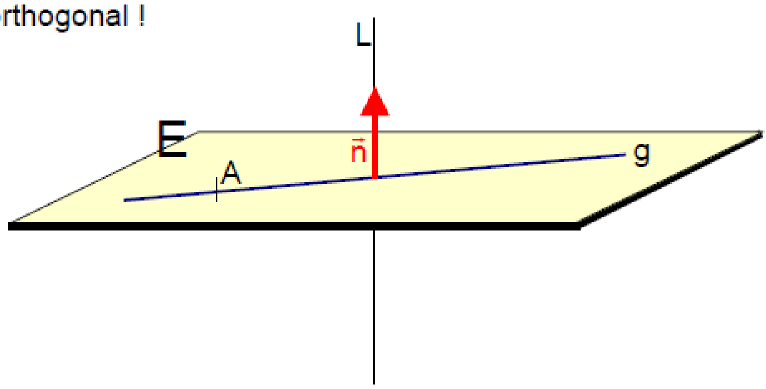
Vorbemerkungen:

1. Wenn eine Ebene durch ihre Koordinatengleichung gegeben ist, etwa $E: \ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 20$, dann geben die Koeffizienten 2, - 5 und 4 die Koordinaten eines Vektors an, der auf der Geraden senkrecht steht, man sagt, zu ihr orthogonal ist, und man nennt ihn einen **Normalenvektor**. Alle Vielfachen von ihm sind natürlich auch Normalenvektoren.

2. Nimmt man nun einen Punkt von E, etwa $F(5|2|5)$ (ich habe $x_2 = 2$ und $x_3 = 5$ vorgegeben und dann x_1 berechnet) dann kann man die Lotgerade in F so aufstellen:

$$L: \ \vec{x} = \vec{f} + r \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lot L und Ebene E sind jetzt orthogonal. Damit ist auch L zu jeder Geraden in E durch F orthogonal !



3. Nun gehen wir von deiner Geraden L aus: $L: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Diese Gerade betrachten wir Lotgerade einer noch nicht bekannten Ebene. Von dieser Ebene kennen wir jedoch einen Normalenvektor, nämlich den Richtungsvektor von E. Daher kennen wir auch die Linke Seite der Koordinatengleichung der Ebene:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = k$$

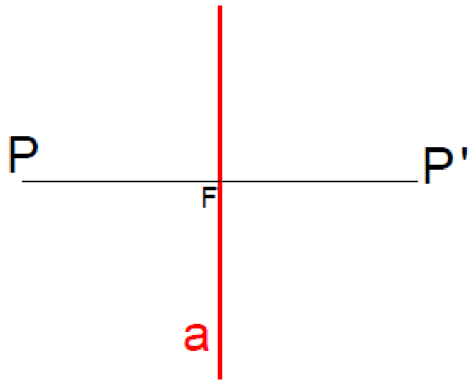
Die rechte Seite der Ebenengleichung erhält man, wenn man einen Punkt der Ebene kennt, etwa $A(8|-2|5)$. Setzen wir seine Koordinaten in die Linke Seite der Ebenengleichung ein, folgt $k = 8 - 4 - 10 = -6$
Somit hat diese Ebene die Gleichung $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6$

Von L aus gesehen nennt man die sogenannte Ebene auch ***LOT-EBENE*** zu L,

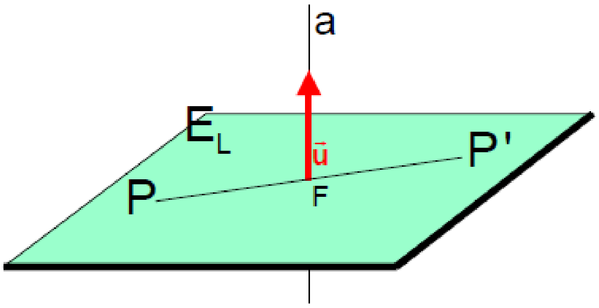
Spiegelungen an einer Geraden

Spiegelung eines Punktes an einer Geraden im Raum

Wenn man von einer Spiegelung spricht meint man in der Regel eine Spiegelung senkrecht zur Geraden (sonst würde man es Schrägspiegelung nennen).



Eine solche Geradenspiegelung ist in der Zeichenebene schnell konstruiert. Man fällt Das Lot von P auf die Gerade, das ergibt den Lotfußpunkt F, dann verdoppelt man den Abstand von P nach F und erhält den Bildpunkt P'.
Doch wie geht dies im Raum ? Wie findet man von P aus die Richtung senkrecht zu einer Geraden g ?
Dieses Problem wird noch oft auftauchen.
Die Lösung ist die sogenannte Lot-Ebene



Wir verwenden den Richtungsvektor der Spiegelachse a als Normalenvektor einer Ebene E_L durch P .
Schneiden wir nun a mit E_L, erhalten wir den Lotfußpunkt F, mit dem wir nun die Spiegelungsgleichung aufstellen können.

Beispiel 134:

Gegeben: a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P(4|2|6)$. Berechne P'.

<u>Lösung:</u> Lotebene E_L zu a durch P: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = k$.

P wird eingesetzt: $k = 8 - 4 + 6 = 10$

Die Lotebene hat somit die Gleichung: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 10$.

Schnitt: $L \cap a = \{F\}$:

$$2(1+2r) - 2(-2r) + (-1+r) = 10$$
$$2 + 4r + 4r - 1 + r = 10$$
$$9r = 9 \quad \text{also} \quad r = 1$$

Setzt man dies in die Gleichung von a ein, folgt $F(3|-2|0)$

Nun kommt die Spiegelungsrechnung:

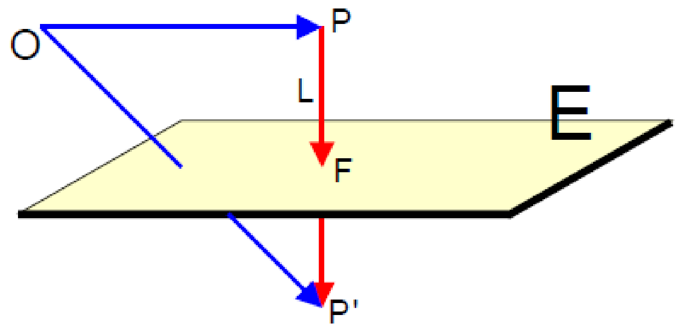
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} \Leftrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + 2(\vec{f} - \vec{x}) = 2\vec{f} - \vec{x}$$

d.h. $\vec{x}' = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(2|-6|-6)4$

Spiegelungen an einer Ebene

Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Beispiel 135:



Wenn die Ebene durch ihre Koordinatengleichung gegeben ist, kennen wir ihre Normalenvektoren. Einen davon verwenden wir als Richtungsvektor für das Lot von P auf E. Schneiden wir Lot und Ebene, erhalten wir den Lotfußpunkt F. Und dann hat man in gewohnter Art schnell den Bildpunkt.

Gegeben ist die Ebene E durch $2x + y - 3z = 10$ sowie $P(0|-1|1)$.

Lotgerade L von P auf E: $L: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Schnitt von Ebene und Lot ergibt den Lotfußpunkt F (durch Einsetzen):

$$\begin{aligned} 2(2r) + (-1+r) - 3(1-3r) &= 10 \\ 4r - 1 + r - 3 + 9r &= 10 \\ 14r = 14 \ \Rightarrow \ r &= 1 \end{aligned}$$

Berechnung des Lotfußpunktes durch Einsetzen von $r = 1$ in die Lotgerade:

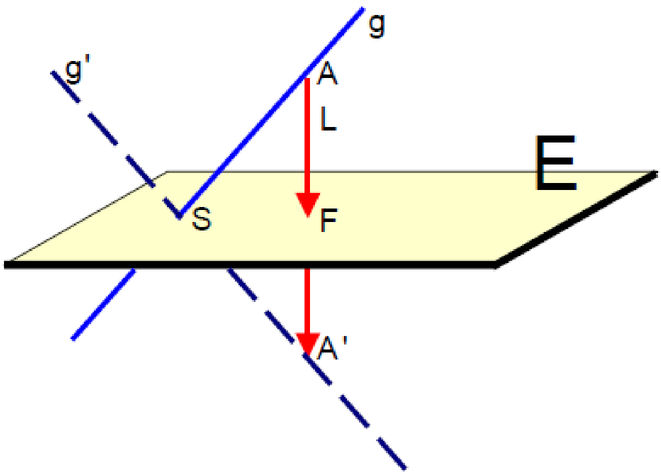
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow F(2|0|-2)$$

Nun kommt der Spiegelungsvorgang wie schon mehrfach gesehen:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} \ \Leftrightarrow \ \vec{x}' = \vec{x} + 2\left(\vec{f} - \vec{x}\right) \ \Leftrightarrow \ \vec{x}' = 2\vec{f} - \vec{x}$$

Eingesetzt: $\vec{x}' = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(4|-1|-3)$

Spiegelung einer Geraden an einer Ebene



Zunächst einmal kann man – wenn man dies hier alles nicht mehr weiß – davon ausgehen, daß eine Gerade durch 2 Punkte festgelegt ist.
Also sollte man zwei Punkte von g auswählen, etwa den Aufpunkt A und einen zweiten Punkt B. Beide spiegelt man nach Beispiel 5 und stellt dann die Gleichung der Bildgerade durch A' und B' auf.

Das ist sicher zu umständlich. Schneidet man nämlich die Gerade durch Einsetzen mit der Ebene E und berechnet den Schnittpunkt, dann ist dieser als Punkt auf der Ebene ein ***Fixpunkt****, der also mit seinem Bild identisch ist. Dann genügt also die Spiegelung des Aufpunktes A. Diese Methode rechnen wir durch:*

Beispiel 136:

Gegeben: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E:\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ Spiegle g an E.

Lösung:

1. Schnitt von g mit E: $3(1+r) - 2(6+r) + (-5+r) = 0$
$$3 + 3r - 12 - 2r - 5 + r = 0$$
$$2r = 14 \Rightarrow r = 7 \Rightarrow S(8|13|2) \text{ Fixpunkt von g.}$$

2. Lot von $A(1|6|-5)$ auf E: $L:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Schnitt von L mit E: $3(1+3s) - 2(6-2s) + (-5+s) = 0$
$$3 + 9s - 12 + 4s - 5 + s = 0$$
$$14s = 14 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow F(4|4|-4)$$

3. Spiegelung von A an E: $\vec{x}' = 2\vec{f} - \vec{x}$ ist die Spiegelungsgleichung, also
$$\vec{a}' = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(7|2|-3)$$

4. Bildgerade $g' = (SA')$: Richtungsvektor $\vec{u}' = \overrightarrow{SA'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$.

   $g':\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$ wobei man auch A' als Aufpunkt nehmen könnte,

Spiegelung einer Geraden an einer Ebene

Beispiel 137:

Gegeben sei: $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\3\\-6\end{pmatrix}$ und $E:\ 3x_1-2x_2+x_3=0$ Spiegle g an E.

Lösung:

Beginnen wir damit, den Schnittpunkt von G und E zu berechnen, er wird der Fixpunkt der Spiegelung, liegt also auf der Bildgeraden:

$E\cap g=\{S\}:\qquad 3(5+4r)-2(3r)+(-1-6r)=0$

$3+12r-6r-1-6r=0$ ergibt $14=0$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß sich g und E schneiden.
Also sind g und E zueinander parallel !

Nun können wir also nicht auf einen Fixpunkt zurückgreifen, also berechnen wir uns einen zweiten Punkt B auf g, etwa für r = 1: $B(9|3|-7)$

Wir fällen nun das **<u>Lot von A auf E</u>**: $L_A:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $3(5+3s)-2(-2s)+(-1+s)=0$

liefert $15+9s+4s-1+s=0\ \Rightarrow\ 14s=-14\ \Rightarrow\ s=-1$

Also $F_A(2|2|-2)$

Und jetzt das **<u>Lot von B auf E</u>**: $L_B:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\3\\-7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $3(9+3s)-2(3-2s)+(-7+s)=0$

liefert $27+9s-6+4s-7+s=0\ \Rightarrow\ 14s=-14\ \Rightarrow\ s=-1$

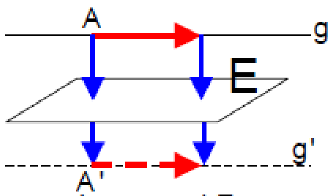
Also $F_B(6|5|-8)$

Nun spiegeln wir A und B an E mittels der Gleichung $\vec{x}'=2\vec{f}-\vec{x}$:

$\vec{a}'=2\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A'(-1|4|-3)$; $\vec{b}'=2\begin{pmatrix}6\\5\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\3\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\-9\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ B'(3|7|-9)$

Richtungsvektor der Bildgeraden und Gleichung von g' :

$\vec{v}=\overrightarrow{A'B'}=\begin{pmatrix}3\\7\\-9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\-6\end{pmatrix}=u$!!! $\quad g':\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\3\\-6\end{pmatrix}$



Wir stellen fest, daß g und g' parallel sind. Dies ist immer so, wenn schon g und E parallel sind.

Skalarprodukt

Definition 78:

Unter dem **Skalarprodukt** zweier Vektoren versteht man eine **reelle Zahl**, die nach dieser Vorschrift berechnet wird:

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Beispiel 138:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 + 6 - 3 = 13, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 - 6 - 2 = 0$$

Definition 79:

Folgende Rechengesetze gelten für Skalarprodukte:

1. Kommutativgesetz: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
2. Distributivgesetz: $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
3. Assoziativgesetz: $\vec{a}\left(r\vec{b}\right) = r\left(\vec{a}\vec{b}\right)$
4. Binomische Formeln:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$$

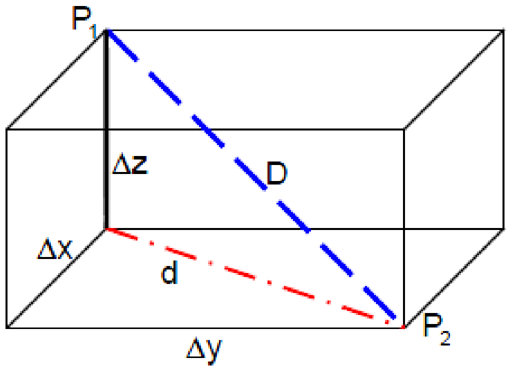
wobei natürlich $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ bedeutet.

Das oben aufgeführte Assoziativgesetz heißt gemischtes Assoziativgesetz.
Folgendes Assoziativgesetz mit drei Vektoren gilt nicht, wie man sofort sehen kann:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c},$$

denn weil das Skalarprodukt $\vec{b} \cdot \vec{c}$ eine reelle Zahl ist, ist der Vektor auf der linken Seite ein Vielfaches von $\vec{a}$, auf der rechten Seite steht jedoch ein Vielfaches von $\vec{c}$. Dies kann natürlich nur rein zufällig gelten, keinesfalls aber allgemein !

Länge einer Strecke im Raum



Normalerweise verläuft im Raum eine Strecke schräg (jede andere Lage ist ein Spezialfall),

Faß man die Strecke als Raumdiagonale eines Quaders auf, dann ergibt dies nebenstehendes Bild.

Die Diagonale d in der Grundfläche ist laut Pythagoras: $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Und die Raumdiagonale dann $D = \sqrt{d^2 + \Delta z^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

Beispiel: $P_1(5|2|-7)$, $P_2(4|6|3)$

$$\overline{P_1P_2} = D = \sqrt{(4-5)^2 + (6-2)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{1+16+100} = \sqrt{117}$$

Diese Formel lernt man als Diagonale eines Quaders bereits in Klasse 9. Jetzt wollen wir damit eine erste Begründung liefern, warum man das Skalarprodukt gerade so definiert hat, wie es auf Seite 1 gezeigt worden ist.

Dazu schauen wir einmal, was das Ergebnis des Produkts eines Vektors mit sich selbst ist:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}$$

Vergleichen wir dies schon einmal mit der Längenformel, dann erkennen wir, daß dort unter der Wurzel ein ähnlicher Ausdruck steht. Betrachten wir nämlich den Vektor $\overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ und quadrieren ihn, dann folgt:

$$\overline{P_1P_2}^{\,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}^2 = 1 + 16 + 100 = 117 .$$

Wir müssen also nur noch daraus die Wurzel ziehen und habe somit die Länge des Pfeils. **Man nennt die Pfeillänge den Betrag des Vektors.**

Definition 80:

Der Betrag des Vektors $\vec{u}$, also die Länge seiner Pfeile erhält man durch:

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$$

Beispiel 139:

$A(1|3|1), B(2|1|0), C(5|-3|-1)$ Der Umfang dieses Dreiecks beträgt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CA} = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56}$$

Umfang: $U = \sqrt{6} + \sqrt{26} + \sqrt{56} \approx 15$

Beispiel 140:

Wie groß ist der Abstand des Punktes $P(7|9|-11)$ von der Ebene

E: $3x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 20$?

Lotgerade L von P auf E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

Hier wurde die noch unbewiesene Information verwendet, daß der aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung gebildete Vektor senkrecht zur Ebene gerichtet ist. Er kann demnach als Richtungsvektor einer Lotgeraden verwendet werden.

Schnitt von L und E durch Einsetzen:

$$21 + 9r + 36 + 16r + 132 + 144r = 20$$
$$169\,r = -169$$
$$r = -1$$

Daraus folgt der Lotfußpunkt: $F(4|5|1)$.

Der Abstand des Punktes P von E wird nun als Länge des Vektors von P nach F berechnet:

$$d(P;E) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

Beispiel 141:

Welche Vektor hat dieselbe Richtung wie $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, aber den Betrag 1 ?

Dazu wird der Betrag von $\vec{n}$ berechnet: $|\vec{n}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

Reduzieren wir also die Pfeile auf ein Drittel ihrer Länge, dann ist diese 1:

$\vec{n}^o = \pm\frac{1}{3}\vec{n} = \pm\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ sind zwei Vektoren mit dem Betrag 1 und der Richtung $\vec{n}$.

Einheitsvektoren

Definition 81:

Ein Vektor, dessen Betrag 1 ist, heißt Einheitsvektor.

Einheitsvektoren sind für einige Anwendungen so wichtig, daß man das Verfahren beherrschen muß, wie man einen Vektor auf die Länge .1 reduziert.

Der Betrag eines Vektors $\vec{n}$ gibt ja bekanntlich die Länge seiner Pfeile an. Soll diese Länge 1 werden, muß man durch die Zahl dividieren, welche eben diese Länge angibt, also durch den Betrag des Vektors:

$$\vec{n}^o = \pm\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}$$

Man schreibt dann „hoch Null“ um anzudeuten, daß dieser Vektor den Betrag 1 hat, also ein Einheitsvektor ist. Das $\pm$ auf der rechten Seite kehrt nur den Vektor um, ändert also an seinem Betrag nichts und auch an seiner Richtung (wenn man die entgegengesetzte Richtung dazurechnet).

Beispiel 142:

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{1+144+144} = \sqrt{289} = 17$

Zu $\vec{n}$ kollineare Einheitsvektoren sind also $\vec{n}^o = \pm\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{17} \\ \frac{12}{17} \\ \frac{12}{17} \end{pmatrix}$.

Für ganz Ungläubige werden wir davon noch den Betrag berechnen:

$|\vec{n}^o| = \sqrt{\frac{1}{289} + \frac{144}{289} + \frac{144}{289}} = \sqrt{\frac{289}{289}} = \sqrt{1} = 1$

$\pm$ wurde beim Quadrieren der Vektorkoordinaten jeweils zu $+$.

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{64+9+1} = \sqrt{74}$

Einheitsvektoren mit der „Richtung" von $\vec{n}$: $\vec{n}^o = \pm\frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen 2 Vektoren

Definition 82:

Der Winkel zwischen zwei Vektoren wird folgendermaßen berechnet:

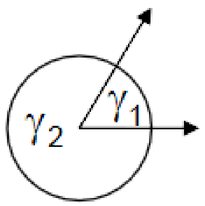
$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

Beispiel 4:

Gegeben seien 2 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$. Dann betrachten wir zwei Pfeile dieser Vektoren mit gleichem Anfangspunkt. Diese bilden dann zwei Winkel miteinander:

Beispiel 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{-3+12-2}{\sqrt{1+16+4} \cdot \sqrt{9+9+1}} = \dfrac{7}{\sqrt{21}\sqrt{19}}$

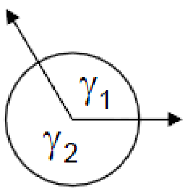
Es folgt: $\gamma_1 = 69{,}5^\circ$



Nun sollte man wissen, daß der Kosinus positive Werte für das 1. und 4. Feld hat, also für Winkel unter 90° und für Winkel über 270°. Den 2. Winkel erhält man also auf diese Weise:

$\gamma_2 = 360^\circ - \gamma_1 = 290{,}5^\circ$

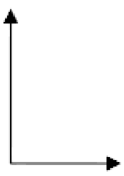
Beispiel 2: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{-10+3-16}{\sqrt{4+9+64}\sqrt{25+1+4}} = -\dfrac{23}{\sqrt{77}\sqrt{30}}$



Die Kosinusfunktion hat negative Werte für Winkel zwischen 90° und 270° . Daher folgt:

$\gamma_1 = 118{,}6^\circ$, $\gamma_2 = 360^\circ - \gamma_1 = 241{,}4^\circ$

Beispiel 3: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{6-2-4}{\sqrt{9+4+16}\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{0}{\sqrt{29}\sqrt{6}} = 0$



Die Kosinusfunktion hat Nullstellen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$, dies entspricht $\gamma_1 = 90^\circ$ und $\gamma_2 = 270^\circ$. Mit anderen Worten:

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonale Vektoren.

Wann wird ein Skalarprodukt 0?

Es sei $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

1. Fall: $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ ist der Nullvektor: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

2. Fall: Weder $\vec{a}$ noch $\vec{b}$ ist der Nullvektor, dann ist $|\vec{a}| \neq 0$ und $|\vec{b}| \neq 0$.

Also folgt: $\cos\gamma = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{0}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 90^\circ$ d.h. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Definition 83:

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht Nullvektoren sind, dann folgt aus $\vec{a}\vec{b} = 0$, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonale Vektoren sind.

Umgekehrt folgt aus $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ nur dann das Ergebnis 0, wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ der Nullvektor ist, also den Betrag 0 hat, oder wenn $\cos\gamma = 0$ ist, also für $\gamma = 90^\circ$ oder $\gamma = 270^\circ$.

Beispiel 143:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 10 + 18 - 28 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

b) Zeige, daß das Dreieck ABC rechtwinklig ist:

$A(3|-2|12)$, $B(7|0|11)$, $C(6|-7|14)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 - 10 - 2 = 0$

Also hat das Dreieck ABC´ bei A einen rechten Winkel.

Welche Vektoren sind zu $\vec{u}$ orthogonal?

Beispiel 144:

Bestimme alle Vektoren, die zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Lösung: Da man orthogonale Vektoren oft auch Normalenvektoren nennt, verwendet man meist diesen Ansatz:

Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ der gesuchte, zu $\vec{u}$ orthogonale Vektor. Für ihn gilt

die Bedingung: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, d.h. $2n_1 - 3n_2 + n_3 = 0$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge kann man zwei der drei Koordinaten frei wählen:

Wähle $n_1 = r, r \in \mathbf{R}$ und $n_2 = s, s \in \mathbf{R}$. Dann folgt $n_3 = -2r + 3s$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ -2r + 3s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Die Menge aller zu $\vec{u}$ orthogonalen Vektoren bilden im $\mathbf{R}^3$ einen zweidimensionalen Untervektorraum. Dieser besteht natürlich aus allen Linearkombinationen der beiden Basisvektoren.

Es gibt einen Trick, wie man die beiden im Beispiel 1 gefundenen Basisvektoren und weitere orthogonale Vektor ohne diese lange Rechnung sofort angeben kann.
Dazu schauen wir uns den gegebenen Vektor $\vec{u}$ und die beiden Basisvektoren an.
Der erste hat $n_1 = 0$, die beiden anderen Koordinaten sind vertauscht und eine hat das Vorzeichen gewechselt. Der zweite hat $n_2 = 0$, die anderen Koordinaten wurden vertauscht und eine hat das Vorzeichen gewechselt. Dies kann man noch mit der 3. Koordinate machen. Wir setzen $n_3 = 0$, ertauschen n_1 und n_2 und ändern ein Vorzeichen. So erhalten wir

$$\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{n}_2{}' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 33:

MERKE: Gegeben ist ein Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$. Dann erhält man zu $\vec{u}$ orthogonale Vektoren, indem man eine der drei Koordinaten Null setzt, die beiden anderen vertauscht und bei einer das Vorzeichen ändert.

Beispiel 145:

Großes Anwendungsbeispiel: Ebenengleichung

Gegeben ist eine Ebene in Koordinatenform: Gib zwei Basisvektoren an.

$$E: \ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 23$$

Diese Ebene hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Je zwei zu ihm orthogonale und linear unabhängige Vektoren kann man als Basisvektoren verwenden, also etwa

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soll man eine Parametergleichung angeben, dann benötigt man noch einen Aufpunkt von E. Dazu wählt man zwei Koordinaten beliebig und errechnet die dritte durch Einsetzen der beiden anderen in die Koordinatengleichung:

z.B. $x_1 = 0$, $x_3 = -5$ folgt $4 \cdot 0 + 2x_2 + 5 \cdot 5 = 23 \Rightarrow 2x_2 = 23 - 25 = -2$

also $x_2 = -1$ $\Rightarrow A(0|-1|-5) \in E$.

Parametergleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ich habe den zweiten Richtungsvektor sogar noch halbiert, um noch kleinere Zahlen zu bekommen.

Beispiel 146:

Welche Vektoren sind zu $\vec{u}\, und\ \vec{v}$ orthogonal?

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Menge aller zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonalen Vektoren.

Lösung:

Ansatz für die Normalenvektoren: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$.

Bedingungen: (1) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2n_1 + 2n_2 + n_3 = 0$

(2) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3n_1 - 2n_2 + 4n_3 = 0$

Wir rechnen (1) + (2): $5n_1 + 5n_3 = 0 \Leftrightarrow n_1 + n_3 = 0$

Wähle $n_3 = r, r \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = -r$

Eingesetzt in (1): $-2r + 2n_2 + r = 0 \Rightarrow 2n_2 = r \Rightarrow n_2 = \frac{1}{2}r$

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -r \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, daß die Menge aller Vielfachen des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

zu beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal sind.

Beispiel 147:

Berechnung der Koordinatengleichung einer Ebene mittels Skalarprodukt:

Gegeben ist die Ebene E durch ihre Parametergleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. mit} \quad A(1|6|-2), \; \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Bedingung für den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$:

$$(1) \qquad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2n_1 + 3n_2 + 5n_3 = 0$$
$$(2) \qquad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \iff n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$$

(1) + (2): $\qquad 3n_1 + 7n_3 = 0 \Rightarrow n_1 = -\frac{7}{3}n_3$

Da wir für drei Unbekannte nur 2 Bedingungsgleichungen haben, können wir eine Unbekannte frei wählen. Hier gibt es zwei Möglichkeiten für die freie Wahl von n_3:

1. Wähle $n_3 = r$; $r \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = -\frac{7}{3}r$ in (2): $3n_2 = n_1 + 2n_3 = -\frac{7}{3}r + 2r = -\frac{1}{3}r$ -

   Dies ergibt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3}r \\ -\frac{1}{3}r \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{3}r \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Wähle $n_3 = 3r$, $r \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = -7r$, in (2): $3n_2 = n_1 + 2n_3 = -7r + 6r = -r$

   Dies ergibt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -7r \\ -r \\ 3r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

HINWEIS: Die Berechnung ergibt in beiden Fällen, daß alle Vielfachen, z.B. des Vektors $\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Normalenvektoren der Ebene sind. Man kann daher oft Brüche vermeiden, wenn man bei der freien Wahl so vorgeht, daß erst gar kein Bruch entsteht !

Aufstellen der Koordinatengleichung: Mit Hilfe des Normalenvektors folgt:

$$E: \; -7x_1 - x_2 + 3x_3 = k$$

k erhält man durch Einsetzen von $A(1|6|-2)$: $k = -7 - 6 - 6 = -19$ ergibt dann

$$E: \; -7x_1 - x_2 + 3x_3 = -19 \quad \text{bzw.}$$
$$E: \; 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 19$$

Übersicht: Umrechnen von Ebenengleichungen

Parametergleichung $\Rightarrow$ Normalengleichung

Gegeben: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Eliminationsverfahren*

$$\begin{Bmatrix} x_1 = -1+2r+3s & (1) \\ x_2 = 2+5r-s & (2) \\ x_3 = 4-r+s & (3) \end{Bmatrix}$$

Elimination von s durch (2) + (3):

$x_2 + x_3 = 6 + 4r \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{2}$

in (2): $x_2 = 2 + 5\left(\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{2}\right) - s$

ergibt $s = -\frac{11}{2} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_4$

r und s in (1) eingesetzt:

$x_1 = -1 + 2\left(\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{2}\right) + 3\left(-\frac{11}{2} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_4\right)$

$x_1 = -1 + \frac{2}{4}x_2 + \frac{2}{4}x_3 - 3 - \frac{33}{2} + \frac{3}{4}x_2 + \frac{15}{4}x_3$

$x_1 = -\frac{41}{2} + \frac{5}{4}x_2 + \frac{17}{4}x_3 \quad |\cdot 4$

$4x_1 = -82 + 5x_2 + 17x_4$

$4x_1 - 5x_2 - 17x_3 = -82 \quad |\cdot(-1)$

E: $\mathbf{-4x_1 + 5x_2 + 17x_3 = 82}$

2. *Skalarproduktverfahren*

Ansatz: Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E.

Für ihn gibt es zwei Bedingungen:

(1) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2n_1 + 5n_2 - n_3 = 0$

(2) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; 3n_1 - n_2 + n_3 = 0$

(1)+(2): $5n_1 + 4n_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; n_2 = -\frac{5}{4}n_1$

Wähle $n_1 = 4a,\; a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; n_2 = -5a$

In (2): $n_3 = n_2 - 3n_1 = -5a - 12a = -17a$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4a \\ -5a \\ -17a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Für a=1 folgt aus $\vec{n}\vec{x} = k$:

$4x_1 - 5x_2 - 17x_3 = k$

Mit $A(-1|2|4) \in E \;\Rightarrow\; k = -4 - 10 - 68 = -82$

Also $4x_1 - 5x_2 - 17x_3 = -82 \quad |\cdot(-1)$

E: $\mathbf{-4x_1 + 5x_2 + 17x_3 = 82}$

Normalengleichung $\Rightarrow$ Parametergleichung

Gegeben: $E: \; -4x_1 + 5x_2 + 17x_3 = 82$

1. Lösungsvektor berechnen

$-4x_1 + 5x_2 + 17x_3 = 82$

ist eine Gleichung mit drei Variablen, von denen man zwei durch freie Wahl festlegen kann.

Wähle $x_3 = r, \; r \in \mathbb{R}$ und $x_2 = s, \; s \in \mathbb{R}$,

dann folgt $4x_1 = -82 + 5x_2 + 17x_3$

also $4x_1 = -82 + 5s + 17r$

und $x_1 = -\frac{41}{2} + \frac{5}{4}s + \frac{17}{4}r$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{2} + \frac{5}{4}s + \frac{17}{4}r \\ s \\ r \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$E: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$ zwei orthogonale Vektoren ermitteln:

Nach Seite 9 erhält man Vektoren, die zu $\vec{n}$ orthogonal sind, in dem man eine Koordinate Null setzt, die beiden anderen vertauscht und ein Vorzeichen verändert.
Also sind

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}, \; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mögliche Richtungsvektoren. Zwei davon werden wir verwenden. Nun benötigt man noch einen Punkt von E als Aufpunkt. Hierzu wählt man zwei Koordinaten beliebig, etwa $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, setzt diese in die Ebenengleichung ein und erhält $x_3 = -\frac{41}{2}$.
Nun kann man die Parametergleichung aufschreiben, z.B. diese:

$$E: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & 2n_1 + n_2 + 7n_3 = 0 \\ (2) & n_1 + 2n_2 - n_3 = 0 \end{array}}$$

$(1) - 2\cdot(2)$: $-3n_2 + 9n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = 3n_3$

Wähle $n_3 = a, \; a \in \mathbb{R} \Rightarrow n_2 = 3a$

Aus (1) folgt: $n_1 = n_3 - 2n_2 = a - 6a = -5a$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5a \\ 3a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und für $a = 1$:

E: $-5x_1 + 3x_2 + x_3 = k$

Mit $A(2|t|1) \in E$ folgt: $k = -10 + 3t + 1 = 3t - 9$

Es liegt also eine Schar paralleler Ebenen vor:

$$E_t: \; -5x_1 + 3x_2 + x_3 = 3t - 9$$

Die Hessesche-Normalform (HNF)

Definition 84:

Definition: Eine Normalengleichung, in der der Normalenvektor den Betrag 1 hat, heißt Hessesche Normalform von E.

Die allgemeine Vektorgleichung der HNF lautet:

$$\vec{n}^{\circ} \cdot \vec{x} - d = 0$$

Wenn d > 0 ist, dann gibt d den Abstand des Ursprungs von E an und $\vec{n}^{\circ}$ zeigt vom Ursprung auf die Ebene zu.

Beispiel 148:

E: $4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 36$

Betrag des Normalenvektors: $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$

Division der Ebenengleichung durch diesen Betrag 9:

$\frac{4}{9}x_1 - \frac{4}{9}x_2 + \frac{7}{9}x_3 - 4 = 0$ Dies ist die Hessesche Normalform (HNF)

Hierin steckt nun der Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}^{\circ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und der Abstand des Ursprungs von E ist $d(O;E) = 4$.

Fußpunkt des Lotes von O auf E: $\overrightarrow{OF} = \vec{f} = d \cdot \vec{n}^{\circ} = 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\frac{16}{9} \middle| \frac{-16}{9} \middle| \frac{28}{9}\right)$.

Übrigens lohnt es sich, für spätere Anwendungen die HNF so zu schreiben:

$$\frac{4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 36}{9} = 0$$

Beispiel 149:

E: $2x_1 - 9x_2 - 6x_3 = 88 \quad \left|: |\vec{n}| = \sqrt{4+81+36} = \sqrt{121} = 11\right.$

HNF: $\dfrac{2x_1 - 9x_2 - 6x_3 - 88}{11} = 0$ bzw. $\frac{2}{11}x_1 - \frac{9}{11}x_2 - \frac{6}{11}x_3 - 8 = 0$.

Übrigens bevorzugen einige Lehrer auch diese Schreibweise für die HNF:

$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}\vec{x} - 8 = 0$ (jeder wie er es gerne hätte !)

Was steckt nun alles in dieser Hesseschen Normalform drin ?

Zunächst $d(O;E) = 8$

(diese Schreibweise heißt „Distanz des Punktes O von der Ebene E)

Und dann noch die Koordinaten des Lotfußpunktes von O auf E:

$$\overrightarrow{OF} = \vec{f} = d \cdot \vec{n}^o = 8 \cdot \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\tfrac{16}{11} \middle| \tfrac{-72}{11} \middle| -\tfrac{48}{11}\right)$$

Beispiel 150:

E: $12x - 4y + 3z = 39 \quad \left|: |\vec{n}| = \sqrt{144+16+9} = 13\right.$

HNF: $\dfrac{12x - 4y + 3z - 39}{13} = 0$ bzw. $\frac{12}{13}x - \frac{4}{13}y + \frac{3}{13}z - 3 = 0$

Wir lesen ab: $d(O;E) = 3$.

Fußpunkt des Lotes von O auf E:

$$\overrightarrow{OF} = d \cdot \vec{n}^o = 3 \cdot \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\tfrac{36}{13} \middle| -\tfrac{12}{13} \middle| \tfrac{9}{13}\right)$$

Beispiel 151:

E: $12x_1 - x_2 - 12x_3 = 289 \quad \left|: |\vec{n}| = \sqrt{144+1+144} = 17\right.$

HNF: $\dfrac{12x_1 - x_2 - 12x_3 - 289}{17} = 0$ bzw. $\frac{12}{17}x_1 - \frac{1}{17}x_2 - \frac{12}{17}x_3 - 17 = 0$

$d(O;E) = 17$

Fußpunkt des Lotes von O auf E:

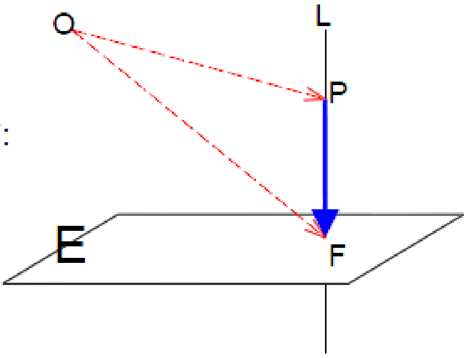
$$\overrightarrow{OF} = d \cdot \vec{n}^o = 17 \cdot \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow F(12|-1|-12)$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

1. Die brave Methode – umständlich aber sicher.

BEISPIEL a: E: $4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 36$, $P(-2|4|-3)$

Lot von P auf E: L: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$



Der Schnittpunkt von L und E ist der Lotfußpunkt F:

$$4(-2+4r) - 4(4-4r) + 7(-3+7r) = 36$$
$$-8 + 16r - 16 + 16r - 21 + 49r = 36$$
$$81r = 81$$

d.h. r = 1 also $F(2|0|4)$

Der Abstand des Punktes P von E ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF}$:

$$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

BEISPIEL b: E: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 42$ $P(1|-2|3)$

Lot von P auf E: L: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt von L und E ist der Lotfußpunkt F:

$$2(1+2r) + 3(-2+3r) - 4(3-4r) = 42$$
$$2 + 4r - 6 + 9r - 12 + 16r = 42$$
$$29r = 58$$

$$r = 2 \Rightarrow F(5|4|-5)$$

$$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = \sqrt{4 \cdot 29} = 2\sqrt{29}$$

2. Die schnelle Methode mit der Hesseschen Normalform.

Setzt man in die linke Seite der Hesseschen Normalform einen Punkt ein, erhält man den Abstand dieses Punktes zur Ebene.

Wir verwenden die Beispiele von Seite 37:

BEISPIEL a: E: $4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 36$, $P(-2|4|-3)$

Division durch den Betrag von $\vec{n}$ erzeugt die HNF:

$$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

HNF: $$\frac{4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 36}{9} = 0$$

Achtung: Dies ist immer noch die Normalengleichung einer Ebene. Und wenn man einen Punkt der Ebene E einsetzt, dann ergibt sich eine wahre Aussage, also 0 auf der rechten wie linken Seite. Nun setzen wir links P ein und erhalten

$$d(P,E) = \left|\frac{-8-16-21-36}{9}\right| = \left|\frac{-81}{9}\right| = 9$$

Ich mußte zusätzlich Betragsstriche verwenden, weil sich sonst ein negativer Abstand ergeben hätte.

BEISPIEL b: E: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 42$ $P(1|-2|3)$

Division durch $$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

HNF: $$\frac{2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 42}{\sqrt{29}} = 0$$

$$d(P;E) = \left|\frac{2-6-12-42}{\sqrt{29}}\right| = \left|\frac{-58}{\sqrt{29}}\right| = \frac{58}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{58 \cdot \sqrt{29}}{29} = 2\sqrt{29}$$

Bemerkungen:

1. *Man achte darauf, daß in der Ebenengleichung das Absolutglied d links mit negativem Vorzeichen steht und rechts 0.*
   Zur Erinnerung: d ist der Abstand des Ursprungs von der Ebene.

2. *Dann setzt man links den Punkt P ein, dessen Abstand berechnet werden soll. Man verwende dazu Betragszeichen, denn Abstände können nie negativ werden. Die linke Seite ergibt so den gesuchten Abstand.*

3. *Vektoriell sieht dies allgemein so aus: Die HNF lautet* $\vec{n}^{o}\vec{x} - d = 0$
   Die Abstandsformel für P_1 ist dann $d(P;E) = \left|\vec{n}^{o}\vec{p} - d\right|$.

Zusammenfassung Hessesche Normalform

Zusammenfassung:
Die Hessesche Normalform - HNF

(1) Die Normalen- (oder Koordinaten-) Gleichung einer Ebene lautet $\vec{n} \cdot \vec{x} = k$
d.h. $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k \quad (1)$
Die Zahl k erhält man durch Einsetzen eines Punktes A von E: $k = \vec{n} \cdot \vec{a}$.

(2) Hat der in der Normalengleichung stehende Normalenvektor den Betrag 1, nennt man diese Gleichung die **Hessesche-Normalform** (HNF) von E.

(3) Die **HNF erzeugt** man aus der Normalengleichung, indem man durch den Betrag des Normalenvektors dividiert. Dies läßt sich auf verschiedene Arten schreiben:

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - k}{|\vec{n}|} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{n_1}{|\vec{n}|}x_1 + \frac{n_2}{|\vec{n}|}x_2 + \frac{n_3}{|\vec{n}|} - d = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0 \qquad (4)$$

$$\vec{n}^o \cdot \vec{x} - d = 0 \qquad (5)$$

Dabei ist es wichtig, daß das Absolutglied links mit negativem Zeichen steht.
Dieses Absolutglied $d = \frac{k}{|\vec{n}|}$ gibt den Abstand des Ursprungs zur Ebene an.

(4) Setzt man in die HNF einer Ebene die Koordinaten eines beliebigen Punktes ein, erhält man den Abstand dieses Punktes zur Ebene. Liegen P und O auf derselben Seite der Ebene, dann sind zusätzlich Betragsstriche zu setzen, damit dieser Abstand positiv bleibt.

Diese Abstandsfunktion kann man daher so schreiben:

$$d(\vec{x}) = \left|\vec{n}^o \cdot \vec{x} - d\right| \qquad (6)$$

Weitere HNF - Anwendungen

Mit dem Einheits-Normalenvektor kann man noch mehr berechnen. Die jetzt gezeigten Anwendungen sind Berechnungen von Lotfußpunkten und Spiegelbildern.

Beispiel 152:

BEISPIEL 1: Gegeben ist die Ebene E durch $4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 15$.

Wir erstellen die HNF von E, indem wir durch $|\vec{n}| = \sqrt{16+16+4} = 6$ dividieren:

Es folgt: HNF: $\frac{4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15}{6} = 0$.

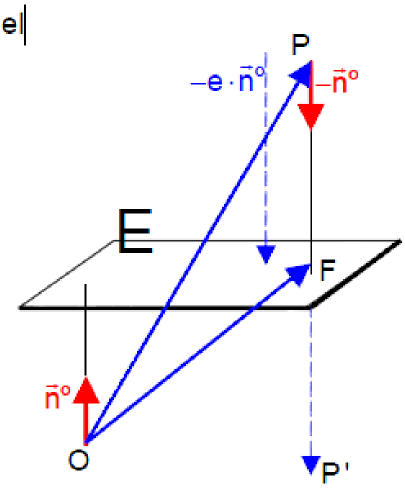
Hierin steckt der Normalen-Einheitsvektor $\vec{n}^o = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den Abstand des Punktes $P(5|1|8,5)$ von E errechnen wir durch Einsetzen von P in die linke Seite der HFN, besser gesagt, in die Distanzformel

$$d(\vec{x}) = |\vec{n}^o \cdot \vec{x} - d|:$$

$$e = d(\vec{p}) = |\vec{n}^o \cdot \vec{p} - d| = \left|\frac{20-4+17-15}{6}\right| = 3$$

Da bei *dieser* Abstandformel die Betragsstriche nicht erforderlich waren, liegen P und O auf verschiedenen Seiten von E.



Daher benötigen wir zur Berechnung des Lotfuß-punktes den Gegenvektor $-\vec{n}^o$:

$\vec{n}^o$ zeigt von O auf die Ebene zu (wenn das Absolutglied links ein negatives Vorzeichen hat) und folglich zeigt $-\vec{n}^o$ von P auf die Ebene zu.

Die **Berechnung des Lotfußpunkts F** ist nun ganz einfach:
Wir halten fest, daß $\overline{PF} = -e \cdot \vec{n}^o$ ist, also folgt:

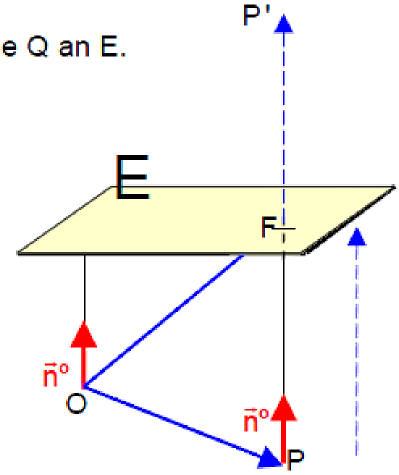
$$\overline{OF} = \overline{OP} + \overline{PF} = \overline{OP} - e \cdot \vec{n}^o = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8,5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7,5 \end{pmatrix} \Rightarrow F(3|3|7,5)$$

Ja, und zum **Spiegelbild P'** kommt man indem man den Pfeil $\overline{PF}$ zweimal addiert:

$$\overline{OP'} = \overline{OP} + 2 \cdot \overline{PF} = \overline{OP} - 2e \cdot \vec{n}^o = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8,5 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6,5 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(1|5|6,5)$$

Beispiel 153:

BEISPIEL 2: Gegeben ist dieselbe Ebene E: $4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 15$ und der Punkt $Q(0|7|-1)$.
Fälle das Lot von Q auf E und spiegle Q an E.



1. HNF von E: $\dfrac{4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15}{6} = 0$

2. $e = d(Q;E) = \left|\dfrac{-28 - 2 - 15}{6}\right| = \dfrac{45}{6} = \dfrac{5}{2}$

3. $\vec{n}^o = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Lotfußpunktberechnung:

Da man bei der Abstandsberechnung mit der HNF die Betragsstriche benötigt hat, liegen O und P auf derselben Seite von E. Daher gilt:

$$\overline{OF} = \overline{OQ} + \overline{QF} = \overline{OQ} + e \cdot \vec{n}^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cdot 2 \\ 7 - \frac{5}{2} \cdot 2 \\ -1 + \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow F(5|2|1{,}5)$$

5. Berechnung des Spiegelbildes:

$$\overline{OF} = \overline{OQ} + \overline{2QF} = \overline{OQ} + 2e \cdot \vec{n}^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 7 - 5 \cdot 2 \\ -1 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow F(10|-3|4)$$

Zusammenfassung

Die Berechnung des Lotfußpunktes geschieht über die Formel

$$\overline{OF} = \overline{OP} + \overline{PF} = \overline{OP} + e \cdot (\pm\vec{n}^o)$$

wobei e die über die HNF berechnete Entfernung des Punktes P von E ist. Werden dabei keine Betragsstriche benötigt, liegen O und P auf verschiedenen Seiten von E und man muß daher mit $-\vec{n}^o$ arbeiten.

Werden aber Betragsstriche benötigt, liegen P und O auf derselben Seite von E und man kann mit $+\vec{n}^o$ arbeiten.

Zur Berechnung des Spiegelbildes wendet man diese Formel analog an:

$$\overline{OF} = \overline{OP} + 2 \cdot \overline{PF} = \overline{OP} + 2e \cdot (\pm\vec{n}^o)$$

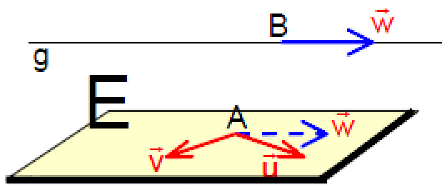
Abstand einer Ebene von einer parallelen Geraden

Zunächst wollen wir uns einmal Gedanken machen, wie man feststellen kann, daß eine Gerade und eine Ebene parallel sind.

Dies hängt natürlich zunächst einmal davon ab, in welcher Gleichungsform die Ebene vorliegt.

(a) Die Parameterform macht es uns wieder am schwersten. Schauen wir eine Beispiel an:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Wer mit Determinanten rechnen kann, hat es beim Nachweis der Parallelität einfach. Die Gerade ist nämlich genau dann parallel zur Ebene, wenn die drei Richtungsvektoren komplanar sind. Ich habe zur Veranschaulichung dieser Geschichte den Pfeil des Vektors $\vec{w}$ eingezeichnet, der in der Ebene liegt und bei A, dem Ebenenaufpunkt, beginnt.

Ja und diese Komplanarität, diese lineare Abhängigkeit der drei Richtungsvektoren rechnet man am elegantesten so aus, daß man nachweist, daß die aus ihnen erzeugte Determinante den Wert 0 hat:

$$D = \left| \vec{u} \ \ \vec{v} \ \ \vec{w} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = -4 + 1 + 2 + 1 = 0$$

Also ist g parallel zu E.

Bei parallelen Ebenen ist der Abstand jedes Punktes von g zu E gleich groß. Also besteht die weitere Aufgabe jetzt darin, etwa den Abstand des Aufpunktes B von g zur Ebene E zu ermitteln. Und dazu müssen wir die Ebenengleichung zuerst in die Normalengleichung und dann in die HNF umformen. Viel Arbeit !

Diese Umformung kann man (siehe Ebenen 2) durch Elimination von r und s erreichen, aber besser mit Hilfe des Skalarproduktes, indem man den Normalenvektor der Ebene Berechnet.

s sei $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E. Für ihn gelten diese Bedingungen:

(1) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ \Leftrightarrow \ n_1 + n_2 - n_3 = 0$

(2) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \ \Leftrightarrow \ 2n_2 + n_3 = 0$

Da man eine Variable frei wählen kann , wählen wir sofort $n_2 = r, \ r \in \mathbb{R}$

ergibt $n_3 = -2r$ und aus (1) folgt: $n_1 = -n_2 + n_3 = -r - 2r = -3r$.

Also hat E diese Normalenvektoren: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3r \\ r \\ -2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Damit lautet die Normalengleichung $\quad -3x_1 + x_2 - 2x_3 = k$

Mit $A(5|-8|2) \in E$ folgt $\quad k = -15 - 8 - 4 = -27$

Daraus folgt für E: $\quad -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -27$

bzw. $\quad$ E: $\quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 27$

Umwandlung in die Hessesche Normalform:

Durch den Betrag des Normalenvektors wird dividiert: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

HNF von E: $\quad \dfrac{3x_1 - x_2 + 2x_3 - 27}{\sqrt{14}} = 0.$

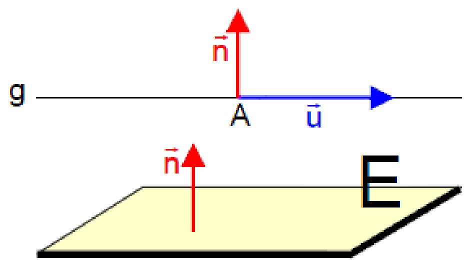
Abstand des Aufpunktes $B(-2|1|3)$ von E:

$$d(B;E) = \left|\frac{-6-1+6-27}{\sqrt{14}}\right| = \frac{28}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}$$

Und dies ist auch der gesuchte Abstand der Ebene E zur Geraden g.

b) Nun geben wir die Ebene sofort in der Normalenform vor:
E: $\quad 14x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 75$. G sei die Gerade mit der Gleichung

g: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$



Untersuchung der Parallelität:

Wenn der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene orthogonal sind, dann sind g und E parallel !

$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 14 - 4 - 10 = 0 \qquad$ Also gilt $\; g \,||\, E$.

Es ist $|\vec{n}| = 15$ also HNF von E: $\quad \dfrac{14x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 75}{15} = 0.$

$$d(g;E) = d(A;E) = \left|\frac{14+6-5-75}{15}\right| = \frac{60}{15} = 4.$$

Abstand paralleler Ebenen

Wir gehen hier nach demselben Prinzip vor wie im Abschnitt 14. Da bei parallelen Ebenen die Abstände überall gleich groß sind, genügt es, den Abstand eines Punktes der einen Ebene von der anderen Ebene zu berechnen. Es ist klar, daß dazu eine Ebene in der Normalengleichung vorliegen muß.

Beispiel 154:

$$E_1: \ 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 66 \quad \text{und} \quad E_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1) Nachweis der Parallelität:

Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{n} \cdot \vec{u} = -6 + 6 + 0 = 0$, also sind diese Vektoren orthogonal.
$\vec{n} \cdot \vec{v} = 12 + 6 - 18 = 0$, also sind auch diese Vektoren orthogonal.
Folglich sind die beiden Ebenen parallel.

(2) Wir berechnen den Abstand des Aufpunktes $A(1|-4|-1)$ zur Ebene E_1.

Wegen $|\vec{n}| = \sqrt{36 + 4 + 81} = \sqrt{121} = 11$ ist die HNF von E_1 so:

$$E_1: \ \frac{6x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 66}{11} = 0$$

Also folgt: $d(E_1;E_2) = d(A;E_1) = \left| \frac{6 - 8 - 9 - 66}{11} \right| = 7$

Beispiel 155:

BEISPIEL 2: $E_1: \ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 15$
$E_2: \ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$

Diese Ebenen haben als Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wegen $\vec{n}_1 = -2\vec{n}_2$ sind diese Vektoren kollinear, d.h. ihre Pfeile sind parallel, also sind die Ebenen zueinander parallel.

Weil $|\vec{n}_2| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ ist, hat E_2 diese HNF: $\frac{-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 8}{3} = 0$.

Wir wählen einen Punkt von E_1 indem wir vorgeben: $x_1 = x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 7{,}5$
also ist $A(0|7{,}5|0) \in E_1$. Somit finden wir das Ergebnis:

$$d(E_1;E_2) = d(A,E_2) = \left| \frac{-7{,}5 - 8}{3} \right| = \frac{15{,}5}{3} = \frac{31}{6}$$

Geradenpunkte mit bestimmten Abständen zu E

Eine Gerade und eine Ebene sollen nun nicht parallel sein. Und wir verwenden natürlich nur die Normalengleichung der Ebene.

Beispiel 156:

BEISPIEL: Gegeben sei E durch $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 17 = 0$

und dazu g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Daß g und O nicht parallel sind, erkennt man sofort an diesem Skalarprodukt:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 10 - 2 \neq 0$$

Wir suchen nun die Punkte von g, deren Abstand zu E genau 4 beträgt.

Dazu verwenden wir den allgemeinen Geradendpunkt $P(-1+r|2+5r|-r)$

und berechnen seinen Abstand zur Ebene E, deren HNF $\frac{x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 17}{3} = 0$ ist.

$$d(P;E) = \left|\frac{(-1+r) + 2(2+5r) - 2(-r) - 17}{3}\right| = \left|\frac{-1 + r + 4 + 10r + 2r - 17}{3}\right| = \left|\frac{13r - 14}{3}\right|$$

Die Betragsstriche sind absolut wichtig, da die Variable r im Bruch auch negative Werte zuläßt !

In der Aufgabe stand, daß wir Punkte suchen, deren Abstand zur Ebene genau 4 beträgt. Also gilt jetzt für sie die Bedingung $d(P;E) = 4$

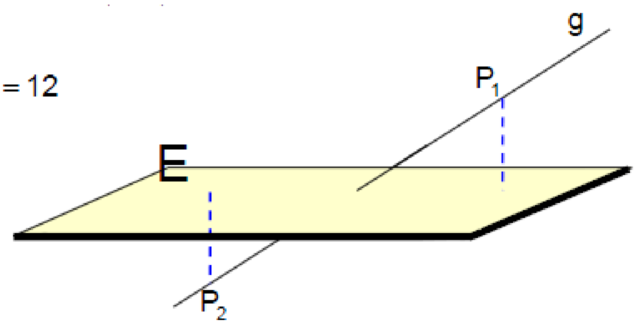
d.h. $\left|\frac{13r - 14}{3}\right| = 4 \Leftrightarrow |13r - 14| = 12$

d.h. $13r - 14 = \pm 12$

$13r = 14 \pm 12 = \begin{cases} 26 \\ 2 \end{cases}$

$r_1 = 2 \Rightarrow P_1(1|12|-2)$

$r_2 = \frac{2}{13} \Rightarrow P_2\left(-\frac{11}{13}\middle|\frac{36}{13}\middle|-\frac{2}{13}\right)$



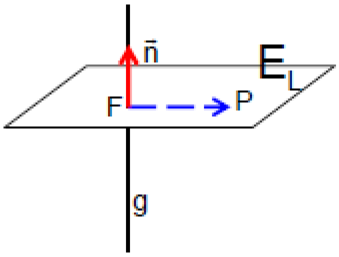
Diese beiden Punkte der Geraden g haben von E den Abstand 4.

Abstand Punkt- Gerade im Raum

Die berühmte Lotebene

Beispiel 157:

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



und $P(3|5|2)$.

Gesucht ist der Abstand $d(P;E)$.

LÖSUNG:

Man legt senkrecht zu E eine Ebene durch P, die sogenannte Lotebene E_L.
Ihre Normalengleichung erhält man ganz schnell, weil man den Richtungsvektor der Geraden g als Normalevektor von E_L verwendet kann:

$$\vec{u}_g = \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_L:\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = k$$

k erhält man durch Einsetzen des Punktes P in E_L:

$$k = -6 + 5 + 6 = 5$$

Also: $$E_L:\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5.$$

Der Schnittpunkt von g und E_L ist der Fußpunkt des Lotes von P auf g:

$$-2(1-2r) + (3+r) + 3(-1+3r) = 5$$
$$-2 - 4r + 3 + r - 3 + 9r = 5$$
$$14r = 7 \Rightarrow r = \tfrac{1}{2}$$

Eingesetzt in g: $$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3+\frac{1}{2} \\ -1+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(0\middle|\tfrac{7}{2}\middle|\tfrac{1}{2}\right)$$

Der gesuchte Abstand ist der Betrag des Vektors $\overline{PF} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$:

Ungünstige Betragsberechnung:

$$\left|\overline{PF}\right| = \sqrt{9 + \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{54}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{54} = \tfrac{1}{2}\sqrt{9 \cdot 6} = \tfrac{3}{2}\sqrt{6}$$

Günstige Betragsberechnung:

$$\left|\overline{PF}\right| = \tfrac{3}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{3}{2}\sqrt{4+1+1} = \tfrac{3}{2}\sqrt{6} \quad \textbf{oder} \quad \left|\overline{PF}\right| = \left|-\tfrac{3}{2}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{3}{2}\sqrt{4+1+1} = \tfrac{3}{2}\sqrt{6}$$

Die operative Methode

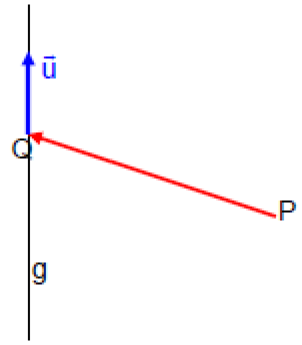
Definition 85:

Die operative Methode verwendet einen beliebigen Geradenpunkt Q und macht ihn dadurch zum Lotfußpunkt, daß man verlagt, daß die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\vec{u}$ (Richtungsvektor von g) orthogonal sind:

Bedingung also: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$

Beispiel 158:

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



und $P(3|5|2)$.

Gesucht ist der Abstand $d(P;E)$.

LÖSUNG:

Ein beliebiger Geradenpunkt von g ist:
$Q(1-2r|3+r|-1+3r)$. Damit folgt:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2r \\ 3+r \\ -1+3r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2r \\ -2+r \\ -3+3r \end{pmatrix}.$$

Q ist genau dann der Fußpunkt des Lotes von P auf g, wenn $\overrightarrow{PQ}$ orthogonal zu $\vec{u}$ ist. Daher lautet die jetzt folgende Bedingung:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2-2r \\ -2+r \\ -3+3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Die operative Methode ersetzt also das Aufstellen der Lotebene und den Schnitt mit der Geraden g. Der Rest ist dieselbe Rechnung!

$$4+4r-2+r-9+9r=0$$
$$14r = 7 \Rightarrow r = \tfrac{1}{2}$$

Ab hier verläuft die Rechnung wie auf der Seite zuvor:

Eingesetzt in g: $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3+\frac{1}{2} \\ -1+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow F(0|\tfrac{7}{2}|\tfrac{1}{2})$

Der gesuchte Abstand ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$:

$$|\overrightarrow{PF}| = \tfrac{3}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{3}{2}\sqrt{4+1+1} = \tfrac{3}{2}\sqrt{6} \quad \textbf{oder} \quad |\overrightarrow{PF}| = |-\tfrac{3}{2}| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{3}{2}\sqrt{4+1+1} = \tfrac{3}{2}\sqrt{6}$$

Abstand paralleler Geraden

Definition 86:

Der gesuchte Abstand ist der Abstand des Aufpunktes A von g von der Geraden. Dazu berechnet man den Fußpunktes des Lotes von A auf h entweder durch Schnitt von h mit der Lotebene durch A, oder mit Hilfe der operativen Methode.

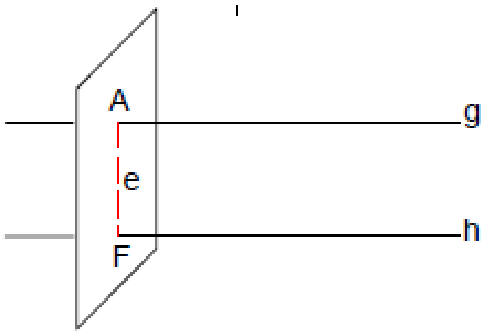
Beispiel 159:

BEISPIEL:

Gegeben sind die Geraden

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \text{ und } h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Wie groß ist der Abstand von g und h ?



1. Methode: Die Lotebene E zu g und h durch A.

Wir verwenden den (gemeinsamen) Richtungsvektor von g und h als Normalenvektor der gesuchten Lotebene:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow E:\ x_1+2x_2+2x_3=k. \quad \text{Mit } A(1|3|-2)\in g \Rightarrow k=1+6-4=3.$$

Die Lotebene hat somit die Gleichung $E:\ x_1+2x_2+2x_3=3$

Schnitt mit h: $(-1+s)+2(2s)+2(2+2s)=3$

$-1+s+4s+4+4s=3 \Rightarrow 9s=0 \Rightarrow s=0$: $F=B(-1|0|2)$

Hier ist also der Aufpunkt von h zugleich der Fußpunkt des Lotes von A auf h.

Der gesuchte Abstand ist nun der Betrag des Vektors $\overline{AF}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}$

$$d(g,h)=\left|\overline{AF}\right|=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}.$$

2. Methode: Das operative Verfahren.

Der beliebige Punkt von h sei $Q(-1+s|2s|2+2s)$. $\overline{AQ}=\begin{pmatrix}-1+s\\2s\\2+2s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+s\\2s-3\\4+2s\end{pmatrix}$.

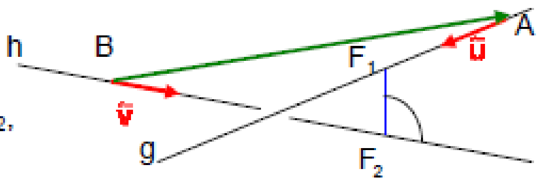
Q wird genau dann zum Lotfußpunkt, wenn die Vektoren $\overline{AQ}$ und $\vec{u}$ orthogonal sind, wobei mit $\vec{u}$ der Richtungsvektor von h gemeint ist. Bedingung also:

$$\overline{AQ}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2+s\\2s-3\\4+2s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -2+s+4s-6+8+4s=0 \text{ ergibt } s=0$$

Dies ergibt $F=B(-1|0|2)$. Nun wird noch wie oben $\overline{AF}$ und sein Betrag berechnet.

Abstand windschiefer Geraden

1. Methode: Mit einer geschlossenen Vektorkette



Es gibt auf zwei windschiefen Geraden (das sind bekanntlich Geraden, die nicht in einer Ebene liegen können), zwei Punkte F_1 und F_2, die das gemeinsame Lot L zwischen beiden Geraden begrenzen.
Das heißt, daß der Vektor $\overline{F_1F_2}$ zu beiden Geraden, also speziell zu beiden Richtungsvektoren orthogonal ist. Damit wissen wir, daß die Produkte $\overline{F_1F_2}\cdot\vec{u}$ und $\overline{F_1F_2}\cdot\vec{v}$ beide Null sein müssen.

Wir bilden nun folgende geschlossene Vektorkette:

$$\overline{AF_1}+\overline{F_1F_2}+\overline{F_2B}+\overline{BA}=\vec{o} \qquad (1)$$

Der Vektor $\overline{AF}$ ist ein Vielfaches von $\vec{u}$, also $\overline{AF_1}=r\cdot\vec{u}$, und $\overline{BF_2}=s\cdot\vec{v}$.

Damit folgt aus (1) $\qquad r\cdot\vec{u}+\overline{F_1F_2}-s\cdot\vec{v}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{o} \qquad (2)$

Um nun die Loteigenschaft von F_1F_2 ausnützen zu können, multipliziert man (2)

einmal mit $\vec{u}$: $\qquad \left[r\cdot\vec{u}+\overline{F_1F_2}-s\cdot\vec{v}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{u}=\vec{o}\cdot\vec{u}$

d.h. $\qquad r\cdot\vec{u}^2+\underbrace{\overline{F_1F_2}\cdot\vec{u}}_{=0}-s\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{u}=0$

ergibt $\qquad r\cdot\vec{u}^2-s\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}=-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{u} \qquad (3)$

und einmal mit $\vec{v}$: $\qquad \left[r\cdot\vec{u}+\overline{F_1F_2}-s\cdot\vec{v}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{v}=\vec{o}\cdot\vec{v}$

d.h. $\qquad r\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\underbrace{\overline{F_1F_2}\cdot\vec{v}}_{=0}-s\cdot\vec{v}^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{v}=0$

ergibt $\qquad r\cdot\vec{u}\vec{v}-s\cdot\vec{v}^2=-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{v} \qquad (4)$

Die Gleichungen (3) und (4) enthalten außer den beiden Unbekannten r und s nur die gegebenen Vektoren der beiden g
Geraden g und h. Also können bei vorliegenden Geraden jetzt mit Zahlen weiterrechnen. Es wird empfohlen, diese Methode bis hierher stets so allgemein zu machen, da so wesentlich weniger Schreibarbeit anfällt.

Nun ein Zahlenbeispiel dazu: $\quad g:\ \vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{=\vec{a}}+r\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=\vec{u}}, \quad h:\ \vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}_{=\vec{b}}+s\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}_{=\vec{v}}.$

$$\Rightarrow \vec{u}^2=2,\ \vec{v}^2=6,\ \vec{u}\cdot\vec{v}=1,\ \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{u}=-3,\ \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{v}=-2$$

Damit gehen wir in (3) und (4):

$$r\cdot\vec{u}^2 - s\cdot\vec{v}\cdot\vec{u} = -\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{u} \qquad (3)$$

$$r\cdot\vec{u}\vec{v} - s\cdot\vec{v}^2 = -\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{v} \qquad (4)$$

wird damit zu $\quad 2r - s = 3 \quad (5)$

$\qquad\qquad\qquad\quad r - 6s = 2 \quad (6)$

$(5)-2\cdot(6):\qquad 11s = -1 \;\Rightarrow\; s = -\tfrac{1}{11}$

und aus (6) folgt $\qquad r = 2 + 6s = \tfrac{16}{11}$.

Aus g folgt mit $r = \tfrac{28}{11}$: $\quad \vec{f_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \tfrac{16}{11}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; F_1\left(\tfrac{27}{11}\middle|-1\middle|\tfrac{16}{11}\right)$

Aus h folgt mit $s = -\tfrac{1}{11}$: $\quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; F_2\left(\tfrac{20}{11}\middle|\tfrac{10}{11}\middle|\tfrac{23}{11}\right)$.

Der Lotvektor für beide Geraden ist dann

$$\overline{F_1F_2} = \begin{pmatrix}\frac{20}{11}\\\frac{10}{11}\\\frac{23}{11}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{27}{11}\\-1\\\frac{16}{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{7}{11}\\\frac{21}{11}\\\frac{7}{11}\end{pmatrix} = \frac{7}{11}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Und die Länge des Lotes ist somit

$$d(g;h) = \left|\overline{F_1F_2}\right| = \tfrac{7}{11}\sqrt{1+9+1} = \tfrac{7}{11}\sqrt{11}$$

Diese Methode wurde hier vorgeführt, weil sie in vielen Büchern steht und meiner Erfahrung nach auch von sehr vielen Lehrern (oder fast allen?) verwendet wird.

Doch ich will Ihnen eine Fortsetzung der hier schon verwendeten Operativen Methode zeigen. Der Name besagt, daß man mit einem variablen Punkt statt des Lotfußpunktes arbeitet und diesen dann zum Lotfußpunkt macht, indem man mit dem Skalarprodukt eine Orthogonalitätsbedingung realisiert.

2. Methode: Die operative Methode

Die operative Methode nimmt für F_1 und F_2 jeweils einen beliebigen Geradenpunkt von g bzw. h und operiert dann damit !

Wegen g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist F_1 zunächst $F_1(1+r|-1|r)$, und

Wegen h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist F_2 zunächst $F_2(2+2s|1+s|2-s)$

Daraus folgt: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} 2+2s \\ 1+s \\ 2-s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+r \\ -1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2s-r \\ 2+s \\ 2-s-r \end{pmatrix}$

Da diese Vektor zum gemeinsamen Lotvektor für g und h werden soll, muß er zu den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal sein. Dies wird durch diese Bedingungen festgelegt:

(1) $\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+2s-r \\ 2+s \\ 2-s-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1+2s-r+2-s-r=0$

d.h. $s-2r=-3$ (3)

(2) $\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+2s-r \\ 2+s \\ 2-s-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2+4s-2r+2+s-2+s+r=0$

d.h. $6s-r=-2$ (4)

Aus dem System $s-2r=-3$ (3) bzw. $2r-s=3$ (5)
$6s-r=-2$ (4) bzw. $r-6s=2$ (6)

berechnen wir r und s:

$(5)-2\cdot(6)$: $11s=-1 \Rightarrow s=-\frac{1}{11}$

und aus (6) folgt $r=2+6s=\frac{16}{11}$.

Aus g folgt mit $r=\frac{28}{11}$: $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{16}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_1\left(\frac{27}{11}\middle|-1\middle|\frac{16}{11}\right)$

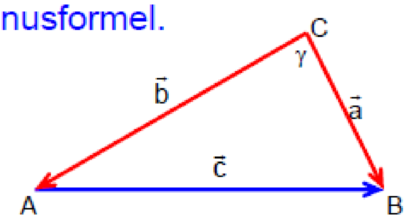
Aus h folgt mit $s=-\frac{1}{11}$: $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2\left(\frac{20}{11}\middle|\frac{10}{11}\middle|\frac{23}{11}\right)$.

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} \frac{20}{11} \\ \frac{10}{11} \\ \frac{23}{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{27}{11} \\ -1 \\ \frac{16}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{11} \\ \frac{21}{11} \\ \frac{7}{11} \end{pmatrix} = \frac{7}{11}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d(g;h) = \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \frac{7}{11}\sqrt{1+9+1} = \frac{7}{11}\sqrt{11}.$$

Winkelberechnungen

Winkel zwischen 2 Vektoren

Hier noch einmal die wichtige Hinführung zur Kosinusformel.
Man sollte sie kennen!



In unserem Dreieck gilt diese Beziehung: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Dann folgt: $\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$

Wir wenden auf dieses Dreieck den Kosinussatz an:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Durch Vergleich sieht man: $\vec{a}^2 = a^2$, $\vec{b}^2 = b^2$ und $\vec{c}^2 = c^2$,
denn $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ usw.

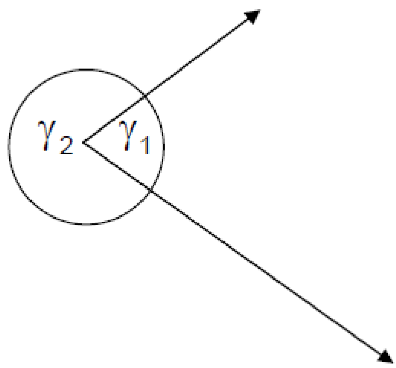
Schließlich bleibt noch $2\vec{a}\vec{b} = 2ab \cdot \cos\gamma$ also

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

Auf diesem Vergleich mit dem Kosinussatz basiert die ganze Winkelberechnung in der Vektorrechnung.

Diese Kosinusformel taugt zunächst aber nur etwas für den Winkel, den die Pfeile zweier Vektoren einschließen, wenn sie gemeinsamen Anfangspunkt haben.

Und zudem muss man wissen, dass es jeweils zwei Winkel zu zwei Vektoren gibt.



Gibt man nur einen an, dann ist es immer der kleinere.

Beispiel 160:

Beispiel 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{-3+12-2}{\sqrt{1+16+4}\cdot\sqrt{9+9+1}} = \frac{7}{\sqrt{21}\sqrt{19}}$$

Es folgt: $\gamma_1 = 69{,}5^\circ$, $\gamma_2 = 360^\circ - \gamma_1 = 290{,}5^\circ$

Beispiel 161:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{-10+3-16}{\sqrt{4+9+64}\sqrt{25+1+4}} = -\frac{23}{\sqrt{77}\sqrt{30}}$$

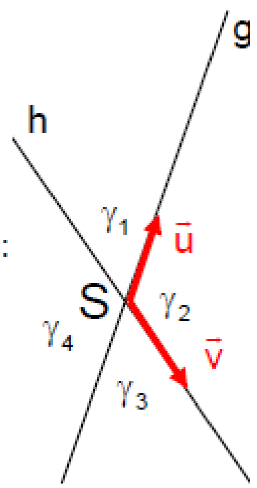
Die Kosinusfunktion hat negative Werte für Winkel zwischen 90° und 270° .
Daher folgt: $\gamma_1 = 118{,}6^\circ$, $\gamma_2 = 360^\circ - \gamma_1 = 241{,}4^\circ$

Winkel zwischen 2 Geraden.

Wenn sich zwei Geraden schneiden, gibt es vier Schnittwinkel.
Die jeweils gegenüberliegenden sind als Scheitelwinkel gleich.
Also folgt: $\gamma_1 = \gamma_3$, $\gamma_2 = \gamma_4$ und $\gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$ usw.

Es kann jetzt also keine größeren Winkel als 180° geben, und der kleinere von beiden ist kleiner als 90° . Wenn g und h orthogonal sind, dann sind alle vier Winkel gleich groß: 90° .

Durch eine einfache Maßnahme garantiert man nun, daß die Kosinusformel immer den kleineren Winkel liefert:
Man setzt für den Kosinus Betragsstriche. Dann ist $0 \le \gamma_1 \le 90^\circ$:



$$\cos\gamma = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Bemerkung 34:

<u>**Achtung**</u>: Hier haben wir den **Betrag** in zwei gänzlich verschiedenen Bedeutungen vor uns: Der Betrag im Zähler $|\vec{u}\cdot\vec{v}|$ mach eine eventuell negative Zahl $\vec{u}\cdot\vec{v}$ positiv. Die Beträge im Nenner berechnen die Länge der Pfeile der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$!

Beispiel 162:

Die Geraden g und h schneiden sich. Berechne die Schnittwinkel:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\cos\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|8+4-14|}{\sqrt{16+16+49} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{27}$$

$$\gamma_1 = 85{,}75^\circ \ \Rightarrow\ \gamma_2 = 180 - \gamma_1 = 94{,}25^\circ$$

Beispiel 163:

Untersuche, ob sich die Geraden g und h schneiden. Berechne den Schnittpunkt und die Schnittwinkel.

$$g:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}, \quad h:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Lösung:

Die Geraden schneiden sich dann, wenn sie in einer Ebene liegen und nicht parallel sind. Daß sie nicht parallel sind, sieht man daran, daß die Richtungsvektoren nicht kollinear sind ($\vec{v} \neq k \cdot \vec{u}$). Daß sie in einer Ebene liegen, liefert die Determinante

$$D = \left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -8 \\ 1 & 8 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \\ 1 & 8 \end{matrix} = -48 - 8 - 48 - 12 + 128 - 12 = 0$$

Da viele Lehrer die Vektorrechnung ohne Determinanten betreiben, sollten diese Leser an Stelle dieser Determinantenrechnung die Probe in der Schnittpunkts-berechnung machen.

Berechnung des Schnittpunkts:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{matrix} 2r - s = -3 & (1) \\ 2r + 4s = -8 & (2) \\ r - 8s = 6 & (3) \end{matrix}\right\}$$

$(2)-(1): \qquad 5s=-5 \;\Rightarrow\; s=-1.$

Wer den Nachweis, daß sich g und h schneiden, bereits mit der Determinante geführt hat, kann hier aufhören und durch Einsetzen von s in die Gleichung von g den Schnittpunkt berechnen (siehe unten). Wer keine Determinantenprobe durchgeführt hat, muß weiterrechnen, also r bestimmen und dann in Gleichung (3) die Probe machen. Stimmt diese, liegen die Geraden in einer Ebene und schneiden sich daher, stimmt diese nicht, liegen g und h nicht in einer Ebene. Sie sind dann windschief und ohne Schnittpunkt ! Die Probe oder die Determinantenrechnung sind also unbedingt notwendig !

Aus (1) : $\quad 2r = s - 3 = -4 \quad$ also $\quad r = -2$.
Probe in (3) : $\quad -2 + 8 = 6 \quad$ Dies ist eine wahre Aussage, die Probe stimmt also.
(d.h. g und h liegen in einer Ebene und schneiden sich.)

Berechnung von S: s = -1 in h ergibt $S(1|4|-2)$.

<u>Berechnung der Schnittwinkel:</u>

$$\cos\gamma=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|2-8+8|}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+16+64}}=\frac{2}{3\cdot 9}=\frac{2}{27}$$

$$\gamma_1=85{,}75° \;\Rightarrow\; \gamma_2=180-\gamma_1=94{,}25°$$

Beispiel 164:

Untersuche, ob sich die Geraden g und h schneiden. Berechne den Schnittpunkt und die Schnittwinkel.

$$g:\;\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}6\\-7\\15\end{pmatrix}}_{\vec{a}}+r\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}}_{\vec{u}},\qquad h:\;\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\15\\-5\end{pmatrix}}_{\vec{b}}+s\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Lösung:

Die Geraden schneiden sich dann, wenn sie in einer Ebene liegen und nicht parallel sind. Daß sie nicht parallel sind, sieht man daran, daß die Richtungsvektoren nicht kollinear sind ($\vec{v}\neq k\cdot\vec{u}$). Daß sie in einer Ebene liegen, liefert die Determinante

$$D=\left|\vec{u}\;\;\vec{v}\;\;\overline{AB}\right|=\left|\begin{matrix}3&-1&-4\\-4&-2&22\\5&1&-20\end{matrix}\right|\begin{matrix}3&-1\\-4&-2\\5&1\end{matrix}=120-110+16-40-66+80=0$$

Da diese Determinante 0 ist, sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overline{AB}$ komplanar, d.h. g und h liegen in einer Ebene. Da sie außerdem nicht parallel sind, schneiden sie sich.

Berechnung des Schnittpunkts:

$$\begin{pmatrix}6\\-7\\15\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\15\\-5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}3r+s=-4 & (1)\\ -4r+2s=22 & (2)\\ 5r-s=-20 & (3)\end{matrix}\right\}$$

(1) + (3) liefert $8r=-24 \Rightarrow r=-3:$

Eingesetzt in g: $S(-3|5|0)$.

Berechnung der Schnittwinkel:

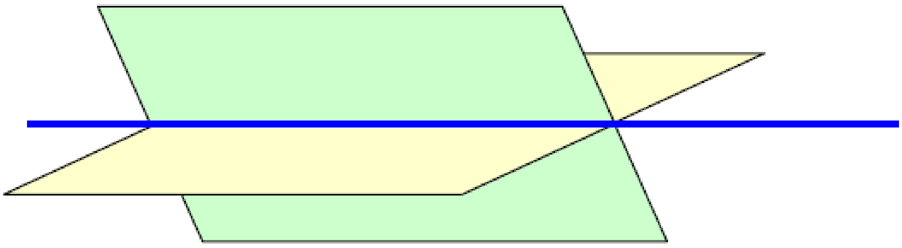
$$\cos\gamma=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|-3+8+5|}{\sqrt{9+16+25}\cdot\sqrt{1+4+1}}=\frac{10}{\sqrt{50}\sqrt{6}}$$

$$\gamma_1=54{,}73° \Rightarrow \gamma_2=180-\gamma_1=125{,}27°$$

Winkel zwischen 2 Ebenen.

Auf die Frage, wo denn zwei Ebenen einen Schnittwinkel haben, kommt in der Regel selten eine brauchbare Antwort. Es ist schon überhaupt schwer, zu erklären was ein Winkel ist. Meistens begnügt man sich mit der Antwort, daß zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangpunkt zwei Winkel bilden. Damit meint man dann etwa die beiden Punktmengen, welche die Halbgeraden begrenzen. Man nennt dies dann auch zwei Winkelfelder. Ich will dies nicht weiter vertiefen.

Zur Vorstellung reichen jedoch zwei Halbgeraden oder zwei sich schneidende Geraden. Doch wo sehen wir bei zwei sich schneidenden Ebenen solche Geraden oder Halbgeraden ?



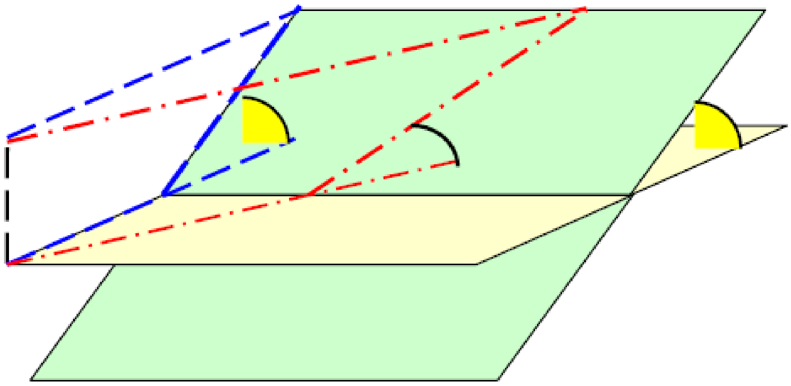
Da man Ebenen nur darstellen kann, wenn man sie allseitig begrenzt, so daß nur ein Parallelogramm als Ebenenausschnitt abgebildet wird, kann man zwei sich schneidende Ebenen so zeigen, wie hier geschehen. Die Schnittgerade habe ich länger gezeichnet um anzudeuten, daß die Ebenen nicht dort aufhören, wo die Parallelogramme enden!

Ja, und wenn man sich dann Schnittwinkel zeigen läßt, dann zeigen Schüler in der Regel auf die Kanten der Parallelogramme, dort sieht man so etwas wie Winkel.

Nun sollte man wirklich Modelle haben, um sich vorstellen zu können, daß man jedesmal einen anderen Winkel bekommt, wenn man anders durch die Ebenen schneidet. Verläuft die Schnittebene senkrecht zu beiden Ebenen, dann erhält man zwei Geraden, welche nun das definieren, was man den Schnittwinkel nennt. Schneidet man eher schräg, dann ändert sich dieser Winkel.

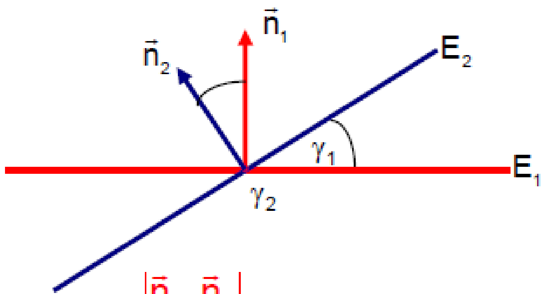
Jede Straße geht nicht direkt den Berg hinauf sondern verläuft schräg in Serpentinen, um den Steigungswinkel zu verkleinern. Ein Schnitt senkrecht zur Schnittgeraden ergibt den größten Steigungswinkel. Diesen nennt man den Schnittwinkel der Ebenen (Es gibt natürlich noch den zweiten, den Nebenwinkel). Jeder nicht orthogonale Schnitt ergibt eine schräg aufsteigende Linie mit kleinerem Steigungswinkel.

Die blaue Schnittebene orthogonal zur Schnittgeraden erzeugt den Schnittwinkel. Die rote Ebene schneidet schräg und ergibt einen kleineren Steigungswinkel.



Wir stellen uns nun vor, daß das Zeichenblatt bzw. der Computerbildschirm die Ebene sei, die unsere beiden Ebenen senkrecht zur Schnittgeraden schneidet. Dann sieht man in dieser Darstellungsebene die eigentlichen Ebenen nur als Geraden.

Da der Schnittwinkel der Ebenen dem kleineren Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren entspricht, läßt sich der gesuchte Schnittwinkel der Ebenen mit Hilfe von $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ berechnen:



$$\cos\sphericalangle(E_1,E_2) = \cos\gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Beispiel 165:

Gegeben ist E_1 durch $2x_1+6x_2-5x_3=34$ und E_2 durch $-4x_1+x_2+9x_3=12$.

Dann liegen diese Normalenvektoren vor: $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}2\\6\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}-4\\1\\9\end{pmatrix}$

Und wir erhalten diese Schnittwinkel: $\cos\gamma=\dfrac{|-8+6-45|}{\sqrt{4+36+25}\cdot\sqrt{16+1+81}}=\dfrac{47}{\sqrt{65\cdot 98}}$

Dies ergibt $\gamma_1\approx 53{,}9^\circ$ und $\gamma_2=180^0-\gamma_1\approx 126{,}1^\circ$

Beispiel 166:

Gegeben: $E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+r\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}+s\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}$, $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\12\\3\end{pmatrix}+a\underbrace{\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}+b\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$

Berechnung der Normalenvektoren. $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ von E_1 und $\vec{m}=\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}$ von E_2.

Bedingungen:

(1) $\vec{u}_1\vec{n}=0 \Leftrightarrow 2n_1+n_2-n_3=0$

(2) $\vec{v}_1\vec{n}=0 \Leftrightarrow -n_1+2n_2=0$

Wähle $n_2=\lambda,\ \lambda\in\mathbf{R} \Rightarrow n_1=2\lambda$

Aus (3): $n_3=2n_1+n_2=5\lambda$

$$\Rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}2\lambda\\\lambda\\5\lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$$

(1) $\vec{u}_2\vec{m}=0 \Leftrightarrow -4m_1+m_2+m_3=0$

(2) $\vec{v}_2\vec{m}=0 \Leftrightarrow 2m_1-2m_2+7m_3=0$

$2\cdot(1)+(2)$: $-6m_1+9m_3=0 \Rightarrow m_3=\frac{2}{3}m_1$

Wähle $m_1=3\mu,\ \mu\in\mathbf{R} \Rightarrow m_3=2\mu$

Aus (1): $m_2=4m_1-m_3=12\mu-2\mu=10\mu$

$$\Rightarrow \vec{m}=\begin{pmatrix}3\mu\\10\mu\\2\mu\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}3\\10\\2\end{pmatrix}$$

$$\cos\gamma=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{6+10+10}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{9+100+4}}=\frac{26}{\sqrt{30}\sqrt{113}} \Rightarrow \gamma_1\approx 63{,}5^\circ,\ \gamma_2=116{,}5^\circ.$$

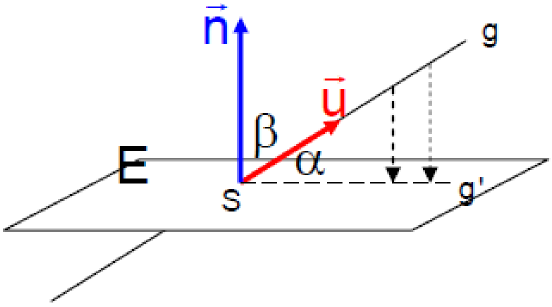
Winkel zwischen Ebene und Gerade.

Gegeben sei die Ebene E durch

$$4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 28$$

und die Gerade g durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Wir sehen am Produkt $\vec{u} \cdot \vec{n} = 4 + 3 + 14 = 21 \neq 0$, daß der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E nicht orthogonal sind, dann ist g auch nicht parallel zu E. Also schneiden sich g und E.

Projiziert man g senkrecht auf E, so entsteht die Schattengerade g' .
Den Winkel zwischen g und g' nennt man den Schnittwinkel von g und E !!!

Nun aber kann man diesen Winkel α so nicht berechnen, denn man macht sich doch kaum die Mühe, die Projektionsgerade zu berechnen (Dazu müßte man eine Lotebene senkrecht zu E durch g aufstellen und mit E schneiden !)

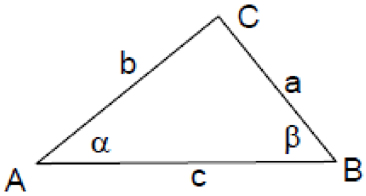
Daher hilft dieser Trick weiter:

Man berechnet den Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden:

$$\cos\beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \qquad (1)$$

Dann könnte man so weiterrechnen: $\alpha = 90^\circ - \beta$. Da wir in der Kosinusformel den Betrag im Zähler verwenden, wird der Kosinus garantiert positiv (wenn nicht zufällig $g \perp E$ ist) , und damit erhalten wir einen Winkel zwischen 0° und 90° .

Doch es geht noch eleganter. Dazuschauen wir uns dieses **rechtwinklige** Dreieck an: Hier gilt doch



$\cos\beta = \frac{a}{c}$ und $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

also gilt $\cos\beta = \sin\beta$.

und dabei gilt: $\alpha + \beta = 90^\circ$!!!

Diese Situation haben wir in unserer Aufgabe oben: Wir haben zwei Winkel α und β, deren Summe 90° beträgt. Dann gilt $\sin\alpha = \cos\alpha$.
Das bedeutet, daß wir aus (1) diese Formel erhalten:

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene:

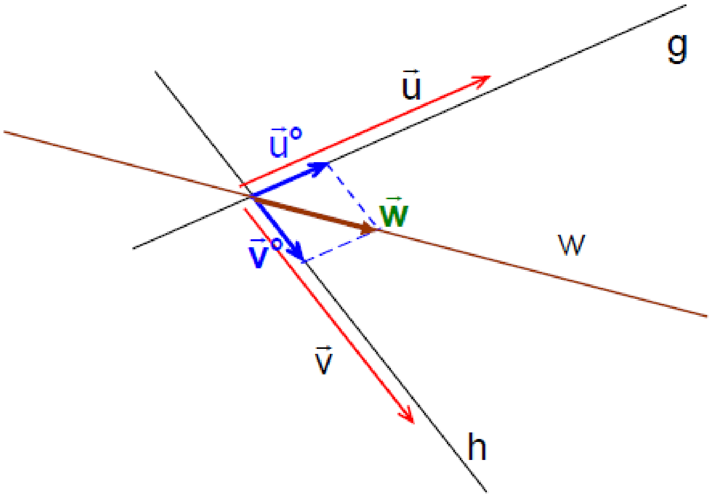
$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

Für unser Beispiel folgt:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{4+3+14}{\sqrt{16+9+49}\sqrt{1+1+4}} = \frac{21}{\sqrt{74}\sqrt{6}}$$

Also folgt $\alpha_1 \approx 85{,}3^\circ$ und der Nebenwinkel $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \approx 94{,}7^\circ$.

Die Winkelhalbierende zweier Geraden



Die Erzeugung des Richtungsvektors der Winkelhalbierenden von g und h beruht auf folgendem **Trick**. *Verwendet man für g und h jeweils Richtungsvektoren mit dem Betrag 1, also* ***Einheitsvektoren****, dann bilden sie bei der Addition eine Parallelogrammfigur, die wegen der gleichen Länge aller Seiten zur Raute wird. In einer Raute halbiert die Diagonale (also die Richtung der Vektorsumme) zugleich den Winkel !!!. Somit ist der Summenvektor auch der Richtungsvektor für die Winkelhalbierende (In der Abbildung leicht verzerrt)*

Beispiel 167:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-7\\4\end{pmatrix}$$

Richtungsvektor von g: $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ mit $|\vec{u}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ also $\vec{u}^\circ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Richtungsvektor von h: $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-7\\4\end{pmatrix}$ mit $|\vec{v}| = \sqrt{16+49+16} = 9$ also $\vec{v}^\circ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\-7\\4\end{pmatrix}$.

Richtungsvektor von w: $\vec{u}^\circ + \vec{v}^\circ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\-7\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\-7\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\-13\\10\end{pmatrix}$.

bzw. $\vec{w} = \begin{pmatrix}7\\-13\\10\end{pmatrix}$ Gleichung der Winkelhalbierenden daher: $w:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\-13\\10\end{pmatrix}$

Als Aufpunkt nimmt man in der Regel den Schnittpunkt von g und h, weil man diesen entweder berechnen kann, oder weil er wie hier im Beispiel gegeben war !

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Man schreibt das neue Produkt mit einem Kreuz, weshalb es auch „**Kreuzprodukt**“ heißt, oder auch einfach nur **Vektorprodukt**.

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Mit $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezeichnen wir die drei Einheitsvektoren,

welche wir als Basis für unsere Raumgeometrie verwenden. Dann gilt

Definition 87:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & a_1 & b_1 \\ \vec{e_2} & a_2 & b_2 \\ \vec{e_3} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1) \quad \text{oder} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Zunächst noch eine weitere Eigenschaft dieses Kreuzproduktes.

Bemerkung 35:

Vertauscht man im Kreuzprodukt die Vektoren, erhält man den Gegenvektor:

$$\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}}$$

Beispiel 168:

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 2 & 4 \\ \vec{e}_2 & -3 & 2 \\ \vec{e}_3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 & 2 \\ \vec{e}_2 & -3 \\ \vec{e}_3 & 1 \end{matrix} = -15 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_3 + 4 \cdot \vec{e}_2 - (-12) \cdot \vec{e}_3 - 2 \cdot \vec{e}_1 - 10 \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -17 \cdot \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 16\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die **Probe** machen, ob dieser Vektor auch zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist. Erinnern Sie sich ? Dazu muß das Skalarprodukt Null werden. Rechnen wir also nach:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} = -34 + 18 + 16 = 0$$

und

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} = -68 - 12 + 80 = 0$$

Damit haben wir an einem Beispiel nachgerechnet, daß das Vektorprodukt zu den gegebenen Vektoren orthogonal ist.

Beispiel 169:

(a) $$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 3 & 2 \\ \vec{e}_2 & 0 & -2 \\ \vec{e}_3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\vec{e}_1 - (-9+2)\vec{e}_2 + (-6-0)\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 8 & -14 \\ \vec{e}_2 & -4 & 7 \\ \vec{e}_3 & 12 & -21 \end{vmatrix} = (84-84)\vec{e}_1 - (-168+168)\vec{e}_2 + (56-56)\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Vektorproduktes

Bemerkung 36:

Eigenschaft 1:

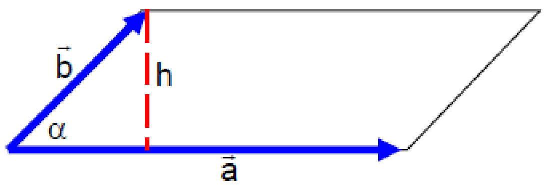
Das Vektorprodukt zweier kollinearer Vektoren ist der Nullvektor.

Eigenschaft 2

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal, dann gilt

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$$

Flächeninhalt eines Parallelogramms

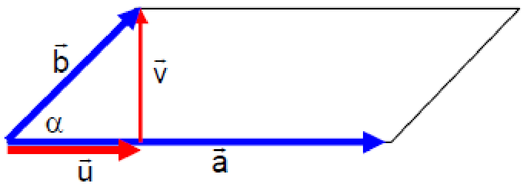


Der Flächeninhalt eines Parallelogramms wird durch die Formel $\mathbf{A} = g \cdot h$ berechnet. Dabei ist $g = \left|\vec{a}\right|$. Die Höhe kann man mit den Mitteln der Trigonometrie berechnen: $\sin\alpha = \frac{h}{\left|\vec{b}\right|} \quad \Rightarrow \quad h = \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$.

So ergibt sich diese erste Formel: $\mathbf{A} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha \qquad (1)$

Kluge Mathematiker haben schnell herausgefunden, daß dies etwas mit dem Vektorprodukt zu tun hat. Und schon der Vergleich dieser Formel mit der Eigenschaft 2 von Seite 10, läßt einen Zusammenhang vermuten.

Um diesen herzustellen müssen wir den Vektor $\vec{b}$ in zwei Komponenten zerlegen, das soll heißen in eine Summe zerlegen, deren erster Summand in Richtung des Vektors $\vec{a}$ zeigt, und deren zweiter Summand senkrecht zu $\vec{a}$ verläuft:



Jetzt ist $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$.

Wir verwenden jetzt Einheitsvektoren. In Richtung des Vektors $\vec{a}$ heißt dieser bekanntlich $\vec{a}^{O}$. Daher kann man schreiben: $\vec{u} = |u| \cdot \vec{a}^{O}$.

Den zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektor, der in der Parallelogrammebene liegt und die Länge 1 hat, heißen wir $\vec{n}^{O}$. Dann gilt: $\vec{v} = |v| \cdot \vec{n}^{O} = h \cdot \vec{n}^{O}$, wobei h die Höhe des Parallelogramms zur Grundseite ist, die durch $\vec{a}$ festgelegt ist.

Nun zurück zum Vektor $\vec{b}$. Wir erhalten mit diesen Hilfsmitteln jetzt:

$$\vec{b} = \vec{u} + \vec{v} = |\vec{u}| \cdot \vec{a}^{O} + h \cdot \vec{n}^{O}.$$

Jetzt spielen wir ein wenig mit unserem Vektorprodukt und schauen, was sich ergibt, wenn wir die beiden Vektoren, die das Parallelogramm aufspannen, also $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit einander multiplizieren:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(|\vec{u}| \cdot \vec{a}^{O} + h \cdot \vec{n}^{O} \right) = \vec{a} \times |u| \vec{a}^{O} + \vec{a} \times h\vec{n}^{O}.$$

In diesem Produkt stecken zwei Produkte, über die wir nach unseren Kenntnissen viel aussagen können: $\vec{a} \times |\vec{u}| \vec{a} = \vec{o}$, weil die beiden Vektor kollinear sind.

$$\vec{a} \times h\vec{n}^{O} = |\vec{a}| \vec{a}^{O} \times h\vec{n}^{O} = |\vec{a}| \cdot h \cdot \left(\vec{a}^{O} \times \vec{n}^{O} \right).$$

Nach der 5. Forderung (Seite 8) ist das Vektorprodukt zweier orthogonaler Einheitsvektoren wieder ein Einheitsvektor, der auf den beiden anderen senkrecht steht. Nennen wir ihn hier einfach $\vec{s}$. Dann haben wir jetzt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} + |\vec{a}| \cdot h \cdot \vec{s} = |\vec{a}| \cdot h \cdot \vec{s}$$

Nehmen wir nun davon den Betrag, dann folgt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot h \cdot |\vec{s}| = |\vec{a}| \cdot h,$$

denn für einen Einheitsvektor gilt ja $|\vec{s}| = 1$.

Und nun reibe man sich die Augen. Das Ergebnis von $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist genau der Inhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, denn $|\vec{a}| = g$ ist ja die Grundseite und h die Höhe.

1. Ergebnis:

Wird ein Parallelogramm von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt, dann kann sein Flächeninhalt so berechnet werden: $\mathbf{A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$

Zum Schluß vergleichen wir noch dieses Ergebnis mit der Formel von Seite 11: und erhalten $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$, wobei α der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.

2. Ergebnis:

Der Betrag des Vektorprodukts kann so berechnet werden:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \bullet \left|\vec{b}\right| \bullet \sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$$

Beispiel 170:

Gegeben sind diese vier Punkte:
$A(4\,|\,2\,|\,-1)$; $B(7\,|\,-3\,|\,1)$; $C(4\,|\,-1\,|\,5)$; $D(1\,|\,4\,|\,3)$

Zeige, daß ein Parallelogramm vorliegt, berechne dessen Inhalt und seine Innenwinkel.

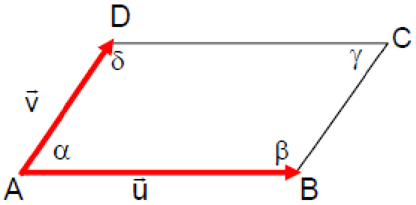
Lösung:

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{DC} = \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Weil $\overline{AB} = \overline{DC}$ sind zwei Gegenseiten parallel und gleich lang, also ist ABCD ein Parallelogramm.

Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & 3 & -3\\ \vec{e}_2 & -5 & 2\\ \vec{e}_3 & 2 & 4\end{vmatrix}=\vec{e}_1\cdot(-20-4)-\vec{e}_2(12+6)+\vec{e}_3(6-15)=\begin{pmatrix}-24\\-18\\-9\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}-24\\-18\\-9\end{pmatrix}\right|=3\cdot\left|\begin{pmatrix}-8\\-6\\-3\end{pmatrix}\right|=3\cdot\sqrt{64+36+9}=3\cdot\sqrt{109}\ (\mathrm{FE})$$

Berechnung der Innenwinkel mit dem Vektorprodukt:

Aus $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cdot\sin\alpha$ folgt $$\boxed{\sin\alpha=\frac{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\bullet\left|\vec{v}\right|}}$$

$$\left|\vec{u}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+25+4}=\sqrt{38}\,,\quad \left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+4+16}=\sqrt{29}$$

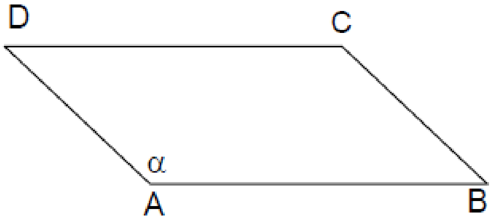
Also folgt $\sin\alpha=\dfrac{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{3\sqrt{109}}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{29}}\quad\Rightarrow\quad\alpha_1=70{,}6^{\circ}$.

ACHTUNG:

Wir haben ein Problem, das ein Schüler meist übersieht.

Das Parallelogramm kann auch diese Form haben:

Und dann ist α ein stumpfer Winkel. Da unser Parallelogramm im Raum gegeben ist, können wir nicht einfach durch eine Skizze überprüfen, welcher Fall vorliegt.



Aus der Rechnung, die wir gemacht haben, können wir auch keine Folgerung ziehen, weil der Sinus für Winkel zwischen 90° und 180° ebenfalls positiv ist. Es gibt jedoch eine weitere Berechnungsmöglichkeit für Winkel, und zwar über das Skalarprodukt. Dort lautet die Formel:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Wird hier das Skalaprodukt negativ, erhalten wir einen Winkel im 2. Feld, also im Bereich zwischen 90° und 180°. Es ist also günstiger, damit zu arbeiten! Hier unsere zugehörige Rechnung:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{29}} = \frac{-9-10+8}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{29}} = \frac{-11}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{29}}$$

Und prompt erleben wir unsere Überraschung, der Winkel ist tatsächlich stumpf: $\alpha = 109{,}4^\circ$ (Zur Kontrolle: Dieser Winkel und der zuvor berechnete ergeben zusammen genau 180° !).

Die restlichen Winkel sind „easy“:

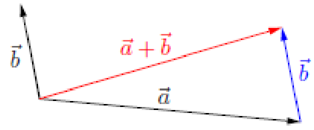
$\beta = 180^\circ - \alpha = 70{,}6^\circ$, $\gamma = \alpha$ und $\delta = \beta$.

Zusammenfassung

Addition

$\vec{a}+\vec{b}$

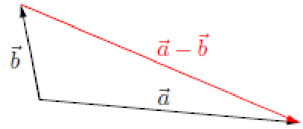
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$



Subtraktion

$\vec{a}-\vec{b}$

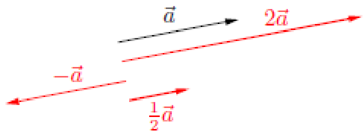
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$$



Skalare Multiplikation

$\lambda \cdot \vec{a}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

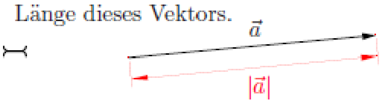


Betrag

$|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$$

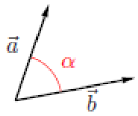
Der Betrag von Vektor $\vec{a}$ ist gerade die Länge dieses Vektors.



Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$



Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man Winkel zwischen 2 Vektoren berechnen.

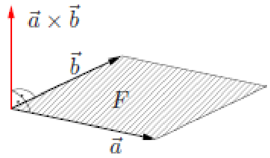
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wichtig: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorprodukt

$\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$



$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = F$

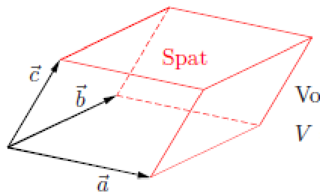
Wichtige Anwendungen:

- Normalvektor einer Ebene $(A, \vec{b}, \vec{c})$: $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$
- Dreiecksfläche: $F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$
- Abstand Gerade $(A, \vec{b})$ und Punkt (P): $d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{b}\right|}{|\vec{b}|}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ kolinear $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

`Spatprodukt`

$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$



Volumen des Spat:
$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$

Wichtige Anwendungen:

- Volumen eines Tetraeders: $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$
- Abstand von 2 Geraden $g\ (A,\vec{b})$ und $h\ (C,\vec{d})$:
  $d=\frac{\left|\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{b}\times\vec{d}\right|}$

`Gesetze für die Grundoperationen`

∘ Kommutativgesetz	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	
∘ Assoziativgesetz	$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$	$(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\,(\mu\cdot\vec{a})$
∘ Distributivgesetz	$\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$	$(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$

`Gesetze für das Rechnen mit dem Skalarprodukt`

∘ Kommutativgesetz	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
∘ Assoziativgesetz	$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$
∘ Distributivgesetz	$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
∘ Quadrat	$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$

`Gesetze für das Rechnen mit dem Vektorprodukt`

∘ Kommutativgesetz	gilt nicht, aber: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
∘ Assoziativgesetz	gilt nicht allgemein
∘ Distributivgesetz	$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
∘	$(x\vec{a})\times\left(y\vec{b}\right)=xy\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

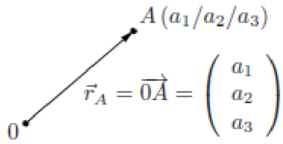
`Gesetze für das Rechnen mit dem Spatprodukt`

∘ Zyklische Permutation	$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]=-\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]$
∘	$\left[x\vec{a},y\vec{b},z\vec{c}\right]=xyz\cdot\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$
∘	$\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right]=\left[\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right]+\left[\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right]$

Ortsvektoren: Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_A = \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

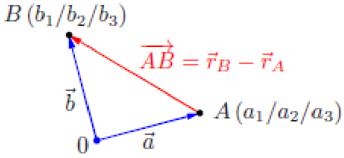


Vektor zwischen zwei Punkten

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

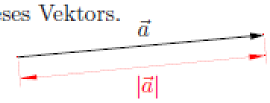


Länge eines Vektors (=Betrag)

$|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Der Betrag von Vektor $\vec{a}$ ist gerade die Länge dieses Vektors.

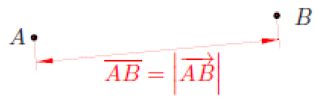


Abstand zwischen zwei Punkten

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{r}_M = \overrightarrow{0M} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right)$$

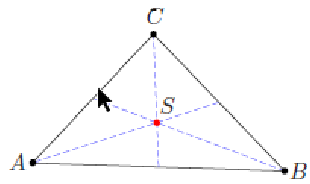
Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$C\,(c_1/c_2/c_3)$

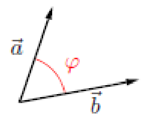
$$\vec{r}_S = \overrightarrow{0S} = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right)$$



Winkel zwischen 2 Vektoren

$\vec{a}, \vec{b}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



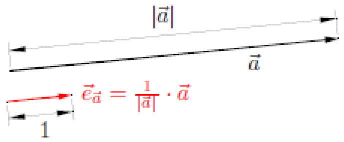
Wichtige Anwendungen:

- Winkel zwischen zwei Geraden $g\ (A, \vec{b})$ und $h\ (C, \vec{d})$:
  $\cos\varphi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{d}|} \right|$
- Winkel zwischen Gerade $g\ (A, \vec{b})$ und Ebene $E\ (C, \vec{n})$:
  $\sin\varphi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{n}|} \right|$
- Winkel zwischen Ebene $E_1\ (A, \vec{n_1})$ und $E_2\ (B, \vec{n_2})$:
  $\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \right|$

Einheitsvektoren (Vektor mit Länge 1)

$\vec{a}$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

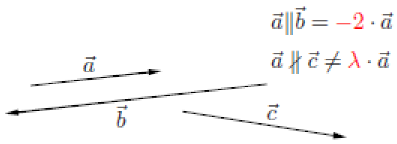


Parallele (kollineare) Vektoren

$\vec{a}, \vec{b}$

Zwei Vektoren sind genau dann kollinear (gleiche oder entgegengesetzte Richtung), wenn sie Vielfache voneinander sind:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ kollinear } \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$



Senkrechte (normale) Vektoren

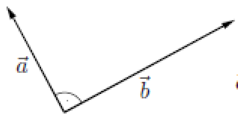
$\vec{a}, \vec{b}$

- $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Senkrechte Vektoren produzieren im 2-Dimensionalen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

- Senkrechte Vektoren produzieren im 3-Dimensionalen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

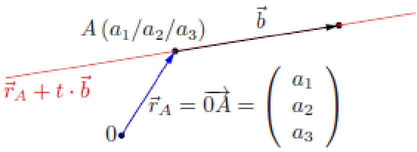


$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Parameterdarstellung der Geraden

Startpunkt: $A\,(a_1/a_2/a_3)$ $\qquad g: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{b}$

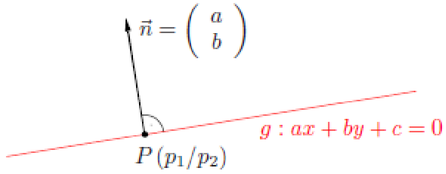
Richtung: $\vec{b}$ $\qquad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$



Koordinatengleichung der Geraden

Normalvektor zu g: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\qquad g: ax + by + c = 0$

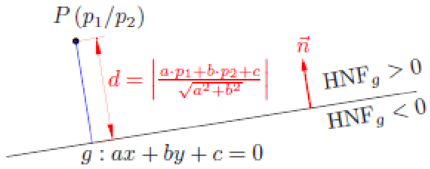
Punkt auf g: $\quad P\,(p_1/p_2)$



HNF (Hesse Normalform, spezielle Form der Koordinatengleichung), Abstand Punkt-Gerade

$g: ax+by+c=0$ $\qquad \mathrm{HNF}_g: \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$

$P\,(p_1/p_2)$ $\qquad d = |\mathrm{HNF}_g\,(P)| = \left| \dfrac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$



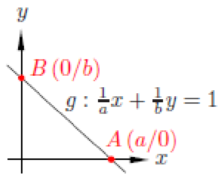
Achsenabschnittsgleichung (spezielle Form der Koordinatengleichung)

$g: ax+by+c=0$

Achsenabschnittsgleichung:

$$\frac{1}{a} \cdot x + \frac{1}{b} \cdot y = 1$$

$\Rightarrow A\,(a/0)\,, B\,(0/b)$ sind die Achsenabschnitte

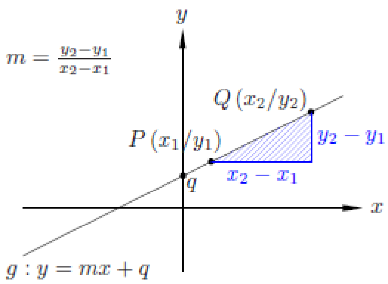


Explizite Darstellung (Lineare Funktion)

$P\,(x_1/y_1)$ $\qquad g: y = mx + q$

$Q\,(x_2/y_2)$

- Steigung: $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- y-Achsenabschnitt: $\quad q$
- Senkrechte Steigung: $\quad m_\perp = -\dfrac{1}{m}$
- Winkel zwischen g und h: $\quad \tan\gamma = \left| \dfrac{m_h - m_g}{1 + m_g \cdot m_h} \right|$



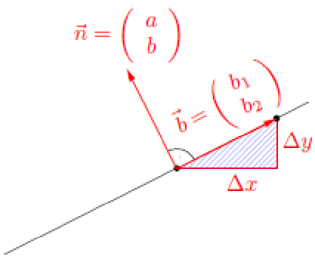
Zusammenhang zwischen Richtungvektor $\vec{b}$, Normalenvektor $\vec{n}$ und Steigung m

$g: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{b}$

$g: ax + by + c = 0$

$g: y = mx + q$

- $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$
- $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{b_2}{b_1} = -\dfrac{a}{b}$

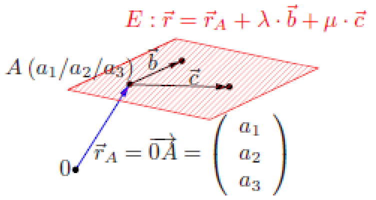


`Parameterdarstellung der Ebene`

Startpunkt: $A\,(a_1/a_2/a_3)$ $\qquad g:\vec{r}=\vec{r}_A+\lambda\cdot\vec{b}+\mu\cdot\vec{c}$

2 Richtungen: $\vec{b},\vec{c}$

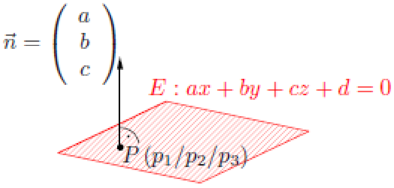
$$g:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$



`Koordinatengleichung der Ebene`

Normalvektor zu E: $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\qquad E:ax+by+cz+d=0$

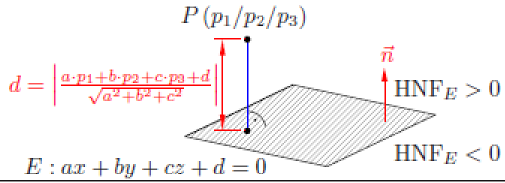
Punkt auf E: $\qquad P\,(p_1/p_2/p_3)$



`HNF (Hesse Normalform, spezielle Form der Koordinatengleichung), Abstand Punkt-Ebene`

$E:ax+by+cz+d=0$ $\qquad \mathrm{HNF}_E:\dfrac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$

$P\,(p_1/p_2/p_3)$ $\qquad d=|\mathrm{HNF}_E\,(P)|=\left|\dfrac{a\cdot p_1+b\cdot p_2+c\cdot p_3+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

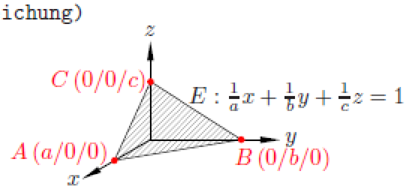


`Achsenabschnittsgleichung (spezielle Form der Koordinatengleichung)`

$E:ax+by+cz+d=0$

Achsenabschnittsgleichung:
$$\frac{1}{a}\cdot x+\frac{1}{b}\cdot y+\frac{1}{c}\cdot z=1$$

$\Rightarrow A\,(a/0/0)\,,B\,(0/b/0)\,,C\,(0/0/c)$
sind die Achsenabschnitte



`Zusammenhang zwischen den Richtungvektoren` $\vec{b},\vec{c}$ `und dem Normalenvektor` $\vec{n}$

$E:\vec{r}=\vec{r}_A+\lambda\cdot\vec{b}+\mu\cdot\vec{c}$

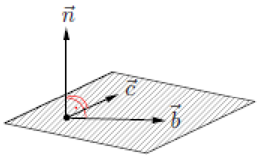
$E:ax+by+cz+d=0$

- $E:\vec{r}=\vec{r}_A+\lambda\cdot\vec{b}+\mu\cdot\vec{c}$

  $\Rightarrow \vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}$ ist ein Normalvektor
- $E:ax+by+cz+d=0$

  $\Rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor

  $\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}$ sind Richtungsvektoren



Komplexe Zahlen

Herkunft

Die Herkunft der Komplexen Zahlen lässt sich wie folgt beschreiben:

Die anfänglichen Probleme der Mathematik bestanden darin, dass man einfache Rechenoperationen bei manchen Aufgaben nicht anwenden konnte.

Die zuerst definierten natürlichen Zahlen reichten irgendwann nicht mehr aus, um alle Probleme der Mathematik zu erfassen. Zum Beispiel bei der einfachen Rechnung 5 geteilt durch 2 erhält man das Ergebnis 2,5, welches nicht im Bereich der natürlichen Zahlen liegt. Hierzu haben die Mathematiker die rationalen Zahlen eingeführt, welche auch Brüche beinhalten. Jedoch ging der Weg nicht direkt von den natürlichen Zahlen zu den komplexen Zahlen, sondern die noch recht unvollständigen natürlichen Zahlen wurden durch die negativen ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen erweitert...

Beispiel 5:

Betrachten wir folgende Gleichung:

$x^2 + 5 = 0$

$x^2 = -5$

Für diese Gleichung gibt es in den reellen Zahlen keine Lösung.

Und jetzt kommen wir zu unserem Thema: Man hat nun doch wieder neue "Zahlen" eingeführt, die auch dieser Gleichung zwei Lösungen gibt. Doch hier wird es schon fast-philosophisch:

Darf man diese neuen Gebilde noch Zahlen nennen?

Das angeschnittene Problem, ob man das, was jetzt eingeführt wird, noch Zahlen nennen darf, findet eine Antwort in einem Prinzip, welches die Mathematiker einmal festgelegt haben. **Hermann Hankel** (1839 – 1873) hat 1867 diese Forderung (genannt das **Permanenzprinzip**) ausgesprochen:

Definition 88:

Neue Objekte dürfen nur dann „Zahlen“ genannt werden, wenn für sie die Rechengesetze gelten, die man für die bisherigen Zahlen kennt.

Dies ist nun eine etwas dehnbare Angelegenheit, wie wir bald sehen werden, denn wir werden lernen, dass man die neuen komplexen Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren kann, aber man kann sie nicht der Größe nach vergleichen. Und damit stellt sich die Frage, welche Gesetze sollen gelten?

Wir definieren jetzt also neue Zahlen und für sie Rechenoperationen. Dazu überprüfen wir die wichtigsten Rechengesetze und geben uns damit zufrieden!

Nichts anderes tut man ja auch im Grunde, wenn man erfahren hat, was 2 ist.

Man rechnet mit dieser Zahl, ohne sie in Wirklichkeit genau zu kennen.

Wenn wir also eine Möglichkeit suchen, Gleichungen der Art

$x^2 = -1; x^2 = -2; x^2 = -3\ usw.$

zu lösen, tun wir das, was bereits der deutsche Mathematiker Leonhard Euler (1707 – 1783) getan hat, wir führen ein Symbol für die Lösung ein, dessen tiefere Bedeutung noch gar nicht klar ist.

Euler hat als Symbol für die Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ das Zeichen i verwendet.

i soll die Abkürzung für „imaginäre Einheit“ sein. (Imaginärheißt eigentlich eingebildet; i ist also eine eingebildete Zahl). Die Probe führt dann auf

$i^2 = -1$

Man kann daher auch diese Schreibweise einführen:

$i = \sqrt{-1}$

Und wir wollen gleich weiterdenken: Wir wissen, daß die Gleichung $x^2 = 4$ neben der Lösung $x = 2$ auch noch die Lösung $x = -2$ hat. Hat die Gleichung $x^2 = -1$ also auch diese beiden Lösungen $x_1 = i$, $x_2 = -i$ also $x_{1,2} = \pm i$?

Nun benötigen wir unser oben erwähntes Permanenzprinzip. Wir verlangen, daß die gewohnten Rechengesetze gelten sollen. Dann folgt also:

$$(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{=1} \cdot i \cdot i = i^2 = -1$$

Also ist auch $-i$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Wir haben $\mathbf{L} = \{\pm i\}$

Dieses Permanenzprinzip läßt auch folgende Rechnungen zu:

$i + i = 1 \cdot i + 1 \cdot i = (1+1) \cdot i = 2 \cdot i$

$5i + 12i = (5+12) \cdot i = 17 \cdot i$

$23i - 15i = (23 - 15) \cdot i = 8 \cdot i$

$i - 5i = (1-5) \cdot i = -4i$

Hier haben wir das sogenannte Distributivgesetzt zugrunde gelegt, welches das Ausmultiplizieren von Klammern regelt:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Wir können auf diese Weise weitere „einfache“ Rechnungen erstellen:

$i \cdot 0 = 0 \cdot i = 0$

$i + 0 = i$

$\frac{i}{i} = 1.$

Das Potenzieren der imaginären Einheit sollte man üben:

$i^2 = -1$ (das folgte aus der Definition: $i = \sqrt{-1}$

$i^3 = \underbrace{i \cdot i}_{=-1} \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$ denn $i^4 = 1$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i$

allgemein: $i^{4n+r} = (i^4)^n \cdot i^r = 1^n \cdot i^r = i^r$ für r = 0 , 1 , 2 oder 3.

Man kann dann auch sofort Vielfache von i potenzieren:

$(3i)^2 = 3^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$

$(-5i)^3 = (-5)^3 \cdot i^2 \cdot i = -125 \cdot (-1) \cdot i = 125\,i$

$(2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16$

Man kann selbstverständlich auch durch i-Potenzen dividieren:

$\frac{4}{i} = \frac{4 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{4i}{-1} = -4i$, allgemein: $\frac{a}{i} = \frac{a \cdot i}{i \cdot i} = \frac{a \cdot i}{-1} = -a \cdot i$

$\frac{5}{i^2} = \frac{5}{-1} = -5$ allgemein: $\frac{a}{i^2} = \frac{a}{-1} = -a$

$\frac{12 \cdot i}{i^3 \cdot i} = \frac{12i}{i^4} = \frac{12i}{1} = 12i$ allgemein: $\frac{a}{i^3} = \frac{a \cdot i}{i^3 \cdot i} = \frac{a \cdot i}{1} = a \cdot i$

Nun schauen wir uns diese Wurzeln an:

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4 \cdot i = 4i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$

$\sqrt{-13} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{13} \cdot i = i\sqrt{13}$

$\frac{2}{\sqrt{-2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}}{-2} = -\sqrt{2} \cdot i$

Man kann selbstverständlich auch durch i-Potenzen dividieren:

$$\frac{4}{i}=\frac{4\cdot i}{i\cdot i}=\frac{4i}{-1}=-4i,\qquad \text{allgemein:}\quad \frac{a}{i}=\frac{a\cdot i}{i\cdot i}=\frac{a\cdot i}{-1}=-a\cdot i$$

$$\frac{5}{i^2}=\frac{5}{-1}=-5\qquad \text{allgemein:}\quad \frac{a}{i^2}=\frac{a}{-1}=-a$$

$$\frac{12\cdot i}{i^3\cdot i}=\frac{12i}{i^4}=\frac{12i}{1}=12i\qquad \text{allgemein:}\quad \frac{a}{i^3}=\frac{a\cdot i}{i^3\cdot i}=\frac{a\cdot i}{1}=a\cdot i$$

Nun schauen wir uns diese Wurzeln an:

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=4\cdot i=4i$$

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=5i$$

$$\sqrt{-13}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{13}\cdot i=i\sqrt{13}$$

$$\frac{2}{\sqrt{-2}}=\frac{2\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}}{-2}=-\sqrt{2}\cdot i$$

oder so: $$\frac{2}{\sqrt{-2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot i}{\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{2}\cdot i}=\frac{2\sqrt{2}\cdot i}{2\,i^2}=\frac{\sqrt{2}\cdot i}{-1}=-\sqrt{2}\cdot i$$

$$\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-18}}=\frac{\sqrt{12}\cdot i}{\sqrt{18}\cdot i}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Darstellung

Die Lösung der folgenden quadratischen Gleichungen zeigt, was wir von diesen neuen-Zahlen erwarten:

$x^2 - 4x + 8 = 0$

Mit dieser Lösungsformel erhält man :

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

Das bei reellen zahlenübeliche Berechnungsverfahren liefert somit die beiden Lösungen $x_1 = 2 + 2i$ und $x_2 = 2 - 2i$.

Wir machen die Probe und wenden die binomischen Formeln an, weil wir verlangen, daß sie gelten sollen:

Probe für $x_1 = 2 + 2i$:

$$(2+2i)^2 - 4(2+2i) + 8 = (4 + 8 \cdot i + 4 \cdot i^2) \cancel{-8} - 8i \cancel{+8} = (4 + 8 \cdot i - 4) - 8i = 0$$

Probe für $x_2 = 2 - 2i$:

$$(2-2i)^2 - 4(2-2i) + 8 = (4 - 8 \cdot i + 4 \cdot i^2) \cancel{-8} + 8i \cancel{+8} = (4 - 8 \cdot i - 4) + 8i = 0$$

Ergebnis: $\mathbf{L} = \{ 2 \pm 2i \}$

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm i \cdot \sqrt{11}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot i$$

$$\mathbf{L} = \left\{ -\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{11} \cdot i \, ; -\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{11} \cdot i \right\}$$

Bei der Lösung dieser Gleichungen sind nun „Zahlen“ aufgetaucht, die aus einer Summe einer reellen Zahl mit einer imaginären Zahl bestehen.

Diese Zahlen nennt man nun komplexe Zahlen:

Definition 2:

Eine Zahl der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ heißt eine **komplexe Zahl**.

$z^* = a - bi$ heißt die **dazu konjugiert komplexe** Zahl.

a heißt der **Realteil** der komplexen Zahl z und b der **Imaginärteil.** $\mathbf{a = Re(z)}$, $\mathbf{b = Im(z)}$.

Jeder komplexen Zahl ordnet man auch noch einen **Betrag** zu. Er soll so berechnet werden:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit ℂ.

Die reellen Zahlen sind davon eine Teilmenge (mit b = 0)

Beispiel 6:

Beispiele zum Betrag und zur konjugiert komplexen Zahl:

a) $z = 3 + 4i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = 3 - 4i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

b) $z = 12 - 5i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = 12 + 5i$
Und beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

c) $z = -6 + 8i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = -6 - 8i$
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

d) $z = 7i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = -7i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \left(\sqrt{0^2 + 7^2}\right) = 7$

e) $z = -4 - 12i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = -4 + 12i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

f) $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$.

Man beachte, dass eine komplexe Zahl z und die zu ihr konjugiert komplexe Zahl den gleichen Betrag besitzen.

Da die reellen Zahlen ganz spezielle komplexe Zahlen sind: $z = r + 0 \cdot i$, ist jede reelle Zahl identische mit der zu ihr konjugiert komplexen. Dies gilt aber nur für reelle Zahlen, denn aus $z^* = z \Leftrightarrow a - bi = a + bi$ folgt sofort $b = 0$!

Rechnen mit komplexen Zahlen.

Um es nochmals zu sagen: Wir führen die komplexen Zahlen so ein, daß wir verlangen, daß die Gesetze der reellen Zahlen gelten sollen. Wir wollen also rechnen, wie wir es aus Rgewohnt sind.

Daraus folgen Ergebnisse für Summen, Differenzen Produkte und Quotienten, die wir dann als Definition für die Rechenarten unserer „neuen“ komplexen Zahlen übernehmen:

Addition von komplexen Zahlen

Beispiel für die Addition: $(9+2i)+(7+4i)=(9+7)+(2+4)i=16+6i$

DEFINITION DER ADDITION:

$$\boxed{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i}$$

Es werden also die Realteile addiert und ebenso die Imaginärteile.

Achtung: Die Addition der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine reelle Zahl.

Beispiel: $(9+2i)+(9-2i)=(9+9)+(2-2)i=18\in\mathbf{R}$

Allgemein: $(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)\cdot i=2a$

Subtraktion von komplexen Zahlen

Beispiel für die Subtraktion: $(9+2i)-(7+4i)=(9-7)+(2-4)i=2-2i$

DEFINITION DER SUBTRAKTION:

$$\boxed{(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\cdot i}$$

Achtung: Die Subtraktion der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine imaginäre Zahl.

Beispiel: $(9+2i)-(9-2i)=(9-9)+(2+2)i=4i$

Allgemein: $(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+(b+b)\cdot i=2bi$

Multiplikation von komplexen Zahlen

Beispiel für die Multiplikation:

$$(9+2i)\cdot(7+4i)=9\cdot 7+9\cdot 4i+2i\cdot 7+2i\cdot 4i=63+36i+14i+8i^2=63+50i-8=55+50i$$

DEFINITION DER MULTIPLIKATION:

$$(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)=a_1a_2+a_1b_2i+b_1i\cdot a_2+b_1i\cdot b_2i=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i+b_1b_2\cdot i^2=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i$$

Die Multiplikation mit der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine reelle Zahl und zwar das Quadrat ihres Betrages!

$$z\cdot z^*=(5+12i)\cdot(5-12i)=5^2-12^2\cdot i^2=25+144=169\,,$$
$$|z|=|5+12i|=\sqrt{25+144}=13\,,\quad \text{also ist}\quad z\cdot z^*=|z|^2\;\Rightarrow\;|z|=\sqrt{z\cdot z^*}$$

Beispiel 7:

Berechnen Sie z·z* für:

$z=2+i$ h) $z=19-15i$ i) $z=\sqrt{11}+5i$

Lösung:

$$z=2+i\;\Rightarrow\;z\cdot z^*=(2+i)(2-i)=4+1=5$$

$$z=19-15i\;\Rightarrow\;z\cdot z^*=(19-15\,i)(19+15\,i)=361+225=586$$

$$z=\sqrt{11}+5i\;\Rightarrow\;z\cdot z^*=(\sqrt{11}+5i)\cdot(\sqrt{11}-5i)=11+25=36$$

Definition 3:

Allgemein: $\boxed{z \cdot z^* = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |a+bi|^2}$!!!

Ein Wort zu dieser sogenannten 4. Binomischen Formel:

$$\boxed{(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2}$$

Sie berechnet das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl.

Kehren wir diese Gleichung um, folgt

$$\boxed{a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)}$$

Man vergleiche mit der 3. Binomischen Formel:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Diese 4. binomische Formel benötigen wir bei der Division komplexer Zahlen.

Division von komplexen Zahlen

Bei den meisten Divisionsaufgaben wird die 4. Binomische Formel benötigt. Schauen wir uns an, wie man durch Erweiterung mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl im Nenner eine reelle Zahl erzeugt::

$$\frac{3-2i}{4+5i}=\frac{(3-2i)\cdot(4-5i)}{(4+5i)\cdot(4-5i)}=$$

Im Nenner wird die 4. Binomische Formel gebraucht: $(4+5i)\cdot(4-5i)=4^2+5^2=41$:

$$=\frac{12-15i-8i+10i^2}{16-25i^2}=\frac{12-15i-8i-10}{16+25}=\frac{2-23i}{41}=\frac{2}{41}-\frac{23}{41}i$$

DEFINITION DER DIVISION:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\cdot\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+b_1ia_2-b_1b_2i^2}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}i$$

Zunächst ist es eine gute Übung, einmal die Probe zu unserer Division zu machen:

$$\left(\frac{2}{41}-\frac{23}{41}i\right)\cdot(4+5i)=\frac{8}{41}+\frac{10}{41}i-\frac{92}{41}i-\frac{115}{41}i^2=\underbrace{\left(\frac{8}{41}+\frac{115}{41}\right)}_{=\frac{123}{41}=3}+\underbrace{\left(\frac{10}{41}-\frac{92}{41}\right)}_{=\frac{82}{41}=-2}i=3-2i$$

$$\frac{9+2i}{7+4i}=\frac{9+2i}{7+4i}\cdot\frac{7-4i}{7-4i}=\frac{63-36i+14i-8i^2}{49+16}=\frac{71-22i}{65}=\frac{71}{65}+\frac{22}{65}i$$

$$\frac{3+5i}{-2+7i}=\frac{(3+5i)\cdot(-2-7i)}{(-2+7i)\cdot(-2-7i)}=\frac{-6+35-21i-10i}{4+49}=\frac{29-31i}{53}=\frac{29}{53}-\frac{31}{53}i$$

$$\frac{16+8i}{2-4i}=\frac{(16+8i)\cdot(2+4i)}{(2-4i)\cdot(2+4i)}=\frac{32-32+16i+64i}{4+16}=\frac{80i}{20}=4i$$

$$\frac{25-5i}{5+i}=\frac{(25-5i)\cdot(5-i)}{(5+i)\cdot(5-i)}=\frac{125-5-25i-25i}{25+1}=\frac{120-50i}{26}=\frac{60}{13}-\frac{25}{13}i$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3i}=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-3i)}{(\sqrt{2}+3i)\cdot(\sqrt{2}-3i)}=\frac{2-3\sqrt{2}\cdot i}{2+3}=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\sqrt{2}\cdot i$$

Berechnung von Kehrwerten

$$(4+3i)^{-1} = \frac{1}{4+3i} = \frac{1\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)} = \frac{4-3i}{16+9} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$$

$$(2-6i)^{-1} = \frac{1}{2-6i} = \frac{(2+6i)}{(2-6i)\cdot(2+6i)} = \frac{2+6i}{4+36} = \frac{2+6i}{40} = \frac{1}{20} + \frac{3}{20}i$$

Allgemeine Rechnung:

$$\boxed{(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1(a-bi)}{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \quad \text{d.h.} \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{z\cdot z^*} = \frac{z^*}{|z|^2}}$$

Im Zähler steht also beim Kehrwertergebnis immer die zum Nenner konjugiert komplexe Zahl und im Nenner steht das Quadrat des Betrags der Zahl. Wer diese Regel im Kopf hat, kann schneller Kehrwerte berechnen. Beispiele:

$$z = 5+2i \;\Rightarrow\; |z|^2 = 25+4 = 29 \;\Rightarrow\; \frac{1}{z} = \frac{5-2i}{29} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$$

$$z = -4-12i \;\Rightarrow\; |z|^2 = 16+144 = 160 \;\Rightarrow\; \frac{1}{z} = \frac{-4+12i}{160} = -\frac{1}{40} + \frac{3}{40}i$$

Es gibt spezielle (und später besonders wichtige) komplexe Zahlen, deren Betrag 1 ist. Für diese wird dann der Nenner 1, und dann ist der Kehrwert dieser Zahl sein konjugiert komplexer Partner:

$z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ hat den Betrag $|z| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1.$

$$z^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i} = \frac{1\cdot\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)}{\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\cdot\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}{1} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

oder: $z = \frac{2}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{5}i \;\Rightarrow\; |z|^2 = \frac{4}{25}\cdot 5 + \frac{1}{25}\cdot 5 = \frac{25}{25} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{z} = \frac{2}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}i:$

Merke: Wenn $|z| = 1$, dann ist $\frac{1}{z} = z^*$

Die Gaußsche Zahlenebene

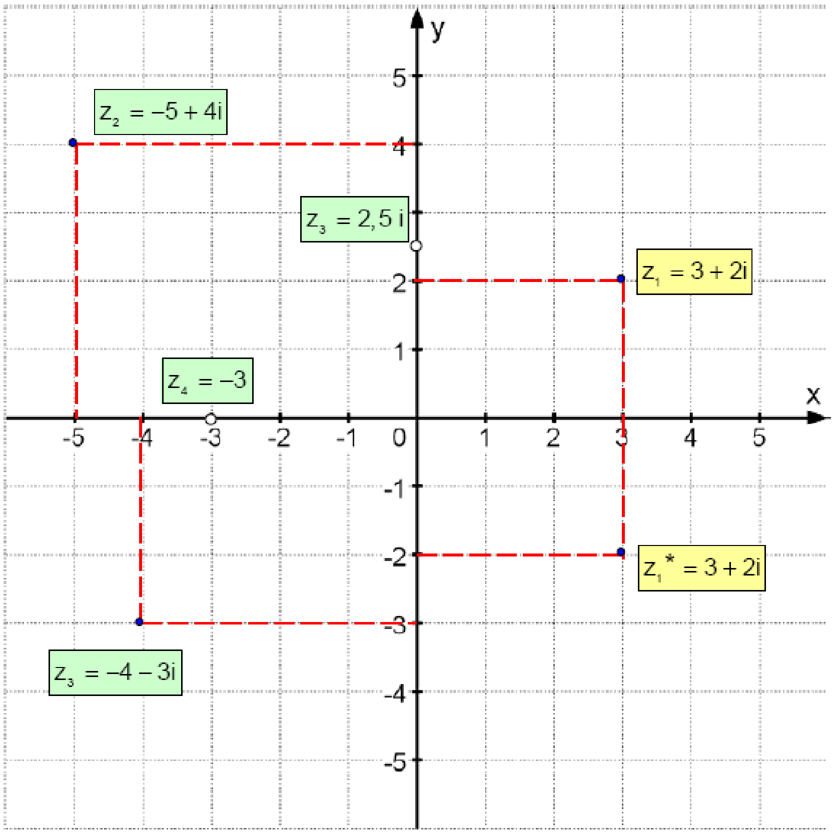
Weil jede komplexe Zahl aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist, dem Realteil und dem Imaginärteil, kann man jede komplexe Zahl als Punkt in einer Ebene mit einem Koordinatensystem darstellen.

Man nennt sie die Gaußsche Zahlenebene oder auch die Ebene der komplexen Zahlen.

Als x-Koordinate verwendet man den Realteil: x = Re(z),

als y-Koordinate den Imaginärteil: y = Im(z):

Die Zahl z = 3 + 2i wird demnach als Punkt mit den Koordinaten (3|2) dargestellt.



Konjugiert komplexe Zahlen haben den gleichen Realteil und entgegengesetzten Imaginärteil, etwa z_1 = 3 + 2i und z_1* =3 – 2i. Ihre Punkte liegen also zueinander spiegelbildlich bezüglich der x-Achse !

Rein imaginäre Zahlen (ohne Realteil) liegen auf der y-Achse, die reellen Zahlen (also ohne einen Imaginärteil) liegen auf der x-Achse.

Damit taucht bereits ein wesentlicher Unterschied zwischen reellen und echt komplexenZahlen auf.

Reelle Zahlen kann man der Größe nach vergleichen.

Man kann alsosagen, a < b oder a = b oder a > b. Eine dieser dreie Beziehungen muss stimmen!

Aber wie ist dies mit anderen komplexen Zahlen z_1 und z_2? Sie sind verschieden,aber man kann keine von den beiden größer oder kleiner als die andere nennen!

Weil komplexe Zahlen durch Zahlenpaare festgelegt sind, gibt es keine Möglichkeit mehr sie der Größe nach zu vergleichen.

Ein erster Hinweis darauf, dass doch eine andere Art „Zahlen“ vorliegt, als es die reellen Zahlen sind.

Aber eines kann man dennoch tun. Man kann für jede reelle Zahl einen Betrag definieren. Der Betrag einer reellen Zahl kann man als Abstand von der Zahl 0 einführen:

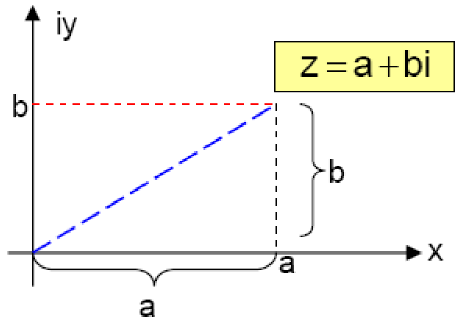
$$|4| = 4; \quad |-4| = 4$$

Und man staune:

Definition 4:

Der Betrag einer komplexen Zahl gibt den Abstand des zugehörigen Punktes vom Ursprung in der Gaußschen Ebene an.

Zur Berechnung benötigen wir den Satz des Pythagoras:



$$\Rightarrow \quad |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Demnach ist $\quad |3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \qquad |3-2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$|7+i| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}\,, \qquad |5+5i| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

Die beiden völlig verschiedenen komplexe Zahlen 7 + i und 5 + 5i haben denselben Betrag. Sie sind also gleich weit vom Ursprung entfernt.

Merke: Zahlen mit dem gleichen Betrag liegen auf einem Kreis um den Ursprung!

Vektoren in der Gauß'schen Zahlenebene

Folgendes Wissen ist uns aus der Vektorrechnung bekannt:

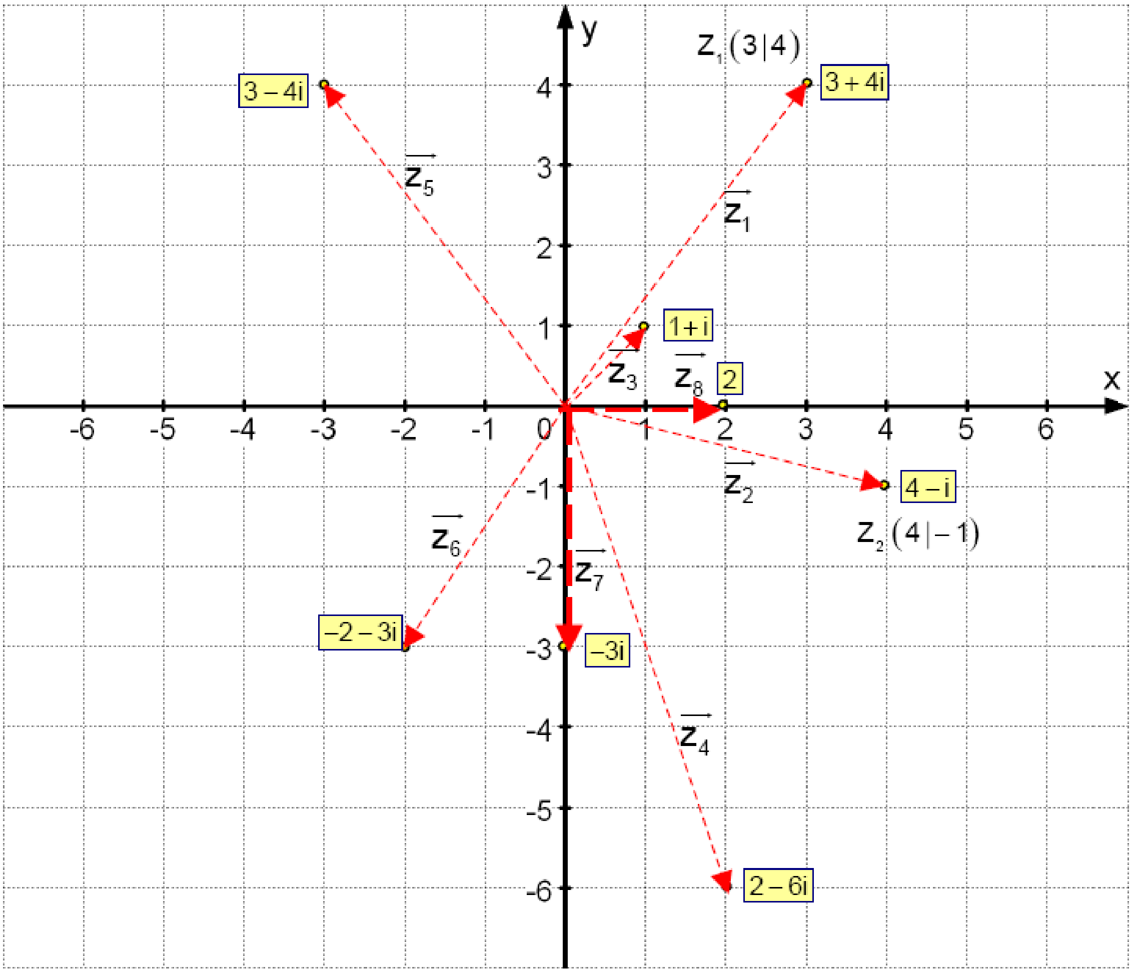
Zu jedem Punkt mit den Koordinaten $P(a|b)$ definiert man einen Pfeil, der, im Ursprung beginnt und in P endet. Man heißt ihn Ortsvektor des Punktes P und schreibt dies so auf:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet, daß dieser Pfeil vom O aus um die Strecke a in x-Richtung und um die Strecke b in y-Richtung zeigt.

$Z_1(3|4)$ hat den Ortsvektor $\vec{z}_1 = \overrightarrow{OZ_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$Z_2(4|-1)$ hat den Ortsvektor $\vec{z}_2 = \overrightarrow{OZ_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$



Diese Abbildung zeigt die Gaußsche Zahlenebene, in der 8 komplexe Zahlen durch-Punkte dargestellt sind. Zu zwei Punkten Z_1 und Z_2 habe ich oben die Ortsvektorenangegeben. Schreiben Sie bitte die Ortsvektoren der anderen sechs Punkte auf.

Zu $z_3 = 1 + i$ gehört $Z_3(1|1)$ mit $\overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{OZ_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu $z_4 = 2 - 6i$ gehört $Z_4(2|-6)$ mit $\overrightarrow{z_4} = \overrightarrow{OZ_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Zu $z_5 = 3 - 4i$ gehört $Z_5(3|-4)$ mit $\overrightarrow{z_5} = \overrightarrow{OZ_5} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Zu $z_6 = -2 - 3i$ gehört $Z_6(-2|-3)$ mit $\overrightarrow{z_6} = \overrightarrow{OZ_6} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Zu $z_7 = -3i$ gehört $Z_7(0|-3)$ mit $\overrightarrow{z_7} = \overrightarrow{OZ_7} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

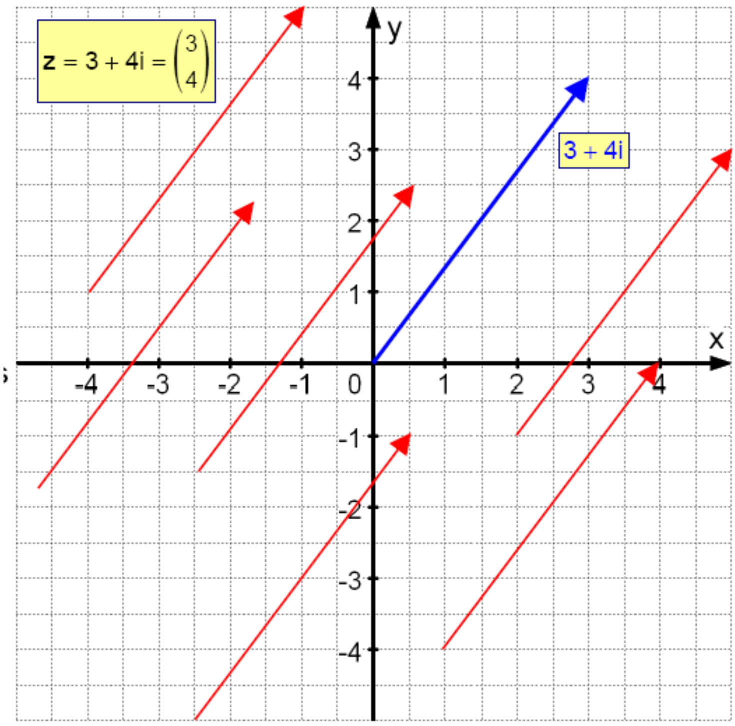
Zu $z_8 = 2$ gehört $Z_8(2|0)$ mit $\overrightarrow{z_8} = \overrightarrow{OZ_8} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

So kann man also jeder komplexen Zahl, die man bekanntlich als Punkte der Gaußschen Ebene darstellen kann, einen Pfeil zuordnen, der vom Ursprung bis zu diesem Punkt zeigt und den irreführenden Namen Ortsvektor hat.

Irreführend daher, weil es ein an den Ursprung gebundener Pfeil ist, und daher kein Vektor sein kann.

„Richtige“ Vektoren sind nicht ortsgebunden und bestehen jeweils aus unendlich vielen Pfeilen, die alle die gleichen Koordinaten haben, und damit auch gleiche Länge und Richtung.

Nebenstehende Abbildung zeigt zunächst den zur komplexen Zahl z = 3 + 4i gehörenden Ortsvektor in blau, der von O zum Punkt Z (3|4)zeigt.



Dann aber enthält die Abbildung sechs weitere Pfeile, die alle die „Koordinaten“ 3 und 4 haben, also von ihrem Anfangspunkt aus um Δx=3nach rechts und um Δy=4nach oben zeigen. Alle diese Pfeile gehören zum gleichen Vektor, der aus allen Pfeilen besteht, die diese Eigenschaft haben.

Jeder dieser unendlich vielen Pfeile ist ein Repräsentant des Vektors

$\vec{z} = \overrightarrow{3+4i} = \binom{3}{4}$

Warum tut man dies ? Warum schafft man diesen Vektorbegriff, der als unendliche Menge von Pfeilen einer komplexen Zahl zugeordnet wird ? Weil man mit den Gesetzen der Vektorrechnung einiges anstellen kann, was sich als nützlich erweisen wird.

Schauen wir uns dazu einige Repräsentanten der beiden Vektoren

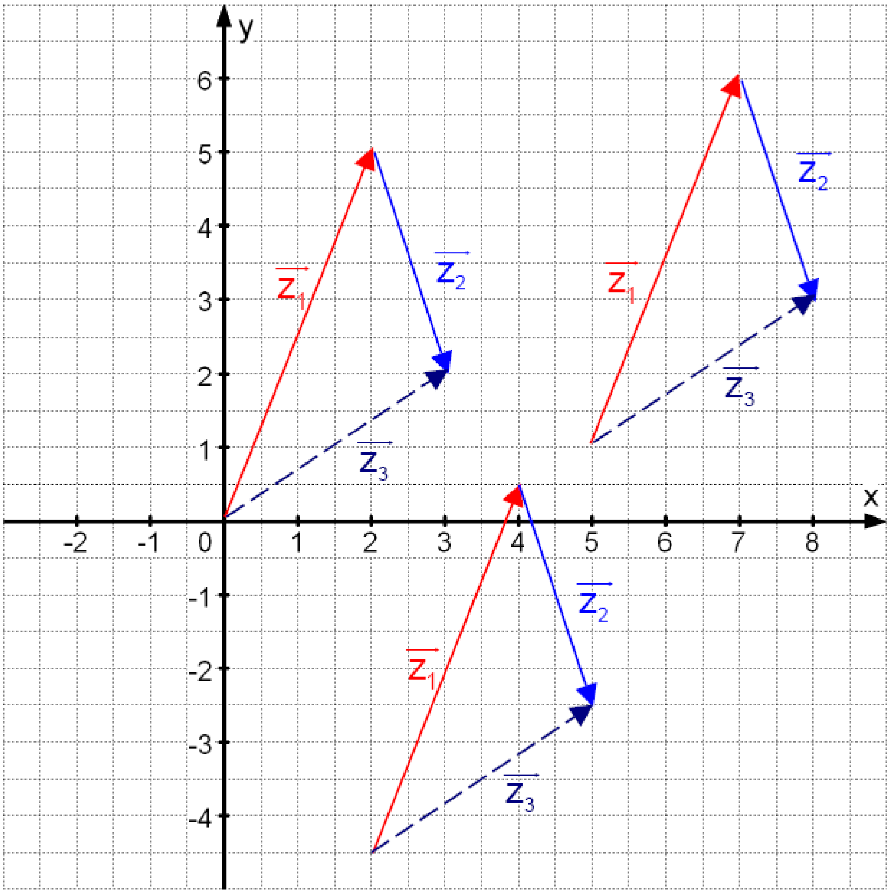
$z_1 = 2+5i$ bzw. $\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $z_2 = 1-3i$ bzw. $\overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ an:

Zu jedem dieser zwei Vektoren, haben wir drei Pfeile gezeichnet, die zu $\overrightarrow{z_1}$ mit beliebigen Anfangspunkten, die zu $\overrightarrow{z_2}$ jedoch lassen wir an den Endpunkten der anderen beginnen. Verbinden wir dann Anfangspunkt von $\overrightarrow{z_1}$ mit „zugehörigem“ Endpunkt von $\overrightarrow{z_2}$, dann ergeben sich an jedem der drei Konstruktionen Pfeile, die aufgrund ihrer „Gleichartigkeit“ alle wiederum Repräsentanten desselben Vektors sind: $\overrightarrow{z_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ denn sie zeigen alle um 1 nach rechts und um 3 nach unten.

Was wir hier gemacht haben, nennt man in der Vektorrechnung eine **Vektoraddition:**

Man wählt den ersten Repräsentanten frei, den zweiten dann so, daß er an dessen Endpunkt beginnt und verbindet dann Anfangspunkt mit Endpunkt.

Dazu schreibt man: $\overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



Und nun erinnern wir uns, daß wir auf diese Vektoren ja über komplexe Zahlen gekommen sind: Jede komplexe Zahl kann man als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene darstellen und zu jedem dieser Punkte gibt es einen Ortsvektor, also den Pfeil von O aus. Und dann haben wir dazu beliebige Vektoren gebildet, die alle Pfeile beinhalten, welche dieselben Vektorkoordinaten haben.

Und diese Vektoren haben wir jetzt addiert.

Schreiben wir uns jetzt die Addition der zugehörigen komplexen Zahlen auf:

$$\overline{z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = z_1 + z_2 = (2+5i) + (1-3i) = 3-2i$$

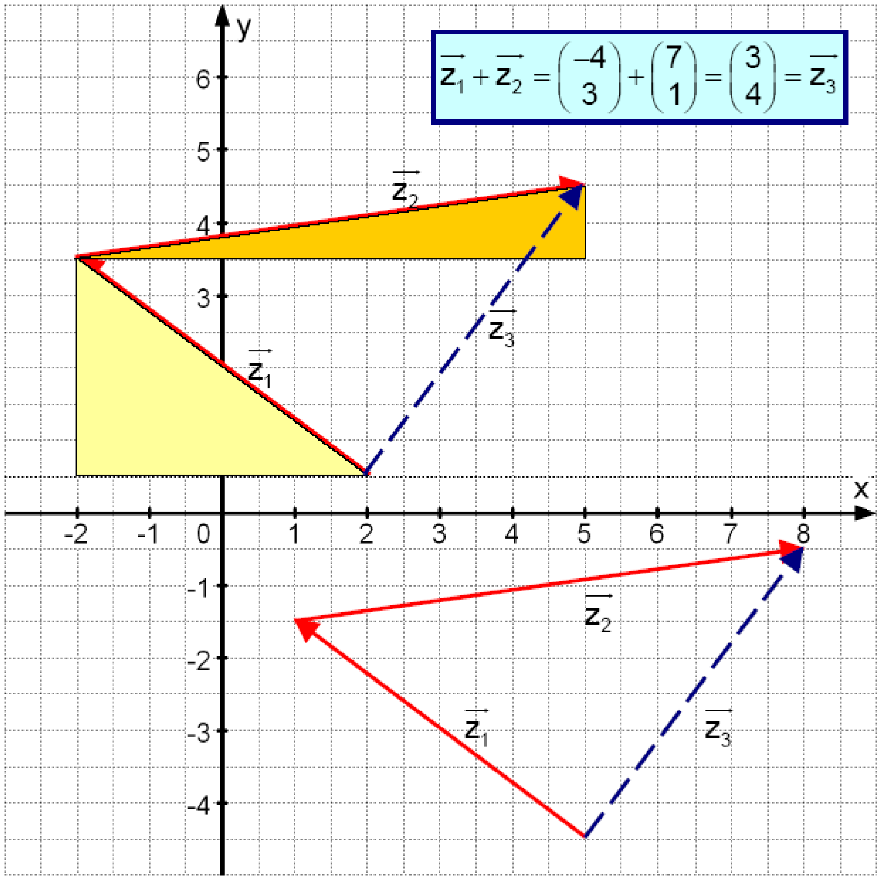
Dann erkennt man, daß der Summenvektor genau der komplexen Zahl entspricht, die man erhält, wenn man die beiden komplexen Zahlen algebraisch addiert.

Definition 5:

Stellt man komplexe Zahlen als Vektoren dar, dann entspricht die Vektoraddition genau der algebraischen Addition der komplexen Zahlen.

Beispiel 8:

Stelle die Addition der Zahlen z_1= -4+3i und z2= 7 + i vektoriell dar.

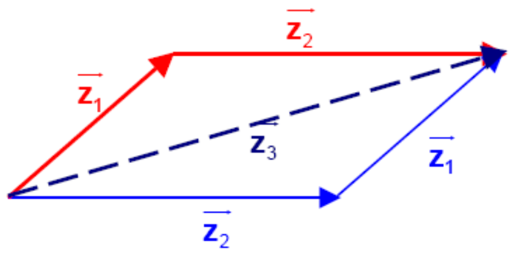


Auch hier wurde diese Vektoraddition von zwei verschiedenen Ausgangspunkten aus konstruiert. Das Ergebnis, also die beiden Pfeile zu z_3, haben beide dieselbe Richtung, nämlich $\Delta x = 3$, $\Delta y = 4$

Also stellt man fest, daß diese Vektoraddition davon unabhängig sein muß, wo sie konstruiert wird. Das Ergebnis stimmt immer mit der Addition der komplexen Zahlen überein..

Eine nicht unwichtige Beobachtung ist auch diese:

Die Konstruktion der Vektoraddition kann auch so erfolgen, daß man aus den beiden Pfeilen ein Parallelogramm bildet. Die Vektorsumme gehört dann zur Hauptdiagonalen des Parallelogramms:



Verfolgt man die Verkettung der beiden roten Pfeile, erhält man $\vec{z_1} + \vec{z_2} = \vec{z_3}$

Verfolgt man die Verkettung der beiden blauen Pfeile, erhält man $\vec{z_2} + \vec{z_1} = \vec{z_3}$.

Daraus erkennt man, daß die Summanden vertauschbar sind:

$$\vec{z_1} + \vec{z_2} = \vec{z_2} + \vec{z_1}$$

Man erkennt, daß die Hauptdiagonale in diesem Parallelogramm die Vektorsumme darstellt.

ACHTUNG: Die Nebendiagonale stellt die Differenzen $\overrightarrow{z_1} - \overrightarrow{z_2}$ oder $\overrightarrow{z_2} - \overrightarrow{z_1}$ dar.
Dies überprüfen wir jetzt an einem Beispiel. Es sei $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 5 + 4i$

Von $A(-3|-1)$ aus abgetragen wird aus $\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, was genau $z_1 + z_2 = 7 + i$ entspricht.

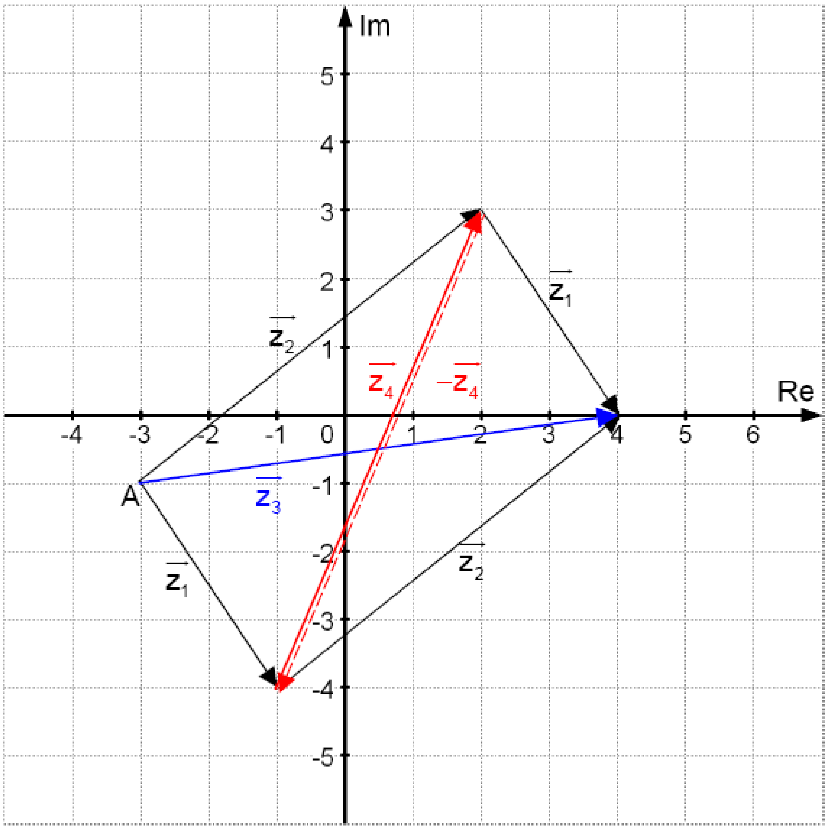
Nun zur Differenz:

$$\overrightarrow{z_4} = \overrightarrow{z_2} - \overrightarrow{z_1}$$

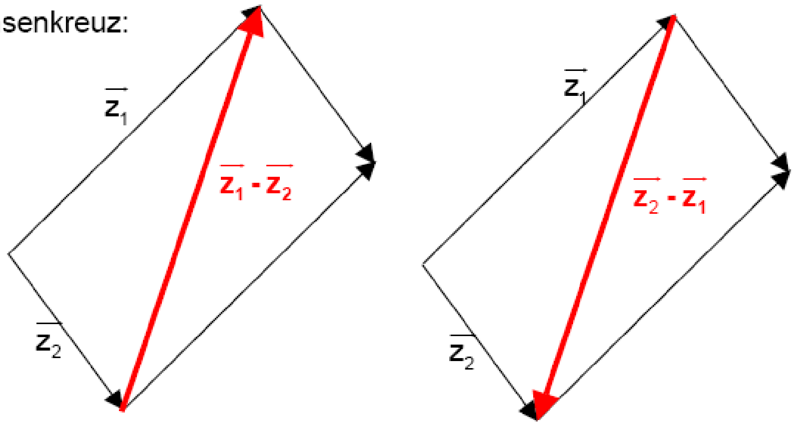
$$\overrightarrow{z_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und $\overrightarrow{z_5} = \overrightarrow{z_1} - \overrightarrow{z_2} = -\overrightarrow{z_4}$

$$\overrightarrow{z_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$



Ohne Achsenkreuz:



Es gibt eine einfache **Merkregel** für die Subtraktion zweier Vektoren:

1. Zeichne zwei Pfeile der zu subtrahierenden Vektoren mit gemeinsamem Anfangspunkt.

2. Verbinde die Spitzen.

3. Für $\vec{z_1} - \vec{z_2}$ zeichne die Pfeilspitze bei $\vec{z_1}$ ein,
   für $\vec{z_2} - \vec{z_1}$ zeichne die Pfeilspitze bei $\vec{z_2}$ ein,

Und wer unsicher ist, macht die Probe wie folgt:

Die beiden aneinanderhängenden Pfeile stellen eine Summe dar, der dritte das Ergebnis.

In der oberen linken Abbildung rechnen wir also für die Probe so:

$\vec{z_2} + \left(\vec{z_1} - \vec{z_2}\right) = \vec{z_2} + \vec{z_1} - \vec{z_2} = \vec{z_1}$: Die Probe stimmt.

Für die rechte Abbildung:

$\vec{z_1} + \left(\vec{z_2} - \vec{z_1}\right) = \vec{z_1} + \vec{z_2} - \vec{z_1} = \vec{z_2}$: Die Probe stimmt.

Es ist nicht Zweck dieser Darstellungen, hier ausführlich Vektorrechnung mit komplexen Zahlen zu betreiben. Es gibt jedoch ein physikalischen Anwendungsmodell für Wechselstrom-Wiederstände, die dies benötigen.

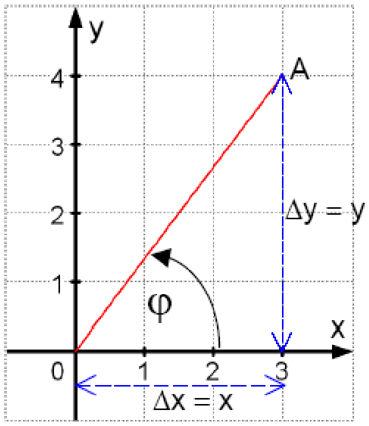
Hier begnügen wir uns damit, aufgezeigt zu haben. daß man komplexe Zahlen wie Vektoren behandeln kann und vektorielle Addition und Subtraktion der Addition und Subtraktion der komplexen Zahlen entsprechen.

Polarkoordinaten

Die Lage eines Punktes im Achsenkreuz kann man durch zwei Koordinaten festlegen.

Dies können die bekannten x-, y-Koordinaten (genannt die kartesischen Koordinaten) sein oder eine ganz andere Möglichkeit, die sogenannten Polarkoordinaten. Dabei benennt man den Abstand des Punktes A vom Ursprung und den Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke OA:

Beispiele:



Der Punkt $A(3|4)$ hat vom Ursprung den Abstand

$\overline{OA} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Und der Winkel φ zwischen der x-Achse und der Strecke OA wird so berechnet:

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{4}{3} \approx 51{,}13^\circ.$$

Ja, und mit diesen beiden Angaben $\overline{OA}$ und φ ist der Punkt A auch eindeutig festgelegt:

Manche schreiben dies unter Verwendung eckiger Klammern so: $A[5;51{,}13^\circ]$.

Nebenstehende Abbildung zeigt 6 Punkte, die alle denselben Abstand von O haben, nämlich 5.

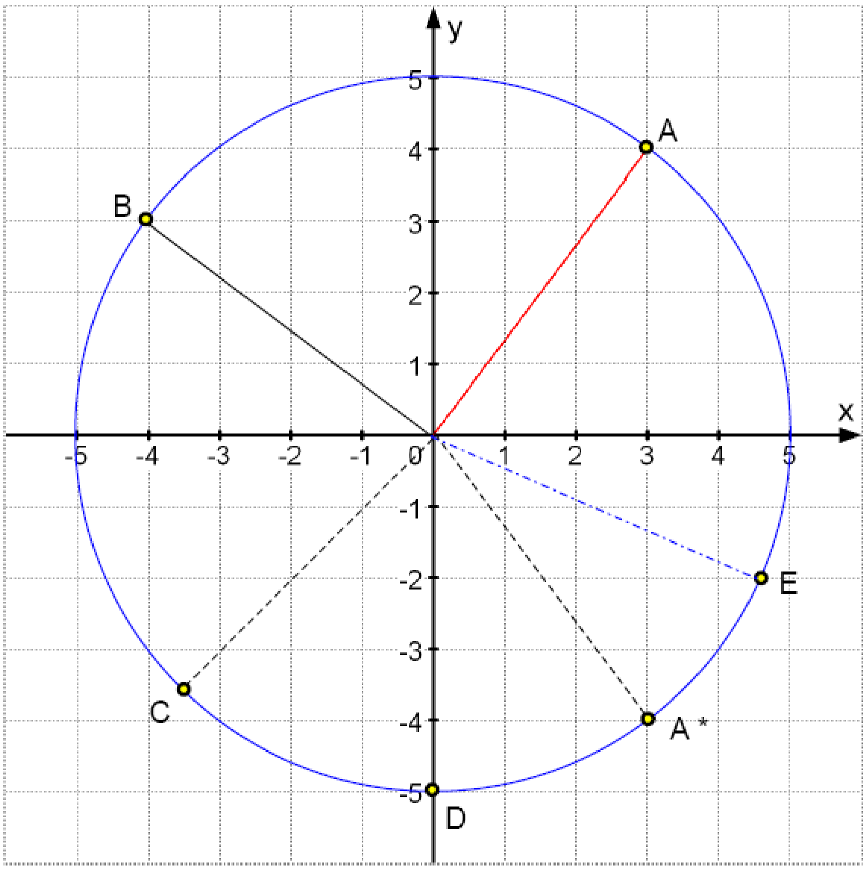
Hier ihre kartesischen Koordinaten:

$A(3|4)$, $A^*(3|-4)$,
$B(-4|3)$,
$C\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$
$D(0|-5)$, $E\left(\sqrt{21}|-2\right)$

Hierzu diese

AUFGABE:

Beweise, daß sie alle von O den Abstand 5 haben und berechne den zugehörigen Winkel gegen die positive x-Achse!



Lösung:

$A(3|4) \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\tan\varphi_A = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi_A = \arctan\frac{4}{3} \approx 53{,}13^\circ$ (siehe oben)

$A^*(3|-4) \Rightarrow \overline{OA^*} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

A* liegt im 4. Feld, also gilt: $\varphi_{A^*} = 360^\circ - \varphi_A \approx 306{,}87^\circ$

$B(-4|3) \Rightarrow \overline{OB} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Der Punkt B liegt im 2. Feld. Also rechnen wir so:

$\tan\varphi_B' = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi_B' \approx 36{,}87^\circ \Rightarrow \varphi_B \approx 180^\circ - 36{,}87^\circ = 143{,}17^\circ$

$C\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \Rightarrow \overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}\cdot 2 + \frac{25}{4}\cdot 2} = \sqrt{25} = 5$

C liegt im 3. Feld, also berechnet man den Winkel so:

$\tan\varphi_C' = \left|\frac{y}{x}\right| = 1 \Rightarrow \varphi_B' = 45^\circ \Rightarrow \varphi_C = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

$D(0|-5) \Rightarrow \overline{OD} = 5$. D liegt auf der negativen y-Achse: $\varphi_D = 270^\circ$

$E\left(\sqrt{21}|-2\right) \Rightarrow \overline{OE} = \sqrt{21+4} = \sqrt{25} = 5$

E liegt im 4. Feld, also rechnen wir so:

$\tan\varphi_E' = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow \varphi_E' \approx 23{,}58^\circ \Rightarrow \varphi_E \approx 360^\circ - 23{,}58^\circ = 336{,}42^\circ$

Bemerkung 1:

(1) Damit bei diesen Polarkoordinaten Eindeutigkeit herrscht, beschränkt man den Winkel φ auf das Intervall $\left[\,0\,;360^\circ\,\right[$, d.h. $0^\circ \le \varphi < 360^\circ$.
Den Winkel φ nennt man auch das Argument der komplexen Zahl.
Bei Näherungswerten wie $\varphi_E' \approx 23{,}58^\circ$ schreibt man oft auch $\varphi_E' = 23{,}58^\circ$

(2) Man kann statt dem Gradmaß die Winkel auch im Bogenmaß angeben. Dann beschränkt man sich auf das Intervall $[\,0\,;2\pi\,[$.

(3) Die Abbildung auf der Seite zuvor kann verdeutlichen, daß man die erste Koordinate auch Radius nennt, und die zweite Drehwinkel.

(4) Nun wollen wir den Bezug zu den komplexen Zahlen wieder herstellen. Jeder Punkt stellt eine komplexe Zahl dar.

Beispiel 9:

Schreiben Sie die zugehörigen 6 komplexen Zahlen auf und die Polarkoordinaten dazu.

$A(3|4) \Rightarrow a = 3+4i$ mit $A[\,5\,;53{,}13^\circ\,]$

$A^*(3|-4) \Rightarrow a^* = 3-4i$ mit $A^*[\,5\,;306{,}87^\circ\,]$

$B(-4|3) \Rightarrow b = -4+3i$ mit $B[\,5\,;143{,}13^\circ\,]$

$C\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \Rightarrow c = -\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{2}\,i$ mit $C[\,5\,;225^\circ\,]$

$D(0|-5) \Rightarrow d = -5i$ mit $D[\,5\,;270^\circ\,]$

$E\left(\sqrt{21}\,|-2\right) \Rightarrow e = \sqrt{21}-2i$ mit $E[\,5\,;336{,}42^\circ\,]$

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln

(1) Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten:

$A(x_A|y_A) \Rightarrow r = \overline{OA} = \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2}$ und $\tan\varphi_A = \frac{y_A}{x_A}$ falls A im 1. Feld liegt.

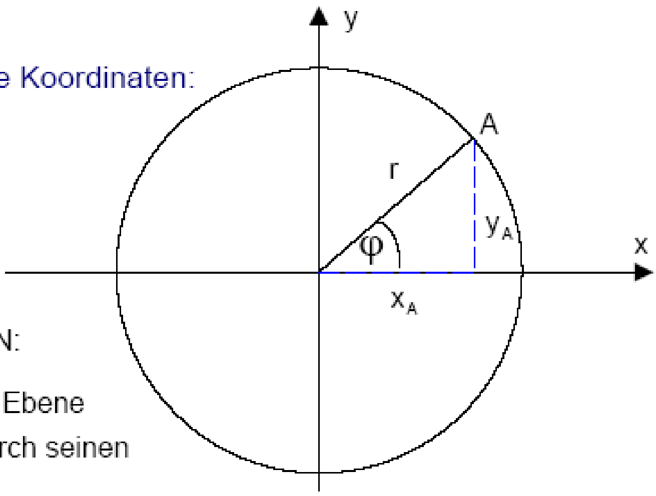
Sonst berechnet man $\tan\varphi_A{}' = \left|\frac{y_A}{x_A}\right|$ und im 2./3. Feld: $\varphi_A = 180^\circ \pm \varphi'$,

im 4. Feld: $\varphi_A = 360^\circ - \varphi_A{}'$.

(2) Polarkoordinaten $\rightarrow$ Kartesische Koordinaten:

$x_A = r\cdot\cos\varphi$, $y_A = r\cdot\sin\varphi$.

(Dies gilt für alle vier Felder).



ANWENDUNG AUF KOMPLEXE ZAHLEN:

(a) $z_1 = 3+4i$ wird in der Gaußschen Ebene durch den Punkt $Z_1(3|4)$ bzw. durch seinen Ortsvektor $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ dargestellt.

Wir oben gezeigt worden ist, besitzt diese Zahl die Polarkoordinaten:

$|z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ und $\tan\varphi_1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\frac{4}{3} \approx 53{,}13^\circ$.

(b) Die zu z_1 konjugiert komplexe Zahl $z_1^* = 3-4i$ besitzt denselben Betrag

$|z_1^*| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ und dazu $\varphi_1^* = 360^\circ - \varphi_1 \approx 306{,}87^\circ$.

(c) Die komplexe Zahl $z_2 = -4 + 3i$ besitzt den Betrag $|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ und $\tan\varphi_2' = \left|\frac{3}{-4}\right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi_2' \approx 36{,}87^\circ$. Weil der zu z_2 gehörige Punkt im 2. Feld liegt, folgt für das Argument $\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_2' \approx 143{,}13^\circ$

(d) $z_3 = -8 - 5i$ hat den Betrag $|z_3| = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$ und $\tan\varphi_3' = \left|\frac{-5}{-8}\right| = \frac{5}{8} \Rightarrow \varphi_3' \approx 32{,}0^\circ$. Weil der zu z_3 gehörende Punkt im 3. Feld liegt, folgt $\varphi_3 = 180^\circ + \varphi_3 \approx 212{,}0^\circ$.

(e) Eine komplexe Zahl hat den Betrag 13 und das Argument $\varphi_4 = 240^\circ$.
Dann hat der zugehörige Punkt diese Kartesischen Koordinaten:

$x_4 = 13 \cdot \cos 240^\circ = -6{,}5$ und
$y_4 = 13 \cdot \sin 240^\circ = 13 \cdot \left(-\sin 60^\circ\right) = 13 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -6{,}5 \cdot \sqrt{3}\ (\approx -11{,}26)$
Also ist $z_4 = -6{,}5 - 6{,}5\sqrt{3} \cdot i$.

(f) $|z_5| = \sqrt{8}$ und $\varphi_5 = 45^\circ$ ergibt

$x_5 = \sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ = \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{2} = 2$ und $y_5 = \sqrt{8} \cdot \sin 45^\circ = \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{2} = 2$.

Also ist $z_5 = 2 + 2i$.

Komplexe Einheitsvektoren

Die Moivre-Formel

Einerseits gilt $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. Und andererseits ist $z = x + iy$.
Setzen wir die ersten Gleichungen in die letzte ein, folgt:

$$z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Statt des Radius kann man auch den Betrag verwenden, was zu diese Schreibweise führt:

$$\boxed{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} \qquad (1)$$

Für den Klammerterm gibt es in der Mathematik verschiedene Abkürzungen, die originellste ist „cis φ" wobei die Buchstaben „cis" so entstanden sind: $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$
Wir verwenden günstiger die ***Abkürzung***

$$\boxed{E(\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi} \qquad (2)$$

Damit wird aus Gleichung (1)

$$\boxed{z = |z| \cdot E(\varphi)} \qquad (3)$$

Dies ist einfach eine kürzere Schreibweise für die Polarform der komplexen Zahl z.

Beispiel 10:

(a) $z_1 = 3 + 4i$ hat $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ und
$\tan\varphi_1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\frac{4}{3} \approx 53{,}13^\circ. \Rightarrow z_1 \approx 5 \cdot E(53{,}13^\circ)$

(b) Für die zu z_1 konjugiert komplexe Zahl $z_1{}^* = 3 - 4i$ gilt
$|z_1{}^*| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ und dazu $\varphi_1{}^* = 360^\circ - \varphi_1 \approx 306{,}87^\circ$.
$\Rightarrow z_1{}^* = 5 \cdot E(306{,}87^\circ)$

(c) $z_2 = -4 + 3i = 5 \cdot E(143{,}13^\circ)$

(d) $z_3 = -8 - 5i = \sqrt{89} \cdot E(212^\circ)$

(e) $z_4 = -6{,}4 - 6{,}5\sqrt{3} \cdot i = 13 \cdot E(240^\circ)$

Eigenschaften der Funktion E(φ)

(1) $E(\varphi) = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$ ist eine komplexe Zahl mit dem Betrag 1, denn es gilt

$$\boxed{|E(\varphi)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1} \qquad (4)$$

und zwar für jeden Winkel φ.

In der Gaußschen Zahlenebene haben somit alle Punkte, die zu diesen Zahlen $E(\varphi)$ gehören, vom Ursprung den Abstand 1, sie liegen somit auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius 1 (genannt Einheitskreis). Und auch die Ortsvektoren dieser Punkte haben den Betrag 1, weshalb man (in vektorieller Deutung) $E(\varphi)$ auch einen **komplexen Einheitsvektor** nennt !

(2) Diese Funktion ist periodisch mit 2π, da dies ja für Sinus und Kosinus gilt.

Also folgt: $\boxed{E(\varphi + k\cdot 2\pi) = E(\varphi)}$ (5) für ganzzahliges k.

(3) Eine besonders wichtige Eigenschaft wir jetzt hergeleitet. Sie ergibt sich aus der Fragestellung, was denn aus dem **Produkt** zweier solcher Einheitsvektoren wird.

Es seien φ_1 und φ_2 zwei Winkel aus dem Intervall $[0;360°[$ bzw. $[0;2\pi[$.

Dann ist

$$\begin{aligned} E(\varphi_1)\cdot E(\varphi_2) &= (\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2) \\ &= \cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \underbrace{i^2}_{-1}\cdot\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 \\ &= (\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i\cdot(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2) \end{aligned}$$

Wir verwenden jetzt diese Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_2$$

Daraus folgt $E(\varphi_1)\cdot E(\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

Die rechte Seite ist gerade der Einheitsvektor für den Summenwinkel $\varphi_1 + \varphi_2$.
Daher kann man das Ergebnis kurz so schreiben:

$$\boxed{E(\varphi_1)\cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad (6)$$

Beispiel 11:

(a) $E(30°)\cdot E(60°) = E(30° + 60°) = E(90°) = \cos 90° + i\cdot\sin 90° = 0 + i = i$

(b) $E(60°)\cdot E(75°) = E(60° + 75°) = E(135°) = \cos 135° + i\cdot\sin 135° = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(c) Aus der letzten Gleichung können wir $E(75^\circ)$ berechnen:

Es ist $E(60^\circ) = \cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$E(60^\circ)\cdot E(75^\circ) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$E(75^\circ) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{E(60^\circ)} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{3}}$$

Dabei wurde mit 2 erweitert , nun noch erweitern mit $1 - i\sqrt{3}$:

$$= \frac{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\cdot(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})\cdot(1 - i\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{6} + i\sqrt{2} - i^2\sqrt{6}}{1 - 3\cdot i^2} = \frac{-\sqrt{2} + i\cdot(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \sqrt{6}}{1 + 3}$$

$$E(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i\cdot\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(d) $E(30^\circ)\cdot E(330^\circ) = E(30^\circ)\cdot E(-30^\circ) = E(360^\circ) = E(0) = \cos 0^\circ + i\cdot\sin 0^\circ = 1$

Also folgt: $$E(330^\circ) = \frac{1}{E(30^\circ)}$$

Allgemein: $E(\varphi)\cdot E(360^\circ - \varphi) = E(\varphi + 360^\circ - \varphi) = E(360^\circ) = E(0^\circ) = 1$

Wegen der Periodizität von E ist weiterhin $E(360^\circ - \varphi) = E(-\varphi)$ daher gilt:

$$\boxed{E(-\varphi) = E(360^\circ - \varphi) = \frac{1}{E(\varphi)}} \qquad (7)$$

Nun berechnen wir $\frac{1}{E(\varphi)} = \frac{1}{\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi}$ und erweitern wie gewohnt so

mit $\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi$, damit folgt:

$$\frac{1}{E(\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi - i\cdot\sin\varphi$$

denn im Nenner steht $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Nun haben wir zwei Ergebnisse;

$$\boxed{\frac{1}{E(\varphi)} = \frac{1}{\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi} = \cos\varphi - i\cdot\sin\varphi} \qquad (7a)$$

und wegen (7) ist dann auch

$$\boxed{E(-\varphi) = \cos\varphi - i\cdot\sin\varphi} \qquad (7b)$$

(f) $E(\varphi)^2 = E(\varphi) \cdot E(\varphi) = E(\varphi + \varphi) = E(2\varphi)$

$E(\varphi)^3 = E(\varphi)^2 \cdot E(\varphi) = E(2\varphi) \cdot E(\varphi) = E(3\varphi)$

usw. ergibt

$$\boxed{E(\varphi)^n = E(n \cdot \varphi)} \qquad (8)$$

Anmerkung:

Diese Gleichung (6), die auch **Formel von Moivre für Potenzen** heißt, zeigt, daß die Funktion E eine Exponentialfunktion ist.

Man schreibt daher auch oft: $E(\varphi) = e^{i\varphi}$. (Wird hier nicht bewiesen.)
Damit kann man dann eine komplexe Zahl z so darstellen:

$$z = a + bi = r \cdot E(\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$

(g) Die Formel (6) gilt auch für negative Exponenten.

Beweis:

Gesucht ist also $E(\varphi)^{-m} = \dfrac{1}{E(\varphi)^m} = \left(\dfrac{1}{\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}\right)^m$

Unter Verwendung der Gleichung (7a) von Seite 13 folgt

$$E(\varphi)^{-m} = (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)^m = E(-\varphi)^m$$

Da jetzt ein positiver Exponent vorhanden ist, können wir die Formel (6) anwenden: $E(-\varphi)^m = E(-m\varphi)$

und erhalten als Ergebnis: $E(\varphi)^{-m} = E(-m\varphi)$.

Die Gleichung $E(\varphi)^z = E(z \cdot \varphi)$ gilt also für beliebige ganze Zahlen.

Multiplikation in Polarkoordinaten

Beispiel 12:

Berechnung im Bogenmaß.

Es sei $z_1 = 4 \cdot E\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{1}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{1}{3}\pi\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 2 + i \cdot 2\sqrt{3}$

und $z_2 = 2 \cdot E\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{1}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

Wir berechnen das Produkt:

Einerseits geht das ganz einfach auf die herkömmliche Art:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(2 + i \cdot 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right) = 2\sqrt{3} + 2i + i \cdot 2 \cdot 3 + i^2 \cdot 2\sqrt{3} = \\ &= 2\sqrt{3} + i \cdot 2 + i \cdot 6 - 2\sqrt{3} = i \cdot 8 \end{aligned}$$

Andererseits rechnen wir mit der sogenannten Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 4 \cdot E\left(\frac{1}{3}\pi\right) \cdot 2 \cdot E\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 8 \cdot E\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = 8 \cdot E\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \\ &= 8 \cdot \left(\cos\frac{1}{2}\pi + i \cdot \sin\frac{1}{2}\pi\right) = 8(0 + i \cdot 1) = 8\,i = i \cdot 8 \end{aligned}$$

Wir haben hier die Gleichung (6) von Seite 12 verwendet

$$\boxed{E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beispiel 13:

Berechnung in Gradmaß

Es sei $z_1 = 2 \cdot E(45^0) = 2(\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$ und

$z_2 = 3 \cdot E(105^0) = 3(\cos 105^\circ + i \cdot \sin 105^\circ) \approx 3 \cdot (-0{,}259 + i \cdot 0{,}966) = -0{,}776 + i \cdot 2{,}90$

Dann folgt über die Polarform-Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot E(45^\circ) \cdot 3 \cdot E(105^\circ) = 6 \cdot E(45^\circ + 105^\circ) = 6 \cdot E(150^\circ) = \\ &= 6 \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ) = 6 \cdot (-\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) = \\ &= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3} + i \cdot 3 \end{aligned}$$

Nun zeige ich einen tollen Trick: In der Koordinatendarstellung war z_2 wegen des Winkels 105° (von dem wir keine genauen Sinus- und Kosinuswerte kennen), nur eine Näherungsdarstellung möglich. Da wir aber das Produktergebnis kennen, können wir über die Auflösung der Gleichung

$$z_1 \cdot z_2 = -3\sqrt{3} + i \cdot 3$$

die Zahl z_2 als Divisionsergebnis im Gegensatz zu oben genau berechnen:

$$z_2 = \frac{-3\sqrt{3} + i \cdot 3}{z_1}$$

$$z_2 = \frac{-3\sqrt{3} + i \cdot 3}{\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}}$$

Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Nenner:

$$z_2 = \frac{\left(-3\sqrt{3} + i \cdot 3\right)\left(\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}\right)} = \frac{-3\sqrt{6} + i \cdot 3\sqrt{2} + i \cdot 3\sqrt{6} - i^2 \cdot 3\sqrt{2}}{2+2}$$

$$z_2 = \frac{\left(3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right) + i \cdot \left(3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right)}{4} = \left(\tfrac{3}{4}\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\sqrt{6}\right) + i \cdot \left(\tfrac{3}{4}\sqrt{2} + \tfrac{3}{4}\sqrt{6}\right)$$

$$z_2 = \tfrac{3}{4}\left[\sqrt{2} - \sqrt{6} + i \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\right] \quad \text{(wenn man will)}$$

Erinnern wir uns: Es war $z_1 = 3 \cdot E\left(105^0\right) = 3\left(\cos 105^\circ + i \cdot \sin 105^\circ\right)$

Aus dem Vergleich beider Terme können wir noch etwas anderes herleiten:

$$3 \cdot \cos 105^\circ = \tfrac{3}{4}\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\sqrt{6}$$

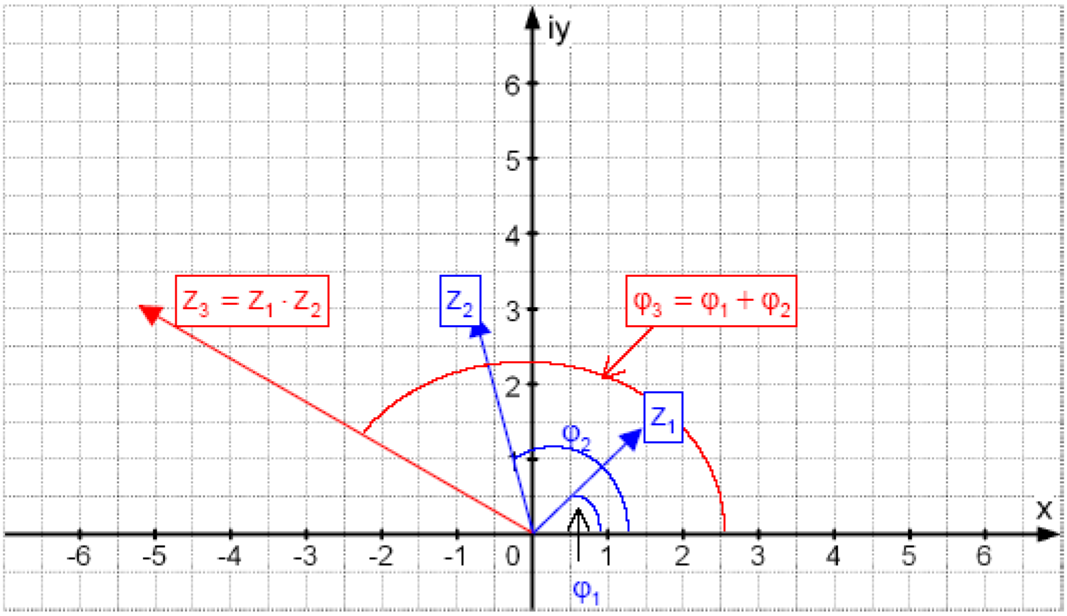
$$\cos 105^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{6} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$$

und analog dazu:

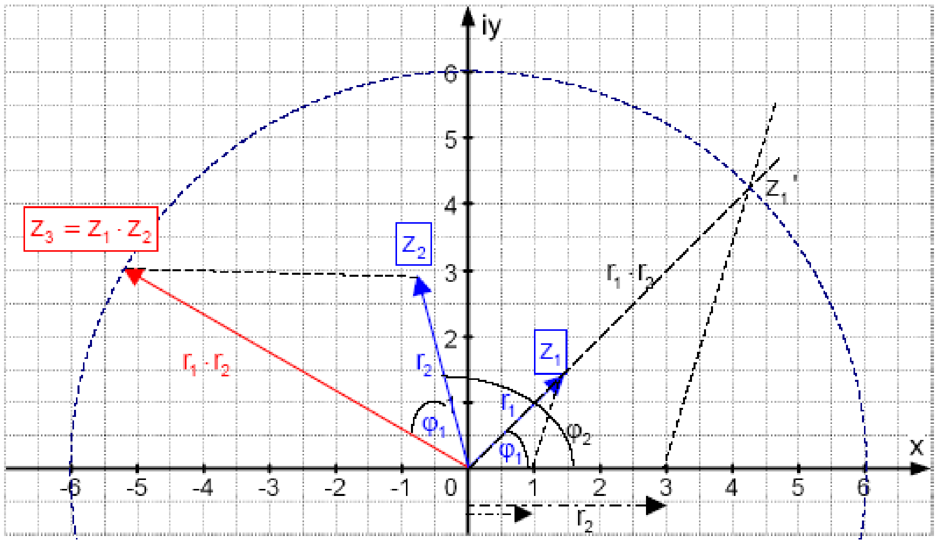
$$3 \cdot \sin 105^\circ = \tfrac{3}{4}\sqrt{2} + \tfrac{3}{4}\sqrt{6}$$

$$\sin 105^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

Graphische Darstellung der Multiplikation



Graphische Konstruktion dieser Multiplikation



Nun zeige ich einen geradezu sensationellen geometrischen Hintergrund. Dies ist eine der Stellen, wo man einfach staunen sollte, und zwar darüber, wie Geometrie und Algebra sich ergänzen. Wir gehen es Schritt für Schritt durch:

1. Der Vektorpfeil von z_1 schließt mit der x-Achse den Winkel φ_1 ein. und der Vektorpfeil von z_2 den Winkel φ_2.

2. Die Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ hat zur Folge, daß das Produkt $z_1 \cdot z_2$ wegen $E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)$ mit der x-Achse den Winkel. $\varphi_1 + \varphi_2$ einschließt.

3. Also liegt zwischen dem Pfeil von z_2 und dem Pfeil des Produkts ebenfalls der Winkel φ_1.

4. Wir betrachten nun die beiden Dreiecke $O1z_1$ und Oz_2z_3. Wir werden beweisen, daß sie **ähnlich** sind.

   Zunächst einmal ist der Winkel bei O gleich groß, und zwar φ_1.
   Die anliegenden Seiten im Dreieck $O1z_1$ haben die Längen 1 und $r_1 = |z_1|$.
   Die anliegenden Seiten im Dreieck Oz_2z_3 haben die Längen $r_2 = |z_2|$ und $r_3 = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 \cdot r_2$. Sie sind also r_2 – mal so groß wie die im Dreieck $O1z_1$.

5. Ähnliche Dreiecke kann man durch eine zentrische Streckung erzeugen. Dies tun wir im 1. Feld, indem wir das Dreieck $O1z_1$ von O aus mit dem Faktor $r_2 = |z_2| = 3$ stecken. Die Ecke bei 1 kommt damit an die Stelle 3. Und der Punkt z_1 kommt nach z_1' , was wir durch Ziehen einer Parallelen durch 3 erreichen („Strahlensatzfigur"). Der Betrag von z_1' ist nun $r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot 3 = 6$

6. Damit haben wir im Dreieck $O3z_1$' ein zu Oz_2z_3 kongruentes Dreieck. Drehen wir $O3z_1$' um den Winkel φ_2 , dann entsteht Oz_2z_3.

   Und so haben wir den Punkt gefunden, der zum Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$ gehört. Insgesamt haben wir bei dieser Konstruktion eine **Drehstreckung** durchgeführt.

Definition 6:

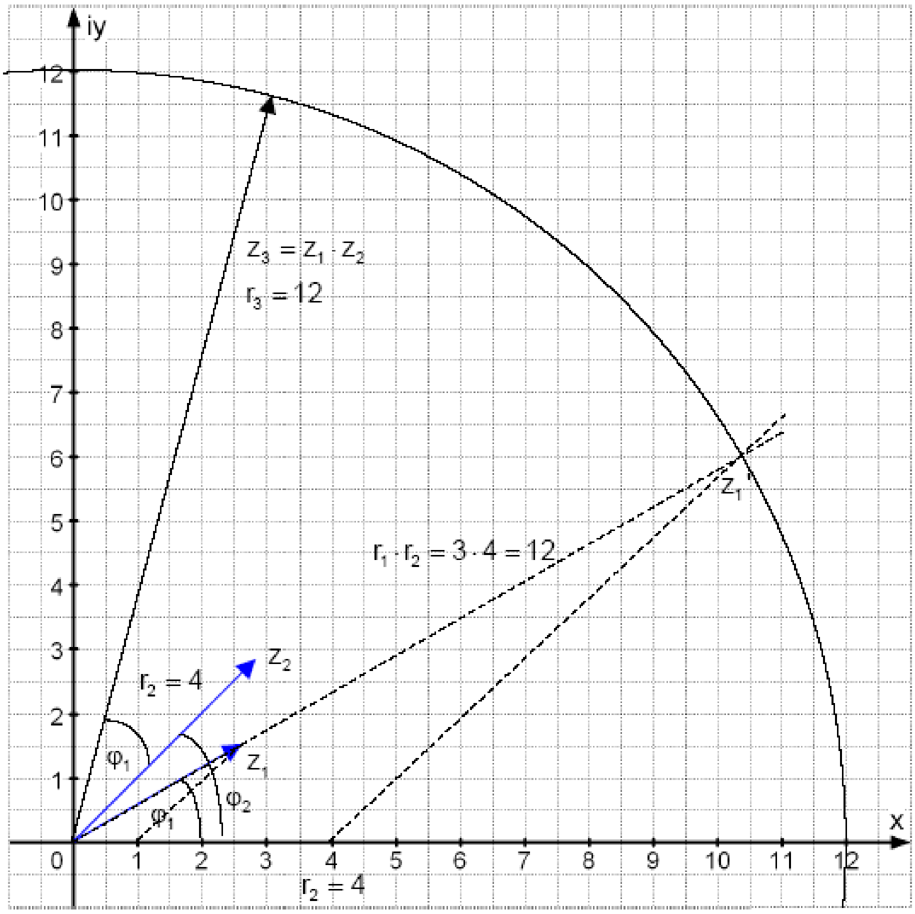
Kurzbeschreibung der Konstruktion dieser Multiplikation.

Man zeichnet das Dreieck O1z_1 ein und streckt dieses vom Ursprung aus mit dem Faktor $|z_2|$. Dadurch entstand das Dreieck O3$z_1{}'$.
Der Punkt $z_1{}'$ wird dann um den Winkel φ_2 gedreht bis zum Punkt z_3 .

z_3 ist der zum Produkt $z_1 \cdot z_2$ gehörige Punkt in der Gaußschen Zahlenebene.

Beispiel 14:

$$z_1 = 3 \cdot E(30^\circ) = 3 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\sqrt{3} + i \cdot \tfrac{3}{2}$$
$$z_2 = 4 \cdot E(45^\circ) = 4 \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ) = 4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}$$
$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot E(30^\circ + 45^\circ) = 12 \cdot E(75^\circ) = 12 \cdot (\cos 75^\circ + i \cdot \sin 75^\circ)$$



Wir wollen als Nebenprodukt dieser Rechnung noch Wurzelterme für $\cos 75^\circ$ und $\sin 75^\circ$ bestimmen.

Aus $z_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{3}{2}$ und $z_2 = 2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}$ folgt

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{3} + i \cdot \tfrac{3}{2}\right) \cdot \left(2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{6} + i \cdot 3\sqrt{6} + i \cdot 3\sqrt{2} + i^2 3\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{6} + i \cdot 3\sqrt{6} + i \cdot 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \left(3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}\right) + i \cdot \left(3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)$$

Zur Erinnerung: Wir hatten dieses Ergebnis über die Polardarstellung gewonnen:

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot E\left(30^\circ + 45^\circ\right) = 12 \cdot E\left(75^\circ\right) = 12 \cdot \left(\cos 75^\circ + i \cdot \sin 75^\circ\right)$$

Vergleichen wir beide Darstellungen, so folgt:

(1) $12 \cdot \cos 75^\circ = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

$\cos 75^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

(2) $12 \cdot \sin 75^\circ = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

$\sin 75^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

Ergebnis: $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ und $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

Beispiel 15:

a) Was bedeutet eine Multiplikation mit der Zahl i ?
Aus 3 wird 3i , also könnte man vermuten: Eine Drehung um 90° .

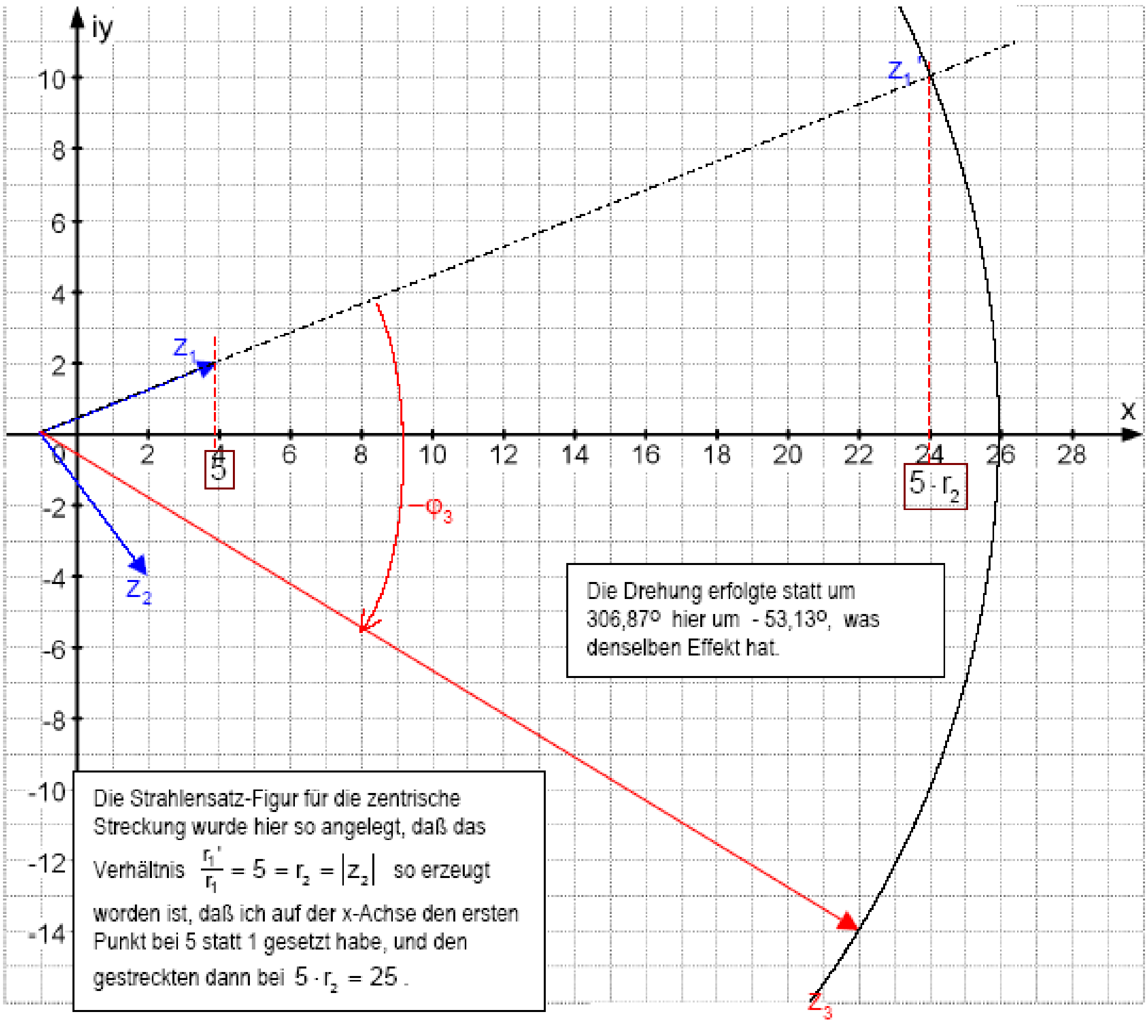
Beweis: $z \cdot i = |z| \cdot E(\varphi) \cdot |i| \cdot E\left(90^\circ\right) = |z| \cdot E\left(\varphi + 90^\circ\right)$

b) Was bedeutet eine Multiplikation mit $z_2 = \frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}$?

Der Betrag von z_2 ist $|z_2| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$ und das Argument
$\tan \varphi_2 = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi_2 \approx 53{,}13^\circ$
$z \cdot \left(\frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}\right) = |z| \cdot E(\varphi) \cdot |z_2| \cdot E(\varphi_2) = |z| \cdot E\left(\varphi + 53{,}13^\circ\right)$
Also bedeutet diese Multiplikation eine Drehung um $53{,}13^\circ$.

c) Was bedeutet eine Multiplikation mit $z_2 = 5 - 5i$?
$|z_2| = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$ und $\tan \varphi' = \left|\frac{-5}{5}\right| = 1 \Rightarrow \varphi' = 45^\circ$.
Da aber z_2 im 4. Feld liegt, wird $\varphi = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$.
Diese Multiplikation bedeutet also eine Drehstreckung mit dem Faktor
$|z_2| = 2\sqrt{5}$ und dem Drehwinkel $\varphi_2 = 315^\circ$

Eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl z_2 bedeutet geometrisch in der Gaußschen Ebene eine Drehstreckung mit dem Streckfaktor $\lvert z_2 \rvert$ und dem Drehwinkel φ_2 .



iy
x
z_1
z_2
z_1'
z_3
φ_3
5
$5 \cdot r_2$
Die Drehung erfolgte statt um 306,87° hier um -53,13°, was denselben Effekt hat.
Die Strahlensatz-Figur für die zentrische Streckung wurde hier so angelegt, daß das Verhältnis $\frac{r_1'}{r_1} = 5 = r_2 = |z_2|$ so erzeugt worden ist, daß ich auf der x-Achse den ersten Punkt bei 5 statt 1 gesetzt habe, und den gestreckten dann bei $5 \cdot r_2 = 25$.

Division in Polarkoordinaten

$$z_1 = 3 + i \cdot 4$$
$$z_2 = -2 + i$$
$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i\cdot 4}{-2+i} = \frac{(3+i\cdot 4)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-6-i\cdot 3-i\cdot 8-i^2\cdot 4}{4+1} = \frac{-2-i\cdot 11}{5} = -\frac{2}{5} - i\cdot\frac{11}{5}$$

Und nun die Umrechnung auf Polarkoordinaten:

$$|z_1| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \arctan\frac{4}{3} = 53{,}13^\circ$$
$$|z_2| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \varphi_2{}' = \arctan\left|\frac{1}{-2}\right| = \arctan\frac{1}{2} = 26{,}57^\circ$$

Da z_2 im 2. Feld liegt folgt: $\varphi_2 = 180^\circ - \varphi' = 153{,}43^\circ$.

Also ist

$$z_1 = 5 \cdot E(53{,}13^\circ) = 5 \cdot (\cos 53{,}13^\circ + i \cdot \sin 53{,}13^\circ)$$
$$z_2 = \sqrt{5} \cdot E(153{,}43^\circ) = \sqrt{5} \cdot (\cos 153{,}43^\circ + i \cdot \sin 153{,}43^\circ)$$

Ab hier rechnen wir allgemein weiter:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_2)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cdot\sin\varphi_2 + i\cdot(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

Verwendung dieser trigonometrischen Regeln:

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2$ und

$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1$ sowie

$\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 = 1$ liefert

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Dies heißt kürzer:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot E(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Und nun rechnen wir unser Beispiel zu Ende:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot E\left(53{,}13^{\circ}-153{,}43^{\circ}\right)=\sqrt{5}\cdot E\left(-100{,}30^{\circ}\right)$$

$$=\sqrt{5}\cdot E\left(-100{,}30^{\circ}+360^{\circ}\right)=\sqrt{5}\cdot E\left(259{,}7^{\circ}\right)$$

$$=\sqrt{5}\cdot\left(\cos 259{,}7^{\circ}+i\cdot\sin 259{,}7^{\circ}\right)=-0{,}4-i\cdot 2{,}2$$

Dies stimmt mit dem „klassischen" Ergebnis überein (siehe oben)

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+i\cdot 4}{-2+i}=\frac{(3+i\cdot 4)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{-6-i\cdot 3-i\cdot 8-i^2\cdot 4}{4+1}=\frac{-2-i\cdot 11}{5}=-\frac{2}{5}-i\cdot\frac{11}{5}$$

Bemerkung:

Diese Berechnung mit Polarkoordinaten erscheint überflüssig, wenn man die Division doch anders in nur einer Zeile bewerkstelligen kann. Dennoch: Es ist eine zweite Methode, die außerdem noch konstruierbar ist.

Beispiel 16:

$z_1=3\cdot E\left(50^{\circ}\right)$ und $z_2=2\cdot E\left(170^{\circ}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{2}\cdot E\left(50^{\circ}-170^{\circ}\right)=\frac{3}{2}\cdot E\left(-120^{\circ}\right)=\frac{3}{2}\cdot E\left(-120^{\circ}+360^{\circ}\right)=\frac{3}{2}\cdot E\left(240^{\circ}\right)$$
$$=\tfrac{3}{2}\cdot\left(\cos 240^{\circ}+i\cdot\sin 240^{\circ}\right)=\tfrac{3}{2}\cdot\left(-\cos 60^{\circ}-i\cdot\sin 60^{\circ}\right)$$
$$=\tfrac{3}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}-i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=-\tfrac{3}{4}-i\cdot\tfrac{3}{4}\sqrt{3}$$

Beispiel 17:

$z_1=6\cdot E\left(80^{\circ}\right)$ und $z_2=2\cdot E\left(30^{\circ}\right)$

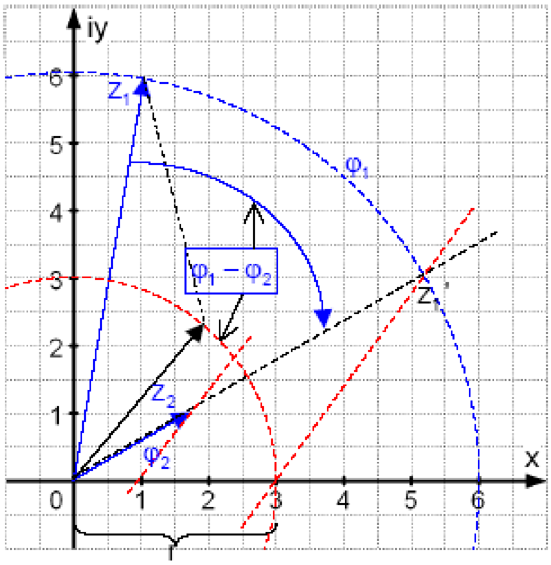
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{2}\cdot E\left(80^{\circ}-30^{\circ}\right)=3\cdot E\left(50^{\circ}\right)$$

Konstruktion dieser Division in der Gaußschen Ebene.

Dazu wird vorausgesetzt, daß man die Konstruktion zur Multiplikation verstanden hat. Dort ist eine Drehstreckung zur Anwendung gekommen. Dies trifft nun wieder zu, allerdings in umgekehrter Richtung.

Das heißt:

Der Kern der Geschichte ist die zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{r_1}{r_2}$,



Um diese durchführen zu können, drehe ich zunächst z_1 um den Winkel $\varphi_1 - \varphi_2$ im Uhrzeigersinne (also „zurück"), wodurch z_1 in die Position z_1' kommt.

Die Pfeile von z_2 und z_1' liegen nun aufeinander und auf dem ersten Strahl, den wir zur Strahlensatz-Figur brauchen. Der zweite Strahl ist die x-Achse.

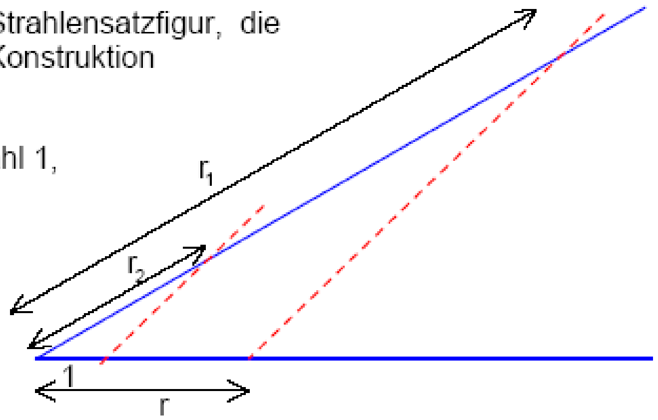
Das Ziel der Zeichnung ist:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot E(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Der Betrag des Ergebnisses ist also $r = \frac{r_1}{r_2}$. Daraus machen wir eine

Verhältnisgleichung: $\frac{r}{1} = \frac{r_1}{r_2}$ und bringen sie in diese Form: $\frac{r_2}{1} = \frac{r_1}{r}$

So paßt sie zu nebenstehender Strahlensatzfigur, die etwa so aussieht, wie die in der Konstruktion enthaltene Teilfigur.



Man verbindet also z_2 mit der Zahl 1, und zeichnet eine Parallele dazu durch z_1. Diese schneidet in unserem Fall die x-Achse genau bei 3.

Nach dem 1. Strahlensatz ist also $r = 3$.

Nun zeichnet man einen Kreisbogen um den Ursprung ab der x-Achse mit diesem so konstruieren Radius und verwendet den Drehwinkel $\varphi_1 - \varphi_2$, also hier 50^{O}.
Der Endpunkt ist der gesuchte Punkt des Quotienten z.

Als letztes kann man den zugehörigen Pfeil einzeichnen.

d) $z = 1{,}2 + i \cdot 0{,}5$ mit $|z| = \sqrt{1{,}44 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$

$$\varphi = \arctan\frac{0{,}5}{1{,}2} = \arctan\frac{5}{12} = 22{,}62^\circ$$

Also folgt $z = 1{,}3 \cdot E(22{,}62^\circ)$

$$z^2 = (1{,}2 + i \cdot 0{,}5)^2 = 1{,}44 - 0{,}25 + i \cdot 1{,}2 = 1{,}19 + i \cdot 1{,}2$$

oder so: $z^2 = 1{,}3^2 \cdot E(2 \cdot 22{,}62^\circ) = 1{,}69 \cdot E(44{,}52^\circ)$

$$z^3 = (1{,}2 + i \cdot 0{,}5)^2 \cdot (1{,}2 + i \cdot 0{,}5) = (1{,}19 + i \cdot 1{,}2) \cdot (1{,}2 + i \cdot 0{,}5) =$$
$$= 1{,}428 - 0{,}6 + i \cdot (0{,}595 + 1{,}44) = 0{,}828 + i \cdot 2{,}495$$

oder so: $z^3 = 1{,}3^3 \cdot E(3 \cdot 22{,}62^\circ) = 2{,}197 \cdot E(66{,}78^\circ)$

$$z^4 = \left[(1{,}2 + i \cdot 0{,}5)^2\right]^2 = [1{,}19 + i \cdot 1{,}2]^2 = 1{,}4161 - 1{,}44 + i \cdot 2{,}856 = -0{,}0239 + i \cdot 2{,}856$$

oder so: $z^4 = 1{,}3^4 \cdot E(4 \cdot 22{,}62^\circ) = 2{,}8561 \cdot E(89{,}04^\circ)$

Achtung: Hier entdeckt man einen scheinbaren Fehler, wenn man die beiden z_4 – Ergebnisse vergleicht. $z^4 = -0{,}0239 + i \cdot 2{,}856$ liegt wegen der negativen x-Koordinate im 2. Feld. Doch das zugehörige Argument führt mit 89,04 nicht aus dem 1. Feld hinaus. Der Grund sind natürlich Rundungsfehler.

Wenn man genauer nachrechnet, dann lautet das Argument zu z^4 so:

$4 \cdot \varphi = 4 \cdot \arctan\frac{5}{12} = 90{,}40^\circ$. Das paßt jetzt zusammen.

Potenzieren in Polarkoordinaten

Es sei z die beliebige komplexe Zahl $z = r \cdot E(\varphi)$

Zur Berechnung von z^n benützen wir die Formel (8) von Moivre (Seite 14)

$$E(\varphi)^n = E(n \cdot \varphi)$$

Also folgt: $z^n = r^n \cdot E(\varphi)^n = r^n \cdot E(n \cdot \varphi)$

Wir sehen uns ein Beispiel an: $z = 1 + i \cdot \frac{3}{4}$

Ihr Betrag ist $r = |z| = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

und ihr Argument $\varphi = \arctan\frac{\frac{3}{4}}{1} = \arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}87^\circ$ also $z = \frac{5}{4} \cdot E(36{,}87^\circ)$

Wir berechnen der Reihe nach verschiedene Potenzen:

$n = 2 \Rightarrow z^2 = r^2 \cdot E(2\varphi) = \frac{25}{16} \cdot E(73{,}74^\circ) = 1{,}56 \cdot E(73{,}74^\circ)$

$n = 3 \Rightarrow z^3 = r^3 \cdot E(3\varphi) = \frac{125}{64} \cdot E(110{,}61^\circ) = 1{,}95 \cdot \cdot E(110{,}61^\circ)$

$n = 4 \Rightarrow z^4 = r^4 \cdot E(4\varphi) = \frac{625}{256} \cdot E(147{,}48^\circ) = 2{,}44 \cdot E(147{,}48^\circ)$

$n = 5 \Rightarrow z^5 = r^5 \cdot E(5\varphi) = \frac{3125}{1024} \cdot E(184{,}35^\circ) = 3{,}05 \cdot E(184{,}35^\circ)$

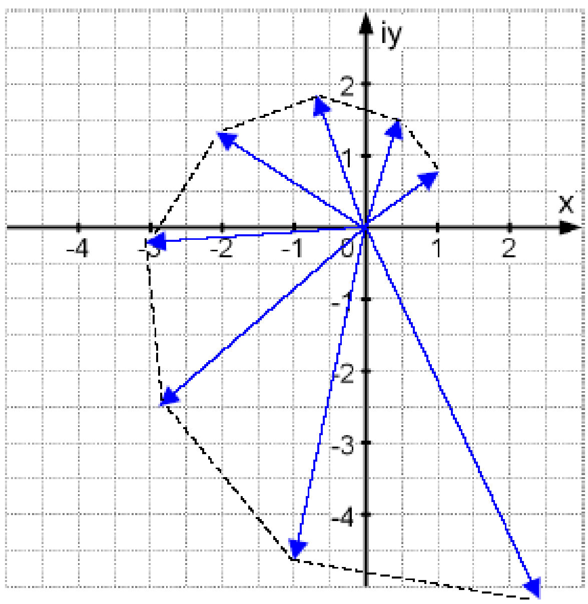
$n = 6 \Rightarrow z^6 = r^6 \cdot E(6\varphi) = \frac{15625}{4096} \cdot E(221{,}22^\circ) = 3{,}81 \cdot E(221{,}22^\circ)$

$n = 7 \Rightarrow z^7 = r^7 \cdot E(7\varphi) = \frac{78125}{16348} \cdot E(258{,}09^\circ) = 4{,}76 \cdot E(258{,}09^\circ)$

$n = 8 \Rightarrow z^8 = r^8 \cdot E(8\varphi) = \frac{390625}{65536} \cdot E(294{,}96^\circ) = 5{,}96 \cdot E(294{,}96^\circ)$

Jede Erhöhung des Exponenten bedeutet eine neue Drehstreckung. Jedesmal wird der Streckfaktor einmal mehr wirksam und der Winkel vergrößert.

Die gestrichelten Verbindungen der Pfeilspitzen deuten die sogenannte logarithmische Spirale an.



Wurzeln aus komplexen Zahlen

Die Formel von Moivre $E(\varphi)^z = E(z\cdot\varphi)$ wäre günstig für das Wurzelziehen, wenn sie auch für gebrochene Hochzahlen gelten würde.

Beispiel und Versuch:

Wir testen die Gültigkeit der Gleichung $E(\varphi)^{\frac{1}{2}} = E(\tfrac{1}{2}\varphi)$ (9a).

Zunächst einmal können wir ja die rechte Seite umformen:

$$E(\tfrac{1}{2}\varphi) = \cos(\tfrac{1}{2}\varphi) + i\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\varphi) \qquad (9b)$$

Wählen wir zuerst einmal $\varphi = 60^\circ \Rightarrow \tfrac{1}{2}\varphi = 30^\circ$

$$E(30^\circ) = \cos 30^\circ + i\cdot\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\cdot i$$

Würde unsere Gleichung stimmen, dann würde dies bedeuten:

$$\sqrt{E(60^\circ)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i$$

Wir quadrieren die rechte Seite:

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i\right)^2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot i^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot i = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i$$

Und nun die linke Seite:

$$E(60^\circ) = \cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i$$

Beides stimmt überein, also haben wir zumindest die Gültigkeit dieser Gleichung:

$$\sqrt{E(60^\circ)} = E(\tfrac{1}{2}\cdot 30^\circ)$$

Um die **<u>Formel allgemein zu beweisen</u>** quadrieren wie die rechte Seite von (9a), also (9b):

$$E(\tfrac{1}{2}\varphi)^2 = \left[\cos(\tfrac{1}{2}\varphi) + i\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\varphi)\right]^2 = \cos^2(\tfrac{1}{2}\varphi) - \sin^2(\tfrac{1}{2}\varphi) + 2\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\varphi)\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\varphi)\cdot i$$

Nun benötigen wir zwei trigonometrische Formeln:

Aus $\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ folgt für $\alpha = \tfrac{1}{2}\varphi$: $\sin\varphi = 2\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\varphi)\cos(\tfrac{1}{2}\varphi)$

Aus $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ folgt für $\alpha = \tfrac{1}{2}\varphi$ $\cos\alpha = \cos^2(\tfrac{1}{2}\varphi) - \sin^2(\tfrac{1}{2}\varphi)$

Eingesetzt ergibt dies: $E(\tfrac{1}{2}\varphi)^2 = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = E(\varphi)$

Folglich haben wir: $\boxed{E(\tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{E(\varphi)}}$

Beispiel 18:

Beginnen wir mit dem einfachen Beispiel

$\sqrt{i} = ?$ Wir müssen zuerst die Polarkoordinaten von $z = i$ berechnen:

$|i| = 1$ und $\varphi = 90^\circ$. Also ist $i = 1 \cdot E(90^\circ) = E(90^\circ)$ bzw. $= E(\frac{1}{2}\pi)$

$$\sqrt{i} = \sqrt{E(90^\circ)} = E(\tfrac{1}{2} \cdot 90^\circ) = E(45^\circ) = \cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i$$

PROBE: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i\right)^2 = \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i + \frac{2}{4} \cdot i^2 = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$!!!

Beispiel 19:

$\sqrt{-\frac{1}{2} + 3i} = ?$

$z = \frac{1}{2} - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{37}$,

$$\varphi' = \arctan\left|\frac{y}{x}\right| = \arctan\left|\frac{3}{-\frac{1}{2}}\right| = \arctan 6 = 80{,}54^\circ$$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi = 360^\circ - 80{,}54^\circ = 279{,}46^\circ$

Und wir erhalten $z = \frac{1}{2}\sqrt{37} \cdot E(279{,}46^\circ)$ als Polardarstellung.

$$\sqrt{-\tfrac{1}{2} + 3i} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{37} \cdot E(279{,}46^\circ)} = \sqrt[4]{\tfrac{37}{4}} \cdot E(\tfrac{1}{2} \cdot 279{,}46^2) = 1{,}744 \cdot E(139{,}73^\circ)$$
$$= 1{,}744 \cdot (\cos 139{,}73^\circ + i \cdot \sin 139{,}73^\circ) = -1{,}33 + i \cdot 1{,}13$$

PROBE: $(-1{,}33 + i \cdot 1{,}13)^2 = 1{,}7689 - 1{,}2769 - 3{,}0058 \cdot i \approx 0{,}492 - 3{,}01 \cdot i$
Durch die Rundungen bei der Winkelbestimmung und der Wurzelberechnung kam die Abweichung zustande.

Beispiel 20:

$\sqrt{3+4i} = ?$

Dieses Beispiel zeigt, daß man Näherungswerte, die der Taschenrechner liefert, mit trigonometrischen Umformungen genau bestimmen kann:

Es sei $z = 3+4i$ mit $|z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ und

$\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{4}{3} \approx 53{,}13^{\circ}$. Also ist $z \approx 5 \cdot E(53{,}13^{\circ})$

$$\sqrt{3+4i} \approx \sqrt{5 \cdot E(53{,}13)^{\circ}} = \sqrt{5} \cdot E\left(\tfrac{1}{2} \cdot 53{,}13^{\circ}\right) = \sqrt{5} \cdot E\left(26{,}565^{\circ}\right)$$

$$= \sqrt{5} \cdot \left(\cos 26{,}565^{\circ} + i \cdot \sin 26{,}565^{\circ}\right) = \sqrt{5} \cdot (0{,}8944 + i \cdot 0{,}4472) = 2+i$$

PROBE; $(2+i)^2 = 4+4i-i^2 = 3+4i$

Und nun eine genaue Lösung:

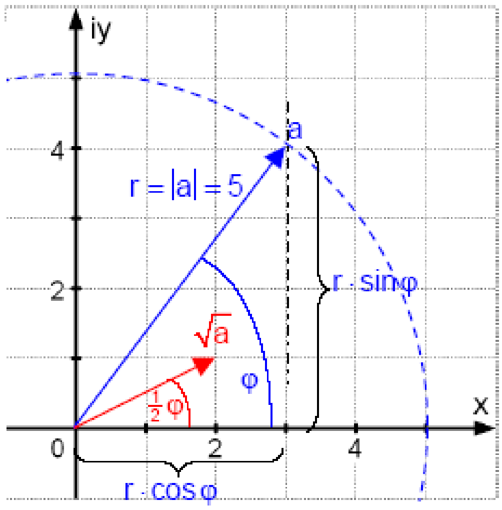
Aus der Kenntnis der Gleichung $\tan\varphi = \frac{4}{3}$ soll exakt $\cos\frac{1}{2}\varphi$ und $\sin\frac{1}{2}\varphi$ berechnet werden.

Der erste Schritt ist dieser: Weil $a = 3 + i \cdot 4$ ist, erhalten wir $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ und $\cos\varphi = \frac{3}{5}$.

(Dies könnte man auch aus trigonometrischen Gleichungen heraus berechnen. Der Formel-Sammlung entnimmt man etwa:

$$\sin\varphi = \pm\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} .$$

Setzt man dort $\tan\varphi = \frac{4}{3}$ ein, folgt das Ergebnis.)



Nun gibt es Formeln für den halben Winkel:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$ Damit berechnen wir:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Zwischenergebnis:

Aus $\tan\varphi = \frac{4}{3}$ folgt $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

Oder so: $\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\arctan\frac{4}{3}\right) = \sin 26{,}565^\circ = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

Und $\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\arctan\frac{4}{3}\right) = \cos 26{,}565^\circ = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

Die genaue Berechnung der Wurzel geht damit so weiter:

$$\sqrt{a} = \sqrt{5}\cdot E\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right) = \sqrt{5}\cdot\left(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\cdot\sin\tfrac{1}{2}\varphi\right) = \sqrt{5}\cdot\left(\tfrac{2}{5}\sqrt{5} + i\cdot\tfrac{1}{5}\sqrt{5}\right) = 2+i$$

Dies benötigen wir noch einmal auf Seite 31 bei der Lösung einer quadratischen Gleichung !

Beispiel 21:

$$\sqrt{-12+5i} = ?$$

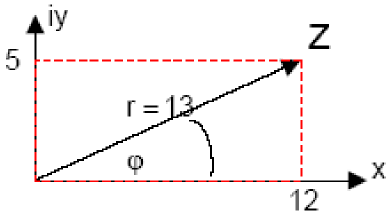
$$z = -12+5i \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\varphi' = \arctan\left|\frac{y}{x}\right| = \arctan\frac{5}{12} \approx 22{,}62^\circ \;\Rightarrow\; \varphi \approx 180^\circ - 22{,}62^\circ = 157{,}38^\circ$$

$$\sqrt{-12+5i} \approx \sqrt{13\cdot E\left(157{,}38^\circ\right)} = \sqrt{13}\cdot E\left(\tfrac{1}{2}\cdot 157{,}38^\circ\right) = \sqrt{13}\cdot E\left(78{,}69^\circ\right)$$

$$= \sqrt{13}\cdot\left(\cos 78{,}69^\circ + i\cdot\sin 78{,}69^\circ\right) = 0{,}707 + i\cdot 3{,}536$$

Genaue Berechnung der Wurzel:



Die Abbildung zeigt: Wenn $z' = 12 + i\cdot 5$ ist, also $\tan\varphi = \frac{5}{12}$, dann ist $\sin\varphi = \frac{5}{13}$ und $\cos\varphi = \frac{12}{13}$.

Die Formeln für den Halbwinkel lauten:

$\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$ Damit berechnen wir:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

Damit erhalten wir folgende genaue Wurzelberechnung:

$$\sqrt{-12+5i} = \sqrt{13\cdot E(\varphi)} = \sqrt{13}\cdot E\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right) = \sqrt{13}\left(\frac{5}{\sqrt{26}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}}(5+i)$$

$$\sqrt{12-5i} = \sqrt{\frac{1}{2}}(5+i) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(5+i) = \frac{5}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad !!!!!!!$$

Beispiel 22:

e) $\sqrt{\sqrt{3}-i} = ?$

$z = \sqrt{3} - i \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{y}{x}\right| = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \;\Rightarrow\; \varphi = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ (4. Feld !)

Also ist hier $z = \sqrt{3} - i = 2 \cdot E(330^\circ)$ Damit folgt

$\sqrt{z} = \sqrt{\sqrt{3}-i} = \sqrt{2} \cdot E(165^\circ) = \sqrt{2} \cdot (\cos 165^\circ + i \cdot \sin 165^\circ) \approx -1{,}366 + 0{,}366 \cdot i$

Probe: $(-1{,}366 + 0{,}366 \cdot i)^2 = 1{,}866 - 0{,}134 - 2 \cdot 0{,}366 \cdot 1{,}366\, i = 1{,}732 - i$

Berechnung von n-ten Wurzeln

Ohne Beweis führen wir hier an, daß die Formel von Moivre auch für beliebige n-te Wurzeln gilt:

$$\boxed{E\left(\tfrac{1}{n}\varphi\right)=\sqrt[n]{E(\varphi)}}$$

a) $\sqrt[3]{12+5i}=?$

$z=12+i\cdot 5 \;\Rightarrow\; |z|=\sqrt{144+25}=13$ und

$\tan\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{12} \;\Rightarrow\; \varphi=\arctan\dfrac{5}{12}=22{,}62^\circ$

Also haben wir diese Polarform für z errechnet: $z=13\cdot E\left(22{,}62^\circ\right)$.

$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{13}\cdot E\left(\tfrac{1}{3}\cdot 22{,}62^\circ\right)=\sqrt[3]{13}\cdot E\left(7{,}54^\circ\right)=$

$=\sqrt[3]{13}\cdot\left(\cos 7{,}54^\circ+i\cdot\sin 7{,}54^\circ\right)=2{,}33+i\cdot 0{,}31$

b) $\sqrt[3]{1-i}=?$

$z=1-i \;\Rightarrow\; |z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ und $\varphi'=\arctan\left|\dfrac{-1}{1}\right|=\arctan 1=45^\circ$.

Weil z im 4. Feld liegt, folgt für den Winkel $\varphi=360^\circ-\varphi'=315^\circ$

$z=1-i=\sqrt{2}\cdot E\left(335^\circ\right)$

$\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot E\left(\tfrac{1}{3}\cdot 335^\circ\right)=\sqrt[6]{2}\cdot E\left(111{,}67^\circ\right)$

$=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos 111{,}67^\circ+i\cdot\sin 111{,}67^\circ\right)=-0{,}414+i\cdot 1{,}043$

c) $\sqrt[4]{-3+i\cdot 4}=?$

$z=-3+i\cdot 4 \;\Rightarrow\; |z|=\sqrt{9+16}=5$ und $\varphi'=\arctan\left|\dfrac{y}{x}\right|=\arctan\dfrac{4}{3}=53{,}13^\circ$

Da z im 2. Feld liegt, erhält man $\varphi=180^\circ-\varphi'=126{,}87^\circ$

Also ist $z=-3+i\cdot 4=5\cdot E\left(126{,}87^\circ\right)$

$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{5}\cdot E\left(\tfrac{1}{4}\cdot 126{,}87^\circ\right)=\sqrt[4]{5}\cdot E\left(31{,}72^\circ\right)$

$=\sqrt[4]{5}\cdot\left(\cos 31{,}72^\circ+i\cdot\sin 31{,}72^\circ\right)=1{,}27+i\cdot 0{,}78$

d) $\sqrt[5]{-3+i\cdot 4}=\sqrt[5]{5}\cdot E\left(\tfrac{1}{5}\cdot 126{,}87^\circ\right)=\sqrt[5]{5}\cdot E\left(25{,}37^\circ\right)$

$=\sqrt[5]{5}\cdot\left(\cos 25{,}37^\circ+i\cdot\sin 25{,}37^\circ\right)=1{,}25+i\cdot 0{,}59$

e) $\sqrt[6]{-8i}=\sqrt[6]{8\cdot E\left(270^\circ\right)}=\sqrt[6]{8}\cdot E\left(\tfrac{1}{6}\cdot 270^\circ\right)=\sqrt[6]{2^3}\cdot E\left(45^\circ\right)=\sqrt{2}\cdot E\left(45^\circ\right)$

$==\sqrt{2}\cdot\left(\cos 45^\circ+i\cdot\sin 45^\circ\right)=\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)=1+i$

Berechnung beliebiger rationaler Potenzen

Wir verwenden diese Moivresche Formelvariante

$$\boxed{E\left(\tfrac{1}{n}\varphi\right)^m = \left(\sqrt[n]{E(\varphi)}\right)^m = E\left(\tfrac{m}{n}\varphi\right)}$$

Beispiel 23:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{-12+i\cdot 5}} = (-12+i\cdot 5)^{-\frac{1}{2}}$.

Nach Seite 3 ist $\quad -12+5i = 13\cdot E(157{,}38^\circ)\quad$ also folgt:

$$(-12+i\cdot 5)^{-\frac{1}{2}} = 13^{-\frac{1}{2}}\cdot E\left(-\tfrac{1}{2}\cdot 157{,}38\right) = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot E(-78{,}69) = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot E(-78{,}69+360^\circ)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot E(281{,}31^\circ) = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot E(\cos 281{,}31^\circ + i\cdot \sin 281{,}31^\circ) = 0{,}054 - i\cdot 0{,}272$$

b) $\left(\sqrt[3]{1-i}\right)^2 = ?$

Nach Seite 4 ist $\; z = 1-i = \sqrt{2}\cdot E(335^\circ)$, also folgt:

$$z^{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{3}}\cdot E\left(\tfrac{2}{3}\cdot 335^\circ\right) = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}\cdot E(223{,}33^\circ) = 2^{\frac{1}{3}}\cdot E(223{,}33^\circ) = \sqrt[3]{2}\cdot E(223{,}33^\circ)$$

$$= \sqrt[3]{2}\cdot(\cos 223{,}33^\circ + i\cdot \sin 223{,}33^\circ) = -0{,}916 - i\cdot 0{,}865$$

c) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}\right)^2} = ?$

$$z = \sqrt{3} - i \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi' = \arctan\left|\frac{y}{x}\right| = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \;\Rightarrow\; \varphi = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

Also ist hier $\; z = \sqrt{3} - i = 2\cdot E(330^\circ)$

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}\right)^2} = z^{-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}\cdot E\left(-\tfrac{2}{3}\cdot 330^\circ\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot E(-220^\circ) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot E(-220^\circ + 360^\circ)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot E(140^\circ) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot(\cos 140^\circ + i\cdot \sin 140^\circ) = -0{,}483 + i\cdot 0{,}405$$

Einheitswurzeln

Grundlagen

Wir haben gelernt, daß sich mit Hilfe von Polarkoordinaten jede komplexe Zahl so darstellen läßt: $z = a + b \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, dabei ist r der Betrag der komplexen Zahl: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und φ, das sogenannte Argument, der Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Ortsvektor der komplexen Zahl gegen den Uhrzeigersinn.

Diesen Winkel berechnet man über $\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$ falls sich der zu z gehörige Zahlenpunkt im 1. Feld der Gaußschen Zahlenebene befindet. Für andere Felder rechnet man wie in Datei 2 (Nr. 50012) besprochen.

Mit der Abkürzung $E(\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ (dem sogenannten Einheitsvektor) wird

$$|E(\varphi)| = |\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi| = |\cos^2\varphi + \sin^2\varphi| = 1.$$

Und man kann damit jede komplexe Zahl auch kurz so schreiben:

$$z = a + b \cdot i = r \cdot E(\varphi)$$

Für die Einheitswurzeln gibt es einige wichtige Beziehungen (Datei 50012):

$$E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{und} \quad E(\varphi)^n = E(n \cdot \varphi)$$

Dies gilt für ganzzahlige Potenzen und auch für Bruchzahlen. Damit hatten wir in § 9 n-te Wurzeln berechnet.

Es gibt in der Literatur Autoren, die Wurzeln für komplexe Zahlen verbieten, weil sie angeblich mehrdeutig sind. Dies ist natürlich eine Frage der Definition.
Wenn wir die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl so definieren:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|\mathbf{z}| \cdot E(\varphi)} = \sqrt[n]{|z|} \cdot E\left(\tfrac{1}{n} \cdot \varphi\right),$$

dann ist das Ergebnis eindeutig. Das Problem liegt an dieser Stelle:

Die Gleichung $x^3 = 2$ hat in der Menge der reellen Zahlen die einzige Lösung $\sqrt[3]{2}$. In der Menge der komplexen Zahlen gibt es dagegen genau drei Lösungen. Und wenn man unter $\sqrt[3]{2}$ eben alle drei Lösungen versteht, dann ist die Eindeutigkeit weg !

Wir werden jetzt lernen, wie man alle Lösungen einer solchen Gleichung berechnen kann. Dabei beginnen wir mit der Gleichung $z^n = 1$. Ihre Lösungen nennt man die (berühmten) n-ten Einheitswurzeln.

Beispiel 24:

Lösung der Gleichung $z^n=1$

1. Schritt: Wir schreiben z in der Form $z = r \cdot E(\varphi)$, dann folgt daraus

$$z^n = r^n \cdot E(\varphi)^n = 1$$

Nun benötigen wir die Formel von Moivre für Potenzen (Datei 50012):

$$E(\varphi)^n = E(n \cdot \varphi) \quad \text{für ganzzahliges n.}$$

Also erhält damit unsere Gleichung dieses Gesicht: $r^n \cdot E(n \cdot \varphi) = 1$

Weil alle Einheitsvektoren $E(\varphi)$ den Betrag 1 haben, gilt auch $|E(n \cdot \varphi)| = 1$

Daher muß auch $r^n = 1$ sein, also folgt $r = 1$ (da r ja positiv sein muß).
Wir suchen also die Lösungen der Gleichung $E(n \cdot \varphi) = 1$.

2. Schritt: *Die folgenden Rechnung verwendet für das Argument das **Bogenmaß**.*

Zur Erinnerung: Es war $E(n \cdot \varphi) = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$.
$E(n \cdot \varphi) = 1$ bedeutet also $\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi) = 1$.
Die erste Lösung dafür ist $\varphi = 0$ (Probe machen: $\cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1$).

Weil die Funktion $E(\varphi)$ periodisch ist sind mit $\varphi = 0$ auch die Werte
$\varphi = 2\pi$, $\varphi = 4\pi$ usw. Lösungen,

Es gilt also nicht nur $E(0) = 1$, sondern auch $E(k \cdot 2\pi) = 1$ für $k \in \mathbb{N}$.
Unsere Gleichung hieß doch $E(n \cdot \varphi) = 1$. Also ist $E(n\varphi) = E(k \cdot 2\pi) = 1$

Daraus folgt, daß $n \cdot \varphi = k \cdot 2\pi$ oder $\boxed{\varphi = \frac{k}{n} \cdot 2\pi}$ sein muß.

Nun sollte man nicht denken, daß dies zu unendlich vielen Lösungen führt.
Wir müssen darauf achten, daß wir im Intervall $0 \le \varphi < 2\pi$ bleiben, d.h.
der Koeffizient $\frac{k}{n}$ muß kleiner als 1 bleiben, damit $\varphi < 2\pi$ bleibt!

Somit gibt es genau n verschiedene Lösungen:

$$\boxed{\varphi_0 = 0;\ \varphi_1 = \frac{1}{n} \cdot 2\pi;\ \varphi_2 = \frac{2}{n} \cdot 2\pi;\ \varphi_3 = \frac{3}{n} \cdot 2\pi;\ \ldots;\ \varphi_{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot 2\pi}$$

Da alle diese Lösungen den Betrag 1 haben und somit auf dem Einheitskreis liegen und dazu noch die Winkel zwischen ihren Ortsvektoren gleich sind, teilen sie den Einheitskreis in n gleiche Teile, weshalb die Gleichung $z^n = 1$ als Kreisteilungs-Gleichung bezeichnet wird und ihre n Lösungen die n-ten Einheitswurzeln !

Im Gradmaß lauten die Lösungen so:

$$\boxed{\varphi_0 = 0;\ \varphi_1 = \frac{360°}{n};\ \varphi_2 = \frac{720°}{n};\ \ldots;\ \varphi_{n-1} = \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}}$$

Schauen wir uns nun verschiedene Beispiele von Kreisteilungsgleichungen an.

Beispiel 25:

Lösung der Gleichung $z^2=1$

Die Lösungen der Gleichung sind $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$
oder im Gradmaß $\varphi_0 = 0^\circ$ und $\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Und dazu gehören diese Zahlen:

$z_1 = E(0) = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$ und
$z_2 = E(\pi) = \cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$.

Die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sind also $z_{1,2} = \pm 1$ (wie schon in $\mathbb{R}$).

Beispiel 26:

Lösung der Gleichung $z^3=1$

1. Lösungsweg (über Gleichungen)

Die Zahl $z_1 = 1$ ist ***eine*** Lösung der Gleichung $z^3 = 1$ d.h. $z^3 - 1 = 0$.
Also enthält der Term $z^3 - 1$ den Faktor $(z - 1)$.

Abspaltung dieses Linearfaktors durch Polynomdivision ergibt:

$$\begin{array}{l}
(z^3 + 0z^2 + 0z - 1) : (z-1) = z^2 + z + 1 \\
\underline{-(z^3 - z^2)} \\
\quad z^2 \\
\quad \underline{-(z^2 - z)} \\
\qquad z - 1 \\
\qquad \underline{-(z-1)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Also ist $z^3 - 1 = (z-1) \cdot (z^2 + z + 1)$

Aus $z^3 - 1 = 0$ wird also $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

Die weiteren Lösungen liefert somit die Gleichung

$z^2 + z + 1 = 0$

Mit der Lösungsformel $z_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ erhält man zwei weitere Lösungen, die jetzt komplex werden:

$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

Lösungsmenge ist somit: $\mathbb{L} = \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}; -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \right\}$

2. Lösungsweg (über Einheitswurzeln)

Nach Seite 9 findet man die Lösungen so:

$$\boxed{\varphi_0 = 0\,;\ \varphi_1 = \frac{1}{n}\cdot 2\pi\,;\ \varphi_2 = \frac{2}{n}\cdot 2\pi\,;\ \varphi_3 = \frac{3}{n}\cdot 2\pi\,;\ \dots;\ \varphi_{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot 2\pi}$$

Also erhält man diese Argumente: $\varphi_0 = 0\,;\ \varphi_1 = \frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi\ ;\ \ \varphi_2 = \frac{2}{3}\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$

bzw. im Gradmaß: $\varphi_0 = 0^\circ\,;\ \varphi_1 = \frac{1}{3}\cdot 360^\circ = 120^\circ\ ;\ \ \varphi_2 = \frac{2}{3}\cdot 360^\circ = 240^\circ$

Die zugehörigen komplexen Zahlen sind:

$z_0 = 1\cdot E(0) = E(0) = \cos 0 + i\cdot \sin 0 = 1$

$z_1 = 1\cdot E\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi = \cos 120^\circ + i\cdot \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$

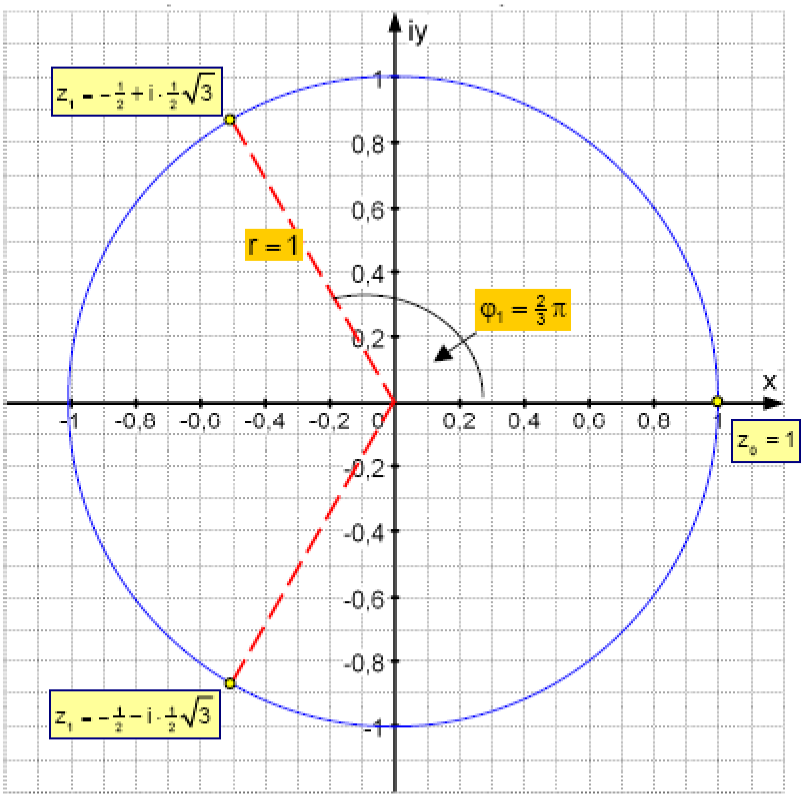
$$\cos 120^\circ = -\cos\left(180^\circ - 120^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\tfrac{1}{2}$$
$$\sin 120^\circ = +\sin\left(180^\circ - 120^\circ\right) = \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$z_2 = 1\cdot E\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi = \cos 240^\circ + i\cdot \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\cos 240^\circ = -\cos\left(240^\circ - 180^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\tfrac{1}{2}$$
$$\sin 120^\circ = -\sin\left(240^\circ - 180^\circ\right) = -\sin 60^\circ = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Lösungsmenge somit: $\mathbf{L} = \left\{ 1;\ -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,;\ -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} \right\}$

Darstellung dieser Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Einheitskreis.



Wir wollen zur Übung nicht versäumen, für eine dieser Lösungen die Probe zu machen, und zwar für $z_1 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dies führt zu folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
z_1^3 &= \left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3 = \left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 \left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{4} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i^2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 3\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} - i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\
&= \left(-\tfrac{1}{2} - i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot 3 = 1.
\end{aligned}$$

Beispiel 27:

Lösung der Gleichung $z^3=-1$

Gehen wir wieder von $z = r \cdot E(\varphi)$ aus, dann folgt:

$$z^3 = r^3 \cdot E(\varphi)^3 = r^3 \cdot E(3\varphi) = -1$$

Da r eine positive Zahl sein muß und $|E(3\varphi)| = 1$ ist, muß wiederum r = 1 sein.

Also bleibt: $E(3\varphi) = -1$ d.h. $\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi) = -1$

Man erhält eine Lösung über $\cos(3\varphi) = -1$ und $\sin(3\varphi) = 0$, also $3\varphi = \pi$

d.h. $\varphi = \frac{1}{3}\pi$. Wegen der Periodizität der Funktion E sind auch die Werte

$3\varphi = \pi + k \cdot 2\pi = (2k+1)\pi \;\Rightarrow\; \varphi = \dfrac{2k+1}{3}\pi$ Lösungen, d.h. es gilt:

$$E\left(\tfrac{2k+1}{3}\pi\right) = -1 \quad \text{für } k \in \mathbf{Z}.$$

Allerdings müssen die Lösungen innerhalb des Intervalls $0 \le \varphi < 2\pi$ liegen.
So erhält man

Für k = 0 : $\varphi_1 = \frac{1}{3}\pi \mathrel{\hat{=}} 60^\circ$ ergibt $z_0 = E\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Für k = 1 : $\varphi_2 = \pi \mathrel{\hat{=}} 180^\circ$ ergibt $z_1 = E\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$

Für k = 2 : $\varphi_3 = \frac{5}{3}\pi \mathrel{\hat{=}} 300^\circ$ ergibt $z_2 = E\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(Für k = 3 : $\varphi = \frac{7}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + 2\pi > 2\pi \notin \mathbf{D}$.)

Damit lautet die Lösungsmenge der Gleichung $z^3 = -1$:

$$\mathbf{L} = \left\{ -1; \tfrac{1}{2} \pm i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \right\}$$

Beispiel 28:

Lösung der Gleichung $z^4=1$

1. Lösungsweg (über Gleichungen)

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$z_{1,2} = \pm 1 \qquad z_{3,4} = \pm i$$

Ergebnis: $\mathbf{L} = \{ \pm 1; \pm i \}$

2. Lösungsweg über Einheitswurzeln:

Aus $z = r \cdot E(\varphi)$ folgt $z^4 = r^4 \cdot E(\varphi)^4 = r^4 \cdot E(4\varphi) = 1$

Wegen $|E(4\varphi)| = 1$ und $r > 0$ folgt zunächst $r = 1$ und dann

$E(4\varphi) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\cos(4\varphi) + i \cdot \sin(4\varphi) = 1}$

Eine Lösung erhält man etwa für $\cos(4\varphi) = 1$ und $\sin(4\varphi) = 0$,
z.B. für $\varphi = 0$, d.h. $E(0) = 1$

Wegen der Periodizität gilt daher auch $E(k \cdot 2\pi) = 0$.

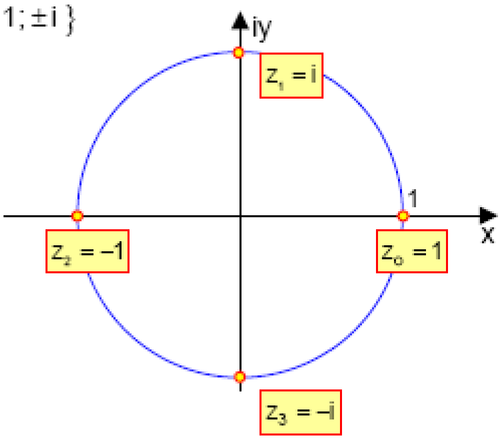
Daher haben wir $4\varphi = k \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{k \cdot 2\pi}{4} = k \cdot \frac{\pi}{2}}$

Wegen $0 \le \varphi < 2\pi$ erhalten wir diese Argumente und Lösungen:

$k = 0$: $\varphi_0 = 0$ mit $z_0 = E(0) = 1$
$k = 1$: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ mit $z_1 = E(\frac{1}{2}\pi) = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi) = 0 + i \cdot 1 = i$
$k = 2$: $\varphi_2 = \pi$ mit $z_2 = E(\pi) = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$
$k = 3$: $\varphi_3 = \frac{3}{2}\pi$ mit $z_3 = E(\frac{3}{2}\pi) = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i \cdot \sin(\frac{3}{2}\pi) = 0 + i \cdot (-1) = -i$

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \{ \pm 1; \pm i \}$

Am Einheitskreis:



Beispiel 29:

Lösung der Gleichung z^5=1

Wir übernehmen aus der Seite 2 diese Lösungsformel

$$\varphi_0 = 0\,;\;\; \varphi_1 = \frac{1}{n}\cdot 2\pi\,;\;\; \varphi_2 = \frac{2}{n}\cdot 2\pi\,;\;\; \varphi_3 = \frac{3}{n}\cdot 2\pi\,;\;\; \ldots;\;\; \varphi_{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot 2\pi$$

und setzen n = 5 ein, dann folgen diese Näherungslösungen:

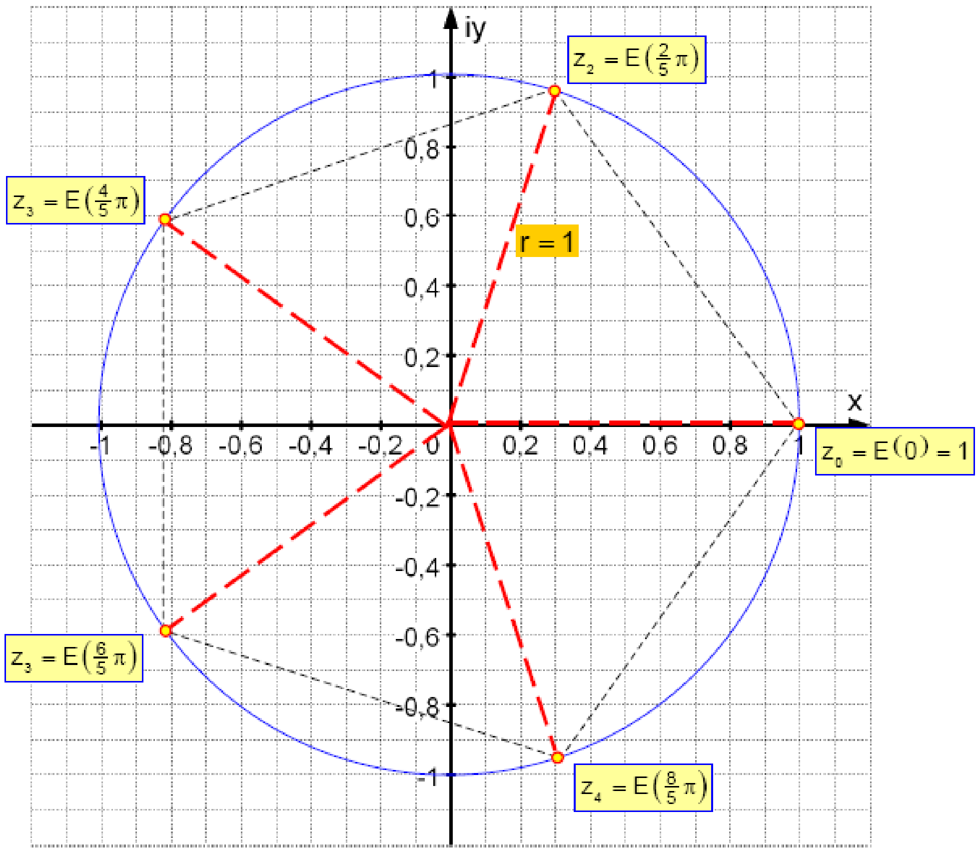
$$\varphi_0 = 0 \;\Rightarrow\; z_0 = E(0) = 1$$

$$\varphi_1 = \tfrac{2}{5}\pi \mathrel{\hat=} 72^{\circ} \;\Rightarrow\; z_1 = E\left(\tfrac{2}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{2}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{2}{5}\pi \approx 0{,}309 + i\cdot 0{,}951$$

$$\varphi_2 = \tfrac{4}{5}\pi \mathrel{\hat=} 144^{\circ} \;\Rightarrow\; z_2 = E\left(\tfrac{4}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{4}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{4}{5}\pi \approx -0{,}809 + i\cdot 0{,}588$$

$$\varphi_3 = \tfrac{6}{5}\pi \mathrel{\hat=} 216^{\circ} \;\Rightarrow\; z_2 = E\left(\tfrac{6}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{6}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{6}{5}\pi \approx -0{,}809 - i\cdot 0{,}588$$

$$\varphi_4 = \tfrac{8}{5}\pi \mathrel{\hat=} 288^{\circ} \;\Rightarrow\; z_4 = E\left(\tfrac{8}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{8}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{8}{5}\pi \approx 0{,}309 - i\cdot 0{,}951$$



In dieser Abbildung wurden die 5 Punkte verbunden, es entstand ein regelmäßiges Fünfeck mit dem Innenwinkel 72° und den Eckenwinkeln 108°.

Beispiel 30:

Lösung der Gleichung $z^6=1$

Wir übernehmen aus der Seite 2 diese Lösungsformel

$$\varphi_0 = 0\,;\;\; \varphi_1 = \frac{1}{n}\cdot 2\pi\,;\;\; \varphi_2 = \frac{2}{n}\cdot 2\pi\,;\;\; \varphi_3 = \frac{3}{n}\cdot 2\pi\,;\;\; \ldots;\;\; \varphi_{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot 2\pi$$

und setzen n = 6 ein, dann folgen diese Lösungen:

$$\varphi_0 = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{z}_0 = E(0) = 1$$

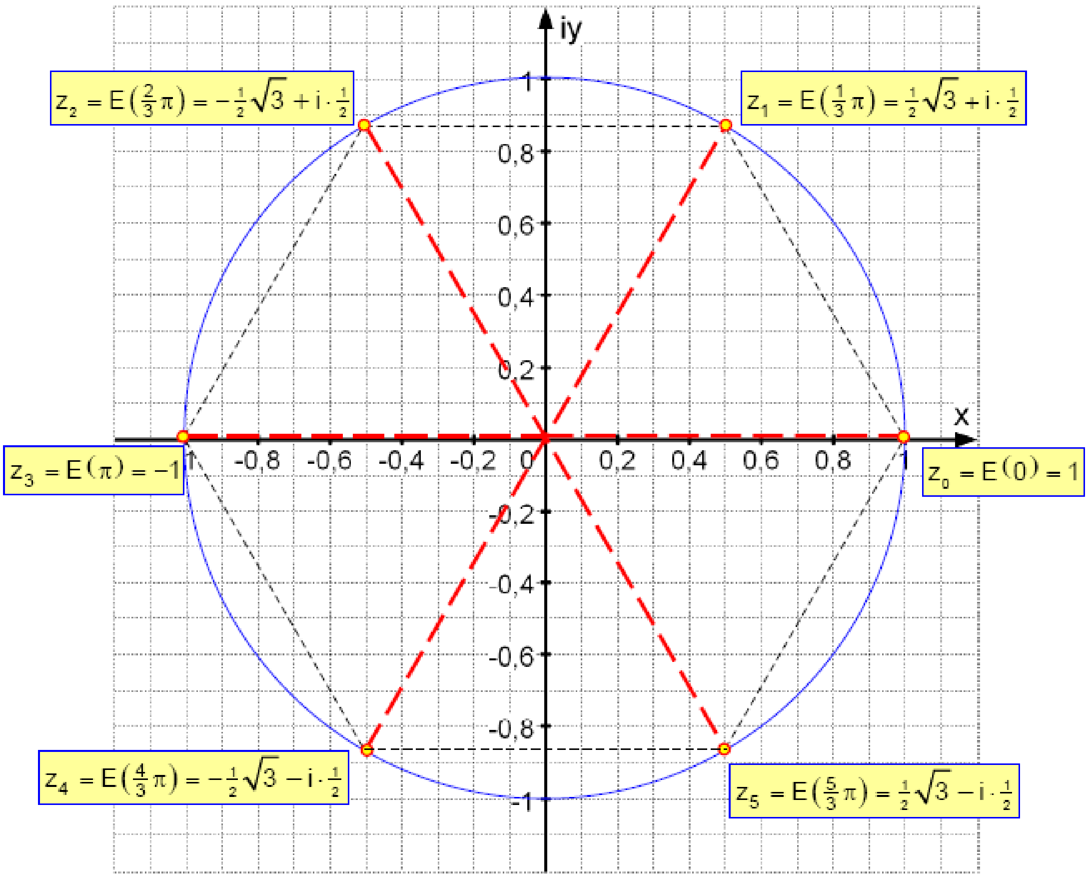
$$\varphi_1 = \tfrac{1}{3}\pi \triangleq 60^{\circ} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}_1 = E\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \cos\tfrac{1}{3}\pi + i\cdot\sin\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\varphi_2 = \tfrac{2}{3}\pi \triangleq 120^{\circ} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}_2 = E\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = \cos\tfrac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\tfrac{2}{3}\pi = -\tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\varphi_3 = \pi \triangleq 180^{\circ} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}_3 = E(\pi) = \cos\pi + i\cdot\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

$$\varphi_4 = \tfrac{4}{3}\pi \triangleq 240^{\circ} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}_4 = E\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = \cos\tfrac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\tfrac{4}{3}\pi = -\tfrac{1}{2} - i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\varphi_5 = \tfrac{5}{3}\pi \triangleq 300^{\circ} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}_5 = E\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) = \cos\tfrac{5}{3}\pi + i\cdot\sin\tfrac{5}{3}\pi = \tfrac{1}{2} - i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$



Analysis

Relationen und Funktionen

Definition 89:

Eine Relation liegt vor, wenn es zu jedem Element x der Menge M_1 genau einen Partner y in der Menge M_2 gibt.

Definition 90:

Hat jedes $x \in M_1$ ein zugeordnetes $y \in M_2$. Handelt es sich um Zahlen die in einem Koordinatensystem aufgetragen werden können

Eine überall auf M_1 definierte eindeutige Relation heißt Funktion oder auch Abbildung von M_1 in M_2.

$f: M_1 \to M_2 \; oder \; x \to y = f(x)$

Grundlegende Funktionen und deren Eigenschaften

Ganzrationale Funktionen n - ten Grades

Definition 91:

Eine Funktion der Form

$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots . a_1 x^1 + a_0 x^0$ mit $n \in N$ und $a_0, a_1, \ldots . a_n \in R$

heißt ganzrationale Funktion.

n heißt **Grad** der Funktion

a_i heißt **Koeffizient** der Funktion

Beispiel 171:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$ ist eine ganzrationale Funktion 3.Grades

$g(x) = -3x^5 + 2x^4 – x^2 +8$ ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades

Beispiel 172:

$f(x) = x^3 - x$ ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit den Koeffizienten

$a_3 = 1$; $a_2 = 0$; $a_1 = -1$; $a_0 = 0$

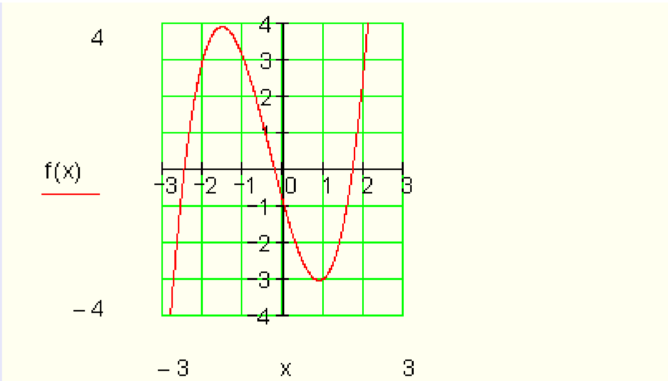
Ganzrationale Funktionen entstehen durch zusammensetzen von Potenzfunktionen.

Verlauf des Graphen

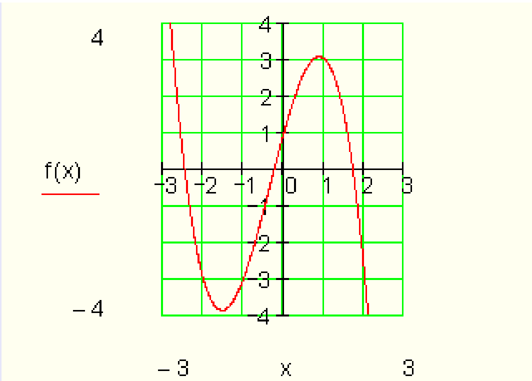
Definition 92:

Der Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt.

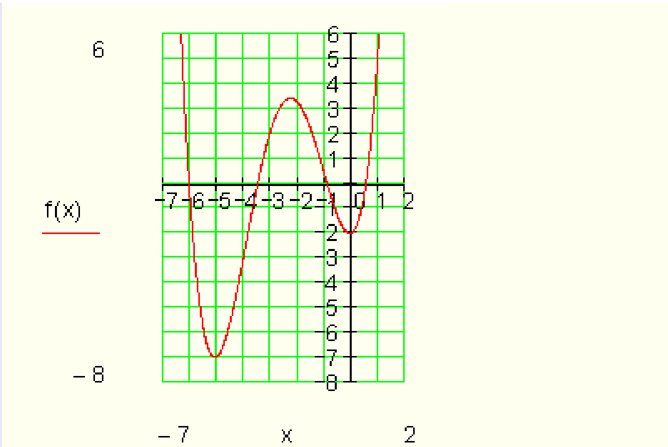
	n gerade	n ungerade
$a_n > 0$	Verlauf von II nach I	Verlauf von III nach I
$a_n < 0$	Verlauf von III nach IV	Verlauf von II nach IV



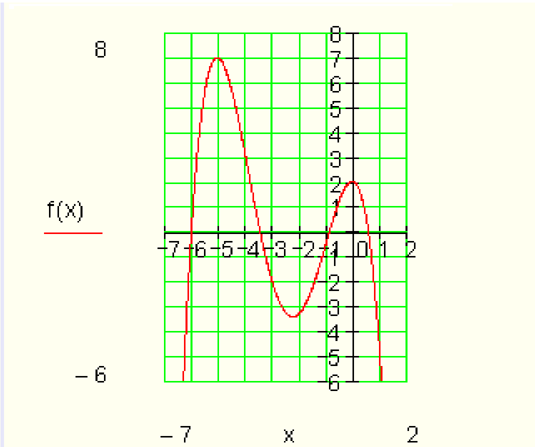
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$



$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

Symmetrie

Die Vermutung liegt nahe, dass Funktionen, die nur aus Potenzfunktionen mit geraden Exponenten zusammengesetzt sind, achsensymmetrisch sind und Funktionen, die nur aus Potenzen mit ungeraden Exponenten zusammengesetzt sind, punktsymmetrisch sind.

Definition 93:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann achsensymmetrisch, wenn deren Funktionsgleichung nur gerade Exponenten enthält.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann punktsymmetrisch, wenn deren Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten enthält.

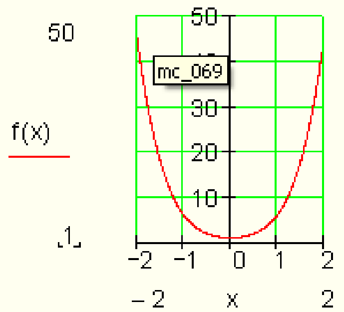
Beispiel 173:

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

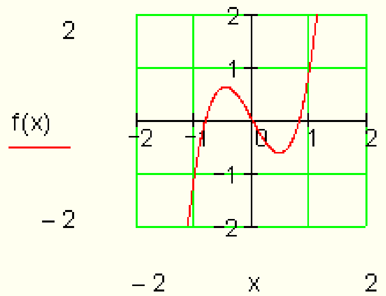
$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie

$f(x) = 3x^3 - 2x$

$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie



$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$
ist symmetrisch zur y − Achse
(Achsensymmetrie)



$f(x) = 3x^3 - 2x$
ist symmetrisch zum Ursprung
(Punktsymmetrie)

Definition 94:

Zerlegungssatz:

f (x) hat genau dann eine Nullstelle x_o, wenn f(x) durch $(x-x_o)$ teilbar ist:

$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ für alle x gilt: $f(x) = (x-x_0)\ g(x)$

g(x) ist eine ganzrationale Funktion, deren Grad um 1 niedriger ist als der Grad von f.

Beispiel 174:

a) Bestimmen Sie eine Zerlegung von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$ wenn die Nullstelle $x_0 = 3$ gegeben ist.

Dazu wird die Polynomdivision verwendet

$(x^3 - 3x^2 - 5x + 15) : (x-3) = x^2 - 5$

$\underline{-\ (x^3 - 3x^2)}$

$-\ 5x + 15$

$\underline{-\ (-5x + 15)}$

0

Ergebnis: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)\ (x^2 - 5)$.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und zerlegen Sie f vollständig in Faktoren.

Ergebnis: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)\ (x - \sqrt{5})\ (x + \sqrt{5})$

Nullstellensatz

Definition 95:

Nullstellensatz für ganzrationale Funktionen:

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen mehrfach gezählt werden.

Machen Sie eine Aussage über die Symmetrieeigenschaften, den Verlauf und die Anzahl der Nullstellen folgender ganzrationaler Funktionen.

$$f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

Lösung:

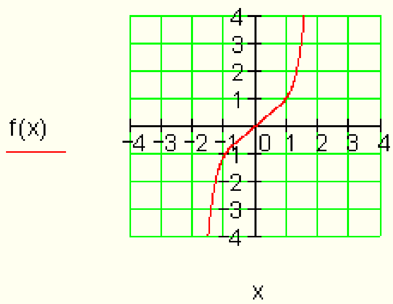
$f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$

punktsymmetrisch

Verlauf : III – I

mindestens

eine Nullstelle



Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

Definition 96:

Eine gebrochen rationale Funktion hat folgende Form

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0}$$

Es befindet jeweils im Zähler und Nenner eine ganzrationale Funktion.

$$y=\frac{3(x-1)^2(x+4)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+4)^2(x+1)(x-2)}$$

Definition 97:

Man nennt den größten Exponenten m im Zähler den Grad des Zählers und den höchsten vorkommenden Exponenten n im Nenner den Grad des Nenners. Das Zählerpolynom u(x) hat also den Grad m, das Nennerpolynom den Grad n. Die Differenz m - n ist der sogenannte Asymptotengrad.

Form gebrochen rationaler Funktionen

Die Gleichungen gebrochen rationaler Funktionen können in ganz unterschiedlichen Formen dargestellt sein. Hier einige Beispiele:

$$f_1(x)=\frac{x^2-4}{x^2+9} \qquad f_2(x)=x^2-\frac{8}{x} \qquad f_3(x)=\frac{2}{x+2}+\frac{4}{x-2}$$

Während die erste Funktionsgleichung schon die "normale Form" hat, in der alles mit einem Bruchstich dargestellt wird, bestehen die beiden anderen Funktionsterme aus zwei Summanden. Bringt man diese auf den Hauptnenner, dann haben auch sie die Normalform:

$$f_2(x)=x^2-\frac{8}{x}=\frac{x^3-8}{x}$$

$$f_3(x)=\frac{2}{x+2}+\frac{4}{x-2}=\frac{2(x-2)+4(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x-4+4x+8}{x^2-4}=\frac{6x+4}{x^2-4}$$

Bemerkung 37:

Von den oben angeschriebenen Funktionen hat

f_1 den Zählergrad 2, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad 0.

f_2 den Zählergrad 3, den Nennergrad 1 und den Asymptotengrad 2

f_3 den Zählergrad 1, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad -1

Eigenschaften von Wurzelfunktionen

Definition 98:

Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion zur Potenzfunktion $y = x^n$.

Ist n gerade so ist die Potenzfunktion nicht injektiv (umkehrbar eindeutig) und daher nicht eindeutig umkehrbar.

Es gibt es zwei Möglichkeiten die Wurzelfunktion zu definieren:

$f(x) = \sqrt[n]{x} \; und \; f(x) = -\sqrt[n]{x}$.

Dabei wird im Allgemeinen die positive Variante als die Umkehrfunktion angesehen.

Falls n ungerade ist, so ist die Wurzelfunktion auf ganz R umkehrbar.

Exponent kleiner als 1

Alle haben den Definitionsbereich R^+

Der Graph ist monoton steigend

Gemeinsame Punkte (0|0) und (1|1)

Für x<1: Die Graphen liegen über der Geraden y=x.

Für x>1: Die Graphen liegen unter der Geraden y=x.

Je mehr sich der Exponent $\frac{m}{n}$ der Zahl 1 nähert, umso enger liegt der Graph an der Geraden y=x.

Exponent größer als 1

Alle haben den Definitionsbereich R^+.

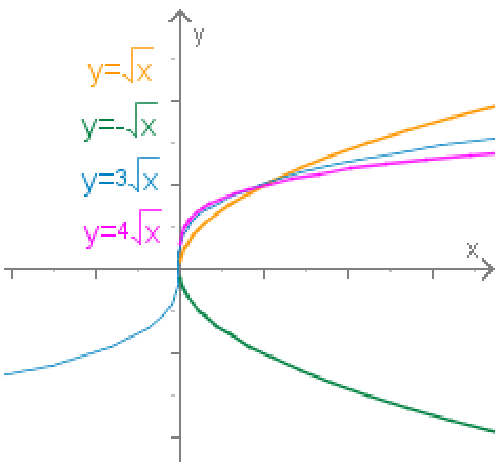
Der Graph ist streng monoton steigend

Gemeinsame Punkte (0|0) und (1|1)

Für x<1: Die Graphen liegen unter der Geraden y=x.

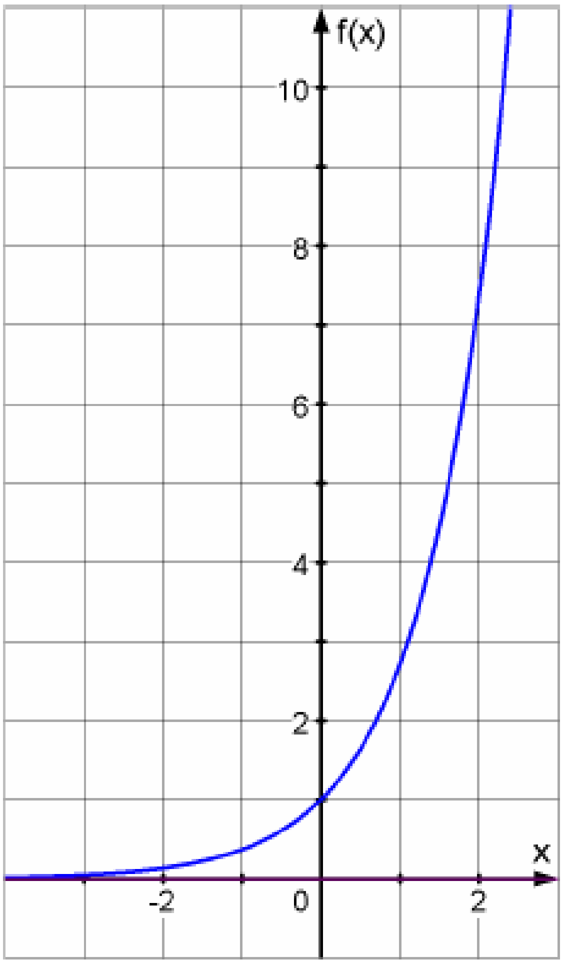
Für x>1: Die Graphen liegen über der Geraden y=x.

Je mehr sich der Exponent $\frac{m}{n}$ der Zahl 1 nähert, umso enger liegt der Graph an der Geraden y=x.



Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Grundeigenschaften der Funktion $f(x) = e^x$



Wichtige Funktionswerte:

$f(0) = 1 \quad f(1) = e \approx 2{,}718$

$f(2) = e^2 \approx 7{,}4$

$f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$

$f(-2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

Randwerte:

$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^x \to \infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^x \to 0$

d, h. die negative x-Achse ist **waagerechte Asymptote** mit

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Da für alle $x \in \mathrm{R} \quad f(x) = e^x > 0$ besitzt f **keine Nullstellen** und nur positive Werte:

Wertmenge $W = \mathrm{R}^+$.

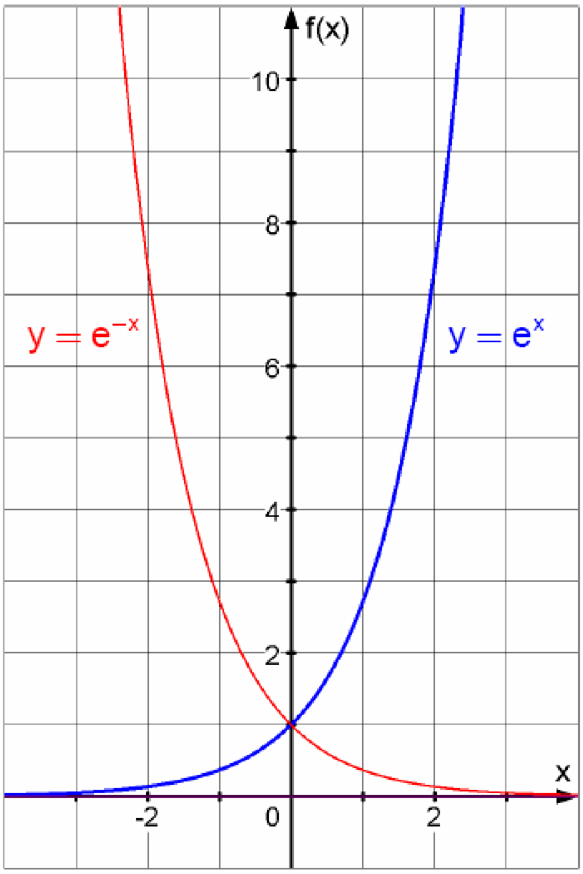
Ableitungen: $f'(x) = e^x > 0$

d.h. f steigt streng monoton und hat **keine Extremwerte**.

$f''(x) = e^x > 0$, d.h. das Schaubild K hat **immer Linkskrümmung** und **keine Wendepunkte**.

Es gibt weitere Exponentialfunktionen, deren Schaubilder aus der Kurve $y = e^x$ durch Spiegelung, Verschiebung oder Streckung entstehen. Das Erkennen dieser Eigenschaften hilft bei Aufgaben oft weiter. Daher werden auf den nächsten Seiten diese Abbildungen besprochen.

Spiegelung von K: $y = e^x$ ergibt K': $y = e^{-x}$.



Wichtige Funktionswerte:

$f(0) = 1 \quad f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$

$f(2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

$f(-1) = e \approx 2{,}718$

$f(-2) = e^2 \approx 7{,}4$

Randwerte:

$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^x \to 0$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^x \to \infty$

d. h. die positive x-Achse ist **waagerechte Asymptote** mit

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$.

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^{-x} > 0$ besitzt f **keine Nullstellen** und nur positive Werte:

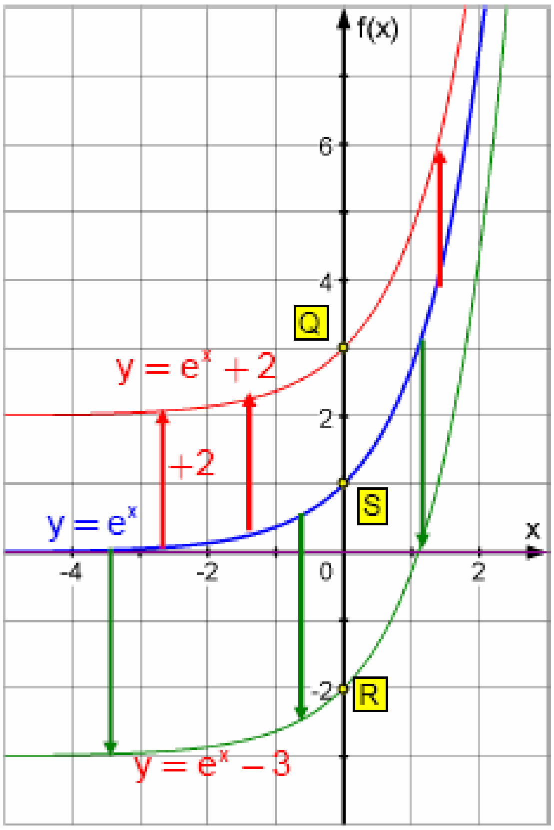
Wertmenge $W = \mathbb{R}^+$.

Ableitungen: $f'(x) = -e^{-x} < 0$

d.h. f fällt streng monoton und hat **keine Extremwerte**.

$f''(x) = e^{-x} > 0$, d.h. das Schaubild K hat **immer Linkskrümmung** und **keine Wendepunkte**.

Verschiebung der Kurve K: $y = e^x$.



1. Verschiebung in y-Richtung

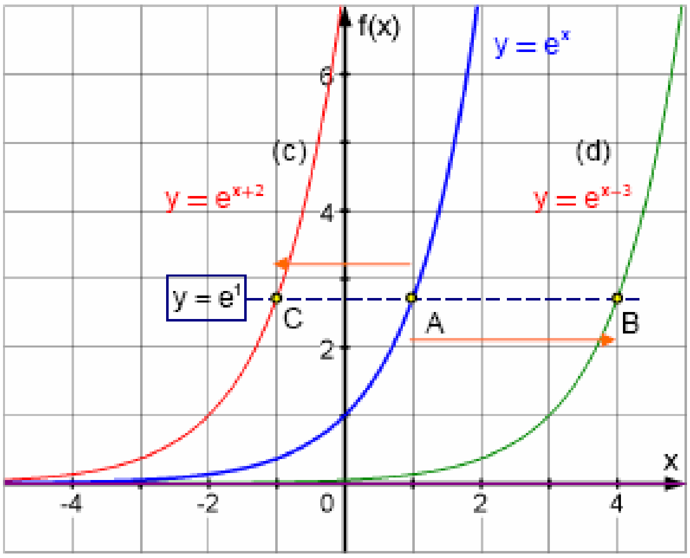
Durch Verschiebung in y-Richtung nach oben um 2, werden die y-Koordinaten aller Punkte um 2 vergrößert. Die Bildkurve hat daher die Gleichung $y = e^x + 2$

Die waagerechte Asymptote ist dann $y = 2$ und der Markante Punkt wird $Q(0\,|\,3)$.

Bei einer Verschiebung um 3 nach unten erhält man $y = e^x - 3$. mit der Asymptote $y = -3$ und dem markanten Punkt $R(0\,|\,-2)$.

Der markante Punkt liegt (solange keine Streckung in y-Richtung vorliegt) stets um 1 über der Asymptote.

2. Verschiebung in x-Richtung.



Die Kurve K: $y = e^x$ (Mitte) Wird um drei nach rechts verschoben, ergibt: $y = e^{x-3}$ bzw. um 2 nach links: $y = e^{x+2}$.

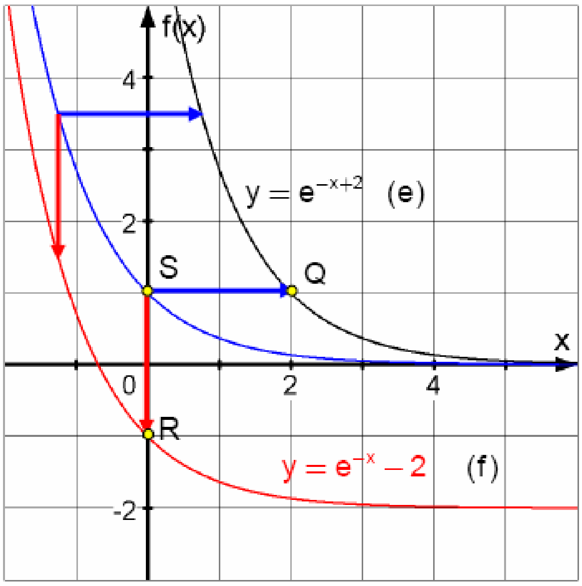
Punkte mit der y-Koordinate e liegen auf allen drei Kurven. Um den Punkt auf der Kurve $y = e^x$ zu erhalten, benötigt man x = 1: $A(1\,|\,e)$.

Um den Punkt auf der Kurve $y = e^{x-3}$ zu erhalten, muß man x = 4 wählen also $B(4\,|\,e)$. Er entsteht aus A durch Verschieben um 3 nach rechts.

Um den Punkt auf $y = e^{x+2}$ zu erhalten, benötigt man x = -2 (Verschiebung um 2 nach links !)

Definition 99:

Die Kurve $y=e^{x+2}$ entsteht aus $y=e^x$ durch Verschiebung um 2 nach links.
Die Kurve $y=e^{x-3}$ entsteht aus $y=e^x$ durch Verschiebung um 3 nach rechts.

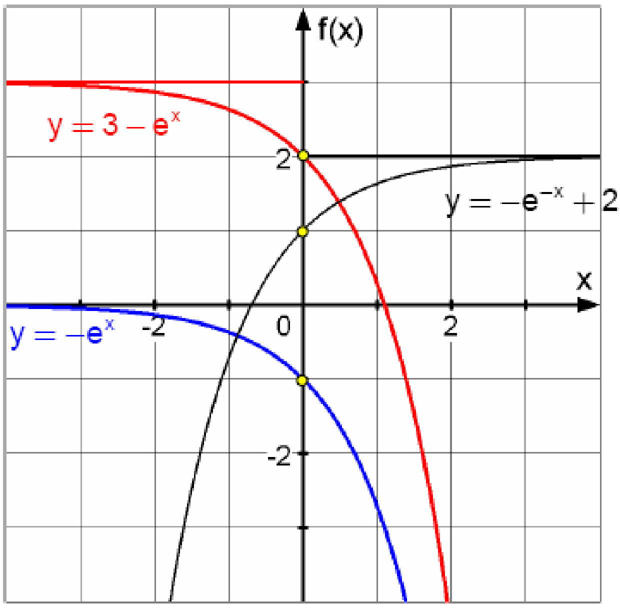


Verschiebt man $y = e^{-x}$ um 2 nach rechts entsteht $y = e^{-(x-2)} = e^{-x+2}$

Man beachte, daß man das Minuszeichen im Exponenten ausklammern muß, will man die Verschiebung in x-Richtung erkennen!

Der markante Punkt ist $Q(2\,|\,1)$
und die Asymptote: y = 0

Bei $y = e^{-x} - 2$ erkennt man sehr schnell die Verschiebung von $y = e^{-x}$ um 2 nach unten. Markanter Punkt: $R(0\,|\,-1)$ und Asymptote: y = - 2.

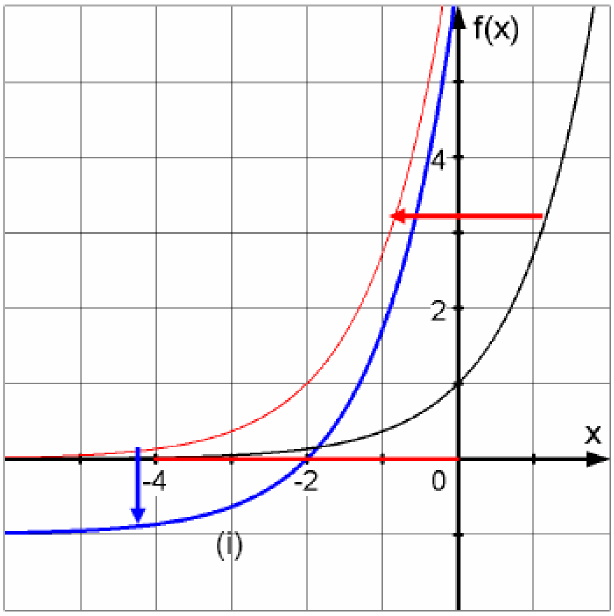


Die untere Kurve stellt die an der x-Achse gespiegelte Kurve $y = -e^x$ dar.

Verschiebt man diese um 3 nach oben, erhält man die Kurve mit der Gleichung $y = 3 - e^x$.

Die dritte Kurve entsteht aus $y = e^{-x}$ durch Spiegelung an der x-Achse: $y = -e^{-x}$ und dann Verschiebung um 2 nach oben:

$$y = -e^{-x} + 2$$



Die untere (blaue) Kurve hat die Gleichung $y = e^{x+2} - 1$.

Beweis:

Die Ausgangskurve $y = e^x$ wird zunächst um 2 nach links verschoben, ergibt die Gleichung $y = e^{x+2}$.

Diese Kurve schieben wir um 1 nach unten, ergibt $y = e^{x+2} - 1$

(1) Streckung in y-Richtung:

Dabei werden alle y-Koordinaten von der x-Achse aus mit einem Faktor k multipliziert, so daß gilt: $\overline{y} = k \cdot y$

Die Kurve mit der Gleichung

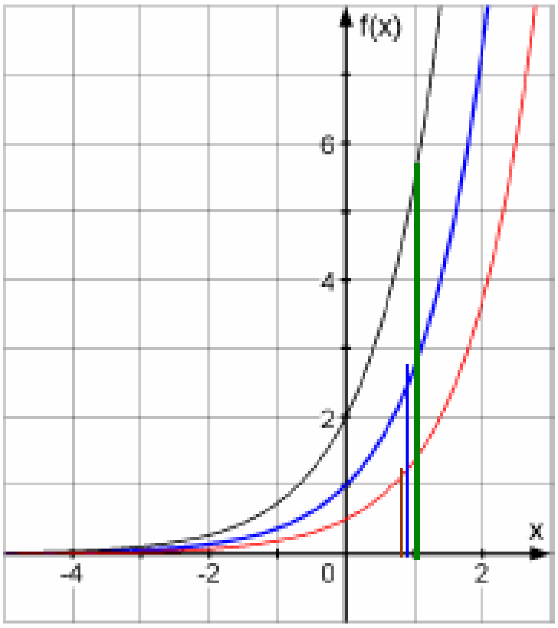
$y = 2e^x$

entsteht also aus $y = e^x$ durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung.

Und die Kurve mit der Gleichung

$y = \frac{1}{2}e^x$ entsteht aus $y = e^x$ durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

Wenn der Streckfaktor k positiv aber kleiner als 1 ist ($0 < k < 1$), dann nennt man die Streckung auch eine Stauchung. Die Abbildung zeigt auch die Größe von $f(1) = e$ bzw. $2e$ oder $\frac{1}{2}e$ durch vertikale Linien, die eigentlich genau bei 1 stehen sollten.

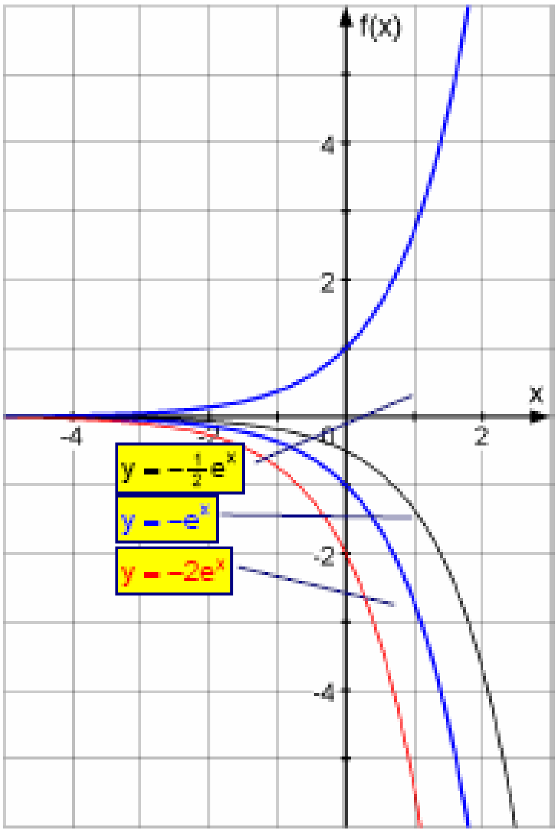


Eine Streckung mit einem negativen Faktor ist eigentlich eine Zusammensetzung aus einer anfänglichen Spiegelung an der x-Achse, wobei aus $y = e^x$ die Bildkurve $y = -e^x$ (unten Mitte) wird mit nachfolgender Streckung (jetzt) mit positivem Faktor.

Man kann dies verfolgen:
Nach oben verläuft $y = e^x$ daraus wird die nach unten verlaufende (mittlere) Kurve $K_1: \ y = -e^x$.

Und aus dieser entstehen dann durch Streckungen $K_2: \ y = -2e^x$

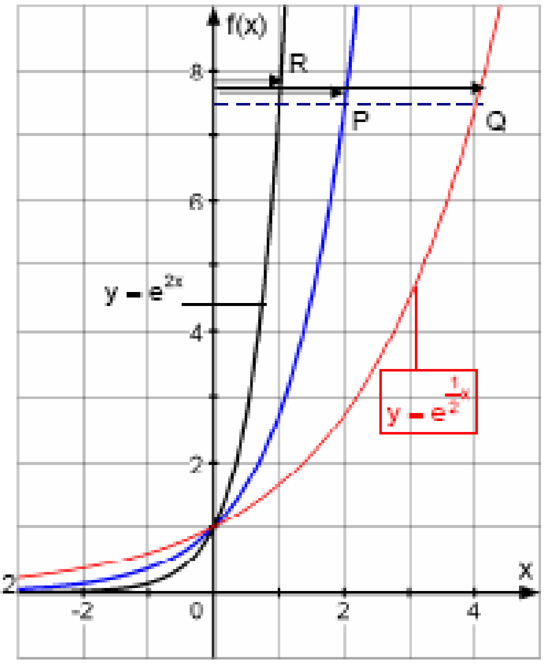
und $K_3: \ y = -\frac{1}{2}e^x$.



(2) Streckung in x-Richtung:

Die Abbildung zeigt die drei Kurven $y = e^x$, $y = e^{2x}$ und $y = e^{0,5x}$.
Um dies zu verstehen berechnen wir für unsere Ausgangskurve $y = e^x$ zu x = 2 die y-Koordinate. Dies führt uns zum Kurvenpunkt P (2 I e^2).

Als nächsten betrachten wir den Punkt Q (4 I e^2). Er hat dieselbe y-Koordinate wie P, liegt also auf der gleichen Höhe. Jedoch ist seine x-Koordinate doppelt so groß. Also entsteht er aus P durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2. Q liegt aber auf der Kurve mit der Gleichung $y = e^{0,5x}$, denn durch Einsetzen von x = 4 entsteht $y = e^2$.



Also merken wir uns:

Eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2 Exponenten:

Die Kurve $y = e^{\frac{1}{2}x}$ entsteht aus $y = e^x$ durch Streckung in x-Richtung mit k = 2

Entsprechend gilt:

Die Kurve $y = e^{2x}$ entsteht aus $y = e^x$ durch Streckung in x-Richtung mit $k = \frac{1}{2}$, also durch eine Stauchung

Dies erkennt man an der Abbildung so:

Der Punkt P (2 I e^2) geht dabei in $R(1 | e^2)$ über und dieser liegt auf der Kurve mit der Gleichung $y = e^{2x}$.

Bemerkung. Man kann diese Streckungen auch mit ***Abbildungsgleichungen*** vornehmen. Das sieht dann so aus.

Ein Punkt $P(x | y)$ wird in x-Richtung durch eine Streckung mit dem Faktor k abgebildet. Daraus wird der Bildpunkt $\overline{P}(\overline{x} | \overline{y})$. Und weil bei einer Streckung in x-Richtung die y-Koordinate gleich bleibt und die x-Koordinate den Faktor k erhält, gilt folglich:

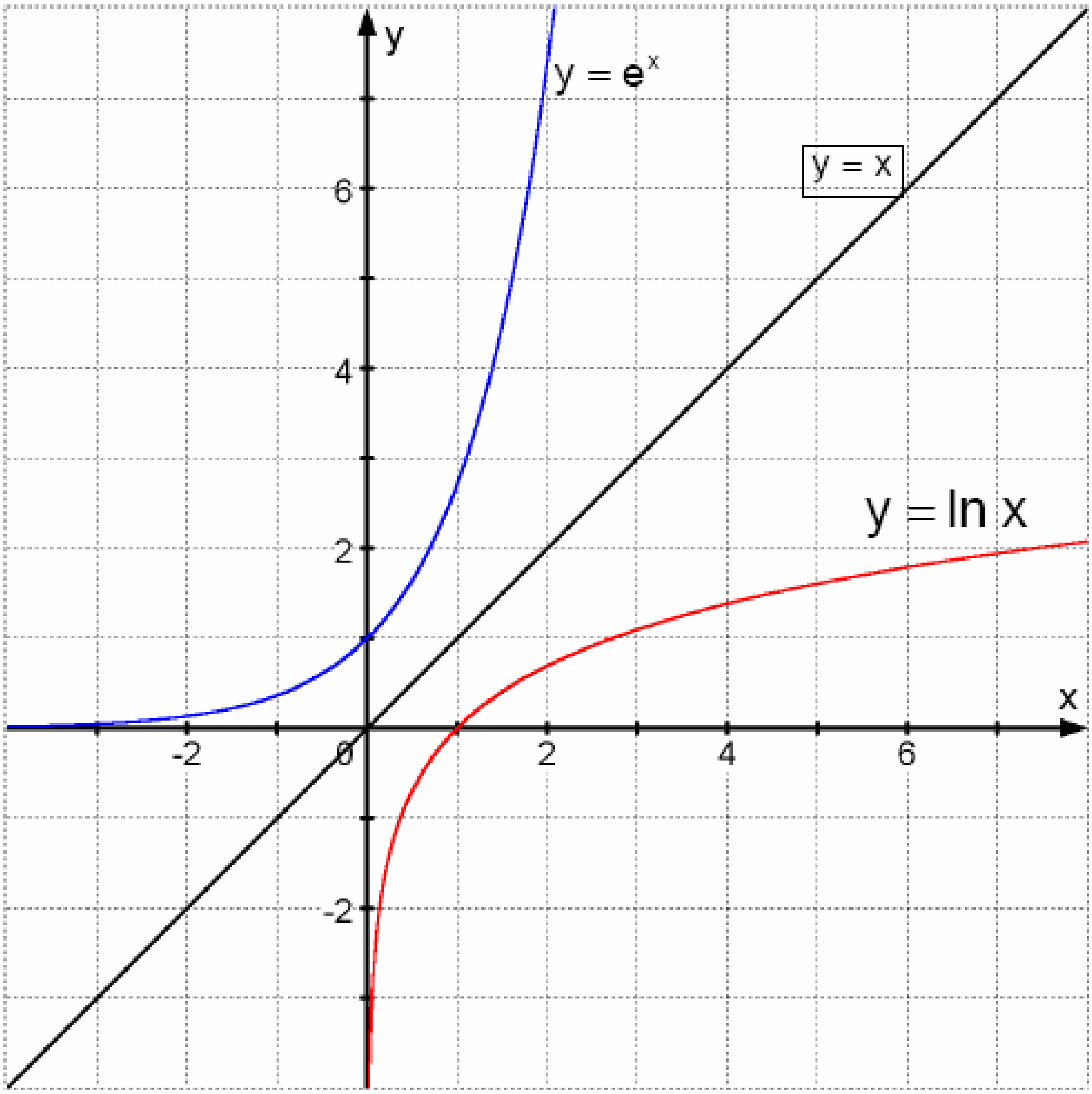
$$\begin{Bmatrix} \overline{x} = k \cdot x \\ \overline{y} = y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{1}{k} \cdot \overline{x} \\ y = \overline{y} \end{Bmatrix}$$

Setzt man die rechten Gleichungen in die Gleichung der Kurve $y = e^x$ ein

Erhält man $\overline{y} = e^{\frac{1}{k}\overline{x}}$. Bzw. ohne die zur Unterscheidung nötigen Striche: $y = e^{\frac{1}{k}x}$.

Eigenschaften von Logarithmusfunktionen

Bei der Logarithmusfunktion handelt es sich um die Umkehrfunktion zur e-Funktion.

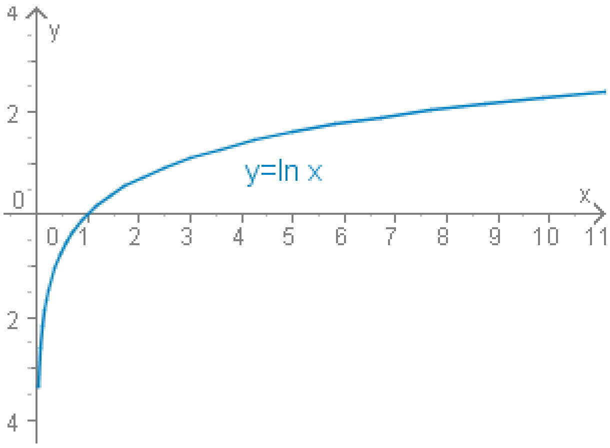


Eigenschaften für die Kurvendiskussion

	$f(x) = \ln x$	$f(x) = \ln \text{Arg}(x)$
Definitionsbereich	Bed.: $x > 0$ $\mathbf{D} = \mathbf{R}^+$	Bed.: $\text{Arg}(x) > 0 \Rightarrow \mathbf{D} = ...$
Nullstelle	$x_N = 1$ denn $\ln 1 = 0$	Bed.: $\text{Arg}(x_N) = 1 \Rightarrow x_N = ...$
Randwerte	$x \to 0 \Rightarrow \ln x \to -\infty$ d.h. senkrechte Asymptote $x \to \infty \Rightarrow \ln x \to \infty$	$x \to$ Argument-Nullstelle $\Rightarrow f(x) \to -\infty$ d.h. senkrechte Asymptote (nach unten) $x \to$ Argument-Polstelle $\Rightarrow f(x) \to \infty$ d.h. senkrechte Asymptote (nach oben)
Ableitung:	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{\text{Arg}'(x)}{\text{Arg}(x)}$
Wertmenge	$\mathbf{W} = \mathbf{R}$	Unterschiedlich

Logarithmusfunktionen

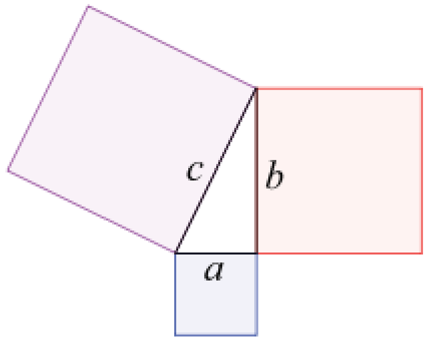
Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Im Falle von e^x heißt die Umkehrung natürlicher Logarithmus und wird mit ln(x) bezeichnet.



Die Logarithmusfunktionen sind streng monoton wachsend und haben eine Nullstelle bei x_0= 1.

Trigonometrische Zusammenhänge

Satz des Pythagoras

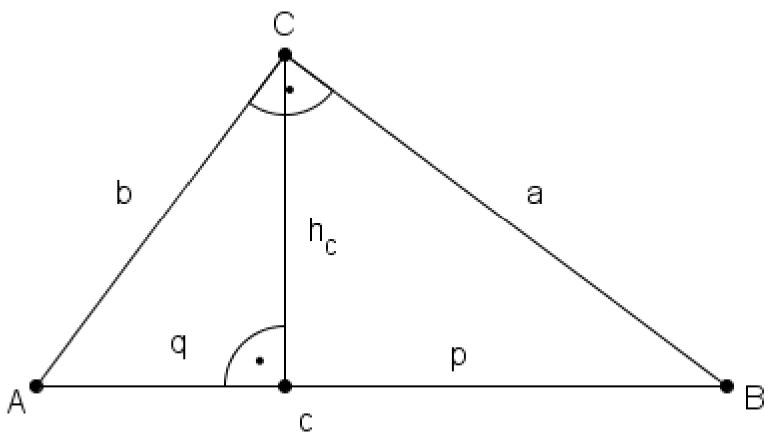


Definition 100:

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b sowie der Hypotenuse c ist die Summe der Kathetenquadrate a^2 und b^2 gleich dem Hypotenusenquadrat c^2.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Kathetensatz des Euklid



Definition 101:

$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$

Beispiel 175:

Bei der Konstruktion eines Gestells sind die Längen c und p bekannt. Die Längen a und b müssen nun noch bestimmt werden.

Gegeben: $c = 5cm$; $p = 2cm$

Gesucht: a; b

Lösung:

$q = c - p$

$q = 5cm - 2cm$

$q = 3cm$

$a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 5cm \cdot 2cm$

$a^2 = 10cm^2$

$a = 3{,}16cm$

$b^2 = c \cdot q$

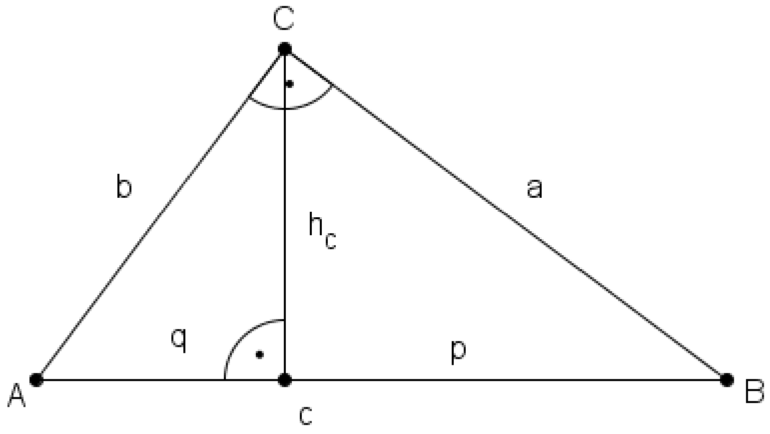
$b^2 = 5cm \cdot 3cm$

$b^2 = 15cm^2$

$b = 3{,}87cm$

Höhensatz des Euklid

Der Höhensatz des Euklid lehnt sich stark an den Kathetensatz an.



Definition 102:

$$h^2 = p \cdot q$$

Beispiel 176:

Die Länge p sei 2cm, die Länge q sei 3cm. Die Höhe soll bestimmt werden:

p = 2cm

q = 3cm

Lösung:

$h^2 = p \cdot q$

$h^2 = 2cm \cdot 3cm$

$h^2 = 6cm^2$ // Wurzel ziehen

h = 2,45 cm

Sinussatz

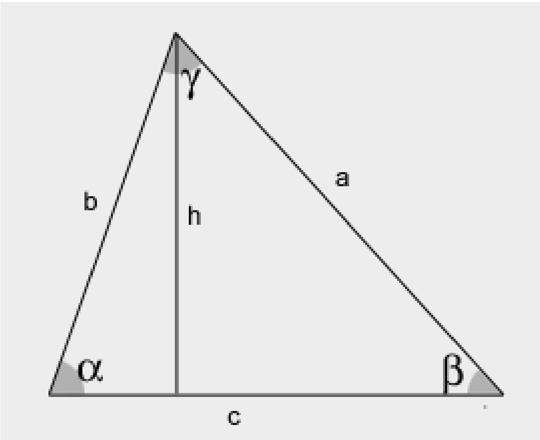
Der Sinussatz und der Kosinussatz sind zwei Erweiterungen der trigonometrischen Funktionen, die an sich ja nur in rechtwinkligen Dreiecken definiert sind, auf beliebige Dreiecke.

Der "Trick" dabei ist in beiden Fällen, das Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke zu "teilen". (Die Höhe steht senkrecht auf der Seite.)

Definition 103:

Der Sinussatz beschreibt das Verhältnis der Seitenlänge zu den gegenüberliegenden Winkeln im Dreieck.

Der Sinussatz kann dazu verwendet werden, um aus der Angabe von zwei Winkeln und einer Seite das Dreieck zu berechnen.



Definition 104:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Kosinussatz

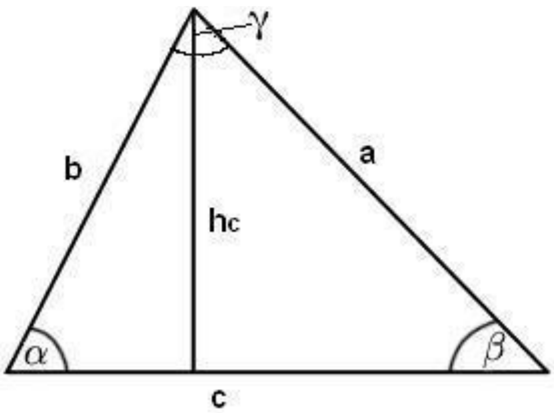
Der Kosinussatz wird auch als trigonometrischer Pythagoras bezeichnet. Das rührt daher, dass mit ihm wie beim Satz des Pythagoras eine fehlende Dreieckseite berechnet werden kann, allerdings im Gegensatz zum Pythagoras, der ja nur für rechtwinklige Dreiecke gilt, in jedem beliebigen Dreieck.

Man kann ja ein Dreieck eindeutig konstruieren, wenn man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben hat (Kongruenzsatz SWS). Also zum Beispiel die Seiten b und c und den Winkel α in diesem Dreieck:

Definition 105:

In der Trigonometrie drückt der Kosinussatz eine Beziehung zwischen den drei Seiten und einem Winkel im Dreieck aus.

Die Formeln zum Kosinussatz beziehen sich auf die folgende Grafik:



Definition 106:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Beispiel 177:

Gegeben sei a = 11, b = 10 und c = 13. Berechnet werden soll der Winkel α.

Lösung:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{11^2 - 10^2 - 13^2}{-2 \cdot 10 \cdot 13}$$
$$\cos(\alpha) = 0{,}57$$
$$\alpha = 55{,}25°$$

Bogenmaß

Das Bogenmaß ist ein Winkelmaß. Die dimensionslose Zahl trägt oft den Zusatz Radiant bzw. rad, um die Größe von Grad zu unterscheiden.

Umrechnung

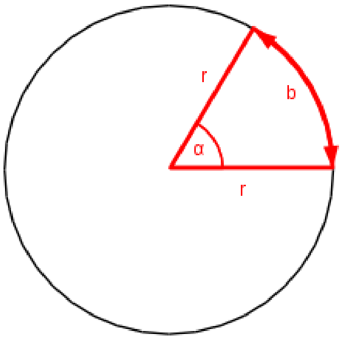
Definition 107:

Die Umrechnung eines Bogenmaßes in Grad erfolgt nach folgender Formel:

$$\text{Grad} = \frac{\text{Bogenmaß} \cdot 180}{\pi}$$

Umgekehrt lässt sich ein Bogenmaß nach der folgenden Formel bestimmen:

$$\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180}$$



Die Umrechnungsfunktion von Winkel im Gradmaß in das Bogenmaß heißt arc oder arcus (lat. Bogen). Somit ist arc(α) das Bogenmaß des in Grad angegebenen Winkels α.

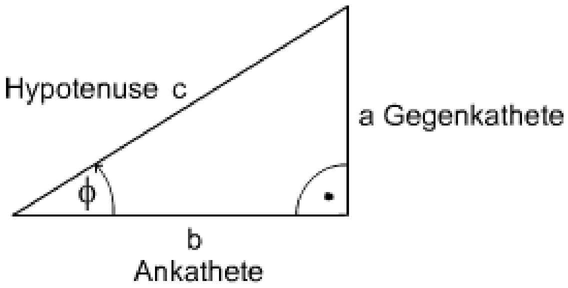
Die Angaben Bogenminute und Bogensekunde beziehen sich nicht auf das Bogenmaß, sondern sind Untereinheiten von Grad.

In vielen Berechnungen der Physik und der Mathematik ist das Bogenmaß das zweckmäßigste Winkelmaß. Für den Alltagsgebrauch ist es unpraktisch, da Werte im Bogenmaß recht unanschaulich sind (z. B. hat ein Winkel mit dem Bogenmaß 1 rad ein Gradmaß von ca. 57°). Daher wird in der Alltagspraxis stattdessen meist das Gradmaß verwendet.

Trigonometrische Funktionen

Definition des Sinus im Dreieck

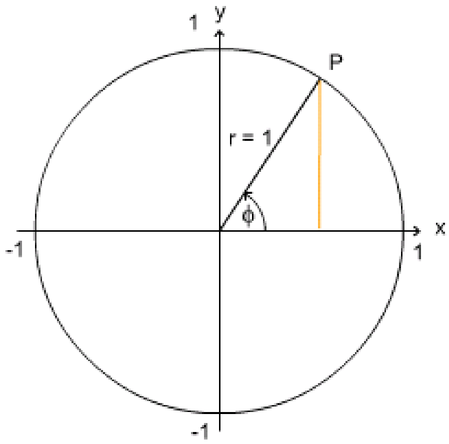
Der Sinus eines Winkels kann mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks definiert werden (siehe Abbildung).



Er ergibt sich aus dem Quotienten der Gegenkathete und der Hypotenuse. Der Wert, der sich daraus ergibt, ist unabhängig von der Größe des Dreiecks:

$$\sin(\phi) = \frac{a}{c}$$

Um die Funktion des Sinus zu gewinnen, wird das Dreieck in den Einheitskreis, der wiederum in ein xy-Koordinatensystem eingebettet ist, gesetzt (Abbildung).



Die Hypotenuse ist der Radius r des Kreises, der den Kreis im Punkt P schneidet. Die y-Koordinate von P ist dann gleich dem Sinus des Winkels ϕ, denn der Radius r des Einheitskreises ist 1 und damit gilt:

$$\sin(\phi) = \frac{y}{r} = y_0$$

Dies gilt für alle Punkte des Einheitskreises und damit für beliebige Winkel zwischen 0° und 360° (Gradeinteilung) und alle Werte zwischen 0 und 2π(Radeinteilung).

Der Einheitskreis

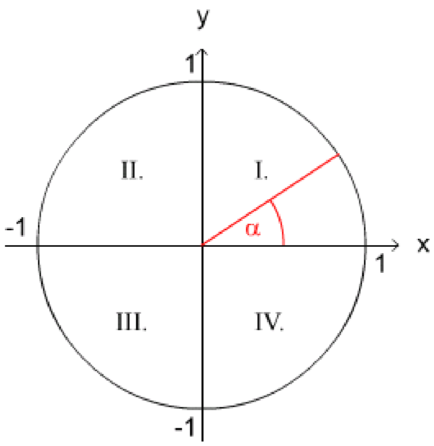
Der Einheitskreis wird benutzt, um die grundlegenden Funktionen, z.B. in der Trigonometrie, zu definieren. Er ist in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingebettet. Der Ursprung dieses Koordinatensystems fällt mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammen. Der Radius hat den Wert 1. Diese Tatsache erleichtert die Definition von Funktionen.

Genauso wie das Koordinatensystem nennt man die einzelnen Abschnitte des Kreises Quadranten. Der 1. Quadrant liegt im vollständig positiven Teil des Koordinatensystems. Die weiteren Quadranten werden gegen den Uhrzeigersinn gezählt.

Winkel im Einheitskreis werden durch einen Zeiger dargestellt, der seinen Ursprung im Mittelpunkt hat und am Kreisrand endet. Wenn der Zeiger auf der positiven x-Achse liegt, hat man den Anfangswinkel α_0. Wenn man mit dem Zeiger alle Quadranten abgefahren hat und wieder zum Ausgangspunkt zurückgekehrt ist, hat man einen vollen Winkel.

Es gilt weiterhin folgende Verabredung:

Wenn der Zeiger gegen den Uhrzeigersinn verläuft, dann werden die Winkel positiv gezählt, wenn der Zeiger mit dem Uhrzeigersinn läuft, wird er negativ gezählt.



Der Einheitskreis

Berechnung von Bogen- und Gradmaß

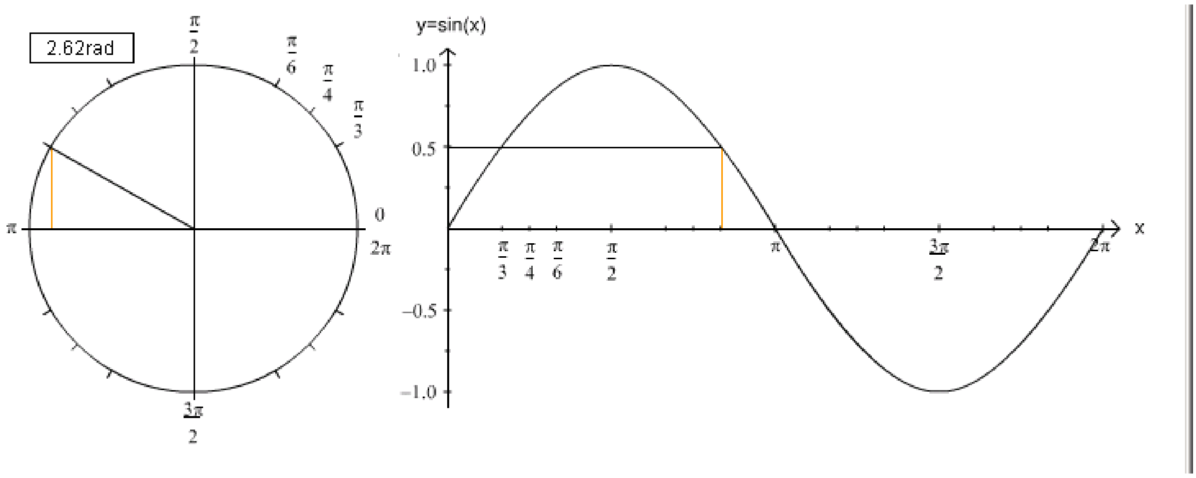
Winkel im Einheitskreis können auf zwei Arten, dem Gradmaß und dem Bogenmaß, gemessen werden. (vergleiche vorheriges Kapitel)

Die Sinusfunktion

Eine graphische Darstellung der Sinusfunktion

$$y = \sin(x)$$

gewinnt man, wenn man die Beziehung zwischen x und sin (x) in einem Koordinatensystem darstellt. Die y-Koordinate wird als Zeiger dargestellt. Dieser wandert in dem neuen Koordinatensystem entlang der x-Achse und zeichnet so die Sinusfunktion.



Die Sinusfunktion für beliebige Amplituden, Perioden und Phasen kann durch die Formel

$$y = A \cdot \sin(bx + c)$$

beschrieben werden.

Definition 108:

Die y-Koordinate ist in dieser Formel nicht nur von der x-Koordinate bzw. vom Winkel Φ abhängig, sondern auch von der **AMPLITUDE A**, der **PERIODE b** und der **PHASE c**.

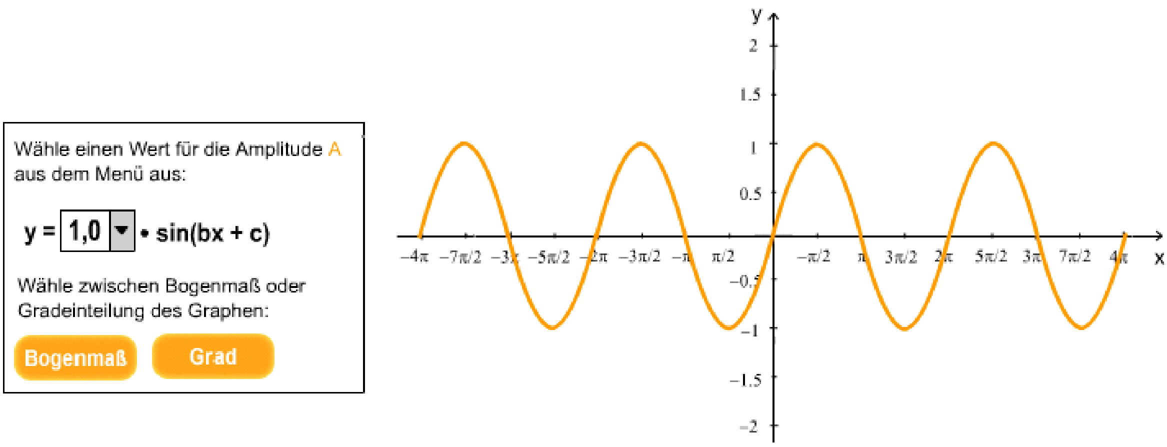
Die Amplitude der Sinusfunktion

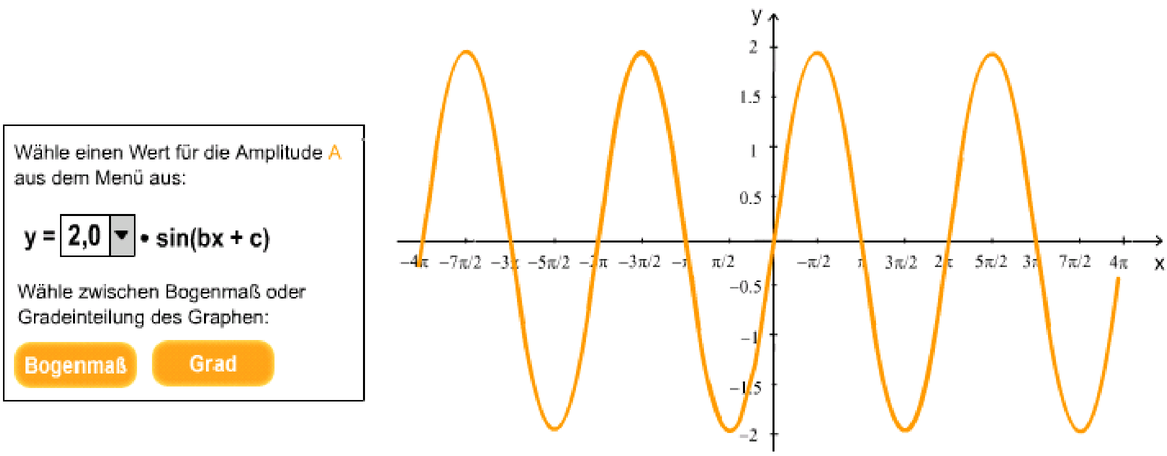
Die Sinusfunktion nimmt mindestens den Wert -1 und höchstens den Wert +1 an. Multipliziert man die Sinusfunktion mit einem konstanten Faktor **A**, so erhält man eine Funktion, die den gleichen periodischen Charakter hat. Die Nullstellen verändern sich nicht, aber deren Maxima bzw. deren Minima nehmen den Wert **A** bzw. **-A** an.

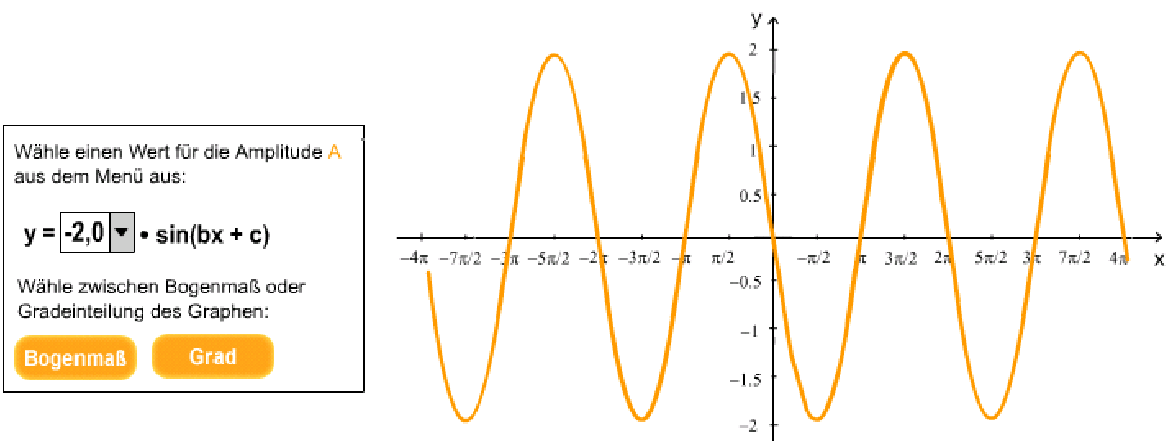
Definition 109:

Die Amplitude ist der Faktor A in der Funktion $y = A \cdot \sin{(bx + c)}$

Beispiel 178:







Periode der Sinusfunktion

Definition 110:

Wenn das Argument x in der Gleichung

$$y = A \cdot \sin(bx + c)$$

mit einem konstanten Faktor **b** multipliziert wird, dann spricht man von einer Änderung der Periode der Sinusfunktion.

Die Periode sagt etwas darüber aus, wie oft eine Schwingung in einem bestimmten Wertebereich (wie z.B. -4π bis $+4\pi$) oszilliert.

Für die Physik ist auch interessant, wie oft eine Schwingung in einem bestimmten Zeitintervall vollzogen wird. Dort trifft man auch häufig auf die Notation:

$$y = \sin(\omega t)$$

Statt der Konstanten **b**, steht hier das Symbol ω. Dies ist die Kreisfrequenz oder die Anzahl der Schwingungen im Zeitintervall $2\pi\,\mathrm{sec}$. t hat in obigen Gleichung häufig die Bedeutung der Zeit.

Es gilt:

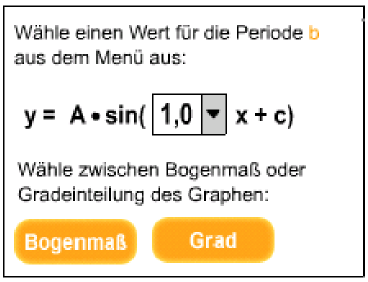
$$\omega = 2\pi\nu$$

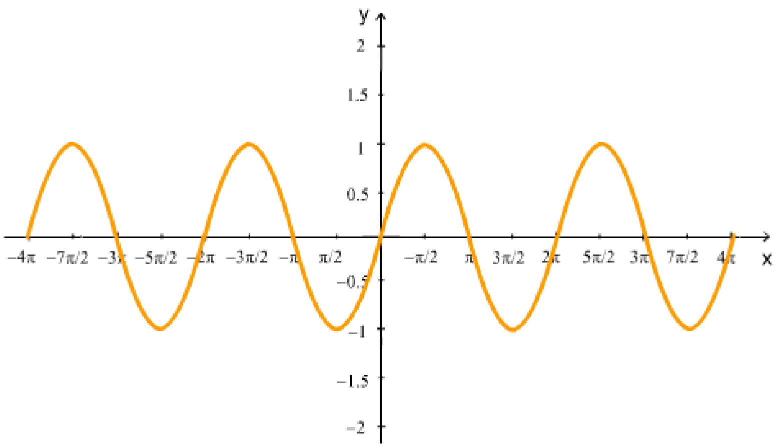
Die Frequenz ν ist die Zahl der Schwingungen im Zeitintervall 1 sec.

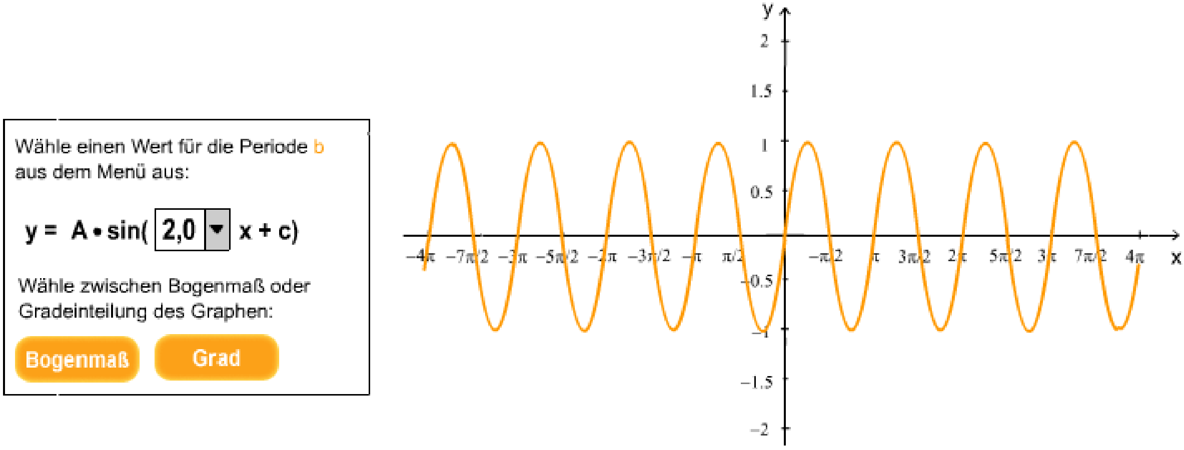
Bemerkung 38:

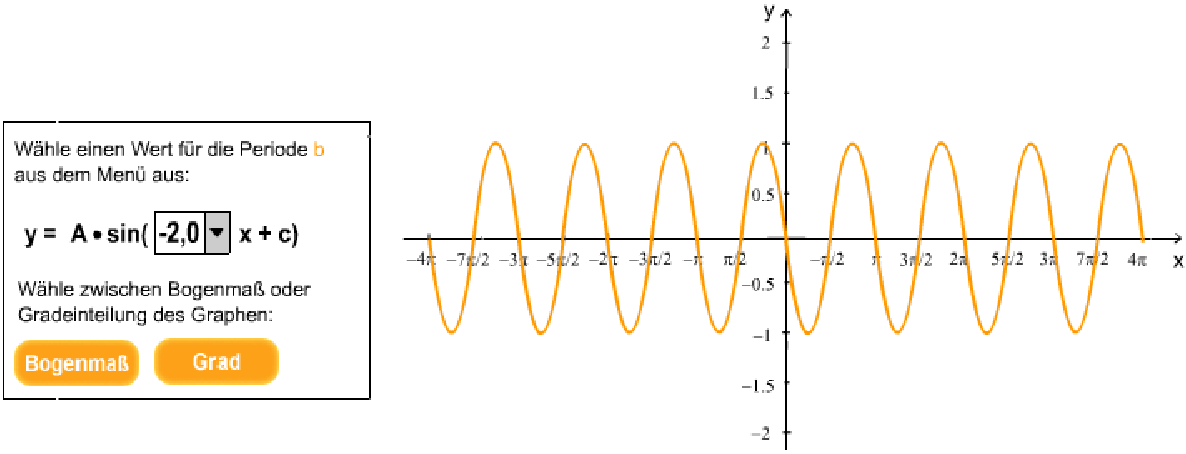
Allgemein lässt sich für jede Notation sagen, dass, wenn die Periode b groß ist, mehr Schwingungen durchgeführt werden und wenn b klein ist, dass weniger Schwingungen vollzogen werden.

Beispiel 179:






Wähle einen Wert für die Periode b aus dem Menü aus:
y = A • sin(2,0 x + c)
Wähle zwischen Bogenmaß oder Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad
y
x


Wähle einen Wert für die Periode b aus dem Menü aus:
y = A • sin(-2,0 x + c)
Wähle zwischen Bogenmaß oder Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad
y
x

Die Phase der Sinusfunktion

Definition 111:

Hier soll die Bedeutung der Konstanten **c** in der Gleichung

$$y = A \cdot \sin\,(bx + c)$$

diskutiert werden. Dem Argument der Sinusfunktion ist eine additive Konstante zugefügt.

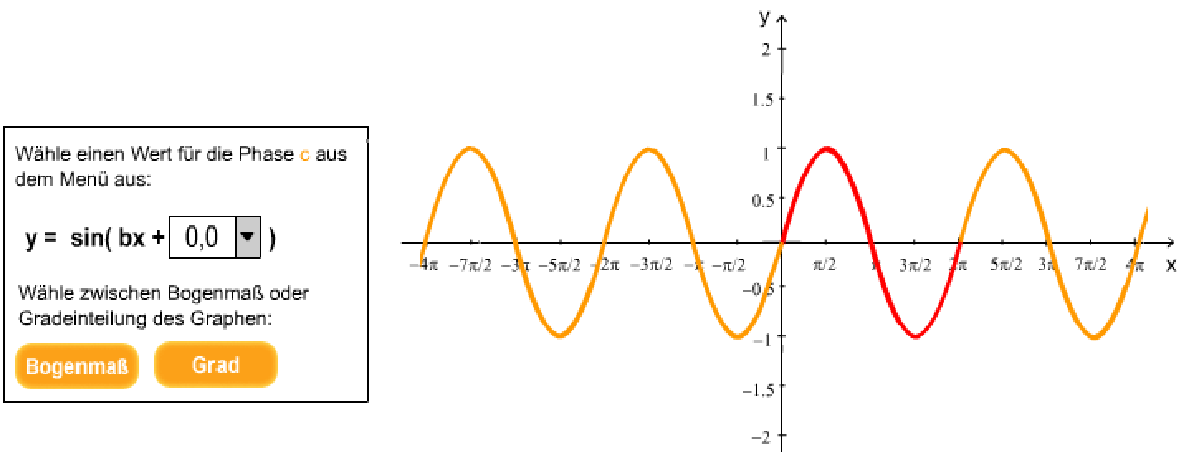
Das heißt, mit Hilfe der Phase wird der Nulldurchgang entweder nach links oder nach rechts verschoben.

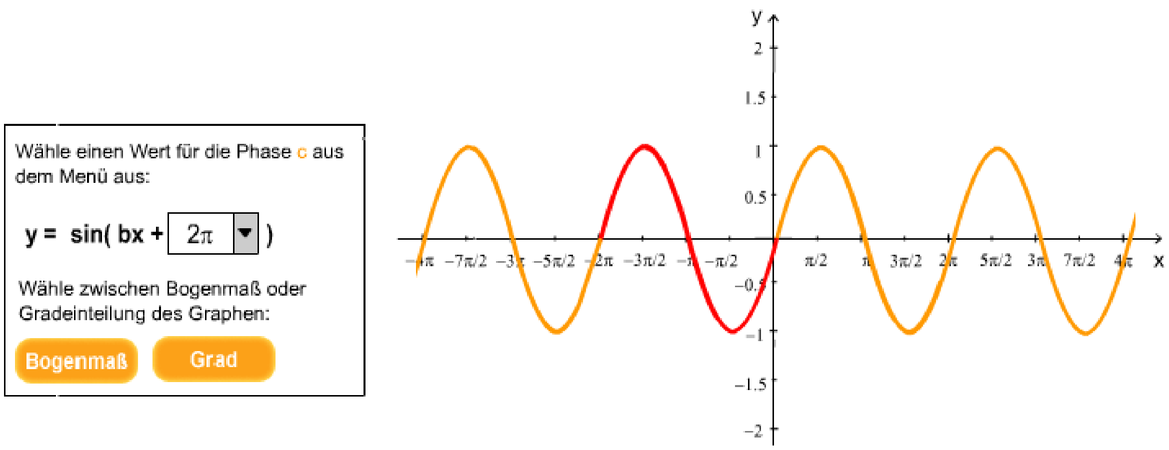
Wenn die Phase c einen positiven Wert hat, wird die Sinusfunktion nach links vom Koordinatenursprung aus gesehen verschoben und wenn c einen negativen Wert hat, wird die Sinusfunktion nach rechts verschoben.

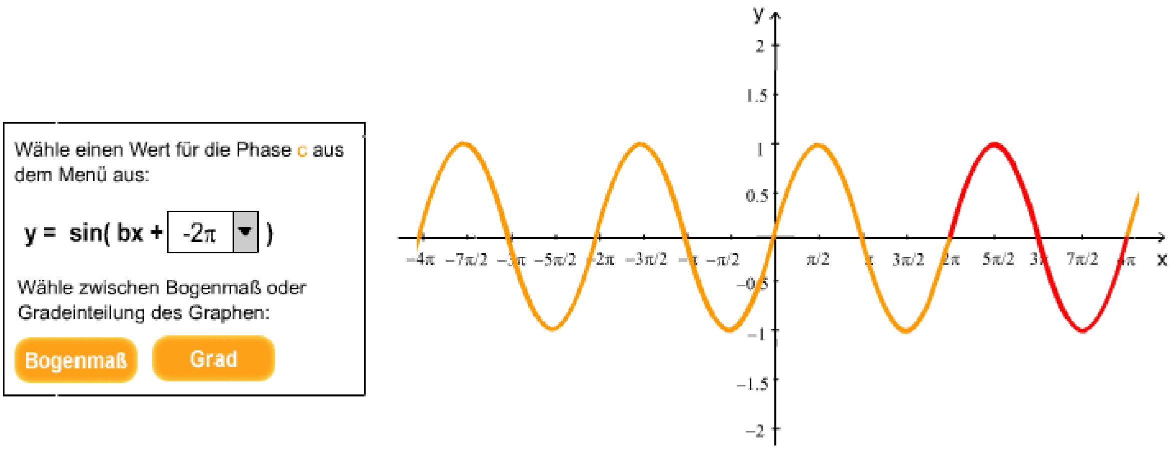
Die Phase ist eine additive Konstante im Argument der Sinus-Funktion

$$y = A \cdot \sin\,(bx + c)$$

Beispiel 180:





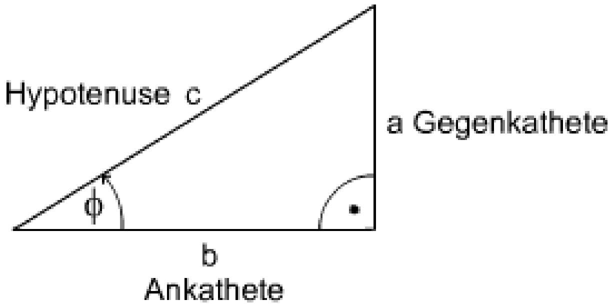

Wähle einen Wert für die Phase c aus dem Menü aus:
y = sin(bx + -2π)
Wähle zwischen Bogenmaß oder Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad
y
2
1.5
1
0.5
−1
−1.5
−2
x
−4π
−7π/2
−5π/2
−3π/2
−π/2
π/2
3π/2
5π/2
7π/2

Definition des Kosinus im Dreieck

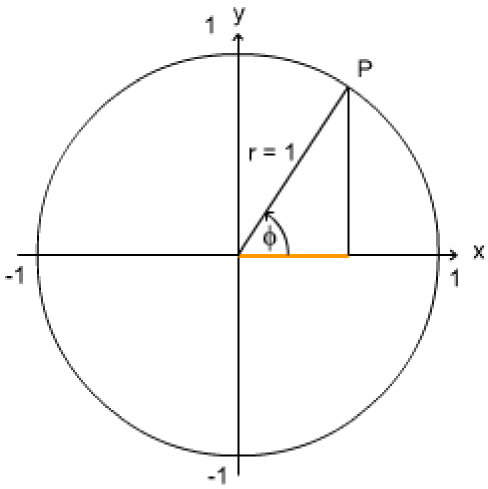
Definition 112:

Geometrisch ist der Kosinus definiert als Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck (siehe Abbildung):

$$\cos(\Phi) = \frac{b}{c}$$



Genauso wie bei der Sinusfunktion wird das Dreieck in den Einheitskreis gesetzt (Abbildung).



Die Hypotenuse wird zum Radius r des Kreises und schneidet den Kreis im Punkt P. Der Kosinus des Winkels Φ ist der x-Achsenabschnitt zum entsprechenden Punkt P.

Definition 113:

Der Kosinus eines Winkels Φ ist gleich der x-Komponente des zu Φ gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.

Deswegen kann man schreiben:

$$x = \cos(\Phi)$$

da r = 1 ist.

Normalerweise wird x immer als die Variable benutzt, für die immer andere Werte gesetzt werden.

Definition der Kosinusfunktion

Genauso wie bei der Herleitung der Sinusfunktion geht man bei der Herleitung der Kosinusfunktion vor:

$y = \cos x$

Von dem Schnittpunkt des Zeigers mit dem Einheitskreis wird ein Lot gefällt und der dazugehörige x-Achsenabschnitt bestimmt. Dieser Wert wird der Kosinusfunktion im Graphen als y-Achsenabschnitt zugeordnet.

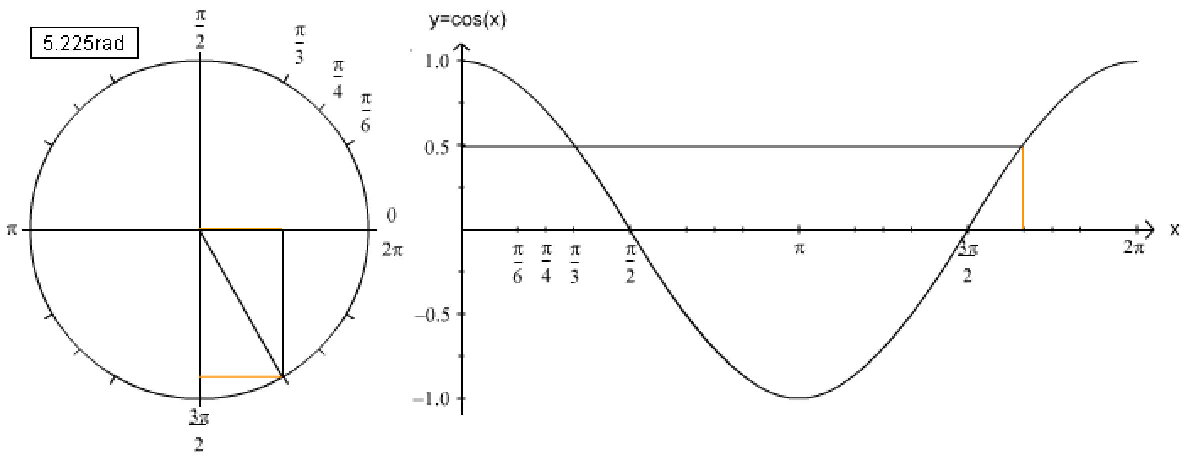
Die Kosinusfunktion für beliebige Amplituden, Perioden und Phasen kann durch die Formel

$y = A \cdot \cos(bx + c)$

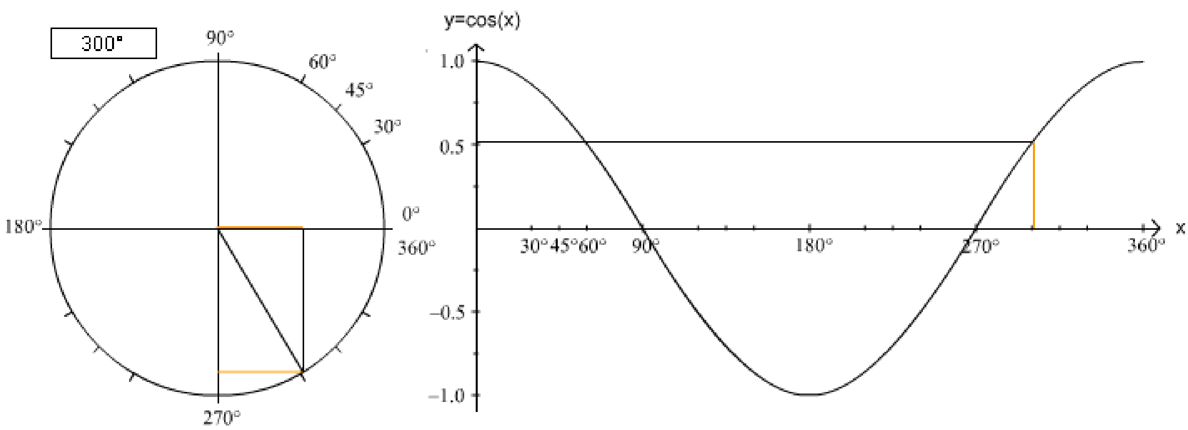
dargestellt werden.

Die Kosinusfunktion ist zudem, wie die Sinusfunktion auch, von der AMPLITUDE A, der PERIODE b und der PHASE c abhängig.

In Bogenmaß:

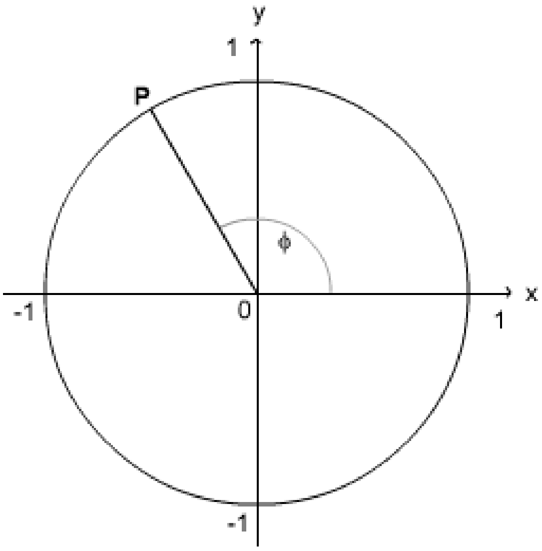


In Grad:

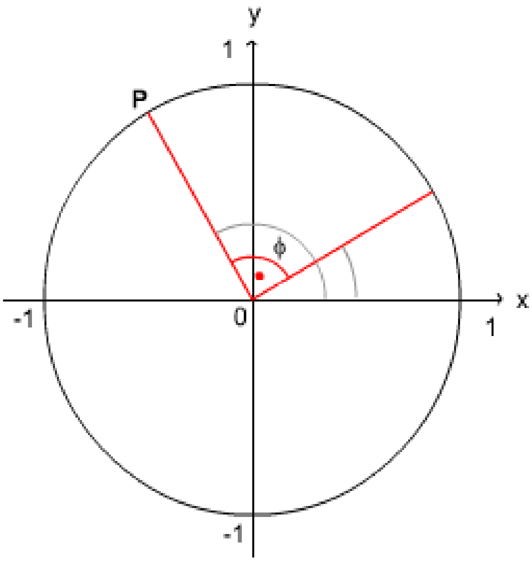


Zusammenhang zwischen Sinus- und Kosinusfunktion

Aus der Graphik kann man entnehmen, dass die Strecke zwischen 0 und P zusammen mit der x-Achse den Winkel ϕ bildet.

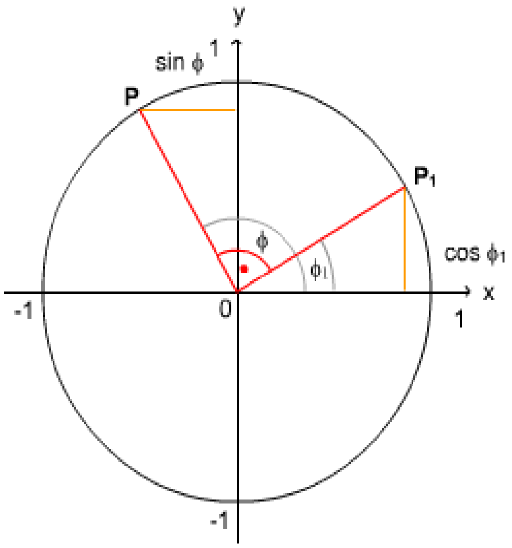


Der Punkt P_1 geht dadurch hervor, dass von ϕ ein rechter Winkel abgezogen wird.



Dann gilt:

$$\Phi_1 = \Phi - \frac{\pi}{2}$$



Aus der Grafik ist weiterhin zu entnehmen, dass

Definition 114:

$$\sin\,(\Phi = \cos(\Phi_1) = \cos\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

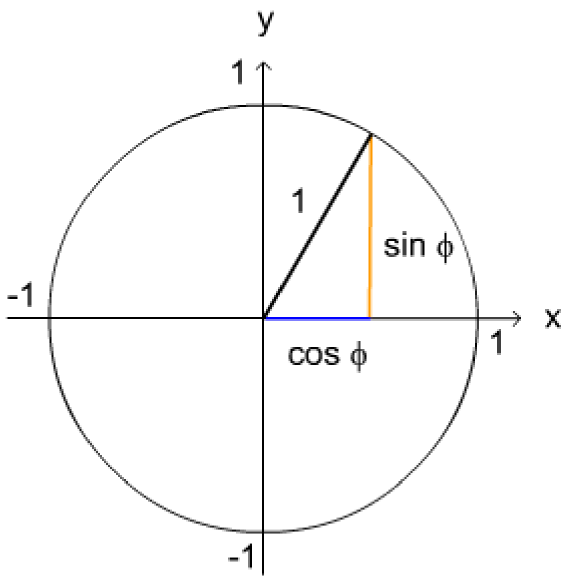
Durch Umformung erhält man dann auch folgenden Zusammenhang:

$$\cos(\Phi) = +\sin\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Man kann also sagen, dass die Kosinusfunktion eine um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinusfunktion ist.

Umgekehrt kann man auch sagen, dass die Sinusfunktion eine um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschobene Kosinusfunktion ist.

Wendet man den Satz von Pythagoras auf das das rechtwinklige Dreieck in der Abbildung an,



so ergibt sich

Definition 115:

$$\sin^2(\Phi) + \cos^2(\Phi) = 1$$

Durch Umformung und Wurzelziehen erhält man dann die folgenden Ausdrücke, die oft benutzt werden:

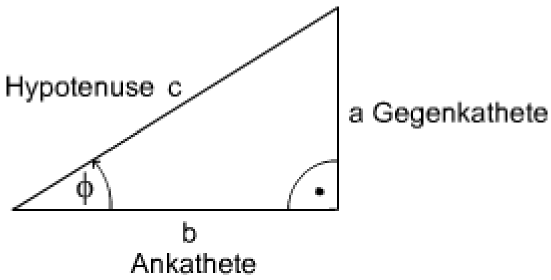
$$\sin(\Phi) = +\sqrt{1 - \cos^2(\Phi)}$$

und

$$\cos(\Phi) = +\sqrt{1 - \sin^2(\Phi)}$$

Definition des Tangens

Der Tangens eines Winkels Φ kann geometrisch definiert werden als Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete



Definition 116:

$$\tan(\Phi) = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

Aus den vorhergehenden Abschnitten ist bekannt, dass als Definition für die anderen beiden trigonometrischen Funktionen gilt

$$\sin(\Phi) = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$$

und

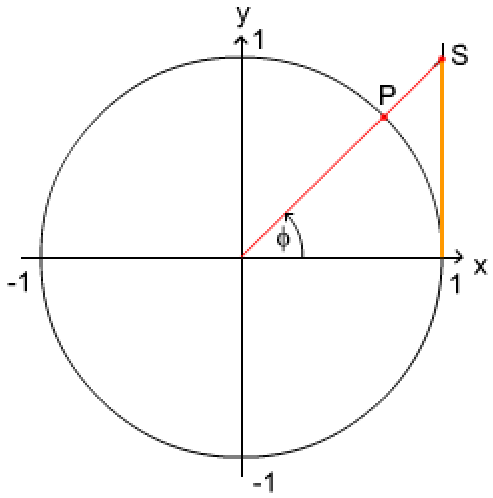
$$\cos(\Phi) = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$$

Damit findet sich dann folgender Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

Definition 117:

$$\tan(\Phi) = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\Phi)}{\cos(\Phi)}$$

Die Funktion des Tangens selber lässt sich ebenfalls wie beim Kosinus und beim Sinus auch am Einheitskreis herleiten (Abbildung).



Dazu wird im Punkt (0;1) eine Tangente am Einheitskreis errichtet. Der Zeiger, der vom Mittel- bzw. Nullpunkt des Kreises bzw. des Koordinatensystems bis zum Punkt P reicht, wird über den Punkt P verlängert, bis er die Tangente im Punkt S schneidet. Der y-Achsenabschnitt auf der Tangente (hier in dem Beispiel orange gekennzeichnet) ist dann jeweils der Tangens.

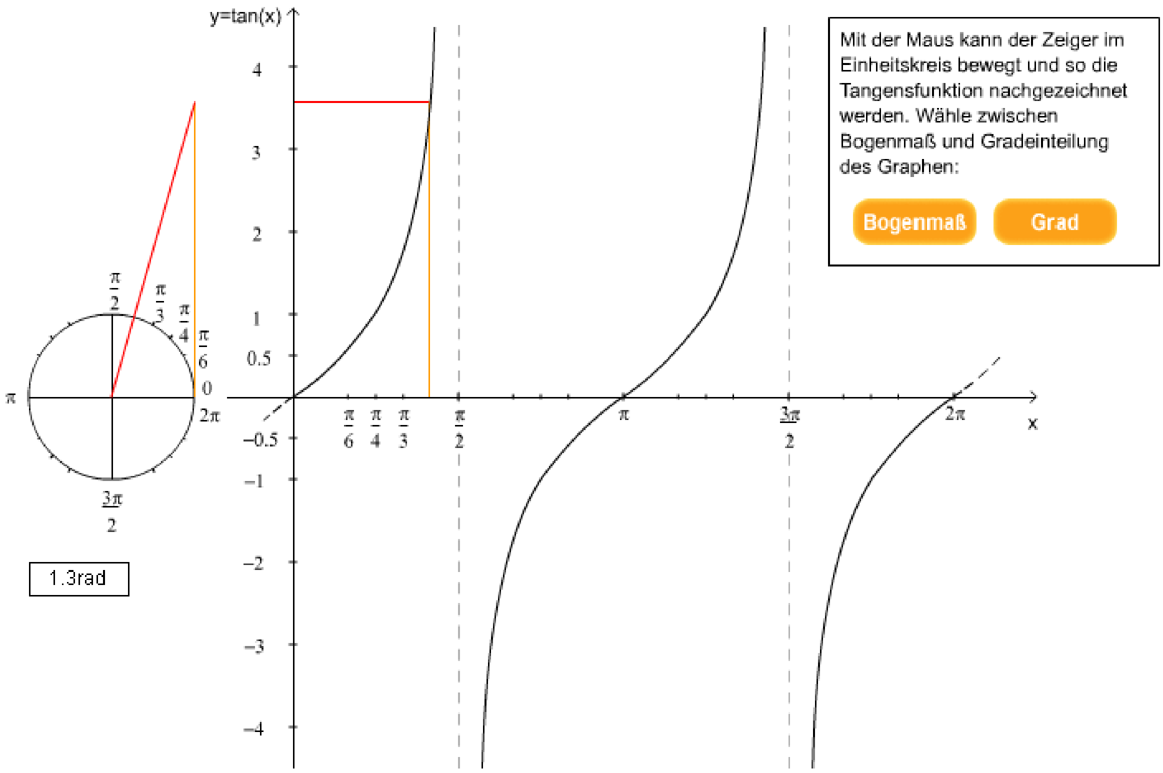
Definition 118:

Der Tangens eines Winkels Φ ist gleich der y-Komponente des Schnittpunktes S der Tangente, die am Einheitskreis anliegt.

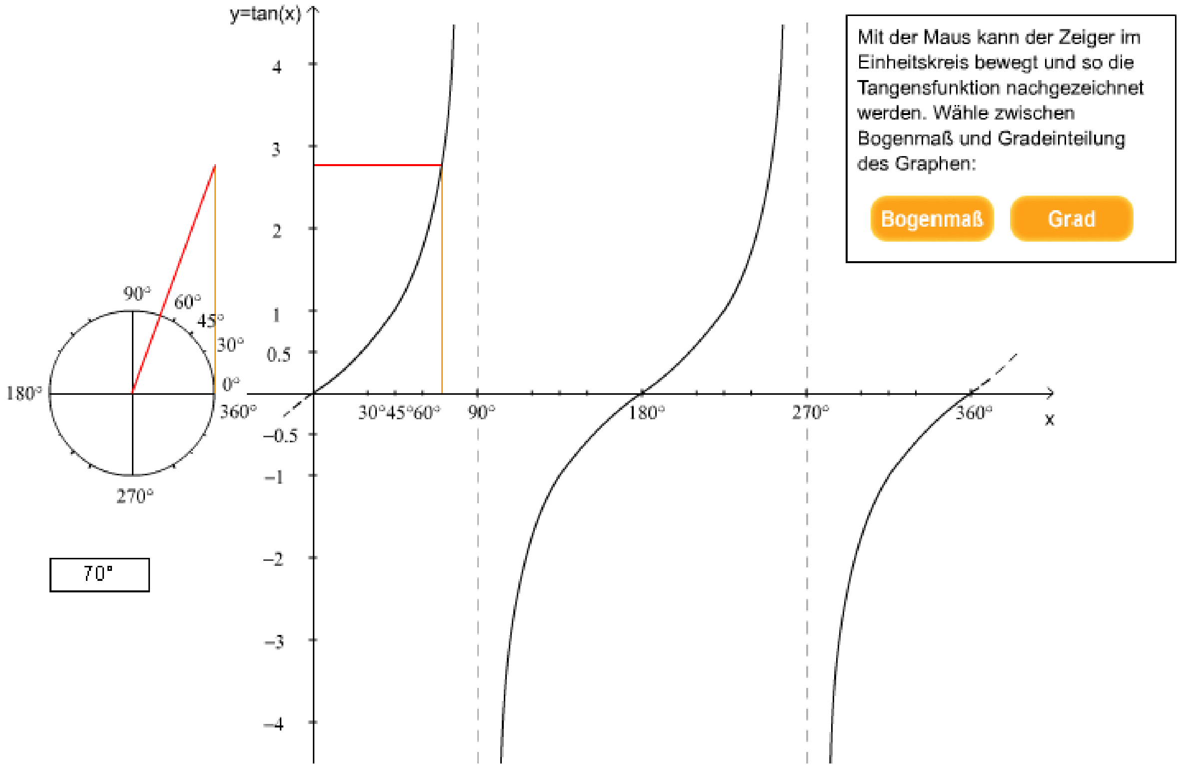
Definition der Tangensfunktion

Die Funktion des Tangens wird wieder am Einheitskreis definiert.

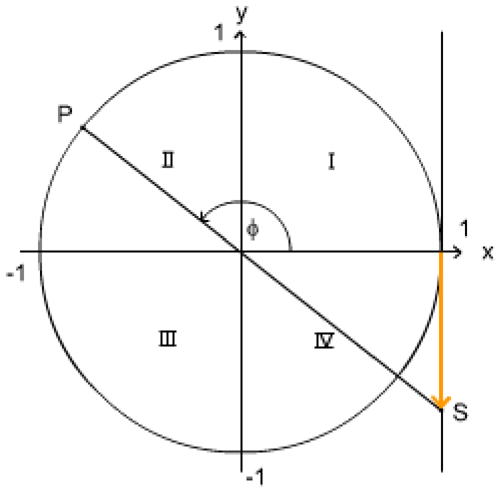
Im Bogenmaß:



In Grad:


y=tan(x)
4
3
2
1
0.5
−0.5
−1
−2
−3
−4
90°
60°
45°
30°
0°
360°
180°
270°
30°45°60°
90°
180°
270°
360°
x
70°
Mit der Maus kann der Zeiger im Einheitskreis bewegt und so die Tangensfunktion nachgezeichnet werden. Wähle zwischen Bogenmaß und Gradeinteilung des Graphen:
Bogenmaß
Grad

Wie im Abschnitt Definition der Tangensfunktion im Dreieck angesprochen, wird im Punkt (1;0) eine Tangente angelegt (Abbildung).



Der Zeiger, der vom Nullpunkt des Einheitskreises ausgeht, schneidet zuerst den Einheitskreis und dann die Tangente und bildet somit ihr den y-Achsenabschnitt, der den Wert für den Tangens liefert.

Nähert sich der Wert von Φ zum Beispiel dem Wert $\frac{\pi}{2}$, dann wächst der Wert für den Tangens über alle Grenzen, ins Unendliche. Wenn nun der Zeiger in den 2.Quadranten (90°-180°) des Einheitskreises wandert, wird auch hier der Zeiger zur Tangente hin verlängert, so dass der Schnittpunkt S an der Tangente einen negativen y-Achsenabschnitt liefert.

Der Kehrwert des Tangens wird als Kotangens bezeichnet. Er ist gegeben durch:

$$\cot(\Phi) = \frac{1}{\tan(\Phi)} = \frac{\cos(\Phi)}{\sin(\Phi)}$$

Trigonometrische Gleichungen

Grundlegende Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen können sehr kompliziert sein und sind oft nicht einmal analytisch lösbar. Es gibt aber einige grundlegende trigonometrische Gleichungen, wie

$\sin(x) = a$,

$\cos(x) = b$,

$\tan(x) = c$

die wesentlich einfachere Lösungen besitzen.

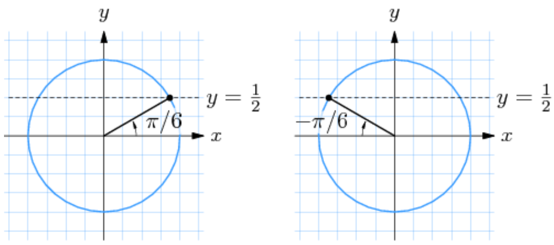
Solche Gleichungen haben im allgemeinen Fall entweder gar keine, oder unendlich viele Lösungen. Wenn man aber den Winkel *x* irgendwie begrenzt, gibt es endlich viele Lösungen.

Beispiel 181:

Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Wir wollen alle Winkel finden, die den Sinus $\frac{1}{2}$ haben.

Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Sinus im ersten und im zweiten Feld positiv ist. Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.



Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$x_1 = \frac{\pi}{6}$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

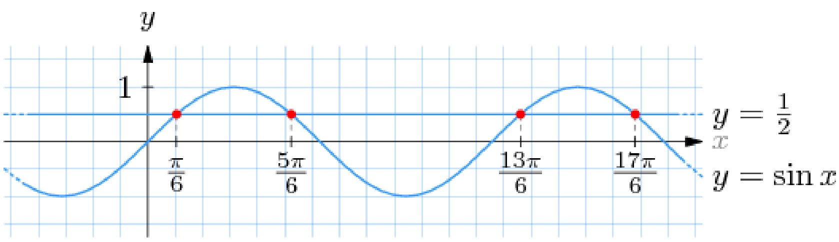
Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{5}{6}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

Dies nennt man dann auch die allgemeine Lösung der Gleichung.

Dies sieht man auch wenn man folgende Grafik betrachtet:

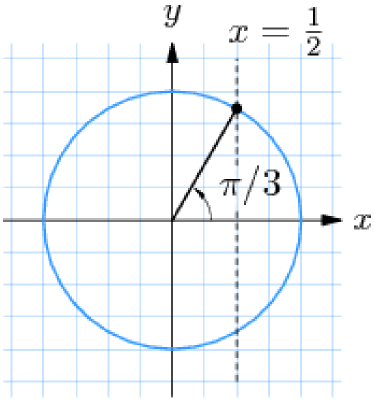


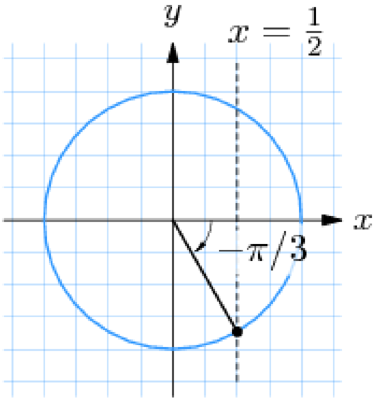
Beispiel 182:

Lösen Sie die Gleichung $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Wir betrachten den Einheitskreis. Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Kosinus im ersten und im vierten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.





Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{5}{3}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

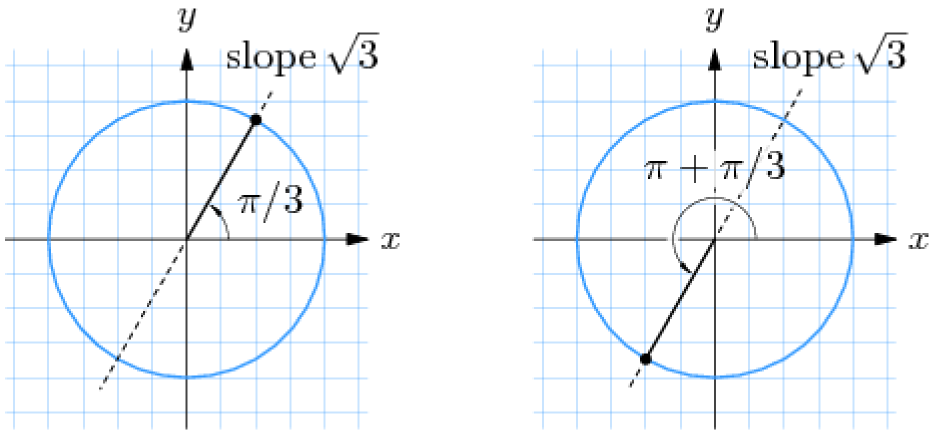
Beispiel 183:

Lösen Sie die Gleichung $\tan(x) = \sqrt{3}$

Wir betrachten den Einheitskreis.

Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Kosinus im ersten und im dritten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.



Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4}{3}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{4}{3}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

Komplexere Gleichungen

Komplexere Gleichungen löst man durch umformen mit Hilfe der Formelsammlung oder durch Substitution des Arguments der trigonometrischen Funktion.

Beispiel 184:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Lösung:

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Laut der Formelsammlung:

$$\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Daraus ergibt sich eine erste Lösung:

$$x_1 = \frac{1}{4}\pi$$

Im zweiten Feld ergibt sich eine weitere Lösung:

$$x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Im Definitionsbereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ ergeben sich weitere Lösungen:

$$x_3 = x_1 - 2\pi = \frac{1}{4}\pi - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$$

$$x_5 = x_1 + 2\pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$$

$$x_6 = x_2 + 2\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ \frac{1}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Beispiel 185:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung $\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Substitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

damit ergibt sich:

$$\cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus der Formelsammlung ergibt sich eine erste Lösung:

$$u_1 = \frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_1 = 1$$

Der Kosinus ist im vierten Feld positiv, also ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_2 = 11$$

Im positiven Bereich keine weitere Lösung mehr. Im negativen Bereich ergibt sich eine weiter Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$-\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_3 = -1$$

Im negativen Bereich auch keine weiteren Lösungen mehr.

$$\mathbb{L} = \{-1; 1; 11\}$$

Beispiel 186:

Lösen Sie folgende Gleichung

$$\cos(2x) - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$$

Im Bereich von $\mathrm{x} \in [0: 2\pi]$

Wir verwenden aus der Formelsammlung:

$$\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$$

und setzen es ein.

$$2 \cdot \cos^2(\mathrm{x}) - 1 - 4 \cdot \cos(\mathrm{x}) + 3 = 0$$

$$2 \cdot \cos^2(\mathrm{x}) - 4 \cdot \cos(\mathrm{x}) + 2 = 0 \quad |: 2$$

$$\cos^2(\mathrm{x}) - 2 \cdot \cos(\mathrm{x}) + 1 = 0$$

$$(\cos(\mathrm{x}) - 1)^2 = 0$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn $\cos(x) = 1$ ist.

Wir wissen, dass der Kosinus im ersten und im vierten Feld positiv ist.

Damit erhalten wir folgende Lösungen:

$$x_1 = 0$$

$$\mathrm{x}_2 = 2\pi$$

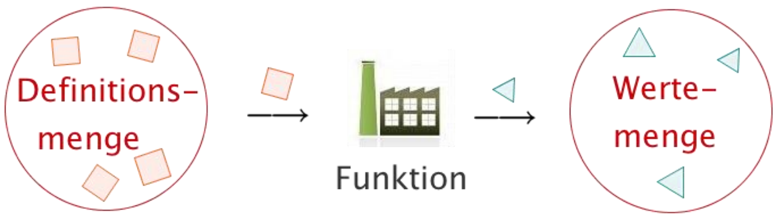
$$\mathbb{L} = \{0; 2\pi\}$$

Funktionsbegriff

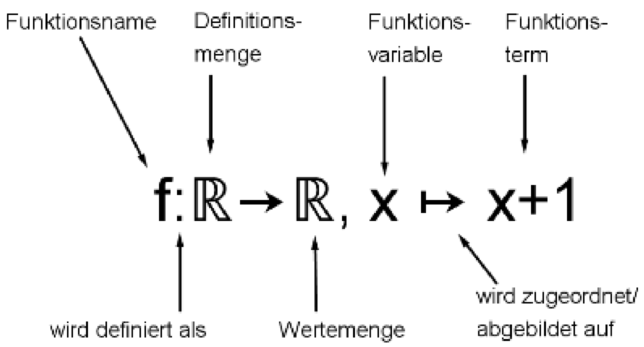
Eine Funktion ist eine Vorschrift, die

- **jedem** Element x aus einer Menge X (der Definitionsmenge: Der Definitionsbereich (auch: Definitionsmenge) gibt an, welche x-Werte in eine Funktion eingesetzt werden dürfen.)
- **eindeutig**
- **ein** Element y einer Menge Y (der Wertemenge: Die Wertemenge (oder Bildmenge) einer Funktion ist die Menge aller möglichen Funktionswerte, die herauskommen können, wenn man alle Zahlen aus der Definitionsmenge in die Funktion einsetzt.) **zuordnet**.

Das Element y wird **Funktionswert an der Stelle** x genannt.



Schreibweise einer Funktion



So gibt man in der Mathematik in der Regel eine Funktion an.

Hier als Beispiel die Funktion (=Zuordnung), die jeder reellen Zahl x die Zahl x+1 zuordnet (das heißt: der 0 die 1, der 1 die 2, der 0,7 die 1,7 usw.).

- Geläufiger als $x \mapsto x+1$ ist die Schreibweise $f(x) = x+1$
- Normalerweise wird eine Funktion f genannt, aber auch g, h und alle anderen verfügbaren Buchstaben und sogar Zeichen sind erlaubt.
- Auch die Funktionsvariable muss nicht zwangsläufig x heißen. Z. B. ist in der Physik t oder r als Funktionsvariable weit verbreitet. Meistens dient die Bezeichnung der Verständlichkeit (r: Radius, t: time/Zeit).

Definitionsmenge

Definition 119:

Der Definitionsbereich (auch: Definitionsmenge) gibt an, welche x-Werte in eine Funktion eingesetzt werden dürfen.

Darstellung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Definitionsbereich darzustellen

- $D = \{x_1; x_2; \dots\}$ "Der Definitionsbereich besteht aus x_1, x_2, usw..."
- $D = [x_1; +\infty[$ "Der Definitionsbereich sind alle Zahlen von x_1 bis $+\infty$ "
- $D = \mathbb{R}\backslash\{x_1\}$ "Der Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen außer x_1 "

Definitionslücken

Um den Definitionsbereich einer Funktion zu bestimmen, muss man sie auf Definitionslücken prüfen.

Definitionslücken sind Werte, die in eine Funktion nicht eingesetzt werden dürfen. Man muss also prüfen, ob durch einen bestimmten x-Wert

- der Nenner eines Bruches 0 würde
- etwas Negatives unter einer Wurzel stünde
- das Argument eines Logarithmus kleiner oder gleich 0 wäre.

Beispiel 187:

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-5}$

Definitionsbereich

$\frac{4x-3}{2x-5}$ Setze den Nenner gleich 0.

$2x - 5 = 0$ |+5

$2x = 5$ |:2

$x = 2,5$

$\Rightarrow \quad D = \mathbb{R}\backslash\{2,5\}$

Beispiel 188:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{\sqrt{2x^2+20x+60}}$$

Vorüberlegung

Die Funktion f ist genau für diejenigen x definiert, für die der Radikand $g(x) = x^2 + 4x + 4$ im Zähler größer gleich 0 ist UND der Radikand $h(x) = 2x^2 + 20x + 60$ im Nenner größer als 0 ist.

Nullstellen von $g(x) = x^2 + 4x + 4$

$g(x) = (x+2)(x+2)$ Faktorisierung mit dem Verfahren von Vieta

$\Rightarrow$ doppelte Nullstelle bei $x = -2$

Da der Graph der Funktion $g(x) = x^2 + 4x + 4$ eine nach oben geöffnete Parabel (positives Vorzeichen vor der höchsten Potenz) ist, deren Scheitel auf der x-Achse liegt, ist sie für alle $x \in \mathbb{R}$ größer gleich 0.

Nullstellen von $h(x) = 2x^2 + 20x + 60$

$D = 20^2 - 4 \cdot 2 \cdot 60 = -80 < 0$

$\Rightarrow$ keine Nullstellen

Hier zeigt die Berechnung der Diskriminanten, dass die Funktion h keine reellen Nullstellen besitzt.

Da der Graph der Funktion $h(x) = 2x^2 + 20x + 60$ eine nach oben geöffnete Parabel (positives Vorzeichen vor der höchsten Potenz) ist, deren Scheitel oberhalb der x-Achse liegt, ist sie für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv.

Interpretation

Da sowohl für g als auch h die Bedingung aus der Vorüberlegung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, gilt:

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Beispiel 189:

$f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$

Lösung ausblenden

Artikel zum Thema

Definitionsbereich

$f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$

Nenner gleich 0 setzen.

$\sin(x) = 0$

Überlegung: Die gewöhnliche Sinus -Kurve schneidet die x-Achse genau bei allen Vielfachen von π.

$\Rightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Lineare Funktionen

Definition 120:

Eine lineare Funktion hat die Form f(x)=m·x + c

m: Steigung

c: y-Achsenabschnittsform

Die Steigung kann man an dem Graphen anhand des Steigungsdreiecks ablesen:

$$\mathrm{m} = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$$

Beispiel 190:

y = 2x –3 mit m = 2 , c = -3

Allgemeine Geradengleichung

Definition 121:

ax + by + c =0

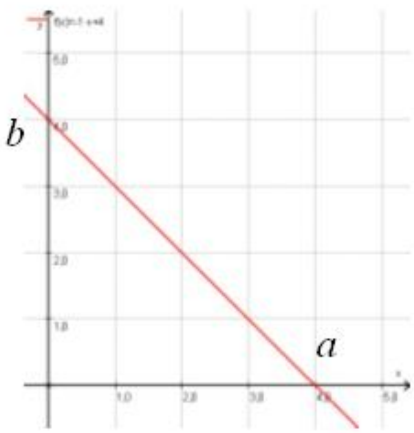
$y = \frac{-a}{b} x + \frac{-c}{b}$ nur für b ≠ 0 !

Achsenabschnittsform

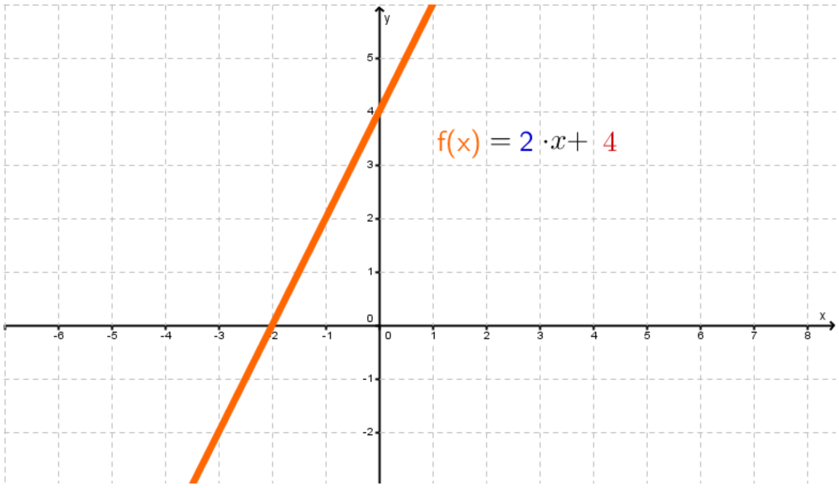
Definition 122:

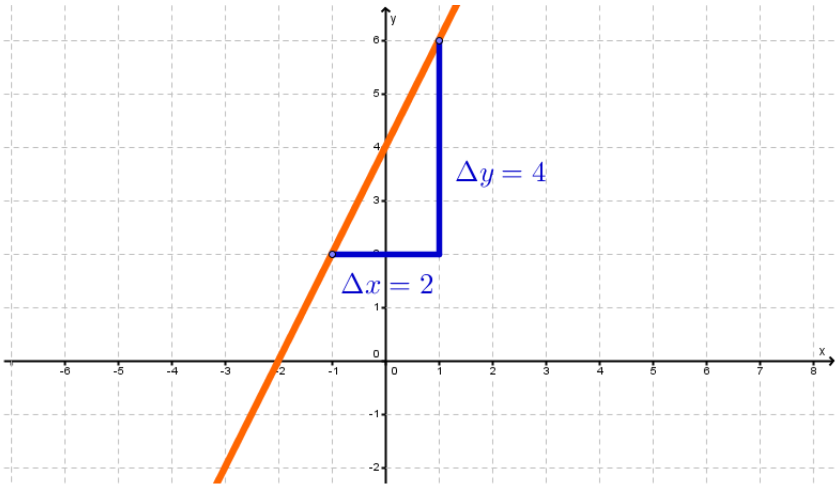
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Daraus ergibt sich für die Lage der Geraden:



Beispiel 191:





Im Beispiel ist die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$$

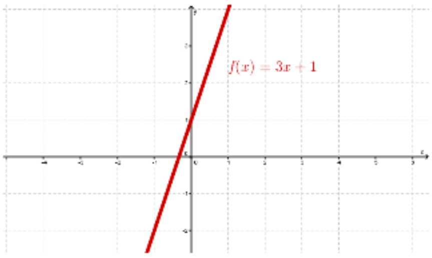
Die Zahl c gibt den y-Achsenabschnitt der Funktion an.

Der y-Achsenabschnitt ist der Funktionswert bei x=0.

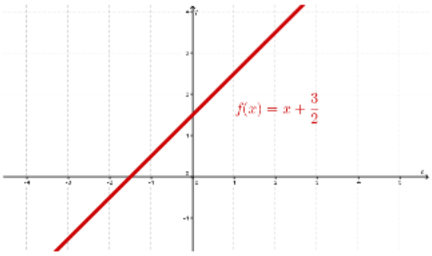
Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse also am Punkt (0|c)

Beispiel 192:

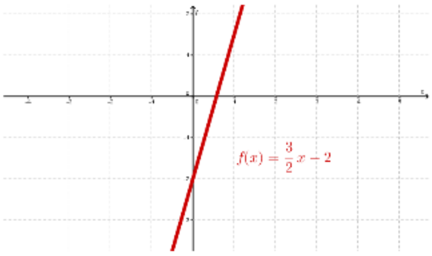
$f(x) = 3x + 1$



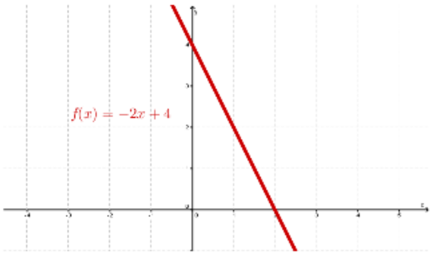
$f(x) = x + 1,5$



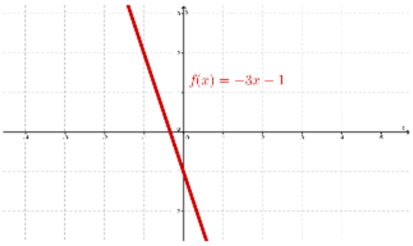
$f(x) = \frac{3}{2}x - 2$



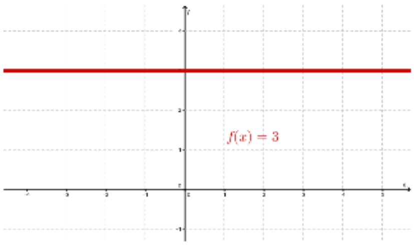
$f(x) = -2x + 4$



$f(x) = -3x - 1$



$f(x) = 3$



Punkt-Steigungsform

Berechnung der Funktionsgleichung mit Hilfe der Steigung und einem gegebenen Punkt $P(x_1|y_1)$:

Definition 123:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Durch Einsetzen des Punktes und der Steigung ergibt sich durch Umformen in y=mx+c die Geradengleichung.

Beispiel 193:

Berechnen Sie die Geradengleichung, die gegeben ist durch m=-3 und P(-1|2). Stellen Sie die Geradengleichung auf.

Lösung:

Einsetzen in die Punktsteigungsform:

$$-3 = \frac{y-2}{x+1}$$

$$-3(x+1) = y - 2$$

$$y = -3x - 1$$

Beispiel 194:

Stelle die Gleichung der Geraden mit Steigung $m = -\frac{4}{3}$ durch den Punkt P(-2 -0,5) auf und zeichne sie in ein Koordinatensystem.

$m = -\frac{4}{3}$; P(-2 | -0,5)

Setze m und P in die die allgemeine Geradengleichung ein.

$-\frac{1}{2} = -\frac{4}{3} \cdot (-2) + t$

Löse nach t auf. $\left| -\frac{8}{3} \right.$ Erläuterung: $-\frac{4}{3} \cdot (-2) = \frac{-4(-2)}{3} = \frac{8}{3}$

$t = -\frac{1}{2} - \frac{8}{3}$

Subtraktion.

$t = -\frac{19}{6}$

Wandle in einen gemischten Bruch um.

$t = -3\frac{1}{6}$

Setze t und m in die allgemeine Geradengleichung ein.

$\Rightarrow \; y = -\frac{4}{3}X - 3\frac{1}{6}$

Gerade zeichnen

Wähle einen beliebigen Punkt auf der Geraden z. B. den gegebenen Punkt P(-2|-0,5). Gehe von dort entsprechen der Steigung $m = -\frac{4}{3}$, 3 nach links und 4 nach oben. Verbinde die beiden Punkte zu einer Geraden.

Zwei-Punkte-Form

Berechnung der Funktionsgleichung mit Hilfe der von zwei gegebenen Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$:

Definition 124:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \qquad (x_1 \neq x_2)$$

Durch Einsetzen der beiden Punkte ergibt sich durch Umformen in y=mx+c die Geradengleichung.

Beispiel 195:

Berechnen Sie die Geradengleichung, die gegeben ist durch $P_1(-1|2)$ und $P_2(2|1)$.

Lösung:

Einsetzen in die zwei-Punkte-Form

$$\frac{y-2}{x+1} = \frac{1-2}{2+1}$$

$$\frac{y-2}{x+1} = -\frac{1}{3}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x+1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

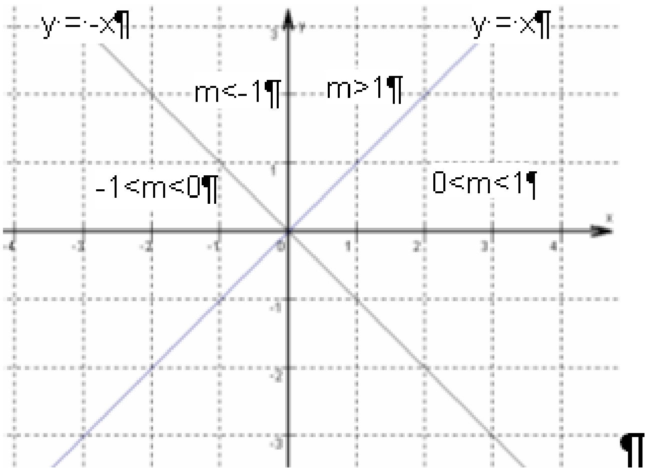
Beispiel 196:

Geradengleichung durch zwei verschiedene Punkte berechnen

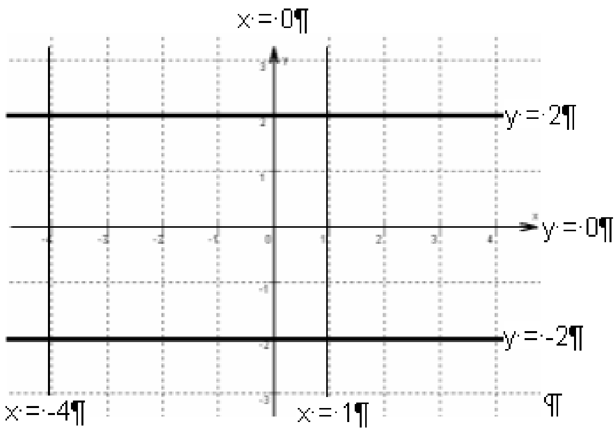
Beispiel: Gegeben sind die Punkte A(-1|1) und B(2|3). Berechne die Gleichung der Geraden, die durch A und B verläuft.

1. Berechne die Steigung mit dem Differenzenquotienten
   $m = \frac{1-3}{-1-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$
2. Setze m und einen beliebigen Punkt in die Geradengleichung ein, um t zu bestimmen. Wir verwenden den Punkt B.
   $$\begin{aligned} y &= m \cdot x + t \\ 3 &= \tfrac{2}{3} \cdot 2 + t \qquad \left| -\tfrac{4}{3} \right. \\ 3 - \tfrac{4}{3} &= t \\ t &= \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$
3. Setze m und t in die allgemeine Geradengleichung ein.
   $\Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

Winkelhalbierende



Parallele zu den Achsen



Bemerkung 2:

Parallele zur y-Achse sind keine Funktionsgraphen (da b=0)

Senkrechte und parallele Geraden

Gegeben sind zwei Geraden mit ihren beiden Geradengleichungen

Parallele Geraden

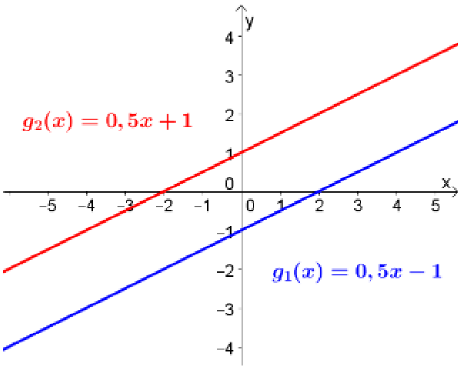
Falls

$m_1 = m_2$

gilt, so sind die Geraden **parallel**.

Beispiel:

$g_1(x) = 0,5x - 1$
$g_2(x) = 0,5x + 1$



$m_1 = 0,5; m_2 = 0,5$
$\Rightarrow m_1 = m_2$

Senkrechte Geraden

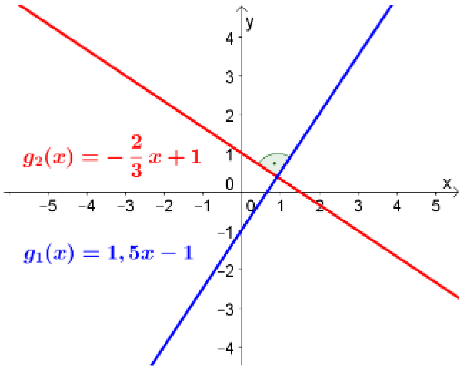
Falls

$m_1 \cdot m_2 = -1$

gilt, so stehen die Geraden **senkrecht** aufeinander.

Beispiel:

$g_1(x) = 1,5x - 1$
$g_2(x) = -\frac{2}{3}x + 1$



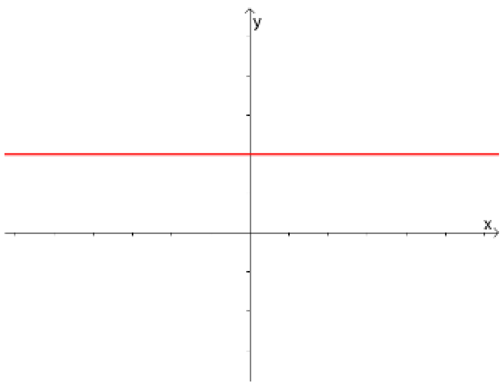
$m_1 = 1,5; m_2 = -\frac{2}{3}$
$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = 1,5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

Steigung von speziellen Geraden

Die Steigung einer Geraden, die parallel zur x-Achse verläuft, ist 0.

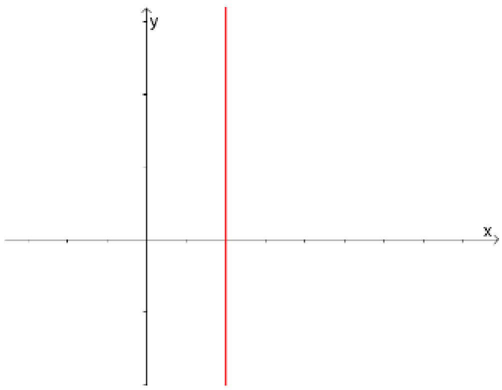
In diesem Fall ist die zugehörige Funktion konstant.

Eine Gleichung für so eine Funktion wäre $y = n$.



Die Steigung einer Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft, wäre "unendlich". Es kann allerdings keine Funktion in Abhängigkeit von x mit einer solchen Gerade als Graphen geben, da dem gleichen x-Wert verschiedene y-Werte zugeordnet werden müssten.

Trotzdem lässt sich eine solche Gerade durch eine Gleichung von der Form $x = r$ beschreiben.

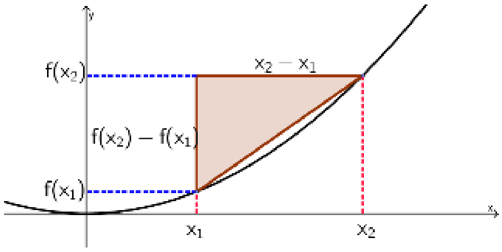


Differenzenquotient

Der Differenzenquotient zwischen zwei Stellen x_1 und x_2 beschreibt die Steigung der Sekanten zwischen den Punkten $P\,(x_1 \mid f(x_1))$ und $Q\,(x_2 \mid f(x_2))$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

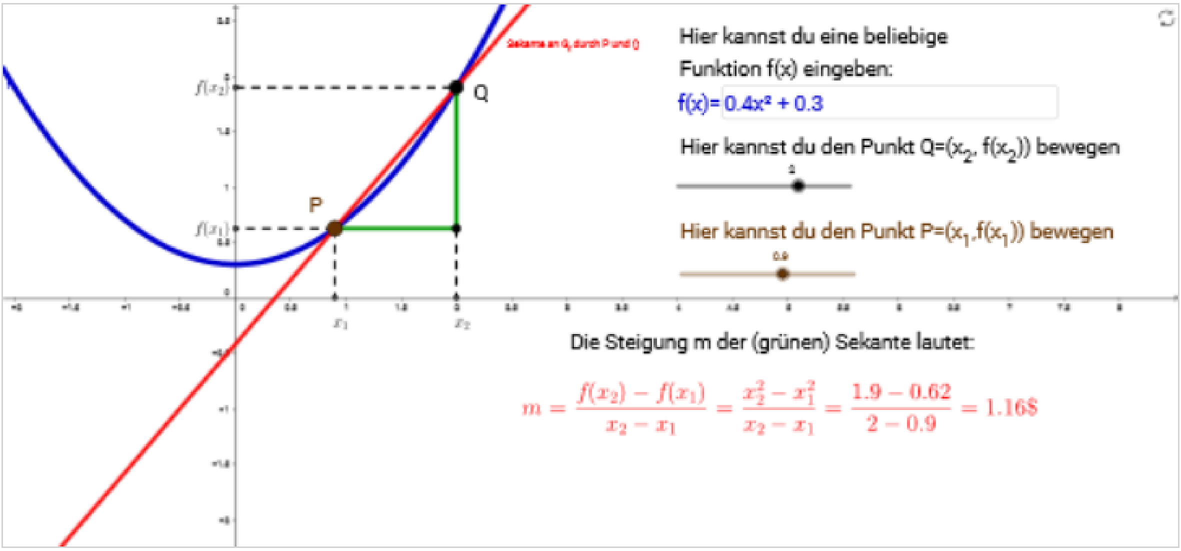
Durch Grenzwertbildung erhält man den Differentialquotienten, mit dessen Hilfe man die Ableitung berechnen kann.



Beispiel 197:

Bestimme den Differenzenquotient der Funktion $f(x) = x^2$ vom Intervall $[1;3] \Rightarrow x_1 = 1\ x_2 = 3$

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$



Wachstum

Definition 125:

Wachsende Funktion

Wenn x größer wird, dann wird y= f(x) größer

Fallende Funktion

Wenn x größer wird, wird y= f(x) kleiner

Lineares Wachstum

Lineares Wachstum liegt dann vor, wenn die Änderung, bei gleicher zeitlicher Änderung, konstant ist.

Anders gesagt:

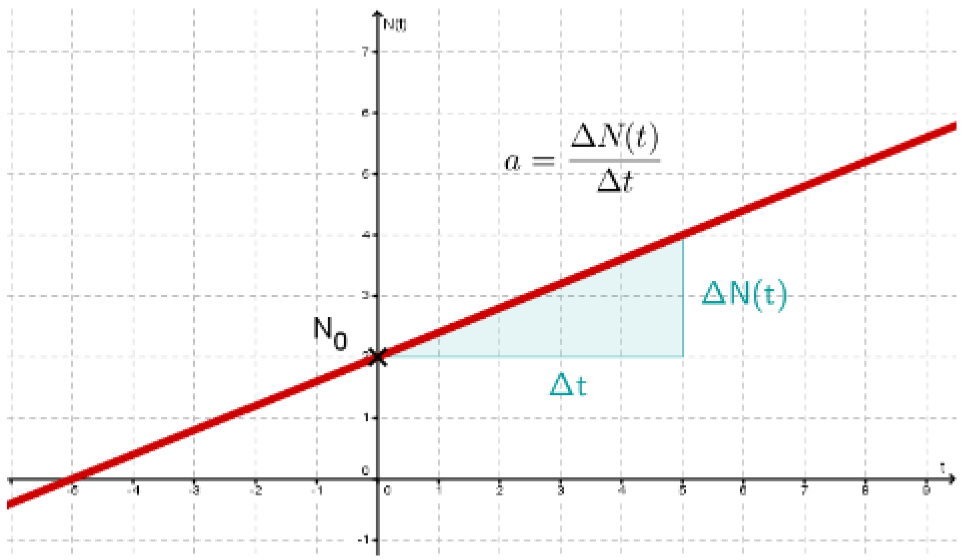
Die Ausgangsmenge verändert sich in gleichen Zeitabständen um die immer gleiche Menge. Die lineare Wachstumsfunktion ist dann eine Geradengleichung:

$$N(t) = a \cdot t + N_0$$

Dabei ist:

- $N(t)$: Die Anzahl nach der Zeit t
- a : Die Änderungsrate
- N_0 : Die Anzahl nach der Zeit 0, also der Startwert

Der Graph einer linearen Wachstumsfunktion



Wachstumsgeschwindigkeit

Die Wachstumsgeschwindigkeit ist bei linearem Wachstum konstant:

Wachstumsgeschwindigkeit = a

Diese entspricht der Steigung des Graphen der linearen Wachstumsfunktion.

Beispiel 198:

Ein Baum wird in den Garten gepflanzt. Zu diesem Zeitpunkt ragt er um 1m aus dem Boden heraus. Nach wievielen Jahren ist der Baum 5m hoch, wenn er durchschnittlich im Jahr um 10 cm wächst?

Antwort:

$N_0 = 1m$ $a = 0,1m$ $N\left(t_{5m}\right) = 5m$	Interpretation der gegebenen Werte. Der Startwert ist 1m, da der Baum zu Beginn 1m hoch ist. Die Änderungsrate beträgt $\mathbf{10cm = 0,1m}$, da der Baum jedes Jahr durchschnittlich um 10cm wächst. Die Höhe des Baumes zu einem Zeitpunkt t_{5m} beträgt 5m. (Der Zeitpunkt kann natürlich beliebig genannt werden.)
$N(t) = 0,1m \cdot t + 1m$	Einsetzen in die Wachstumsfunktion. $N(t)$ ist dann die Höhe des Baums nach t Jahren.
$ges.: \ t_{5m}$	Gesuchte Größe angeben: Gesucht ist der Zeitpunkt, ab dem der Baum 5m hoch ist.
$N(t_{5m}) = 0,1m \cdot t_{5m} + 1m \quad \vert -1m$ $N(t_{5m}) - 1m = 0,1m \cdot t_{5m} \quad \vert : 0,1m$ $\frac{N(t_{5m})-1m}{0,1m} = t_{5m}$	Nach der gesuchten Größe auflösen.
$t_{5m} = \frac{N(t_{5m})-1m}{0,1m} = \frac{5m-1m}{0,1m} = \frac{4m}{0,1m} = 40$	Die Werte einsetzen und ausrechnen.
Da die Wachstumsfunktion in Jahren rechnet, ist die Einheit von $t_{5m} = 40 \ Jahre$	Ergebnis interpretieren.

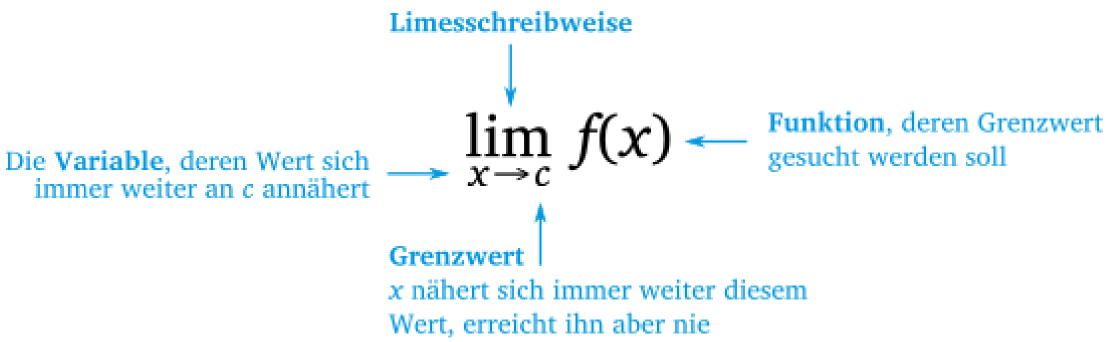
Funktionen

Grenzwert

Grenzwerte werden benutzt, um das Verhalten des Ergebnisses einer Funktion zu beschreiben, während eine bestimmte Variable einen gewissen Wert erreicht.

Dieser Wert wird allerdings nie wirklich erreicht. Man nähert sich diesem Wert nur unendlich nahe an. Deshalb haben Vollblutmathematiker auch Probleme damit, ein Gleichheitszeichen bei der Limesschreibweise zu benutzen, obwohl dies so üblich ist.

Schreibweise eines Limes



Wird gesprochen: "Der Grenzwert (auch **Limes**) von $f(x)$ für x gegen c".

Definition 126:

Sei f eine Funktion die in einem offenen Intervall definiert ist, indem sich auch c befindet, außer vielleicht an der Stelle c selbst. Dann ist der Grenzwert der Funktion f von x für x gegen c gleich L:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, sodass

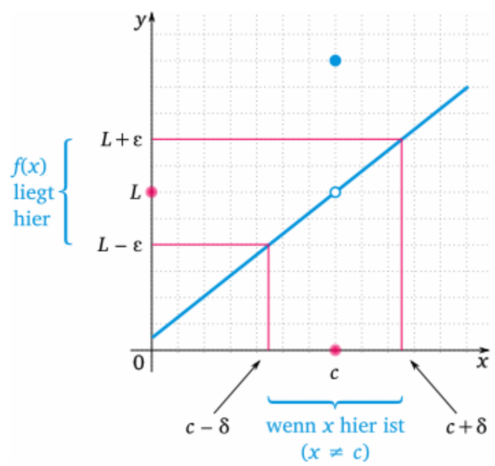
$$\text{wenn } 0 < |x - c| < \delta \quad \text{dann} \quad |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{D}$$

In der geläufigen Definition des Grenzwerts nähert sich $f(x)$ beliebig nahe einer Zahl L an, wenn sich x dem Wert c von beiden Seiten nähert. Auch wenn sich diese Definition bereits recht technisch anhört, ist sie immer noch nach mathematischen Kriterien zu unpräzise. Die beiden Aussagen:

- $f(x)$ nähert sich beliebig nahe an L an
- x nähert sich c

sind beide mathematisch nicht definiert worden. Die erste Person, die eine mathematische Definition des Grenzwerts formuliert hat war der französische Mathematiker Augustin Louis Cauchy. Sein Epsilon-Delta Kriterium ist bis heute die am häufigsten benutzte Definition.

Die Abbildung rechts veranschaulicht das Epsilon-Delta Kriterium. Die Aussage "$f(x)$ nähert sich beliebig nahe an L an" bedeutet, dass $f(x)$ im Intervall $[L - \varepsilon; L + \varepsilon]$ liegt. Mit der Betragsfunktion, kann dies noch weiter verkürzt ausgedrückt werden:



$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{ist identisch mit: } L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Analog dazu bedeutet die Aussage "x nähert sich c" das eine positive Zahl δ existiert, sodass x entweder in dem Intervall [c - δ; c] oder [c; c + δ] liegt. Dies kann mit einer Ungleichung auch wieder verkürzt geschrieben werden:

$$0 < |x - c| < \delta \qquad \text{ist identisch mit: } c - \delta < x < c + \delta$$

Diese Ungleichung macht zwei Aussagen über $|x - c|$:

- $0 < |x - c|$
  Der Abstand zwischen x und c ist größer als Null. Dies bedeutet, dass sich der Grenzwert zwar der Zahl c annähert, sie aber nie erreicht.
- $|x - c| < \delta$
  x befindet sich innerhalb von δ Einheiten von c. Wenn der Abstand von x zu c kleiner als δ (aber nicht Null) ist, dann wird der Abstand von $f(x)$ zu L kleiner als ε sein. δ ist daher abhänig von ε. Der Grenzwert sagt damit aus, dass egal wie klein ε gemacht wird, δ immer noch ausreichend groß ist.

Die Buchstaben ε und δ können auch als "Fehler" (französisch *erreur*) und "Abstand" (französisch *distance*) verstanden werden. Cauchy selbst hat in seinen Arbeiten den Buchstaben ε häufiger benutzt, um Fehler anzugeben. Die Aussage des Grenzwerts ist damit: man kann den Messfehler (ε) so klein machen wie man will, indem man den Abstand (δ) zu c verkleinert.

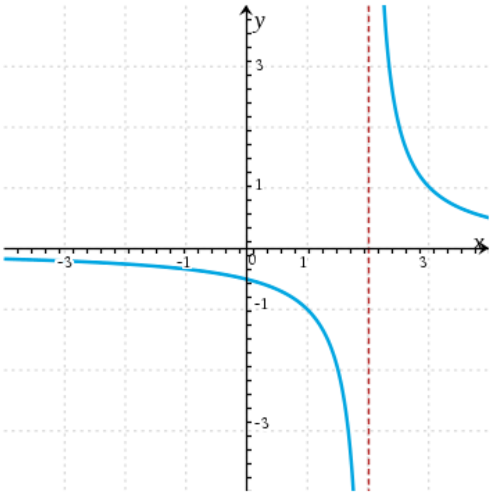
Eigenschaften von Grenzwerten

$$c, k, n, L, M \in \mathbb{R}, \quad L, M \neq \pm\infty$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{und} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M$$

Name	Regel	Erklärung
Summenregel	$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$	Der Grenzwert der Summe zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist gleich dem Grenzwert von $f(x)$ addiert mit dem Grenzwert von $g(x)$
Differenzenregel	$\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$	Der Grenzwert der Differenz zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist gleich dem Grenzwert von $f(x)$ minus dem Grenzwert von $g(x)$
Konstantenregel	$\lim_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$	Konstanten können aus dem Grenzwert herausfaktorisiert werden
Produktregel	$\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$	Der Grenzwert des Produkts der beiden Funktion $f(x)$ und $g(x)$ kann als das Produkt des Grenzwerts der Funktion $f(x)$ und dem Grenzwert der Funktion $g(x)$ geschrieben werden
Quotientenregel	$\lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}, \quad \text{falls } M \neq 0$	Der Grenzwert des Quotienten der Funktion $f(x)$ und $g(x)$ kann als Quotient des Grenzwerts der Funktion $f(x)$ geteilt durch den Grenzwert der Funktion $g(x)$ geschrieben werden
Potenzregel	$\lim_{x\to c} (f(x))^{\frac{n}{k}} = L^{\frac{n}{k}}$	Wird eine Potenz die auf die Funktion $f(x)$ angewendet, ist der Wert identisch, wenn die Potenz auf den Grenzwert angewendet wird.

Links- und rechtsseitige Grenzwerte



Die Funktion $\frac{1}{x-2}$ hat eine vertikale Asymptote an der Stelle x=2 (siehe Graph). Gleichzeitig besitzt die Funktion eine vertikale Asymptote bei y=0. Das Verhalten für beliebig große und kleine Werte von x, wird durch folgende Grenzwerte beschrieben:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Jetzt schauen wir uns die Funktion in der Nähe der vertikalen Asymptote bei x=2 genauer an. Zuerst betrachten wir die Seite links neben der Stelle 2. Nun schauen wir uns an, was passiert, je weiter wir uns nach rechts – also in Richtung der Stelle 2 – bewegen. Desto weiter wir uns der Stelle 2 von links aus annähern, desto kleiner wird x. Dieser **linksseitige Grenzwert** wird mathematisch so ausgedrückt:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

Da wir uns von links, mit Werten kleiner als x aus nähern, schreiben wir ein Minuszeichen in den Exponenten des Wertes, dem wir uns annähern – in diesem Fall 1. Bei einem **rechtsseitigen Grenzwert**, also wenn wir uns von rechts aus der Stelle 1 annähern, schreiben wir folgendes:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

Regel von L'Hospital

Die Regel von L'Hospital ist ein Hilfsmittel zum Berechnen von Grenzwerten bei Brüchen $\frac{f}{g}$ von Funktionen f und g, wenn Zähler und Nenner entweder beide gegen 0 oder beide gegen (+ oder -) unendlich gehen. Wenn in einem solchen Fall auch der Grenzwert des Bruches der Ableitungen existiert, so hat dieser denselben Wert wie der ursprüngliche Grenzwert:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Voraussetzung

Die Regel von L'Hospital kann man anwenden, wenn **eine** dieser Bedingungen erfüllt ist:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

Beispiel 199:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Der Grenzwert ist ein Bruch der zwei Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$. Berechnung ergibt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Dadurch ist zunächst keine Aussage möglich ist, jedoch sind die Voraussetzungen der Regel von L'Hospital erfüllt.

$$f'(x) = 2x$$
$$g'(x) = e^x$$

Zur Anwendung der Regel von L'Hospital benötigt man die Ableitungen der beiden Funktionen.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$$

Nach der Regel von L'Hospital wird jetzt der Grenzwert des Bruches der Ableitungen betrachtet. Berechnung ergibt

$$\lim_{x\to\infty} 2x = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Es ist also weiterhin keine Aussage möglich, aber die Voraussetzungen der Regel von L'Hospital erfüllt.

$$f''(x) = 2$$
$$g''(x) = e^x$$

Man leitet die Funktionen also ein weiteres Mal ab ...

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

... und betrachtet den Grenzwert des Bruches der zweiten Ableitungen. Berechnung ergibt den Grenzwert 0, da

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Diesmal lässt sich der Grenzwert bestimmen.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0$$

Nach der Regel von L'Hospital entspricht der berechnete Grenzwert dem ursprünglichen.

Beispiel 200:

$f\left(x\right)=\frac{-3x+2}{4x-5}$

Verhalten gegen $+\infty$

Artikel zum Thema

$f\left(x\right)=\frac{-3x+2}{4x-5}$

Grenzwert gegen $+\infty$ bilden.

Satz von l'Hospital anwenden.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\overbrace{-3x}^{\to-\infty}+2}^{\to-\infty}}{\underbrace{\underbrace{4x}_{\to+\infty}-5}_{\to+\infty}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{4}=-0,75$$

Verhalten gegen $-\infty$

Artikel zum Thema

$f\left(x\right)=\frac{-3x+2}{4x-5}$

Grenzwert gegen $-\infty$ bilden.

Satz von l'Hospital anwenden.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\overbrace{-3x}^{\to+\infty}+2}^{\to+\infty}}{\underbrace{\underbrace{4x}_{\to-\infty}-5}_{\to-\infty}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{4}=-0,75$$

Monotonie

Definition 127:

G_f streng monoton steigend:

Mit größer werdenden x-Werten nehmen die Funktionswerte (y-Werte) zu.

Kriterium: Steigung des Graphen (Tangentensteigung) positiv,

d.h. $f'(x) > 0$ für x $\in$R

G_f streng monoton fallend:

Mit größer werdenden x-Werten nehmen die Funktionswerte (y-Werte) ab.

Kriterium: Steigung des Graphen (Tangentensteigung) negativ,

d.h. $f'(x) < 0$ für x $\in$R

Streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend) sind Funktionen oder Folgen, die nur größer (kleiner) werden, aber nicht konstant sind.

Zusammenfassung:

Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall I differenzierbar.

1. Wenn $f(x)$ im Intervall I monoton wachsend ist, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$
   Wenn $f(x)$ im Intervall I monoton fallend ist, dann gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$

2. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton wachsend im Intervall I
   Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton fallend im Intervall I

3. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton wachsend im Intervall I
   Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton fallend im Intervall I

Beispiel 201:

Die Funktion

$y = x^3$

ist über den gesamten Wertebereich streng monoton steigend. Bei x=0 hat sie zwar eine Steigung von 0, jedoch nur an diesem einen Punkt.

Die Funktion

$y = x^2$

ist im Bereich von minus unendlich bis Null (einschließlich) x<=0 streng monoton fallend. Im Bereich von Null (einschließlich) bis plus unendlich x>=0 ist sie streng monoton steigend.

Krümmung

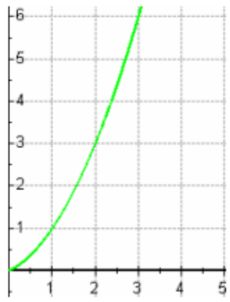
Definition 128:

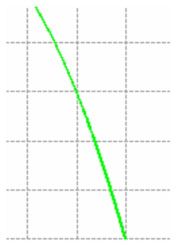
Unter der **Krümmung** einer Kurve versteht man in der Mathematik die Richtungsänderung pro Längeneinheit.

Beispiel 202:

Die Krümmung einer Geraden ist überall gleich null, weil sich ihre Richtung nicht ändert. Ein Kreis mit dem Radius r hat überall gleiche Krümmung (nämlich 1/r), denn seine Richtung ändert sich überall gleich stark. Bei allen anderen Kurven wechselt die Krümmung von Kurvenpunkt zu Kurvenpunkt.

Linkskrümmung **Rechtskrümmung**





Definition 129:

G_f links gekrümmt:

Die Steigung des Graphen nimmt streng monoton zu,

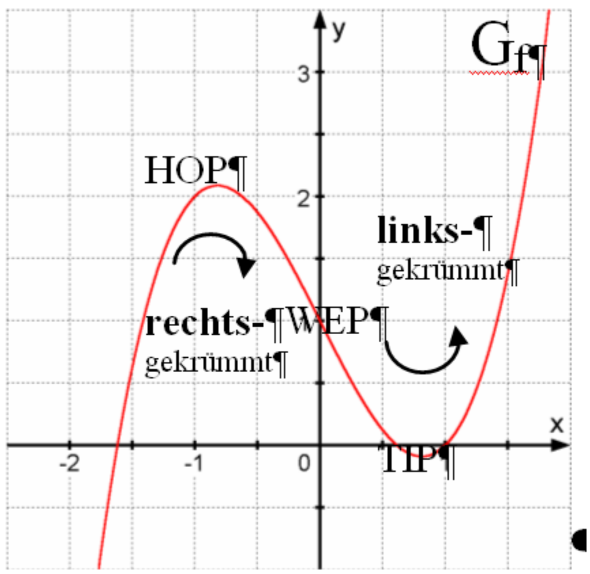
wenn $f''(x) > 0$ für x ∈ I.

G_f rechts gekrümmt:

Die Steigung des Graphen nimmt streng monoton ab,

wenn $f''(x) < 0$ für x ∈ I.

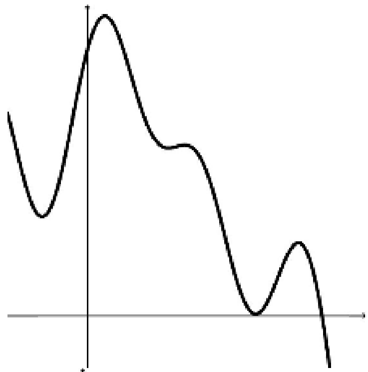
Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt P gibt also an, wie stark die Kurve in der unmittelbaren Umgebung des Punktes P von einer Geraden abweicht.



Stetigkeit

Eine Funktion f heißt genau dann **stetig an einer Stelle x_0**, wenn der Funktionswert an dieser Stelle mit sowohl links- als auch rechtsseitigem Grenzwert identisch ist, d.h. wenn gilt:

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

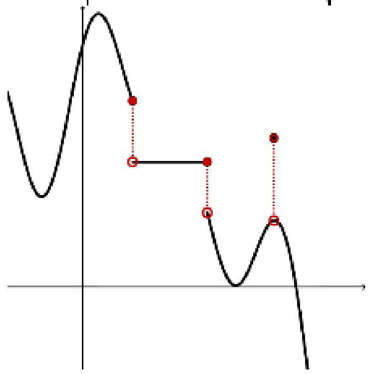


Eine an allen Stellen des Definitionsbereichs stetige Funktion wird allgemein als **stetig** bezeichnet.

Umgekehrt nennt man eine Funktion **unstetig**, wenn obige Bedingung an mindestens einer Stelle ihres Definitionsbereichs nicht erfüllt ist.

Anschauliche Darstellung

Eine stetige Funktion hat die Eigenschaft, dass ihr Graph an keiner Stelle einen Sprung macht. Entsprechend besitzt eine unstetige Funktion sogenannte **Unstetigkeitsstellen(n)** (= Sprünge).



Epsilon-Delta-Definition der Stetigkeit

Alternative Definition von Stetigkeit

Eine Funktion nennt man stetig im Punkt x, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x' \in]x - \delta, x + \delta[$ gilt: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Ausführliche Erläuterung der Epsilon-Delta-Definition

Der Ausdruck $|f(x) - f(x')|$ ganz am Schluss bezeichnet den Abstand der Funktionswerte von x und x'. Wir wollen, dass wir, wenn man uns ein ε vorgibt, einen Bereich um x wählen können, in dem dieser Abstand der Funktionswerte niemals größer als ε wird (diesen Bereich wählen wir symmetrisch um x durch das Intervall $]x - \delta, x + \delta[$). Wenn wir für jedes ε so eine *Delta-Umgebung von x* finden können, in der die Funktionswerte den ε -Abstand einhalten, dann ist die Funktion im Punkt x stetig.

Stetigkeit nachweisen

Gemäß der allgemeinen Definition der Stetigkeit einer Funktion f ist folgende Gleichungskette zu zeigen:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x)$$

Dabei betrachtet man bei x_0- die Funktion auf der linken Seite von x_0 und bei x_{0+} auf der rechten Seite von x_0 .

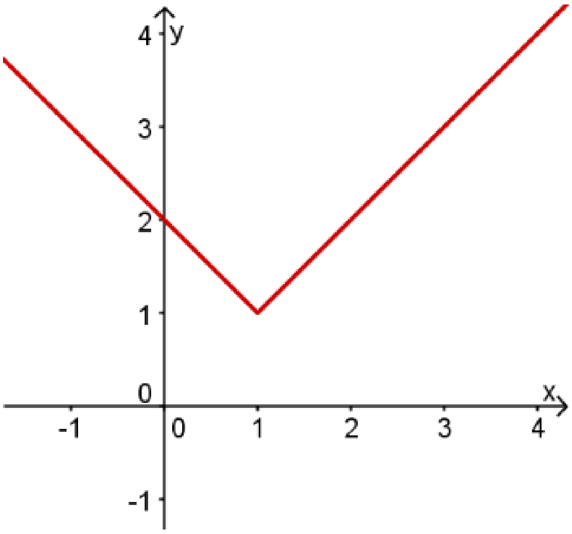
Beispiel 203:

Abschnittweise definierte Funktionen

Im Folgenden wird die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x+2\,, & \text{für } x \leqslant 1 \\ x\,, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

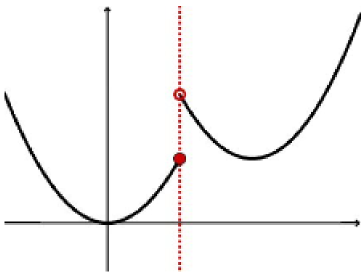
nachgewiesen.



Im linken Abschnitt definierte Funktion separat auf Stetigkeit überprüfen	Die im linken Abschnitt ($x \leqslant 1$) definierte Funktion lautet $-x+2$, stellt also eine Gerade dar. Bekanntlich besitzen Geraden keine Sprungstellen (= Unstetigkeitsstellen). $\Rightarrow$ Also ist die Funktion im linken Abschnitt stetig.
Im rechten Abschnitt definierte Funktion separat auf Stetigkeit überprüfen	Die im rechten Abschnitt ($x > 1$) definierte Funktion lautet x und stellt ebenso eine Gerade dar. $\Rightarrow$ Auch die Funktion im rechten Abschnitt ist stetig
Funktion an der "interessanten" Stelle $x_0 = 1$ auf Stetigkeit überprüfen	$f(1) = -1+2 = 1$ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x+2) = -1+2 = 1$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x) = 1$ $\Rightarrow f(x_0) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ $\Rightarrow f$ ist stetig bei $x_0 = 1$

Sprungstelle

Eine Sprungstelle ist eine Stelle x_0, an der der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert unterschiedlich sind.



Beispiel 204:

Die Funktion in der Abbildung hat den Funktionsterm.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ -(x-2)^2 + 3 & x \geq 1 \end{cases}$$

Der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x = 1$ ist hier 1 und der rechtsseitige Grenzwert 2.

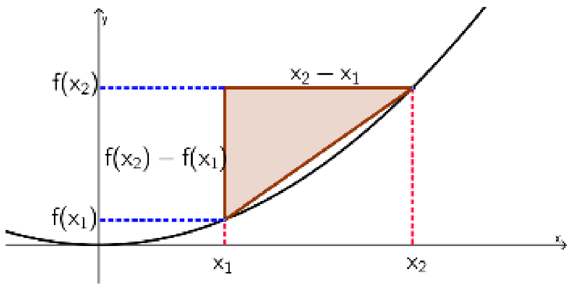
Differenzierbarkeit

Differenzenquotient

Der Differenzenquotient zwischen zwei Stellen x_1 und x_2 beschreibt die Steigung der Sekanten zwischen den Punkten $P\,(x_1 \mid f(x_1))$ und $Q\,(x_2 \mid f(x_2))$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

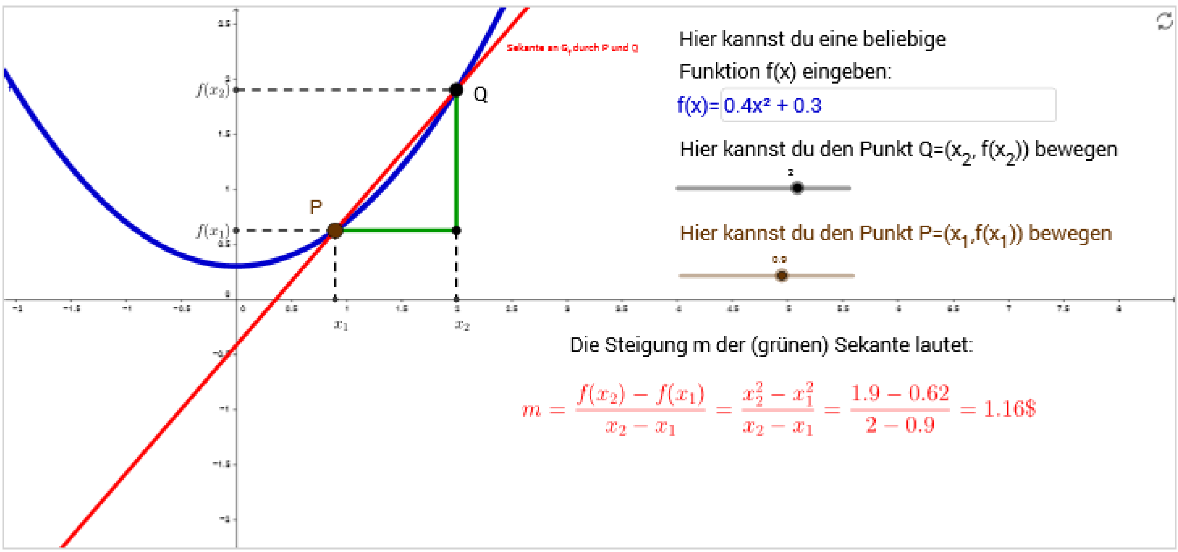
Durch Grenzwertbildung erhält man den Differentialquotienten, mit dessen Hilfe man die Ableitung berechnen kann.



Beispiel 205:

Bestimme den Differenzenquotient der Funktion $f(x) = x^2$ vom Intervall $[1;3] \Rightarrow x_1 = 1\ x_2 = 3$

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$



Differentialquotient

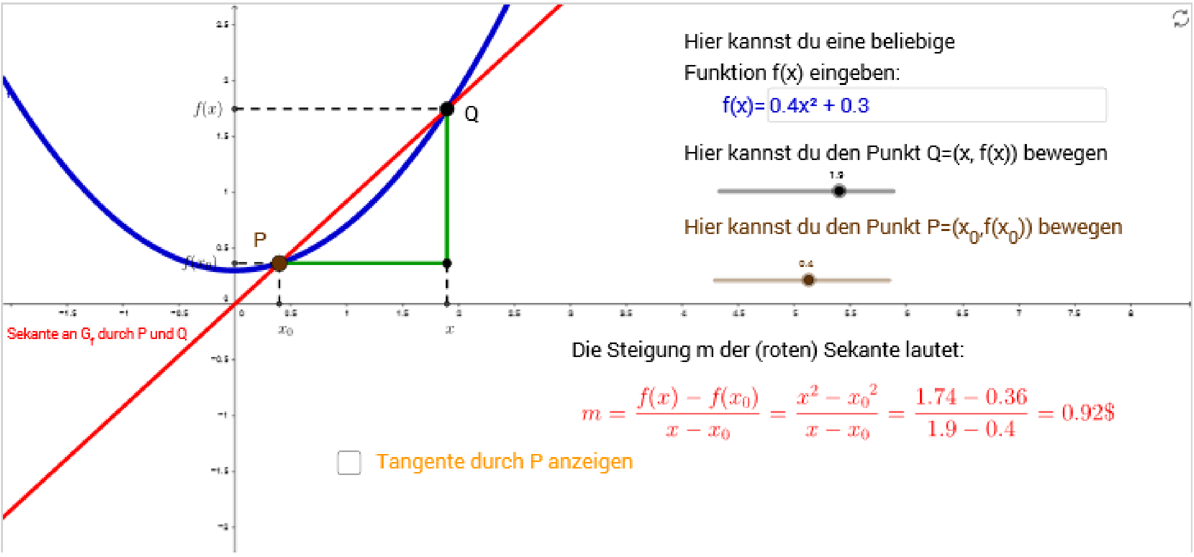
Den **Differentialquotient** an einer Stelle x_0 erhält man durch Grenzwertbildung des Differenzenquotienten:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Man betrachtet also jeweils die Steigung der Sekanten zwischen den Punkten $P\,(x, f(x))$ und $Q\,(x_0, f(x_0))$, und lässt x immer näher an x_0 laufen. Im Grenzwert, falls dieser existiert, beschreibt dies die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 und dieser Wert wird als Ableitung an der Stelle x_0 aufgefasst.

Beispiel 206:

Veranschaulichung durch ein Applet



Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit ist eine Eigenschaft von Funktionen, die darüber Auskunft gibt ob und wo sich eine Funktion ableiten lässt.

Eine Funktion f heißt differenzierbar an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereichs, falls der Differentialquotient existiert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wir nennen dann diesen Grenzwert Ableitung an der Stelle x_0.

Anschaulich bedeutet das, dass sich der Graph von f an der Stelle x_0 durch eine eindeutige Tangente annähern lässt. Der Grenzwert und damit die Ableitung gibt die Steigung dieser Tangente an.

Ist f an jeder Stelle der Definitionsmenge differenzierbar, so nennt man f differenzierbar.

Differenzierbarkeit überprüfen

Der obige Grenzwert existiert genau dann, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert des zugehörigen Differenzenquotienten existieren und übereinstimmen, d. h. wenn gilt:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Diese Äquivalenz ist insbesondere dann hilfreich, wenn die Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen überprüft werden soll.

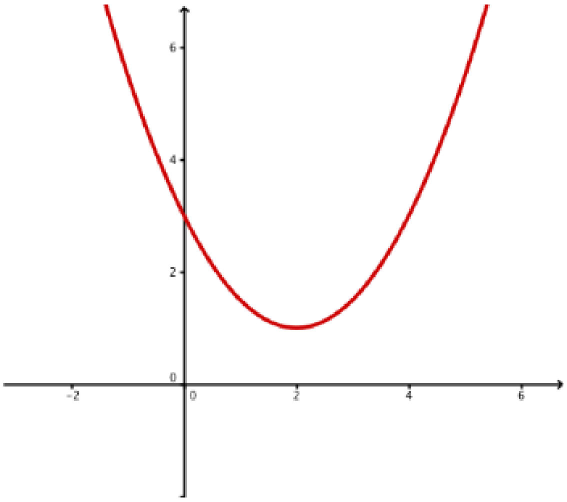
Sind die Ableitungen links und rechts von x_0 bereits bekannt, kann die Differenzierbarkeit auch über die Gleichheit der Ableitungen nachgewiesen werden. Eine Funktion f ist also differenzierbar, wenn beide Grenzwerte existieren und gilt:

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

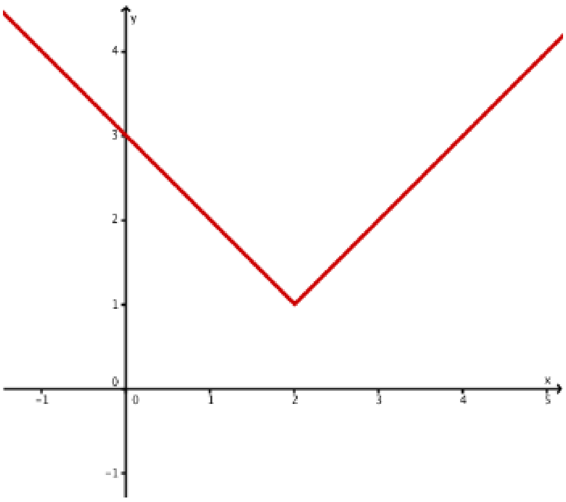
Nicht differenzierbare Funktionen

Hat eine Funktion eine "Ecke" (siehe Bild), so ist sie nicht differenzierbar. Man sieht, dass in diesem Fall keine eindeutige Tangente an den Graphen gelegt werden kann.

differenzierbar:



nicht differenzierbar:



Die durch $f(x)=\sqrt[3]{x}$ gegebene Funktion ist ein weiteres Beispiel für eine nicht differenzierbare Funktion. Es gilt nämlich:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$$

Somit ist f nicht an der Stelle $x_0=0$ differenzierbar.

Beispiel 207:

Untersuche die Funktion $f\left(x\right) = x^2 + 4x - 1$ auf Differenzierbarkeit.

1. Differentialquotienten mit der h-Methode aufstellen.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[(x_0 + h)^2 + 4 \cdot (x_0 + h) - 1\right] - \left[x_0^2 + 4x_0 - 1\right]}{h}$$

2. Zähler des Bruchs vereinfachen.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 4x_0 + 4h - 1\right] - x_0^2 - 4x_0 + 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 4x_0 + 4h - 1 - x_0^2 - 4x_0 + 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2 + 4h}{h}$$

3. im Zähler h ausklammern.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2x_0 + h + 4)}{h}$$

4. h kürzen.

$$= \lim_{h \to 0} (2x_0 + h + 4)$$

5. Nun kann man den Grenzwert bilden, also h gegen 0 gehen lassen.

$$= 2x_0 + 4$$

6. Da dieser Grenzwert für alle Werte x_0 aus dem Definitionsbereich existiert, ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 1$ differenzierbar.
7. Man sieht, dass das Ergebnis übereinstimmt mit der Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 1$ gleich $f'(x) = 2x + 4$ ist.

Beispiel 208:

Untersuche die Funktion $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit.

Diese Funktion ist offenbar für alle $x \in \mathbb{R}/\{0\}$ differenzierbar. Man muss also nur die kritische Stelle bei $x = 0$ untersuchen.

1. Erstelle den Differentialquotienten an der Stelle $x_0 = 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

2. Zunächst muss man unterscheiden, von welcher Seite man sich der 0 annähert, da man für positive und negative Werte von x unterschiedliche Funktionsterme verwenden muss. Man betrachtet also zwei Grenzwerte. Dabei nähert man sich einmal von links (in Zeichen: $\lim_{h \nearrow 0}$) und einmal von rechts (in Zeichen: $\lim_{h \searrow 0}$) an den Wert $x_0 = 0$ an.

   2.1. Annäherung von rechts: $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h \searrow 0} \frac{h}{h} = \lim\limits_{h \searrow 0} 1 = 1$

   2.2 Annäherung von links: $\lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{-h}{h} = \lim\limits_{h \nearrow 0} -1 = -1$

Da die beiden Grenzwerte von links und rechts unterschiedlich sind, existiert der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ nicht. Deshalb ist die Funktion $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Ableitung

Die Ableitung einer Funktion gibt die Steigung des Funktionsgraphen an einem bestimmten Punkt an.

Ableitungen werden für eine Vielzahl von Anwendungen der Mathematik benötigt. Zum Beispiel, um das Maximum oder Minimum einer Funktion zu errechnen.

Grundlegende Ableitungsregeln

$(x)' = 1$	Ableitung einer Variablen
$(a \cdot x)' = a$	Ableitung einer Variablen mit Faktor
$(ax^2)' = 2ax$	Ableitung einer Quadratfunktion
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	Ableitung eines Bruches
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Ableitung einer Wurzel
$\left(ax^b\right)' = abx^{b-1}$	Allgemeine Ableitungsregel für Potenzfunktionen

$(e^x)' = e^x$	Ableitung von e (Eulersche Zahl)
$(a^x)' = a^x \log a$	Ableitung einer Exponentialfunktion
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	Ableitung des Logarithmus
$(\sin x)' = \cos x$	Ableitung des Sinus
$(\cos x)' = -\sin x$	Ableitung des Cosinus
$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$	Ableitung des Tangens

Zusammengesetzte Ableitungsregeln

Ableitung einer Konstanten

Die Ableitung einer Konstanten ist Null.

$$f(x) = C \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Beispiel

$$f(x) = 5 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = -8 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Ableitung von x

Die Potenzregel ist - vereinfacht gesagt - immer dann anzuwenden, wenn etwas im Exponenten der x-Funktion steht. Wie der Name bereits vermuten lässt, handelt es sich dabei um Potenzfunktionen $f(x) = x^n$.

Die **Potenzregel** lautet

$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Was zunächst vielleicht etwas kompliziert aussieht, ist eigentlich ganz einfach:

1. Schreibe den Exponenten der x-Funktion mit einem Mal-Zeichen vor das x.

2. Ziehe von dem Exponenten "1" ab.

Beispiel

$$f(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$$

$$f(x) = x^{-5} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -5 \cdot x^{-5-1} = -5 \cdot x^{-6}$$

Faktorregel

Wenn vor dem x ein konstanter Faktor steht, wendet man die Faktorregel an.

> Die **Faktorregel** lautet
>
> $$f(x) = c \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Beim Ableiten bleibt der konstante Faktor unverändert erhalten.

Beispiel

$$f(x) = 2 \cdot x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot \left(3 \cdot x^{3-1}\right) = 6 \cdot x^2$$

$$f(x) = -4 \cdot x^{-5} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -4 \cdot \left(-5 \cdot x^{-5-1}\right) = 20 \cdot x^{-6}$$

Summenregel

Kommt auf beiden (!) Seiten des Plus-Zeichens ein x vor, ist die Summenregel anzuwenden.

> Die **Summenregel** lautet
>
> $$f(x) = g(x) + h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Eine Summe wird abgeleitet, indem man jeden Summanden für sich ableitet und die Ableitungen addiert.

Beispiel

$$f(x) = x^3 + x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f(x) = 4x^5 + x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 20 \cdot x^4 + 4x^3$$

Differenzregel

Kommt auf beiden (!) Seiten des Minus-Zeichens ein x vor, ist die Differenzregel anzuwenden.

Die **Differenzregel** lautet

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Die Differenzregel unterscheidet sich von der Summenregel nur durch das Vorzeichen.

Beispiel

$$f(x) = x^3 - x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f(x) = 4x^5 - x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 20 \cdot x^4 - 4x^3$$

Produktregel

Kommt auf beiden (!) Seiten des Mal-Zeichens ein x vor, ist die Produktregel anzuwenden.

Die **Produktregel** lautet

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Was zunächst vielleicht kompliziert aussieht, ist eigentlich ganz einfach:

1. Berechne die Ableitungen der beiden Teilfunktionen $g(x)$ und $h(x)$.

2. Setze die entsprechenden Teilfunktionen in die Formel ein.

Beispiel

$$f(x) = x^3 \cdot x^5$$

Zuerst berechnen wir die Ableitungen der beiden Funktionen links und rechts vom Mal-Zeichen

$$g(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 3x^2$$

$$h(x) = x^5 \quad \rightarrow \quad h'(x) = 5x^4$$

Jetzt setzen wir entsprechend in die Formel ein

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4 = 3x^7 + 5x^7 = 8x^7$$

Hinweis: Man könnte den Term auch vor dem Ableiten mit Hilfe der Potenzgesetze vereinfachen und sich so die Arbeit mit der Produktregel sparen. Zum Erlernen der Produktregel eignet sich dieses "einfache" Beispiel jedoch hervorragend.

Quotientenregel

Kommt im Zähler und (!) im Nenner eines Bruchs ein x vor, ist die Quotientenregel anzuwenden.

Die **Quotientenregel** lautet

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Was zunächst vielleicht kompliziert aussieht, ist eigentlich ganz einfach:

1. Berechne die Ableitungen der beiden Teilfunktionen $g(x)$ und $h(x)$.

2. Setze die entsprechenden Teilfunktionen in die Formel ein.

Beispiel

$$f(x) = \frac{x^3}{x^5}$$

Zuerst berechnen wir die Ableitungen der Funktionen im Zähler und im Nenner

$$g(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 3x^2$$

$$h(x) = x^5 \quad \rightarrow \quad h'(x) = 5x^4$$

Jetzt setzen wir entsprechend in die Formel ein

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^5 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 5x^4}{[x^5]^2}$$

Unter Beachtung der Potenzgesetze lässt sich das Ergebnis vereinfachen zu

$$f'(x) = \frac{x^5 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 5x^4}{[x^5]^2} = \frac{3x^7 - 5x^7}{x^{10}} = \frac{-2x^7}{x^{10}} = -2x^{-3}$$

Hinweis: Man könnte die Gleichung vor dem Ableiten mit Hilfe der Potenzgesetze vereinfachen und sich so die Arbeit mit der Quotientenregel sparen. Zum Erlernen der Quotientenregel eignet sich dieses "einfache" Beispiel jedoch hervorragend.

Kettenregel

Die Kettenregel ist bei Funktionen anzuwenden, die als Verkettung von zwei Funktionen vorliegen. Es geht also um den Fall, wenn zwei verschiedene Funktionen ineinander verschachtelt sind. Was das genau bedeutet, wird an dem nachfolgenden Beispiel deutlich.

Die **Kettenregel** lautet

$$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Was zunächst vielleicht kompliziert aussieht, ist eigentlich ganz einfach:

1. Identifiziere die äußere und die innere Funktion.

2. Berechne die Ableitungen der beiden Teilfunktionen $g(x)$ und $h(x)$.

3. Setze die entsprechenden Teilfunktionen in die Formel ein.

Übrigens bezeichnet man $g(v)$ als äußere Funktion, $g'(v)$ entsprechend als äußere Ableitung. $h(x)$ ist dann die innere Funktion und $h'(x)$ die innere Ableitung. Die Multiplikation mit $h'(x)$ wird als "nachdifferenzieren" bezeichnet.

Beispiel

$$f(x) = \left(x^4 + 5\right)^2$$

Hinweis: Selbstverständlich könnte man die Gleichung einfach ausmultiplizieren und sich so die Arbeit mit der Kettenregel sparen. Da sich die Kettenregel aber oftmals nicht umgehen lässt, sollte man sie ebenso gut beherrschen wie die anderen Ableitungsregeln.

Die äußere Funktion ist: $g(v) = v^2 \quad \rightarrow \quad g'(v) = 2v$

Die innere Funktion ist: $h(x) = x^4 + 5 \quad \rightarrow \quad h'(x) = 4x^3$

Jetzt setzen wir entsprechend in die Formel ein

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 2\left(x^4 + 5\right) \cdot 4x^3$$

Kurvendiskussion (Eigenschaften)

Definitionsmenge

Siehe weiter vorne

Symmetrieeigenschaften

Grundlegende Symmetrien

Definition 130:

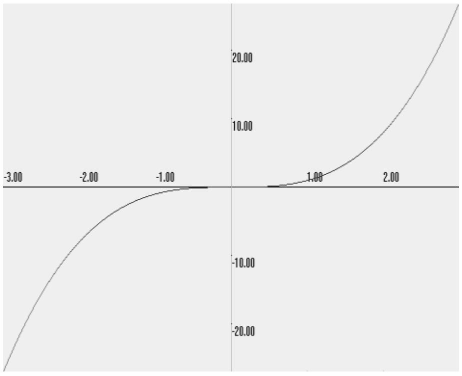
Eine Funktion $f: D \to \mathbf{R}$ heißt symmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

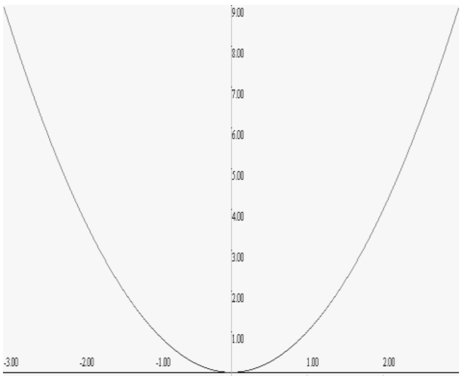
Eine Funktion $f: D \to \mathbf{R}$ heißt symmetrisch zum Ursprung, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = -f(-x)$$

Beispiel 209:



$f: x \mapsto x^3$



$f: x \mapsto x^2$

Beispiel 210:

Überprüfen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Symmetrie: (Vergleiche *f(x)* mit *f(-x)*)

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 1$

$$f(-x) = 5(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = 5x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$$

f ist symmetrisch zur y-Achse

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^7 - 5x^3 + 2x$

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^7 - 5(-x)^3 + 2(-x) = -\left[\frac{1}{4}x^7 - 5x + 2\right] = -f(x)$$

f ist symmetrisch zum Ursprung

c) $f(x) = x^4 + x^3$ $\qquad f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 = x^4 - x^3$

Die Funktion ist weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung.

Symmetrie zu einer beliebigen Achse

Definition 131:

Der Graph einer Funktion f ist genau dann achsensymmetrisch bezüglich der Geraden mit der Gleichung $x = u$, wenn die folgende Bedingung für beliebige Werte von x richtig ist:

$f(u - x) = f(u + x)$

Durch Substitution von x mit u − x erhält man die äquivalente Bedingung:

$f(x) = f(2u - x)$

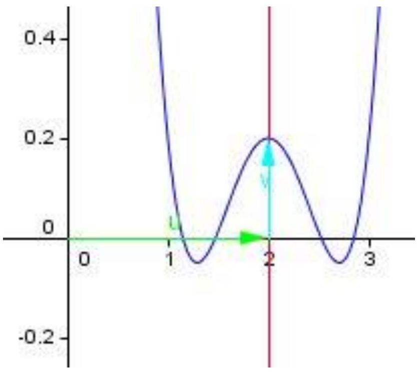
Beispiel 211:

Um die Verschiebung der Symmetrieachse darzustellen wird die Funktion

$f(x) = x^4 - x^2$ wie folgt verändert:

$g(x) = (x - 2)^2 - (x - 2)^2 + 0{,}2.$

Der Graph zeigt deutlich, dass die Achse um den Vektor u der Länge 2 LE nach rechts verschoben wurde. Natürlich wurde die Funktion auch um den Vektor v der Länge 0,2 nach oben verschoben, dies ändert jedoch nichts an der Position Symmetrieachse.



Punktsymmetrie zu einem beliebigen Punkt

Definition 132:

Eine Funktion f(x) heißt punktsymmetrisch zum Punkt P, wenn gilt (Dabei bezeichnet a die x-Koordinate und b die y-Koordinate von P.)

$$f(a+x)-b=-f(a-x)+b$$

Die genannte Bedingung ist durch Substitution von x mit x − a gleichwertig zu

$$f(x)=2b-f(2a-x)$$

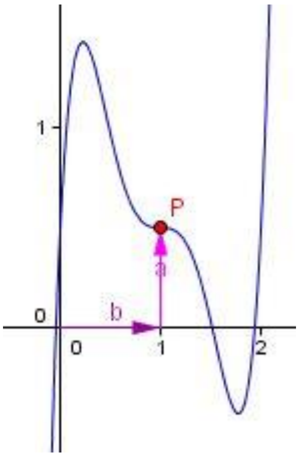
Beispiel 212:

Um die Verschiebung des Symmetriezentrums zu veranschaulichen wird die Funktion

$f(x)=5x^5-5x^3$wie folgt verändert:

$g(x)=5(x-1)^5-5(x-1)^3+0{,}5.$

Der Graph zeigt deutlich, dass das Zentrum um den Vektor a der Länge 1LE nach rechts und um den Vektor b der Länge 0,5 nach oben verschoben wurde. Die Summe der Vektoren a und b ist genau der Verbindungsvektor vom ursprünglichen Zentrum, dem Ursprung, zum neuen Zentrum P.



Definition 133:

Eine ganzrationale Funktion ist genau

symmetrisch zur y-Achse,

wenn ihr Funktionsterm nur ***gerade***. x-Potenzen enthält.

symmetrisch zum Ursprung,

wenn ihr Funktionsterm nur ***ungerade*** x-Potenzen enthält.

Schnittpunkte mit den Achsen

Definition 134:

Um die Nullstellen einer Funktion *f* (und damit die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse) zu finden, berechnet man die Lösungsmenge der Gleichung

$f(x) = 0$.

Wie man dabei im Detail vorgeht, hängt davon ab, welche Funktion man untersucht.

Ist die Funktion *f* beispielsweise durch einen Bruchterm gegeben, so setzt man den Zähler gleich 0, um die Nullstellen zu erhalten. Im Nenner sind Nullstellen nicht zulässig, da die Division durch 0 nicht erlaubt ist. Der Funktionswert wäre in diesem Fall nicht definiert.

Definition 135:

Um den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der *y*-Achse zu bestimmen, setzt man für x den Wert 0 ein. Der y-Achsenabschnitt liegt dann folglich bei $(0 \mid f(0))$.

Den Schnittpunkt mit der *y*-Achse erhält man, indem man $x=0$ einsetzt. Dann ist $f(0)$ der *y*-Wert und $x=0$ der *x*-Wert des Schnittpunkts.

Polstellen

Definition 136:

Polstellen treten immer dann auf, wenn eine Funktion nicht definiert ist, es existieren dann so genannte Definitionslücken in der Funktion.

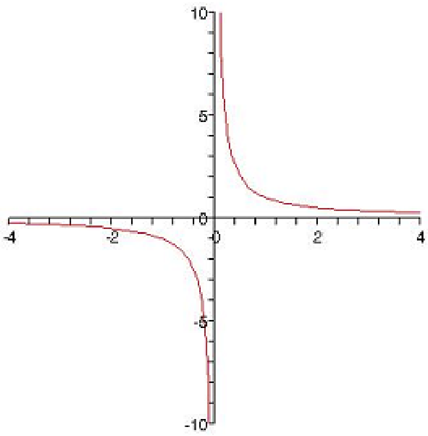
Nicht definiert sind z.B. gebrochen rationale Funktionen immer dann, wenn ihr Nenner Null wird (denn durch Null darf man nicht teilen). Je näher man dieser Stelle kommt, desto kleiner wird der Nenner und der Funktionswert damit umso größer.

Die Funktion strebt an dieser Stelle also unendlich großen Werten entgegen. Man bezeichnet solch eine Definitionslücke als Polstelle.

Alle Graphen haben an der Polstelle eine Gemeinsamkeit. Der Verlauf der Funktion nähert sich einer Funktion an, die durch eine senkrechte Gerade dargestellt werden kann. Man spricht daher in Zusammenhang von Polstellen auch von senkrechten Asymptoten!

Beispiel 213:

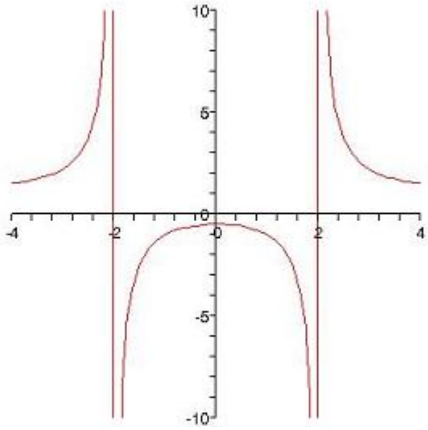
$f(x) = \frac{1}{x}$ hat eine Polstelle bei $x = 0$, denn dann ist der Nenner gleich Null. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte Hyperbel.



$f(x) = \frac{4}{x-5}$ hat eine Polstelle bei $x = 5$, denn dann ist der Nenner gleich Null.

$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ hat eine Polstelle bei $x = -2$, denn dann ist der Nenner gleich Null.

$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4} = \frac{x^2+2}{(x+2)(x-2)}$ hat zwei Polstellen bei $x = 2$ und $x = -2$, denn an beiden Stellen wird der Nenner Null.



Hebbare Polstellen

Definition 137:

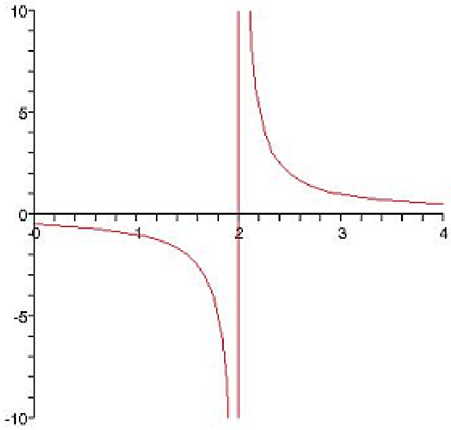
Wenn sich eine gebrochenrationale Funktion auf eine ganzrationale Funktion zurückführen lässt, spricht man von einer hebbaren Polstelle. Dabei verschwindet dann immer der Nenner in der Funktion. Daher kann auch nicht mehr durch Null geteilt werden. Prinzipiell muss im Zähler der Funktion der Nenner als Faktor auftauchen, so dass gekürzt werden kann.

Beispiel 214:

$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x - 3$ hat eine hebbare Polstelle und ist eine Gerade.

$f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-4} = \frac{(x+2)(x-4)}{x-4} = x + 2$ hat eine hebbare Polstelle und ist eine Gerade.

$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$ hat zwei Polstellen, wobei eine hebbar ist. Die Funktion ist eine Hyperbel



Asymptoten

Senkrechte Asymptoten

Definition 138:

Diese Asymptoten sind auf Polstellen zurückzuführen und wurden im vorangegangenen Abschnitt besprochen.

Waagrechte Asymptoten

Definition 139:

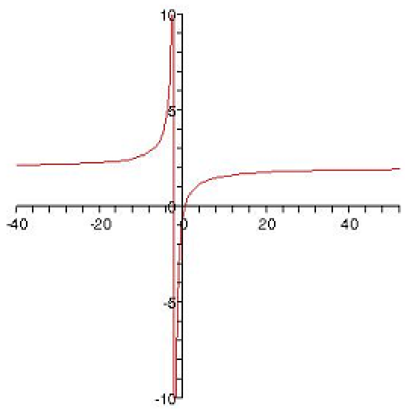
Diese Asymptoten entstehen nur bei Betrachtungen für unendlich große x-Werte. Formal bedeutet das, einen Grenzwert für eine Funktion im Unendlichen zu finden.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = x_0$$

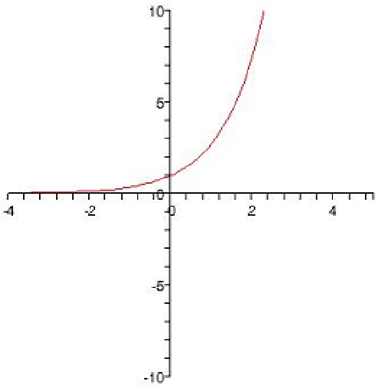
Gebrochen rationale Funktionen können, müssen aber keine waagerechten Asymptoten besitzen.

Beispiel 215:

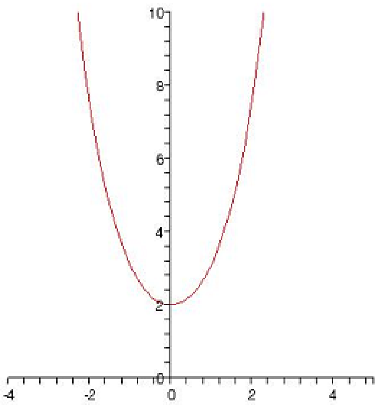
- $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ hat eine waagerechte Asymptote bei $y = 0$.
- $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$ hat eine waagerechte Asymptote bei $y = 2$.



- $f(x) = e^x \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = +\infty \text{ hat keine Asymptote für } x \to +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = 0 \text{ hat eine waagerechte Asymptote } y = 0 \text{ für } x \to -\infty \end{cases}$



- $f(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$ hat keine waagerechte Asymptote bei.



Schiefe Asymptoten

Definition 140:

Schräge Asymptoten besitzen eine Funktion in Form einer Geraden als Grenzwert im Unendlichen. Formal bedeutet das:

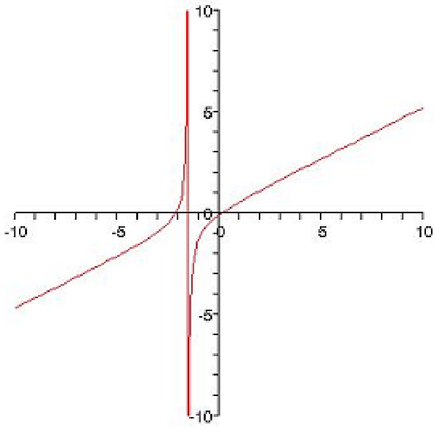
$$\lim_{n \to \infty} f(x) = mx + b$$

Es handelt sich in der Regel um gebrochen rationale Funktionen, bei der die Polynomdivision durch- geführt werden muss. Dabei entsteht dann eine zusammengesetzte Funktion aus der Geraden und einer Hyperbel.

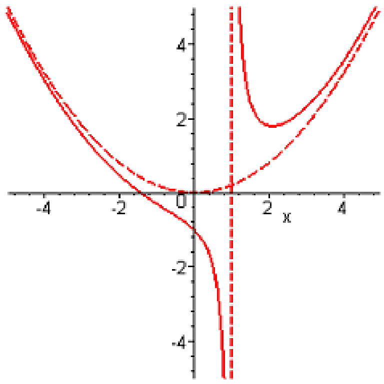
Manchmal wird auch bei einfachen Funktionen (z.B. quadratischen Funktionen) verallgemeinert von schrägen Asymptoten gesprochen.

Beispiel 216:

$f(x) = \frac{x^2+2x-\frac{1}{4}}{2x+3} \overset{Pol.Div.}{\rightarrow} f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2x+3} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$
hat eine schräge Asymptote.



$f(x) = \frac{x^3-x^2-5}{5x-5} \overset{Pol.Div.}{\rightarrow} f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{5}x^2$ hat eine schräge Asymptote (hier eine quadratische Funktion).



Schnittpunkte mit den Achsen

Definition 141:

Um die Nullstellen einer Funktion *f* (und damit die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der *x*-Achse) zu finden, berechnet man die Lösungsmenge der Gleichung

$f(x) = 0$.

Wie man dabei im Detail vorgeht, hängt davon ab, welche Funktion man untersucht.

Ist die Funktion *f* beispielsweise durch einen Bruchterm gegeben, so setzt man den Zähler gleich 0, um die Nullstellen zu erhalten. Im Nenner sind Nullstellen nicht zulässig, da die Division durch 0 nicht erlaubt ist. Der Funktionswert wäre in diesem Fall nicht definiert.

Definition 142:

Um den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der *y*-Achse zu bestimmen, setzt man für x den Wert 0 ein. Der y-Achsenabschnitt liegt dann folglich bei $(0 \mid f(0))$.

Den Schnittpunkt mit der *y*-Achse erhält man, indem man $x=0$ einsetzt. Dann ist $f(0)$ der *y*-Wert und $x=0$ der *x*-Wert des Schnittpunkts.

Extremwerte

Definition 143:

Graphenpunkte, an denen sich das Monotonieverhalten ändert.

Kriterium für differenzierbare Funktionen:

G_f hat an der Stelle x_0 einen **Hochpunkt**,

falls $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$

G_f hat an der Stelle x_0 einen **Tiefpunkt**,

falls $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$,

Ein Vorzeichenwechsel muss durchgeführt werden,

falls $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)=0$.

Definition 144:

Vorzeichenwechsel

Statt zu prüfen, ob die zweite Ableitung an der Stelle x_E kleiner oder größer als Null ist, kann man auch untersuchen, ob die erste Ableitung an der Stelle x_E ihr Vorzeichen wechselt.

Durchläuft man (im wörtlichen und übertragenen Sinne) eine Kurve an einem Hochpunkt von links nach rechts, so lässt sich das Verhalten von f bzw. das der Steigung von f folgendermaßen beschreiben:

Vor der Hochstelle steigt die Kurve, es geht bergauf. Die Steigung ist positiv

An der Hochstelle selbst ist die Steigung Null (die Tangente also waagerecht).

Hinter der Hochstelle fällt die Kurve, es geht bergab. Die Steigung ist negativ.

Zusammengefasst:

An einer Hochstelle wechselt die Steigung von plus nach minus.

Oder:

Dort hat die Steigung (also f') einen Vorzeichenwechsel von plus nach minus (von + nach −).

Analog gilt für eine Tiefstelle:

An einer Tiefstelle wechselt die Steigung von minus nach plus. Oder: Dort hat die Steigung (also f') einen Vorzeichenwechsel von minus nach plus (von − nach +).

Wendepunkte

Definition 145:

Graphenpunkte, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert.

G_f hat an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**,

falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Terrassenpunkt:

Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente (zusätzlich: $f'(x_0) = 0$)

Die Wendepunkte einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f sind die Extrempunkte der Ableitungsfunktion f'. Man erhält sie, indem man die zweite Ableitung mit Null gleichsetzt, d. h. die Lösungsmenge der Gleichung $f''(x) = 0$ berechnet.

Auch hier hat man es nur mit einer notwendigen Bedingung zu tun, sodass weitere Untersuchungen zu machen sind. Wenn zum Beispiel die dritte Ableitung der Funktion f an der fraglichen Stelle ungleich Null ist, so handelt es sich tatsächlich um eine Wendestelle.

Ist die dritte Ableitung jedoch gleich 0, so ist damit noch nicht gezeigt, dass an dieser Stelle keine Wendestelle ist. In diesem Fall sollte man auf Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung unmittelbar vor und hinter der fraglichen Stelle untersuchen (vgl. Untersuchung auf Extrempunkte).

Tritt ein Vorzeichenwechsel auf, so handelt es sich um eine Wendestelle.

Ist das Vorzeichen der 2. Ableitung vor und hinter der Stelle gleich, so kann man in der Schule zwar davon ausgehen, dass es sich um keine Wendestelle handelt, es gibt jedoch Funktionen, bei denen dann trotzdem eine Wendestelle vorliegt. Dieses Kriterium kann alternativ zum erstgenannten Kriterium (3. Ableitung ungleich 0) angewendet werden und ist in der Schule auch etwas sichererer und bei gebrochenrationalen Funktionen sogar sinnvoller.

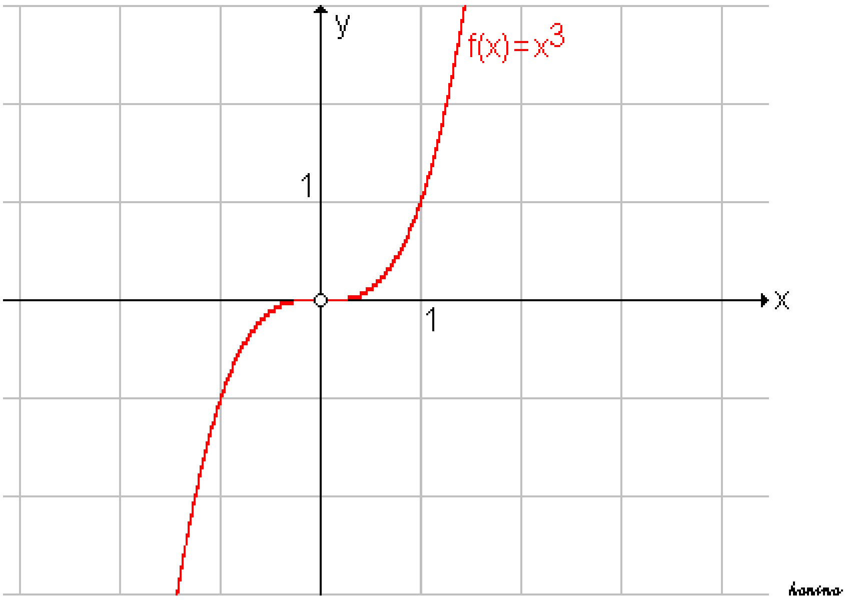
Ist der Wert der dritten Ableitung an dieser Stelle *größer* 0, handelt es sich um eine Wendestelle mit Übergang in eine „Linkskrümmung", ist er jedoch *kleiner* 0, so handelt es sich um eine Wendestelle mit Übergang in eine „Rechtskrümmung".

Sattelpunkte

Einen Wendepunkt mit zugleich waagerechter Tangente nennt man einen Sattelpunkt oder Terrassenpunkt. Für ihn gilt demnach $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, wie im Beispiel der Funktion mit der Gleichung

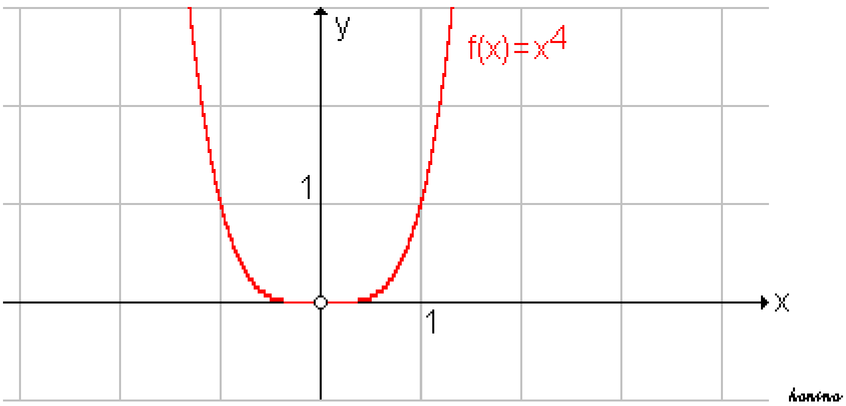
$f(x) = x^3$

an der Stelle $x = 0$.



Allerdings ist das kein hinreichendes Kriterium, es kann auch $f'(x)=0$ und $f''(x) = 0$ werden, ohne dass ein Sattelpunkt auftritt, wie im nachfolgenden Beispiel gezeigt.

$f(x) = x^4$



Erst wenn $f''' \neq 0$ ist, ist ein Sattelpunkt erwiesen; allgemeiner gilt:

Definition 146:

Es liegt ein Wendepunkt vor, wenn der Grad der ersten von 0 verschiedenen Ableitung ungerade ist; ist der Grad gerade, so handelt es sich um ein Extremum.

Beziehungen zwischen Kurven

Schnittpunkte

Ein Schnittpunkt ist in der Mathematik ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven.

Der Schnittpunkt $(x_{SP}|y_{SP})$ zweier Funktionen f(x) und g(x) liegt auf beiden Graphen.

Definition 147:

Das heißt, $f(x_{SP})$ und $g(x_{SP})$ müssen den gleichen Wert ergeben, nämlich die y-Koordinate des Schnittpunktes: y_{SP}.

Es muss daher gelten:

$f(x_{SP})=g(x_{SP})$, weiterhin ist

$f(x_{SP})=g(x_{SP})=y_{SP}$.

Vorgehensweise:

Man setzt, um das entsprechende x zu ermitteln, bei dem f(x)=g(x) gilt, die beiden Funktionsterme gleich, löst die Gleichung nach x auf und erhält so x_{SP}, die x-Koordinate des Schnittpunkts.

Setzt man den erhaltenen Wert in eine der Funktionen ein (egal in welche!), erhält man die y-Koordinate des Schnittpunkts, y_{SP}.

Beispiel 217:

Geg.: $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = 3x + 2$

Ges.: Schnittpunkt $(x_{SP}|y_{SP})$

Berechnung von x_{SP}:

(Der Lesbarkeit zuliebe schreibe ich statt x_{SP} während der Umformung nur x)

$f(x) = g(x)$

$2x + 1 = 3x + 2 \quad | -3x$

$-x + 1 = 2 \quad | -1$

$-x = 1 \quad | \cdot(-1)$

$x_{SP} = -1$

Berechnung von y_{SP}:

$y_{SP} = f(x_{SP}) = 2\cdot(-1) + 1 = -1$

oder

$y_{SP} = g(x_{SP}) = 3\cdot(-1) + 2 = -1$

Beispiel 218:

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Funktionen

$g(x) = (x+2) \cdot e^x$und $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

Durch Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt sich eine Gleichung, die durch den Exponentialterm geteilt werden kann, und dann auf die quadratische Gleichung

$x^2-x-2 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$führt.

Für die Funktionswerte ergibt sich

g(−1) = f(−1) = e und

g(+2) = f(+2) = $4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$.

Es gibt also die zwei Schnittpunkte $S_1(-1|e)$ und $S_2(2|\frac{4}{e^2})$.

Beispiel 219:

Die Funktionen $g(x) = 3 - \frac{1}{4}x$ und $f(x) = -\frac{4+x^2}{x}$

haben keinen Schnittpunkt, da f(x) = g(x) nach dem Durchmultiplizieren mit xund Vereinfachung auf die quadratische Gleichung $\frac{3}{4}x^2 + 3x + 4 = 0$ führt, die keine Lösung hat.

Berührpunkte

Ein Schnittpunkt ist in der Mathematik ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven. Haben beide Kurven in ihrem gemeinsamen Punkt auch die gleiche Tangentensteigung, so spricht man von Berührungspunkt.

Definition 148:

Zwei Funktionen f und g haben einen Berührpunkt an der Stelle x_0, wenn sie dort denselben Funktionswert und dieselbe Ableitung haben, wenn also

$f(x_0) = g(x_0)$ und

$f'(x_0) = g'(x_0)$

gilt.

Diese beiden Bedingungen müssen also nachgeprüft werden, wenn Sie zeigen wollen, dass ein vorgegebener Punkt ein Berührpunkt ist.

Wenn Sie selber die Berührpunkte von zwei Funktionenbestimmen wollen, lösen Sie zuerst die Gleichungen f(x) = g(x) und f'(x) = g'(x)nach x auf, und schauen, ob mit der Lösung oder den Lösungen auch noch die andere Gleichung erfüllt ist.

Für Berührpunkte kommen also nur solche Lösungen in Frage, die beide Gleichungen erfüllen. Am Schluss rechnen Sie zu allen erhaltenen x-Werten die Funktionswerte aus und schreiben die Koordinatenpaare als Berührpunkte auf.

Beispiel 220:

Es soll gezeigt werden, dass sich die Funktionen $f(x) = 3 - 4x^2$und $g(x) = \frac{1}{x}$in B(0,5|2) berühren.

Die Ableitungen sind $f'(x) = -8x$ und $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, es gilt also

$f'(0,5) =-8 \cdot 0,5 = -4$und

$g'(0,5) =- 4$

Die Ableitungen sind damit gleich und genauso die Funktionswerte,

denn wir haben

f(0,5)=2 und g(0,5)=2.

Beispiel 221:

Wir berechnen den Berührpunkt von $f(x) = 3 - 4x^2$ und $g(x) =\frac{1}{x}$.

Da sich die Gleichung f(x) = g(x)nicht gut auflösen lässt, versuchen wir es mit der anderen Bedingung

$f'(x) = g'(x)$, bzw. $2e^{x-3} = 2$,

die nach Division durch 2und Logarithmieren zur Lösung x = 3führt.

Damit ist auch die andere Bedingung erfüllt, es gilt nämlich $f(3) = 2e^0 = 2$und

$g(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$.

B(3|2)ist also ein Berührpunkt der Funktionen fundg.

Tangenten

Tangentensteigung

Berechnung der Tangentensteigung in einem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Graphen G_f:

Definition 149:

Bilden der Ableitung f'(x) und Einsetzen des x_0-Wertes: Berechnen $f'(x_0)$.

Beispiel 222:

$f(x)=x^2$

$f'(x)=2x$

$x_0=1$

$f'(x_0)=2$

Tangente durch einen Kurvenpunkt

Berechnung der Tangentengleichung in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ des Graphen G_f:

Definition 150:

Berechnen der y-Koordinaten von P: $y_0=f(x_0)$.

Berechnen der Tangentensteigung in P: $m=f'(x_0)$

Einsetzen in die Punkt-Steigungs-Form einer Geraden: $y=m(x-x_0)+y_0$.

Gleichung der Tangente: $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Beispiel 223:

Gegeben: Funktion f mit ihrem Grafen G_f.

Gesucht: Gleichung(en) der Tangente(n) an den Graphen von f, wenn der Berührpunkt $P \in G_f$ der Tangente gegeben ist.

Funktionsterm: $f(x)=-(x-1)^2+1$

Berührpunkt: P(1,5/ ?)

$x_0=1{,}5$

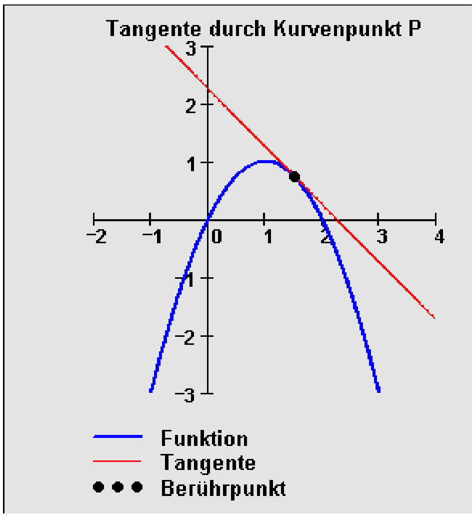
$y_0=f(1{,}5)=0{,}75$

-> $p(1{,}5|0{,}75)$

1. Ableitung: $f'(x)=-2x+2$

Steigung der Tangente: $f'(1{,}5)=-1$

Tangente: $t(x)=f'(1{,}5)(x-1{,}5)+f(1{,}5)= -x + 2{,}25$



Tangente durch einen Punkt außerhalb der Kurve

Wir bezeichnen jetzt mit $(x_1|y_1)$ einen Punkt, der nicht auf der Funktion f liegen soll.

Dabei suchen wir Geraden, die durch diesen Punkt gehen, und außerhalb die Funktion f tangieren (berühren).

Definition 151:

Um den Berührpunkt $(x_0|f(x_0))$ zu finden, wird x_1 und y_1 in die Tangentengleichung für x bzw. y eingesetzt:

$y_1=f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0)$

Diese Gleichung nach x_0 auflösen und x_0 berechnen.

Wenn x_0 dann bekannt ist, wird wie oben die Tangente an f im Kurvenpunkt $(x_0|f(x_0))$ berechnet, diese enthält dann automatisch auch den Punkt $(x_1|y_1)$.

Beispiel 224:

An die Funktion $f(x)=x^2+1$ sollen alle Tangenten durch den Punkt $(0,5|-1)$ (der nicht auf f liegt) gefunden werden. Wir setzen also für x und y in der Tangentengleichung die Werte 0,5 und -1 ein:

$-1=2x_0(0,5-x_0)+x^2{}_0+1$ -> $x^2{}_0-x_0-2=0$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_0=2$ und $x_0=-1$. Dies bedeutet, durch den Punkt $(0,5|-1)$ können zwei Tangenten an die Funktion f angelegt werden. Die Gleichungen ergeben sich durch Einsetzen von 2 und -1 für x0 in die Tangentengleichung:

t_1: $y=f'(2)(x-2)+f(2)=4(x-2)+5=4x-3$

t_2: $y=f'(-1)(x+1)+f(1)=?—2(x+1)+2=-2x$

Beispiel 225:

Gegeben: Funktion f mit ihrem Grafen G_f.

Gesucht: Gleichung(en) der Tangente(n) an den Graphen von f, wenn ein beliebiger Punkt Q außerhalb des Graphen gegeben ist.

Funktionsterm: $f(x)=-x^2$

Beliebiger Punkt: Q(0/1)

Da man die Tangente an einen beliebigen Kurvenpunkt berechnen kann, wählt man einen Punkt P auf dem G_f.

Bedingung $P(u/v) \in G_f$: $v=f(u)=-u^2$

$\to P(u|-v^2)$

1. Ableitung: $f'(x)=-2x$

Steigung der Tangente: $f'(u) \to -2 \cdot u$

Tangente: $t(x,u)=f'(u)(x-u)+f(u)=-2ux+u^2$

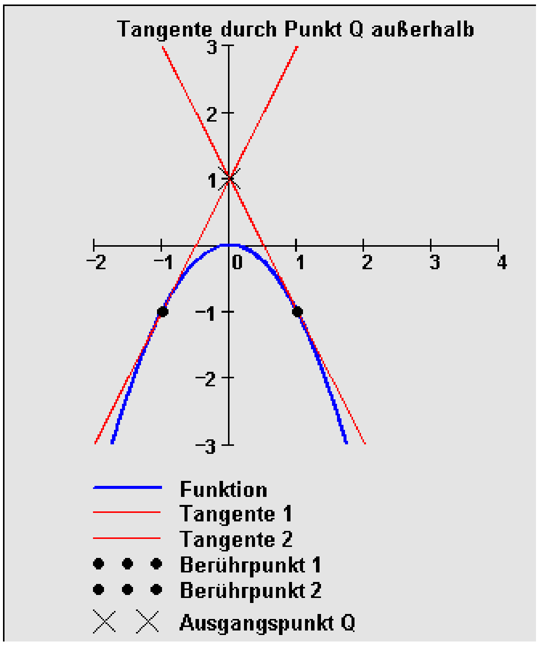
Das ist eine Geradenschar. Daraus wählt man genau die Tangente, die durch den Punkt Q geht.

Bedingung $Q(0/1) \in G_f$: $t(0,u) = 1 \to u^2=1 \to u=\pm 1$

Tangentengleichungen:

$t_1(x)=t(x,u_1)=-2x+1$

$t_2(x)=t(x,u_2)=2x+1$



Senkrechter Schnitt

Zwei Kurven f und g schneiden sich senkrecht bei x_0, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Definition 152:

$f(x_0)=g(x_0)$

$f'(x_0)\cdot g'(x_0)=-1$ (Orthogonalitätsbedingung)

Beispiel 226:

Die Geraden f(x)=3x+5 und g(x)=$-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ schneiden sich im Punkt (-1|2) rechtwinklig wegen

f(-1)=g(-1) = 2 und f'(-1)·g'(-1) = -1

Normalen

In der Analysis und in der Differentialgeometrie ist der Normalenvektor zu einer ebenen Kurve (in einem bestimmten Punkt) ein Vektor, der auf der Tangente in diesem Punkt orthogonal (senkrecht) steht. Die Gerade in Richtung des Normalenvektors durch diesen Punkt heißt Normale.

Definition 153:

Ist die Kurve als Graph einer differenzierbaren Funktion f gegeben, so hat die Tangente im Punkt P $(x_0|f(x_0))$ die Steigung $m_t=f'(x_0)$, die Steigung der Normalen beträgt also

$$m_n=-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{f'(x_0)}$$

Die Normale im Punkt $P(x_0,f(x_0))$ ist dann durch die Gleichung

$y = f(x_0) + m_n(x - x_0)$,

also durch

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

Beispiel 227:

Wir stellen die Gleichung der Normalen durch die Funktion $f(x)=1-\frac{2}{x^2}$ im Kurvenpunkt (1|-1) auf. Es gilt also

$x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=-1$ und mit

$f'(x)=\frac{4}{x^3}$ noch $F'(x_0)=f'(1)=4$.

Das ergibt dann alles zusammen für die Normalengleichung

$$n:\ \ y=-\frac{1}{4}(x-1)-1=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$$

Schnittwinkel

Definition 154:

Zwei Kurven f und g, die sich in einem Punkt an der Stelle x_0 schneiden, schließen einen Winkel α ein, der mit der Formel

$$\tan\alpha = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|$$

berechnet werden kann

Beispiel 228:

Die Funktionen $f(x)=-e^x$ und $g(x)=(3x-1)e^x$ schneiden sich im Punkt S(0|-1) und es gilt f'(0)=-1 und g'(0)=2.

Das ergibt dann in die Formel eingesetzt

$\tan\alpha = \left|\frac{-1-2}{1+(-1)\cdot 2}\right| = 3$ ->α=71,6°

Aufstellen von Funktionen anhand von Bedingungen oder aus Schaubildern

Während bei der Kurvendiskussion von der bekannten Funktionsgleichung auf Eigenschaften der Funktion geschlossen wird, wird in diesem Abschnitt umgekehrt vorgegangen.

Beispiel 229:

Wir gehen jetzt bei allen Beispielen vom Ansatz einer ganzrationalen Funktion 3. Grades aus:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Jede Bedingung an die Funktion wird dann als Gleichung für die Unbekannten aufgeschrieben.

- Der Punkt mit den Koordinaten $(2|5)$ liegt auf f:

$$f(2) = 5 \iff 8a + 4b + 2c + d = 5.$$

- f hat an der Stelle $x = -2$ die Steigung 3:

$$f'(-2) = 3 \iff 12a - 4b + c = 3.$$

- Der Punkt mit den Koordinaten $(-1|4)$ ist ein Hochpunkt (Tiefpunkt):

$$\begin{aligned} f(-1) = 4 &\iff -a + b - c + d = 4 \\ f'(-1) = 0 &\iff 3a - 2b + c = 0. \end{aligned}$$

- $(5|-2)$ ist ein Wendepunkt von f:

$$\begin{aligned} f(5) = -2 &\iff 125a + 25b + 5c + d = -2 \\ f''(5) = 0 &\iff 30a + 2b = 0. \end{aligned}$$

- f hat an der Stelle $x = -4$ eine zur Geraden $y = 15x-3$ parallele Tangente:

$$f'(-4) = 15 \iff 48a - 8b + c = 15.$$

- f hat an der Stelle $x = -3$ die Tangente $y = 9x - 7$:

$$\begin{aligned} f(-3) = 9 \cdot (-3) - 7 &\iff -27a + 9b - 3c + d = -34 \\ f'(-3) = 9 &\iff 27a - 6b + c = 9. \end{aligned}$$

- f hat an den Stellen $x = -3$ und $x = 6$ parallele Tangenten:

$$f'(-3) = f'(6) \iff 27a - 6b + c = 108a + 12b + c.$$

- f hat an der Stelle $x = -1$ eine waagrechte Tangente: (HP oder TP)

$$f'(-1) = 0 \iff 3a - 2b + c = 0.$$

- f berührt die Funktion $g(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ an der Stelle $x = 2$ (Dazu muss erst noch die Ableitung von g mit $g'(x) = \frac{8}{x^3}$ berechnet werden):

Berührpunkte
$f(x_0) = g(x_0)$
$f'(x_0) = g'(x_0)$

$$\begin{aligned} f(2) = g(2) &\iff 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ f'(2) = g'(2) &\iff 12a + 4b + c = 1. \end{aligned}$$

- f hat and der Stelle $x = 7$ die Wendetangente $y = -3x + 5$:

Bedingung für Wendetangente
$f''(7) = 0$
$f'(7) = -3$
$f(7) = (-3) \cdot 7 + 5 = 16$

$$\begin{aligned} f(7) = (-3) \cdot 7 + 5 &\iff 343a + 49b + 7c + d = -16 \\ f'(7) = -3 &\iff 147a + 14b + c = -3 \\ f''(7) = 0 &\iff 42a + 2b = 0. \end{aligned}$$

- f berührt die x-Achse im Ursprung (die x-Achse hat die Steigung 0):

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff d = 0 \\ f'(0) = 0 &\iff c = 0. \end{aligned}$$

- f hat an der Stelle $x = 1$ die Normale $y = 2x + 3$ (s. 1.6.5):

$m_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$ Normalensteigung

$$\begin{aligned} f(1) = 2 \cdot 1 + 3 &\iff a + b + c + d = 5 \\ 2 = -\frac{1}{f'(1)} \iff f'(1) = -\frac{1}{2} &\iff 3a + 2b + c = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- f hat an der Stelle $x = 4$ eine zur Geraden $y = -3x + 4$ senkrechte Tangente (s. 1.6.4):

$f(x_0) = g(x_0)$
$f'(x_0) \cdot m_n = -1$
$f'(x_0) = -\frac{1}{m_n} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

$$f'(4) \cdot (-3) = -1 \iff f'(4) = \frac{1}{3} \iff 48a + 8b + c = \frac{1}{3}.$$

- f hat an der Stelle $x = 4$ eine zur Geraden $y = -3x + 4$ parallele Normale (s. 1.6.5):

$$m_n = -\frac{1}{f'(4)} = -3 \iff f'(4) = \frac{1}{3} \iff 48a + 8b + c = \frac{1}{3}.$$

1. - f_t schneidet g zweimal
Zu bestimmen sind alle t, für die $f_t(x) = t - \frac{8}{x}$ die Gerade $g(x) = 2x$ zweimal schneidet. Aus der Schnittbedingung $f_t(x) = g(x)$ folgt

$$t - \frac{8}{x} = 2x \quad \text{bzw.} \quad 2x^2 - tx + 8 = 0.$$

Nach 1.2.3 hat diese Gleichung zwei Lösungen, wenn die Diskriminante positiv ist, d.h. wenn $t^2 - 64 > 0$ gilt. Das bedeutet, dass es für $t^2 > 64$, also für $t > 8$ oder für $t < -8$ zwei Schnittpunkte von f_t und g gibt.

2. - f_t berührt g
Gesucht ist dasjenige t, für welches f_t mit $f_t(x) = x^2 + (t+1)x + 3$ die Funktion $g(x) = 1 - x^2$ berührt. Nach 1.6.2 bedeutet Berührung soviel wie $f_t'(x) = g'(x)$ und $f_t(x) = g(x)$, d.h. es muss gelten:

$$2x + t + 1 = -2x \quad \text{und} \quad x^2 + (t+1)x + 3 = 1 - x^2.$$

Um die beiden Gleichungen nach t und x aufzulösen, können wir z.B. $t = -4x - 1$ (erste Gleichung) in die zweite Gleichung einsetzen. Aus der entstandenen Gleichung folgen dann die Lösungen $x = \pm 1$. Das ergibt dann wieder nach Einsetzen in die erste Gleichung für t die Lösungen $t = -5$ und $t = 3$. Das Ergebnis sieht dann so aus: f_3 berührt g an der Stelle $x = -1$, und f_{-5} berührt g an der Stelle $x = 1$.

3. - f_t schneidet g senkrecht
Für welches t schneidet $f_t(x) = x^2 + \frac{1}{2}t$ die Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ senkrecht? Nach 1.6.4 ist das der Fall, falls $f_t'(x) \cdot g'(x) = -1$ und $f_t(x) = g(x)$ gilt:

$$2x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -1 \quad \text{und} \quad x^2 + \frac{1}{2}t = \frac{1}{x^2+1}.$$

Die erste Gleichung führt nach Umformung auf eine biquadratische Gleichung für x mit den Lösungen $x = \pm 1$ (vgl. 1.2.4). Beide Lösungen können dann in die zweite Gleichung eingesetzt werden, wobei sich jeweils $t = -1$ ergibt. Das bedeutet, dass f_{-1} die Funktion g an den Stellen $x = \pm 1$ senkrecht schneidet.

4. - Der Hochpunkt von f_t liegt auf der x-Achse
Wir gehen aus von der Funktionenschar $f_t(x) = \frac{t^3}{2x^2} + x + 3$ mit $t < 0$. Dabei hat f_t den Hochpunkt $H(t|\frac{3}{2}t + 3)$ (vgl. 1.4.4). Soll der Hochpunkt auf der x-Achse liegen, dann muss seine y-Koordinate den Wert Null haben:

$$\frac{3}{2}t + 3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad t = -2.$$

Damit hat die Funktion f_{-2} ihren Hochpunkt auf der x-Achse.

Lösung:

Bestimmung von Parametern

① f_t schneidet g zweimal

$$f_t(x) = t - \frac{8}{x} \qquad g(x) = 2x$$

$$t - \frac{8}{x} = 2x \quad | \cdot x$$

$$2x^2 - tx + 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+t \pm \sqrt{t^2 - 64}}{4}$$

Es gibt zwei Lösungen, wenn die Diskrimenante positiv ist

$$t^2 - 64 > 0$$

$$t^2 > 64$$

$$t > 8 \quad \text{oder} \quad t < -8$$

② f_t berührt g

$f_t(x) = x^2 + (t+1)x + 3$

$g(x) = 1 - x^2$

$f'_t(x) = g'(x)$ und $f_t(x) = g(x)$

$f_t'(x) = 2x + t + 1$

$g'(x) = -2x$

$2x + t + 1 = -2x$ und $x^2 + (t+1)x + 3 = 1 - x^2$

$t = -4x - 1$

in die zweite einsetzen

$x^2 + (-4x - 1 + 1)x + 3 = 1 - x^2$

$x^2 - 4x^2 + 3 - 1 + x^2 = 0$

$-2x^2 + 2 = 0$

$x^2 = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

Einsetzen in $f_t(x)$

$g(1) = 0$

$f_t(1) \Rightarrow 1 + (t+1)1 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -5$

$f_t(-1) \Rightarrow (-1)^2 + (t+1)(-1) + 3$

$\Leftrightarrow 1 - t - 1 + 3 = 0$

$t = 3$

Ergebnis: f_3 berührt g an der Stelle $x = -1$
und f_{-5} berührt g an der Stelle $x = 1$

③ f_t schneidet g senkrecht

Für welches t schneidet $f_t(x) = x^2 + \frac{1}{2}t$ die Funktion $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ senkrecht

Dies ist der Fall, wenn

$$f_t'(x) \cdot g'(x) = -1$$

und $f_t(x) = g(x)$

$$2x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -1 \quad \text{und} \quad x^2 + \frac{1}{2}t = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = -1$$

$$-4x^2 = -(x^2+1)^2$$

$$-4x^2 = -x^4 + 2x^2 + 1$$

$$-\cancel{x^4 - 2x^2 + 4x + 1 = 0}$$

$$x_{1/2} = \pm 1$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

Subst $x^2 = u \iff u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{\pm 2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$x^2 = 1$ Rücksub.

Einsetzen in 2. Gleichung

$x = 1$ $\quad 1 + \frac{1}{2}t = \frac{1}{1+1}$ $\qquad x = -1$ $\quad 1 + \frac{1}{2}t = \frac{1}{1+1}$

$$\frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - 1$$

$$t = -1 \qquad\qquad t = -1$$

Das bedeutet, dass f_{-1} die Funktion g an den Stellen $x = \pm 1$ senkrecht schneidet.

④ Der HP von f_t liegt auf der x-Achse

$f_t(x) = \frac{t^3}{2x^2} + x + 3$ mit $t < 0$

f_t hat den HP bei $H(t \mid \frac{3}{2}t + 3)$

Soll der HP auf der x-Achse liegen, so hat seine y-Koordinate den Wert Null.

$\frac{3}{2}t + 3 = 0 \iff t = -2$

Damit hat die Funktion f_{-2} ihren HP auf der x-Achse.

⑤ f_t hat zwei zueinander senkrechte Wendetangenten

Bestimme t so, dass $f_t(x) = tx^4 - 3x^2$ $(t > 0)$ zwei zueinander senkrechte Wendetangenten besitzt.

$f_t(x) = tx^4 - 3x^2$
$f'_t(x) = 4tx^3 - 6x$
$f''_t(x) = 12tx^2 - 6$
$f'''_t(x) = 24tx$

$f''_t(x) = 0$ $\quad \cancel{12tx - 6 = 0}$ $\quad \cancel{tx^2 = \frac{6}{12}}$

$12tx^2 - 6 = 0$
$tx^2 = \frac{6}{12}$
$x^2 = \frac{1}{2t}$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2t}}$

Beispiel 230:

Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat den Hochpunkt (-1|10) und den Wendepunkt (1|-6)?

Lösung:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat eine Gleichung von der Form

(1) f (x): $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$ und die Ableitungen

(2) $y' = 3 a x^2 + 2 b x + c$,

(3) $y'' = 6 a x + 2 b$,

wobei a, b, c, d zu bestimmende reelle Zahlen sind.

Die gegebenen Eigenschaften werden nun in die Sprache der Algebra übersetzt, d.h. es wird versucht, sie in Gleichungen auszudrücken. Weil (-1|10) ein Kurvenpunkt ist, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung (1). Also gilt

(4) $10 = - a + b - c + d$.

Weil (-1|10) Hochpunkt ist, ist f'(-1)=0, also nach Gleichung (2)

(5) $0 = 3 a - 2 b + c$.

Auch (1|-6) liegt auf der Kurve, also nach Gleichung (1)

(6) $-6 = a + b + c + d$.

Weil (1|-6) Wendepunkt ist, ist y''=0, d.h. nach Gleichung (3)

(7) $0 = 6 a + 2 b$.

Das Gleichungssystem (4) bis (7) hat die Lösung a = 1 ; b = -3 ; c = -9 ; und d= 5. Also lautet die gesuchte Gleichung.

$$y = x^3 - 3 x^2 - 9 x + 5 .$$

Beispiel 231:

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, dessen Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, einen y-Achsenabschnitt von y = 2 und auf der x-Achse bei x = 3 einen Tiefpunkt hat.

Lösung:

$f(x) = a\ x^4 + b\ x^3 + c\ x^2 + d\ x + e$

Wegen der Achsensymmetrie müssen die Koeffizienten b und d Null sein. Damit vereinfacht sich der Funktionsterm zu: $f(x) = a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e$ → $f'(x) = 4a \cdot x^3 + 2c \cdot x$

1.	$f(0) = 2$	$a \cdot 0 + c \cdot 0 + e = 0$	$e = 0$ → $f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + 2$
2.	$f(3) = 0$	$a \cdot 3^4 + c \cdot 3^2 = 0$	**$81a + 9b + 2 = 0$**
3.	$f'(3) = 0$	$4a \cdot 3^3 + 2c \cdot 3 = 0$	**$108a + 6b = 0$**

Übrig bleibt ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, das leicht zu lösen ist.

$81a + 9c = -2 \xrightarrow{\cdot(-\frac{2}{3})}$

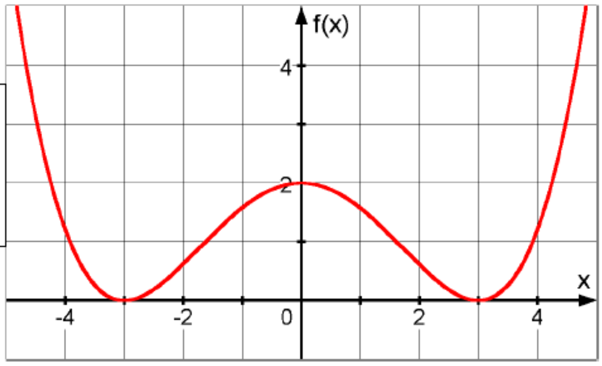
$-54a - 6c = \frac{4}{3}$

$108a + 6c = 0$

Daraus folgt: $54a = {}^{4}/_{3}$

$a = {}^{2}/_{81}$ und $b = -{}^{4}/_{9}$

$$f(x) = \frac{2}{81}x^4 - \frac{4}{9}x^2 + 2$$



Funktionsscharen

Eine Kurvenschar (auch *Funktionsschar*) ist eine Menge verschiedener Kurven, deren Abbildungsvorschriften sich in mindestens einem Parameter unterscheiden.

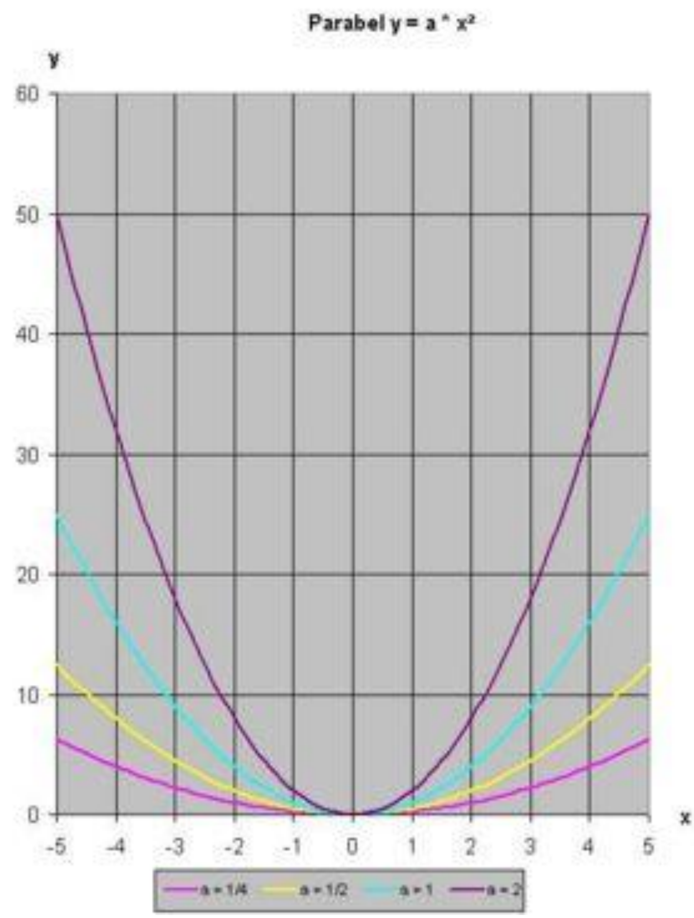
Gemäß einer anderen Definition ergibt sich eine Kurvenschar aus dem Graphen von Funktionen, in denen ein freier Parameter der betreffenden Funktion in Parameterdarstellung variiert wird.

Ortskurven

Eine Kurvenschar (auch Funktionsschar) ist eine Menge verschiedener Kurven, deren Abbildungsvorschriften sich in mindestens einem Parameter unterscheiden.

Definition 155:

Gemäß einer anderen Definition ergibt sich eine Kurvenschar aus dem Graphen von Funktionen, in denen ein freier Parameter der betreffenden Funktion in Parameterdarstellung variiert wird.



Wenn bei einer Funktion einer Funktionsschar f_t die Hoch-, Tief- oder Wendepunkte in Abhängigkeit von t ausgerechnet sind, ist es möglich, die Kurve zu bestimmen, auf der alle diese Punkte liegen.

Gegeben ist z. B. der Hochpunkt $H(a(t)|b(t))$, wobei $a(t)$ und $b(t)$ die x-Koordinate und die y-Koordinate der Hochpunkte in Abhängigkeit von dem Parameter t bilden.

Definition 156:

Mit

$x=a(t)$ und $y=b(t)$

kann man die erste Gleichung nach t auflösen und das Ergebnis in die zweite Gleichung einsetzen, was eine Gleichung mit y und x ergibt.

Dies ist dann die Funktionsgleichung der Ortskurve aller Hochpunkte.

Das gleiche kann natürlich für Tiefpunkte und Wendepunkte durchgeführt werden.

Beispiel 232:

Bestimmen Sie die Ortskurve aller Hochpunkte der Funktionsschar, wobei der Hochpunkt $HP(0{,}5t|0{,}25t^2+t)$ alle Hochpunkte der Schar beinhaltet.

$f_t(X)=x^2+tx+t$

Es gilt:

$x=0{,}5t$ und $y=0{,}25t^2+t$

Die erste Gleichung wird nach t aufgelöst

$t=2x$

und in die zweite eingesetzt

$y=0{,}25(2x)^2+2x \rightarrow y=x^2+2x$

Die Ortskurve aller Hochpunkte lautet dann

$y=x^2+2x$

Ökonomische Anwendungen der Differentiation

Zusammenhänge zwischen wirtschaftlichen Größen lassen sich im Allgemeinen durch Funktionen beschreiben. In der Praxis tritt häufig das Problem auf, dass diese Funktionen nicht bekannt sind und sich zudem nur sehr schwer abschätzen lassen.

Häufig kennt man aber einige Eigenschaften der Funktion, aus denen sich Folgerungen für wirtschaftliche Entscheidungen ableiten lassen.

Zur Lösung wirtschaftlicher Fragestellungen durch mathematische Methoden ist es nicht möglich, die Realität in ihrer umfassenden Komplexität zu berücksichtigen. Deshalb wird ein **Modell** (ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit) erstellt, das die realen Zusammenhänge auf das Wesentliche reduziert.

Häufig unterstellt man für die Bestimmung der Nachfragefunktion, dass alle Faktoren bis auf den Preis des Produktes konstant bleiben (**ceteris paribus Bedingung**), so dass nur noch eine unabhängige Variable in die Berechnung eingeht.

Eine weitere Vereinfachung erfolgt dadurch, dass häufig **lineare Funktionen** verwendet werden, auch wenn die Beziehungen zwischen zwei wirtschaftlichen Größen nur annähernd linear verlaufen oder nur in einem bestimmten Intervall eine konstante Steigung haben.

Insbesondere bei wirtschaftlichen Funktionen ist es wichtig, **Definitions- und Wertebereich** zu beachten, da diese in vielen Fällen eingeschränkt sind.

Beispielsweise haben alle Kostenfunktionen K(x) einen beschränkten Definitionsbereich, da die Produktionsmenge durch Kapazitätsbegrenzungen eingeschränkt ist, und K nur die Werte annehmen kann, die sich durch Einsetzen der x-Werte in die Funktion ergeben. Kosten und Produktionsmengen können zudem nicht negativ werden.

Nachfrage- und Angebotsfunktion

Die **Nachfragefunktion** gibt die Abhängigkeit zwischen der nachgefragten Menge eines bestimmten Gutes und allen Faktoren an, die sie beeinflussen.

Wie oben beschrieben, wird diese Beziehung häufig vereinfacht. Die nachgefragte Menge x eines Haushaltes wird nur noch als abhängig von dem Preis p des entsprechenden Gutes angesehen.

$x = f(p)$

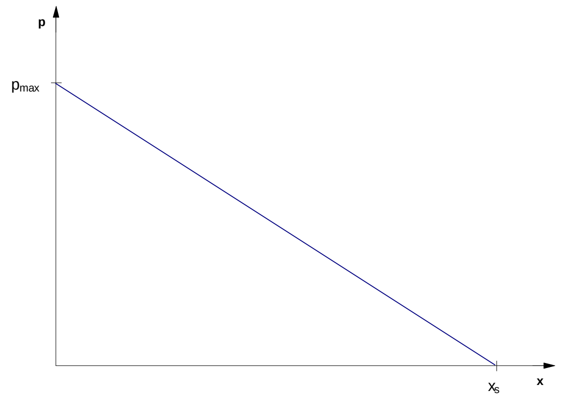
Wenn man die Abhängigkeit zwischen Preis und nachgefragter Menge eines Gutes aus der Sicht des anbietenden **Unternehmens** betrachtet, bezeichnet man die Nachfragefunktion als **Preisabsatzfunktion**.

Bei der Preisabsatzfunktion fragt sich der Unternehmer, welche Mengen er bei welchen Preisen absetzen kann.

Wenn man von einigen Besonderheiten absieht (Preis-Qualitäts-Effekt bei Luxusgütern mit prestigevermittelndem Preis), bei denen die Preisabsatzfunktion von ihrem typischen Verlauf abweicht, ist es plausibel, dass die nachgefragte Menge steigt, wenn der Preis sinkt, und umgekehrt. Die Preisabsatzfunktion hat demnach eine negative Steigung.

Vereinfachend wird in der Praxis häufig ein linearer Verlauf unterstellt, obwohl die Funktion in der Realität vor allem in der Nähe der Achsen ihre Steigung ändern und sich an die Achsen anschmiegen wird.

In den Wirtschaftswissenschaften ist es üblich, den Preis an der Ordinate und die Menge an der Abszisse abzutragen. Die **Nachfragefunktion** wird demgemäß so dargestellt, dass der Preis der abhängigen und die Menge der unabhängigen Variablen entspricht. Man betrachtet also die Umkehrfunktion, die die Abhängigkeit des Preises von der Nachfragemenge angibt $p = f(x)$.



Allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Nachfragefunktion:

$p = mx + b$

Dabei bedeuten:

- p = Preis
- m = Steigung (negativ)
- x = nachgefragte bzw. abgesetzte Menge
- b = Ordinatenabschnitt (maximalen Preis p_{max} für das Gut, bei dem die Nachfrage Null wird)

Die Nullstelle x_s zeigt die Sättigungsgrenze an. Selbst wenn der Preis des Produktes auf Null gesenkt wird, überschreitet die nachgefragte Menge nicht den Wert x_s.

Die **Angebotsfunktion** gibt die Abhängigkeit der angebotenen Menge eines Gutes von dem dafür verlangten Preis an.

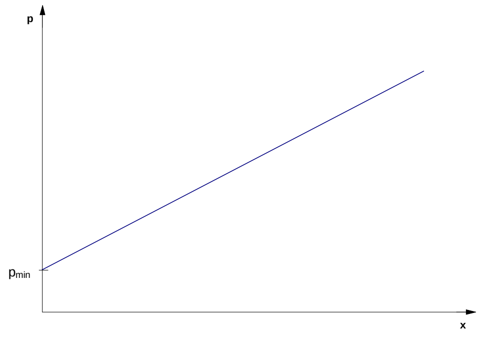
Je höher der Verkaufspreis, desto mehr sind die Hersteller bereit zu produzieren. Mit steigenden Preisen wird also auch die angebotene Menge zunehmen. Die Angebotsfunktion hat eine positive Steigung.

Allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Angebotsfunktion:

$p = mx + b$

Dabei bedeuten:

- p = Preis
- m = Steigung (positiv)
- x = Angebotsmenge
- b = Ordinatenabschnitt (minimalen Preis p_{min}, bei dem das Angebot gleich Null ist; erst bei steigenden Preisen sind die Produzenten bereit, mehr und mehr Produkte anzubieten.)



Das Marktgleichgewicht, bei dem sich Angebot und Nachfrage ausgleichen, lässt sich graphisch ermitteln, wenn Nachfrage- und Angebotsfunktion in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.

Das Marktgleichgewicht ist erreicht, wenn das Angebot mit der Nachfrage übereinstimmt. Graphisch entspricht das Gleichgewicht dem Schnittpunkt der beiden Funktionen.

p_g = Gleichgewichtspreis

x_g = Gleichgewichtsmenge

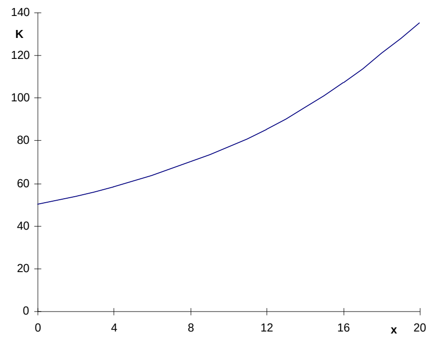
Kostenfunktion

Die Kostenfunktion eines Unternehmens zeigt den Zusammenhang zwischen den gesamten Kosten K in einer Periode und der in dieser Zeit produzierten Menge x eines Produktes auf. Die Produktionsmenge ist die unabhängige Variable, deren Einfluss auf die abhängige mit Hilfe der Kostenfunktion analysiert wird.

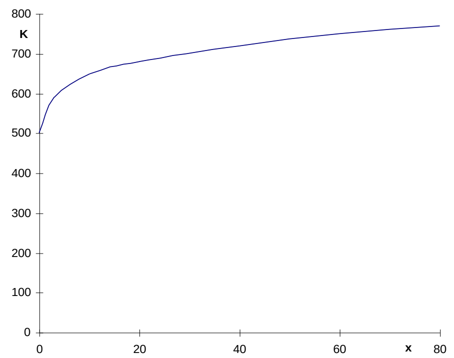
Im Allgemeinen kann man davon ausgehen, dass Kostenfunktionen eine steigende Tendenz haben. Mit zunehmender Produktionsmenge werden auch die Kosten zunehmen. Der Funktionsverlauf hängt von dem zugrunde liegenden Produktionsverfahren ab, so dass sich im konkreten Fall verschiedene Kurvenformen ergeben.

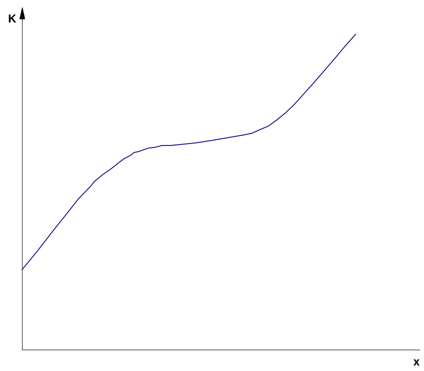
Im einfachsten Fall wird eine **lineare** Kostenfunktion auftreten. Bei linearen Funktionen ist die Steigung konstant, das heißt die Zusatzkosten für die Produktion einer zusätzlichen Einheit sind immer gleich.

Bei einem **progressiven** Verlauf der Kostenfunktion wächst die Steigung mit zunehmendem x. Die Kosten für die Produktion einer zusätzlichen Einheit werden immer größer.



Eine Kostenfunktion mit **degressivem** Verlauf liegt vor, wenn durch die Massenproduktion die Stückkosten gesenkt werden können. Die Steigung nimmt ab, und die Zusatzkosten für weitere Einheiten werden mit größer werdender Stückzahl geringer.





Besonders häufig wird in den Wirtschaftswissenschaften die **S-förmige** Kostenfunktion diskutiert.

Diese S-förmige Kostenfunktion hat zunächst einen degressiven, später aber einen progressiven Verlauf.

Wird beispielsweise ein landwirtschaftliches Gut (z. B. Weizen oder Kartoffeln) auf einer bestimmten Fläche produziert, so ist der Ertrag pro Hektar die Produktionsmenge. Die zusätzlichen Kosten für Saatgut, Dünger etc. werden von einem bestimmten Hektarertrag an immer größer, wenn der Hektarertrag noch weiter gesteigert werden soll.

Da die Funktionsgleichung einer Kostenfunktion in der Praxis im Allgemeinen nicht bekannt ist, wird vereinfachend ein linearer Verlauf unterstellt. Aus einigen Eigenschaften der Kostenfunktion, die aus der Erfahrung abgeleitet werden, lässt sich dann eine lineare Funktion aufstellen, die den tatsächlichen Verlauf wiedergibt.

Die Gesamtkosten K(x) setzen sich zusammen aus den Fixkosten K_f und den variablen Kosten K_v, die sich durch Multiplikation der variablen Stückkosten k_v mit der Produktionsmenge x errechnen.

Die Funktionsgleichung in ihrer allgemeinen Form lautet für die lineare Kostenfunktion:

$K(x) = K_f + K_v = K_f + k_v \cdot x$

Dabei bedeuten:

$K(x)$ = Gesamtkosten, abhängig von der Produktionsmenge x

K_f = Fixkosten, unabhängig von der Produktionsmenge x

K_v = variable Kosten, abhängig von x

k_v = variable Stückkosten, Steigung der Geraden

x = Produktionsmenge

Da die Steigung konstant ist, sind auch die zusätzlichen Kosten für die Produktion einer weiteren Einheit - die Grenzkosten - konstant. Sie betragen k_v.

In einem Unternehmen gilt die Kostenfunktion $K(x) = 700 + 3x$

Zeichnen Sie die Funktion.

Wie hoch sind die Fixkosten und die variablen Kosten pro Stück?

Welche Kosten entstehen bei der Produktion von 150 Mengeneinheiten?

$K_f = 700$ $k_v = 3$

$K(150) = 700 + 3 \cdot 150 = 1.150$

Umsatzfunktion

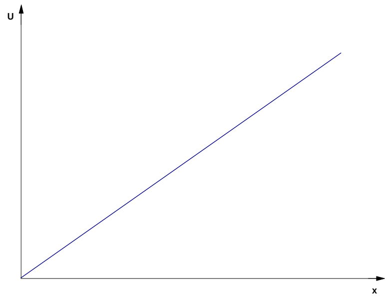
Durch Multiplikation von Preis und Menge ergibt sich der Umsatz, der somit von zwei unabhängigen Variablen abhängt.

$U(x, p) = p \cdot x$

Für viele Unternehmen ist der Preis jedoch eine konstante Größe. Sie haben einen zu geringen Marktanteil, um den Preis beeinflussen zu können. Diese Unternehmen werden **Mengenanpasser** genannt, da sie ihren Umsatz nicht durch den Preis, sondern nur durch die abgesetzte Menge verändern können. Der Umsatz ist für sie nur von der Menge x abhängig.

$U(x) = p \cdot x \quad p = \text{const.}$

Der Preis entspricht der Steigung einer Geraden, die durch den Koordinatenursprung verläuft.



Gewinnfunktion

Die Differenz von Umsatz und Kosten stellt den Gewinn eines Unternehmens dar.

$G = U - K$

Bei einem Mengenanpasser ist der Gewinn nur von der Menge abhängig.

$G(x) = U(x) - K(x)$

Durch Einsetzen der Umsatz- und der Kostenfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} G(x) &= p \cdot x - K_f - k_v \cdot x \\ &= - K_f + (p - k_v) \cdot x \end{aligned}$$

Der Gewinn errechnet sich durch Multiplikation des Überschusses des Preises über die variablen Stückkosten ($p-k_v$, Stückdeckungsbeitrag) mit der Menge x, wovon noch die Fixkosten subtrahiert werden müssen.

Graphisch lässt sich die Gewinnfunktion ebenfalls durch die Differenz der Umsatz- und Kostenfunktion darstellen.

Wenn die Kosten größer als der Umsatz sind, ist der Gewinn negativ. Das Unternehmen befindet sich in der Verlustzone.

In dem Punkt, in dem sich Umsatz- und Kostenfunktion schneiden, ist der Gewinn Null. Das Unternehmen hat die **Gewinnschwelle** erreicht.

Bei höheren Stückzahlen wird ein positiver Gewinn erzielt (Gewinnzone).

Die Gewinnfunktion kann durch die Subtraktion der Kosten- von der Umsatzfunktion graphisch dargestellt werden. Bei der Produktion von Null Einheiten entsteht ein Verlust in Höhe der Fixkosten; die Gewinnfunktion schneidet die Ordinate bei $-K_f$. An der Gewinnschwelle x_0 schneidet die Gewinnfunktion die Abszisse und erreicht den positiven Bereich.

Beispiel 233:

Auf dem Markt für ein bestimmtes Produkt gilt ein Maximalpreis von 500 Euro und eine Sättigungsmenge von 200 Stück. Der Mindestpreis ist 100 Euro und die Steigung der Angebotsfunktion beträgt 1,5.

a) Bestimmen Sie die Nachfrage- und Angebotsfunktion, die beide einen linearen Verlauf haben sollen.

b) Bestimmen Sie Gleichgewichtspreis und -menge graphisch und analytisch.

c) Welche Folge hat eine staatliche Festlegung des Preises auf 200 Euro für Nachfrage und Angebot?

Lösung:

a) Nachfragefunktion, bekannt:

Punkt 1 (0;500)

Punkt 2 (200;0)

2-Punkteform:

$$\frac{0-500}{200-0} = \frac{500-y}{0-x}$$

$$\mathrm{y} = 500 - \frac{5}{2}x$$

Angebotsfunktion, bekannt:

Punkt (0;100)

Steigung m = 1,5

Punktsteigungsform:

$$1{,}5 = \frac{100-y}{0-x}$$

$$\mathrm{y} = 100 + 1{,}5\mathrm{x}$$

b.

500 - 2,5x = 1,5x + 100

$x_g = 100$, $p_g = 250$

c.

Bei einem Preis von 200 Euro ist die Nachfrage größer als das Angebot, wie die Abbildung zeigt.

nachgefragte Menge x_n : $200 = 500 – 2{,}5x_n$

$x_n = 120$

angebotene Menge x_a : $200 = 1{,}5x_a + 100$

$x_a = 66{,}67$

Es besteht ein Nachfrageüberhang von ca. 53 Stück.

Beispiel 234:

Ein Unternehmen hat Fixkosten in Höhe von 1.000 Euro und variable Stückkosten in Höhe von 1,50 Euro. Maximal können 1.500 Einheiten produziert werden. Der Marktpreis beträgt 2,50 Euro.

a) Ermitteln Sie graphisch und analytisch die Gewinnschwelle.

b) Welche Folgen hat eine Senkung des erzielten Preises auf die Hälfte?

Lösung:

a.

K(x) = 1.000 + 1,5x

U(x) = 2,5x

G(x) = U(x) - K(x) = 0

0 = 2,5x – 1000 – 1,5x

x_0 = 1.000

b.

Wenn der Preis auf 1,25 Euro fällt, ist der Stückdeckungsbeitrag negativ, und es kann kein Gewinn erzielt werden.

Die Steigung der Kostenfunktion ist dann größer, als die der Umsatzfunktion, so dass kein Schnittpunkt existiert.

Beispiel 235:

Ein Betrieb kann im Monat maximal 3000 Kreissägen herstellen. Dabei entstehen fixe Kosten von 100.000 Euro und zusätzliche variable Kosten in Höhe von 150 Euro pro Stück

a) Geben Sie die Kostenfunktion an, die der Anzahl x der produzierten Kreissägen die entstehenden Kosten zuordnet.

b) Geben Sie Definitions- und Wertebereich der Kostenfunktion (bezogen auf einen Monat) an!

Lösung:

$$K(x) = K_v + k_v x$$

$$\Rightarrow K(x) = 100.000 + 150x$$

D_K = [0; 3000]

W_K = [100.000; 550.000]

Nichtlineare Funktionen

Beispiel 236:

Einem Unternehmen ist die Preisabsatzfunktion für sein Produkt bekannt:

$p(x) = 80 - 4x$

Die Umsatzfunktion lässt sich durch Multiplikation der Preisabsatzfunktion mit x ermitteln.

$U(x) \quad = p \cdot x = (80 - 4x) \cdot x \qquad = 80x - 4x^2$

Graphische Darstellung von Preisabsatz- und Umsatzfunktion:

Die Preisabsatzfunktion zeigt, dass der Höchstpreis 80 DM beträgt. Die nachgefragte Menge und damit der Umsatz ist bei einem Preis von 80 DM oder mehr gleich Null. Wenn der Preis sinkt, steigt die nachgefragte Menge bis zur Sättigungsmenge von 20, die bei einem Preis von Null erreicht wird. Da der Preis beim Erreichen der Sättigungsmenge Null ist, wird an dieser Stelle der Umsatz wiederum Null.

Die Umsatzfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel 2. Grades. Der Umsatz steigt zunächst mit steigender Absatzmenge und sinkenden Preisen an. Er erreicht sein Maximum genau in der Mitte zwischen den Nullstellen bei der Menge von 10 Einheiten, da die Parabel symmetrisch zur Senkrechten durch x = 10 verläuft. Mit weiter zunehmendem Absatz aber sinkendem Preis geht der Umsatz dann wieder zurück.

Die in der Praxis häufig anzutreffende S-förmige Kostenfunktion entspricht mathematisch einer Variante von Parabeln 3. Grades.

Beispiel 237:

Graphische Darstellung der Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1000$$

Wertetabelle:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
K	1000	1408	1664	1816	1912	2000	2128	2344	2696	3232	4000

Wie ändern sich die Kosten, wenn die Produktion um eine Einheit ausgeweitet wird, ausgehend von 2, 9, 19 Einheiten?

Produktionssteigerung		Zusatzkosten	K(x)
Von	auf		
2	3	144	1552
9	10	46	1954
19	20	416	3584

Bei niedrigen Produktionsmengen fallen die Zusatzkosten (Grenzkosten) bei zunehmender Produktion, die Kostenfunktion verläuft degressiv steigend.

Für höheres x ist die Kostenfunktion progressiv steigend, d. h. die Zusatzkosten werden immer größer.

Bedeutung der Differentialrechnung für die Wirtschaftswissenschaften

Bei der Analyse von ökonomischen Funktionen interessiert man sich für charakteristische Eigenschaften der Funktion, wie Steigung, Extrema, Wendepunkte, die mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt werden können.

Am Beispiel einer Kostenfunktion soll die Anwendung der Differentialrechnung in den Wirtschaftswissenschaften zunächst allgemein verdeutlicht werden.

Die Kostenfunktion K = K(x) stellt den Zusammenhang zwischen der Produktionsmenge x und den Gesamtkosten eines Einproduktunternehmens dar.

Die Frage nach der Kostenerhöhung bei einer Produktionsmengenausweitung entspricht der Frage nach der Steigung der Funktion, die durch die 1. Ableitung bestimmt wird.

Bei einer Änderung der Produktionsmenge von x_1 auf x_2 ändern sich die Gesamtkosten um $K(x_2) - K(x_1)$.

Wenn nun die Änderung der Kosten in Bezug auf die Produktionsmegenänderung mit $x_2 \to x_1$ ermittelt

werden soll, entspricht dies der Frage nach dem Differentialquotienten

$$\frac{dK}{dx} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Der Differentialquotient gibt die Steigung der Kostenfunktion in einem bestimmten Punkt an und entspricht der 1. Ableitung der Funktion.

Die 1. Ableitung einer Kostenfunktion wird als **Grenzkostenfunktion** bezeichnet.

Die Untersuchung von Funktionen bei unendlich kleinen (infinitesimal kleinen) Änderungen der unabhängigen Variablen wird **Marginalanalyse** genannt.

Allgemein ergibt diese Grenzbetrachtung, wie die abhängige Variable variiert, wenn sich die unabhängige Variable um einen gegen Null gehenden Betrag ändert.

Bei der Interpretation der 1. Ableitung einer ökonomischen Funktion wird häufig gesagt, dass die 1. Ableitung der Änderung der abhängigen Variablen bei Änderung der unabhängigen Variablen um **eine** Einheit entspricht.

Beispielsweise ist folgende Ausdrucksweise üblich:

„Die Grenzkostenfunktion zeigt die Änderung der Kosten, wenn die Produktionsmenge um eine Einheit geändert wird.“

Diese Interpretation ist mathematisch nicht korrekt, denn die Marginalanalyse untersucht das Funktionsverhalten bei unendlich kleiner Variation der unabhängigen Variablen.

Anstelle von $\Delta x \to 0$ wird aber $\Delta x = 1$ unterstellt.

Dieser Fehler mag bei der Massenproduktion vernachlässigbar sein. Wenn dagegen Ausbringungseinheiten einen großen Wert haben und die Produktion relativ klein ist (z.B. Flugzeughersteller), entsprechen die Grenzkosten nicht der Kostenänderung bei einer Produktionsveränderung um eine Einheit.

Um die Interpretation nicht zu komplizieren, wird vereinfacht gesagt: Die 1. Ableitung gibt **näherungsweise** an, in welchem Umfang sich die abhängige Variable ändert, wenn die unabhängige um eine Einheit variiert wird.

Bei der Grenzbetrachtung ökonomischer Funktionen muss beachtet werden, daß diese differenzierbar sein müssen. Diese Voraussetzung ist bei solchen Funktionen, die aufgrund von Sprüngen oder Stufen unstetig sind, nicht erfüllt.

Kostenfunktion

Die 1. Ableitung der Kostenfunktion K = K(x) ist die **Grenzkostenfunktion**

$$K' = \frac{dK}{dx}$$

Sie gibt näherungsweise an, wie sich die Gesamtkosten ändern, wenn die Produktionsmenge um eine Einheit verändert wird.

Beispiel 238:

In einem Unternehmen, das nur ein Produkt herstellt, wurde folgende Kostenfunktion ermittelt:

$$K(x) = \frac{x^2}{10} + 2x + 50$$

Wie lautet die Grenzkostenfunktion?

$$K'(x) = \frac{x}{5} + 2$$

Die Höhe der Grenzkosten hängt davon ab, wie hoch die Produktionsmenge ist, von der ausgegangen wird.

Wie hoch sind die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 5, 10 und 20 Stück?

x = 5 K′(5) = 3

x = 10 K′(10) = 4

x = 20 K′(20) = 6

Die Steigung der Kostenfunktion nimmt ständig zu.

Bei einer Produktionsmenge von x = 5 betragen die Grenzkosten drei Geldeinheiten. Wie ändern sich die Kosten, wenn die Produktionsmenge ausgehend von fünf um eine Einheit verringert wird oder wenn sie um eine Einheit erhöht wird?

K(5) – K(4) = 62,5 – 59,6 = 2,9

K(5) – K(6) = 62,5 – 65,6 = –3,1

Die Gesamtkosten sinken um 2,9 bzw. steigen um 3,1 Geldeinheiten.

Dies verdeutlicht, dass die Grenzkosten K′(5) = 3 nicht der Kostenänderung bei der Variation um einen Geldmenge entsprechen.

Umsatzfunktion

Die 1. Ableitung der Umsatzfunktion U = U(x) ist die **Grenzumsatzfunktion**

$$U' = \frac{dU}{dx}$$

Sie gibt näherungsweise an, um welchen Betrag sich der Umsatz ändert, wenn die abgesetzte Menge sich um eine Einheit ändert. Die beschrieben, lässt sich die Umsatzfunktion durch Multiplikation der Preisabsatzfunktion mit der Menge aufstellen.

Beispiel 239:

Ein Unternehmen hat für sein Produkt durch Erfahrung einen Maximalpreis von 1.000 DM und eine Sättigungsmenge von 5.000 Stück festgestellt.

Mit Hilfe der 2-Punkteform lässt sich daraus folgende Preisabsatzfunktion ermitteln, wenn man Linearität unterstellt.

$$p(x) = 1.000 - 0{,}2x$$

Die Umsatzfunktion lautet:

$$U(x) = 1.000x - 0{,}2\,x^2$$

Die Grenzumsatzfunktion lautet:

$$U'(x) = \frac{dU}{dx} = 1.000 - 0{,}4x$$

Sie hat genau die doppelte negative Steigung der Preisabsatzfunktion.

Das Maximum der Umsatzfunktion wird bei der Produktionsmenge von 2500 Stück erreicht.

$$U'(x) = 1.000 - 0{,}4x = 0$$

$$x = 2.500$$

$$U''(2.500) = -0{,}4 < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

Dass die Grenzumsatzfunktion die doppelte negative Steigung der linearen Preisabsatzfunktion hat, gilt nicht nur für diese spezielle Beispiel, sondern allgemein:

$$p(x) = a - mx$$

$$U(x) = ax - mx^2$$

$$U'(x) = a - 2mx$$

Gewinnfunktion

Die 1. Ableitung der Gewinnfunktion G = G(x) ist die **Grenzgewinnfunktion**

$$G' = \frac{dG}{dx}$$

Sie gibt näherungsweise an, um welchen Betrag sich der Gewinn ändert, wenn sie die abgesetzte Menge um eine Einheit ändert.

Da der Gewinn eines Unternehmens die Differenz aus Umsatz und Kosten darstellt G(x) = U(x) – K(x), kann der Grenzgewinn auch als Differenz zwischen Grenzumsatz und Grenzkosten interpretiert werden.

$$G'(x) = U'(x) - K'(x)$$

Beispiel 240:

Die Kostenfunktion eines Unternehmens lautet:

$$K(x) = 440 + 3x$$

Die Preisabsatzfunktion hat die Funktionsgleichung:

$$p(x) = 100 - 0{,}2\ x$$

Die Gewinnfunktion berechnet sich als die Differenz zwischen Umsatz- und Kostenfunktion.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 100x - 0{,}2x^2$$

$$\begin{aligned} G(x) = U(x) - K(x) \quad &= -0{,}2x^2 + 100x - 440 - 3x \\ &= -0{,}2x^2 + 97x - 440 \end{aligned}$$

Die Gewinnfunktion lautet:

$$G'(x) = -0{,}4x + 97$$

Die Berechnung über die Differenz zwischen Grenzumsatz und Grenzkosten ergibt die gleiche Funktion:

$$\begin{aligned} G'(x) \quad &= U'(x) - K'(x) \\ &= 100 - 0{,}4x - 3 \\ &= -0{,}4x + 97 \end{aligned}$$

Gewinnmaximierung

Im Zielsystem eines Unternehmens nimmt die Gewinnmaximierung eine wichtige Position ein.

Bei Kenntnis der Gewinnfunktion lässt sich das Maximum mathematisch dadurch ermitteln, dass die 1. Ableitung der Gewinnfunktion, die Grenzgewinnfunktion, gleich Null gesetzt wird. Denn die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes lautet, dass die 1. Ableitung der entsprechenden Funktion an dieser Stelle Null werden muss.

$$G'(x) = 0$$

oder

$$G'(x) = U'(x) - K'(x) = 0$$

$$U'(x) = K'(x)$$

An der Stelle des Gewinnmaximums sind Grenzumsatz- und Grenzkostenfunktion gleich, sie schneiden sich.

Wenn die Produktionsmenge gesteigert wird, ist dies solange mit einer Gewinnsteigung verbunden, bis die letzte produzierte Einheit einen genauso hohen Umsatzzuwachs (U′) erbringt, wie an zusätzlichen Kosten (K′) für ihre Herstellung anfallen.

Ob an der berechneten Stelle wirklich ein Maximum existiert, wird mit Hilfe der hinreichenden Bedingung überprüft. Wenn die 2. Ableitung der Gewinnfunktion für den ermittelten Wert negativ ist, liegt ein Maximum vor.

An der so berechneten Stelle eines Gewinnmaximums muss jedoch nicht notwendigerweise ein **positiver** Gewinn erzielt werden. Der maximal erreichbare Gewinn kann auch ein Verlust sein; das Gewinnmaximum wäre dann ein Verlustminimum.

Es ist also sinnvoll, zusätzlich zu überprüfen, welchen Wert der Gewinn an der Stelle des Gewinnmaximums annimmt.

Beispiel 241:

Ein Unternehmen stellt einen Dachgepäckträger für Pkws zum Transport von Sportmotorrädern her und ist Monopolist auf diesem Markt.

Im letzten Jahr wurden 50 Dachgepäckträger zu einem Preis von 1200 Euro verkauft. Bei einer Preiserhöhung um 50 Euro wird nach einer Marktforschungsuntersuchung ein Rückgang des Absatzes auf 45 Stück erwartet.

Die Preisabsatzfunktion wird als linear angenommen.

Die Gesamtkosten der Produktion betragen:

$$K(x) = \frac{1}{9}x^3 - 8x^2 + 600x + 4000$$

Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Preismengenkombination das Gewinnmaximum erreicht wird.

Lösen Sie das Problem graphisch.

Preisabsatzfunktion: Ein linearer Verlauf wird unterstellt. Zwei Punkte sind bekannt, so dass die 2-Punkteform angewandt werden kann.

$p_1 = 1.200 \quad x_1 = 50$

$p_2 = 1.250 \quad x_2 = 45$

$$\frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} = \frac{p_1 - p}{x_1 - x}$$

$$\frac{1.250 - 1.200}{45 - 50} = \frac{1.200 - p}{50 - x}$$

$$\frac{-50}{-5} = \frac{1.200 - p}{50 - x}$$

$$-500 + 10x = 1.200 - p$$

$$p = 1.700 - 10x$$

Umsatzfunktion

$U(x) = p \cdot x = 1.700x - 10x^2$

Gewinnfunktion

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$G(x) = 1.700x - 10x^2 - \frac{1}{9}x^3 + 8x^2 - 600x - 4.000$$

$$G(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 1.100x - 4.000$$

Ermittlung des Gewinnmaximums

$$G'(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x + 1.100$$

$$G'(x) = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 - 4x + 1.100 = 0$$

$$x^2 + 12x - 3.300 = 0$$

$$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 + 3.300}$$

$$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{3.336}$$

$$x_{1,2} = -6 \pm 57,7581$$

$$x_1 = 51,7581$$

$x_2 = -63,7581$ $\rightarrow$ ökonomisch nicht relevant

$$G''(x) = -\frac{2}{3}x - 4$$

$G''(51,7581) = -38,5054 < 0$ $\rightarrow$ Maximum

Bei einer abgesetzten Menge von gerundet 52 Dachgepäckträgern erzielt der Unternehmer einen maximalen Gewinn.

Der Preis, den er verlangen muss, ergibt sich aus der Preisabsatzfunktion.

p(x) = 1.700 – 10x

p(52) = 1.180

Der Unternehmer muss einen Preis von 1.180 DM verlangen, um 52 Stück absetzen zu können.

Den maximalen Gewinn erhält man durch Einsetzen der berechneten Menge von 52 Stück in die Gewinnfunktion.

$$G(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 1.100x - 4.000$$

$$G(52) = 32.168{,}89$$

Wenn das Unternehmen einen Preis von 1.180 DM verlangt, wird es 52 Motorradträger jährlich absetzen und damit einen maximalen Gewinn von 32.168,89 DM erzielen.

Da die Stückzahl von 51,7581 auf 52 gerundet wurde, sollte zusätzlich untersucht werden, ob eine Abrundung auf 51 nicht zu einem höheren Gewinn führen würde.

G(51) = 32.159,00

Der Gewinn bei einem Absatz von 52 Stück ist größer.

Graphische Lösung

Die Nullstellen der Umsatzfunktion x_1 = 0 und x_2 = 170 begrenzen den relevanten Bereich.

Preisabsatz- und Grenzumsatzfunktion sind linear, für sie erübrigt sich die Aufstellung einer Wertetabelle.

Die Ermittlung des Gewinnmaximums für einen Angebotsmonopolisten, der den Preis für sein Produkt steuern kann und für die eine Preisabsatzfunktion relevant ist, soll allgemein an den obigen Abbildungen erläutert werden.

Die Preisabsatzfunktion hat einen linearen Verlauf. Daraus ergibt sich eine parabelförmige Umsatzfunktion und eine Grenzumsatzfunktion mit der doppelten negativen Steigung wie die Preisabsatzfunktion.

Der Schnittpunkt von U′ und K′ gibt die gewinnmaximale Menge x_c an.

Wenn man den zu x_c gehörenden Punkt auf der Preisabsatzfunktion einträgt, erhält man den **Cournotschen Punkt** C.

Der Cournotsche Punkt gibt die Koordinaten der gewinnmaximalen Preis-Mengen-Kombination an (p_c, x_c).

Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben für eine Variable:

Definition 157:

Übersetzen Sie den Aufgabentext in eine mathematische Fragestellung!

Finden Sie eine Formel für die zu optimierende Größe (die sog. Zielfunktion)!

Falls die Zielfunktion von mehreren Variablen abhängt, so suchen Sie Gleichungen (die sog. Nebenbedingungen), die die Anzahl der Variablen in der Zielfunktion reduzieren, bis möglichst nur noch eine übrig bleibt!

Fertigen Sie ggfs. eine Skizze mit den entsprechenden Größen an.

Legen Sie für diese Variable den Gültigkeitsbereich (den sog. zulässigen Bereich) fest!

Formulieren Sie die mathematische Fragestellung für die veränderte Zielfunktion unter Einbeziehung des Gültigkeitsbereichs!

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Zielfunktion im zulässigen Bereich!

Bestimmen Sie das absolute Extremum der Zielfunktion für die verbliebene Variable durch Vergleich der Zielfunktionswerte:

Die Kandidaten sind die relativen Extrema und die Randwerte des zulässigen Bereiches!

Berechnen Sie alle übrigen relevanten Größen!

Beispiel 242:

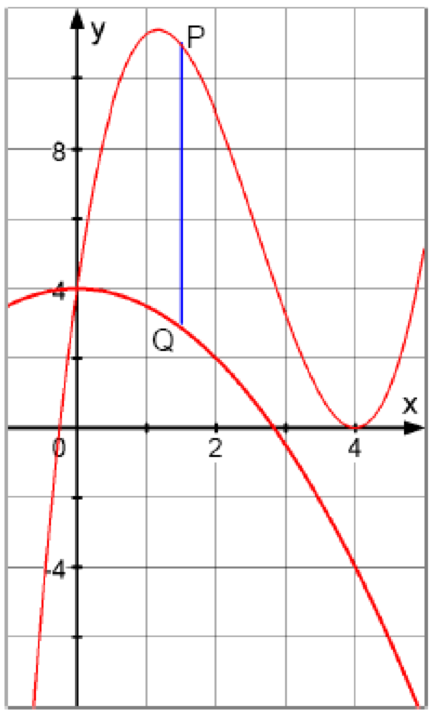
Gegeben sind zwei Funktionen f und g durch
$f(x) = x^3 - \frac{31}{4}x^2 + 14x + 4$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

P (u I f(u)) sei ein Punkt auf dem Schaubild von f für $0 \le u \le 5$

Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet das Schaubild von g im Punkt Q.

Dann hat die Strecke je nach Lage des Punktes P, also je nach u eine bestimmte Länge. Es liegt also eine Längenfunktion vor.

Unsere **Aufgabe** heißt:
Bestimme die Längenfunktion L(u) der Strecke PQ für $0 \le u \le 5$ und beschreibe ihre Eigenschaften.



Lösung:

Hier entnehmen wir der Anschauung, daß P für $0 \le u \le 5$ stets oberhalb von Q liegt, außer im Fall u = 0, wo P = Q ist.

Untersuchung der Längenfunktion

1. **Aufstellen der Längenfunktion**:
   Für die Länge einer vertikalen Strecke gilt: $\overline{PQ} = y_{max} - y_{min} = y_P - y_Q$
   Oder in der Funktionsschreibweise:
   $L(u) = f(u) - g(u)$, denn es ist ja $P(u \mid f(u))$ und $Q(u \mid g(u))$.

$$L(u) = \left(u^3 - \tfrac{31}{4}u^2 + 14u + 4\right) - \left(-\tfrac{1}{2}u^2 + 4\right)$$

$$L(u) = u^3 - \tfrac{31}{4}u^2 + 14u + 4 + \tfrac{1}{2}u^2 - 4$$

$$L(u) = u^3 - \tfrac{29}{4}u^2 + 14u$$

2. **Angabe ihres Definitionsbereiches**:

$$\mathbf{D}_u = [0;5]$$

3. **Ableitungen der Längenfunktion**:

$$L'(u) = 3u^2 - \tfrac{29}{2}u + 14 \quad \text{und} \quad L''(u) = 6u - \tfrac{29}{2}$$

4. **Bestimmung der Nullstellen der Ableitungsfunktion**:

$$\text{Extremwertbedingung:} \quad L'(u_E) = 0$$

$$3u^2 - \tfrac{29}{2}u + 14 = 0 \;\Big|\cdot 2$$

$$6u^2 - 29u + 28 = 0$$

Wir lösen die **quadratische Gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ stets mit der allgemeinen Lösungsformel ("Mitternachtsformel"):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die meist gelehrte p-q-Formel wird in meinen Manuskripten nicht verwendet, weil sie in vielen Aufgaben unhandlicher ist. Wenn der Koeffizient a den günstigen Wert $\frac{1}{2}$ hat, dann wird diese Formel besonders handlich, weil dann im Nenner 2a = 1 steht. Dann kann man bekanntlich den Nenner samt Bruchstrich weglassen.

Für a = 6, b = - 29 und c = 24 folgt: $u_E = \dfrac{29 \pm \sqrt{841 - 627}}{12} = \dfrac{29 \pm 13}{12} = \begin{Bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{4}{3} \end{Bmatrix}$

Bekanntlich liefern die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion meistens Extremwerte. Diese müssen jedoch kontrolliert werden:
Wenn $L''(x_E) > 0$ wird, dann liegt ein Minimum vor, für $L''(x_E) < 0$ ein Maximum.

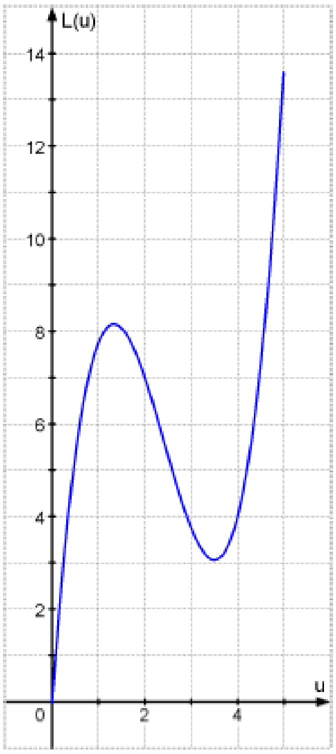
5. **Extremwertkontrolle:**

$L''\left(\frac{7}{2}\right) = 6 \cdot \frac{7}{2} - \frac{29}{2} = \frac{42}{2} - \frac{29}{2} > 0$

$L''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \frac{4}{3} - \frac{29}{2} = \frac{24}{3} - \frac{29}{2} = \frac{48-87}{6} < 0$

d.h. L hat für $x = \frac{7}{2}$ ein relatives Minimum

und für $x = \frac{4}{3}$ ein relative Maximum.



Um herauszufinden, ob die gefundenen Maxima und Minima relativ oder absolut sind, muß man das Verhalten der Funktion am Rand betrachten Hier werden wir feststellen, daß es am Rande noch größere bzw. kleinere Werte als die gefundenen Maxima / Minima gibt:

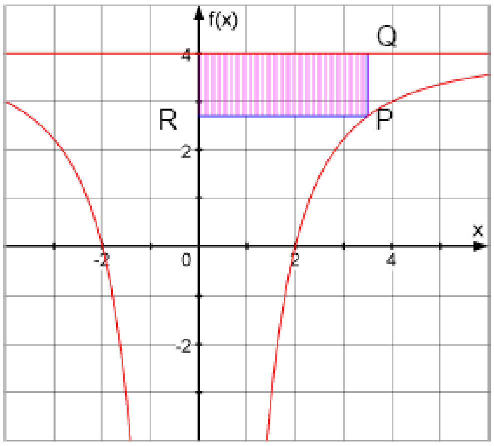
6. **Randwert-Untersuchung**:
Da die Ränder 0 und 5 im Definitionsbereich der Längenfunktion eingeschlossen sind, muß man nicht mit Grenzwerten arbeiten (siehe später), sondern kann die Randwerte direkt angeben:
$L(0) = 0$ und $L(5) = 13,75$.

7. **Extremwertliste:**
$L(0) = 0$, $L(\frac{4}{3}) \approx 7,15$, $L(\frac{7}{2}) \approx 3,06$, $L(5) = 13,75$
Durch Vergleich erkennt man, daß die absoluten Extremwerte an Rand liegen.

Anmerkungen:
Nun haben wir unsere Untersuchung beendet und folgendes herausgefunden:
Wandert die Strecke PQ von u=0 nach rechts bis u=5, dann nimmt ihre Länge von 0 aus zuerst zu, erreicht dann bei $u = \frac{4}{3}$ ein relatives Maximum (dort beträgt die maximale Länge etwa 7,15 LE.
Danach nimmt die Länge bis u = 3,5 wieder ab. Dort befindet sich das relative Minimum mit 3,06 LE.
Dann aber nimmt die Länge wieder zu und erreicht am Rande des Definitionsbereiches, also bei u = 5 ihren absolut größten Wert mit 13,75 LE.
(Die Abbildung zeigt die untersuchte Längenfunktion)

Beispiel 243:

Beispiel 2 Flächeninhaltsfunktion



Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = 4\frac{x^2-4}{x^2} = 4 - \frac{16}{x^2}$$

$P(u \mid f(u))$ sei ein Punkt des Schaubilds K von f mit u > 0.
Die beiden Asymptoten von K und die Parallelen dazu durch P begrenzen ein Rechteck.
Berechne und untersuche dessen Flächeninhalt A(u).

Zur Berechnung von Grundseite und Höhe des Rechtecks muß man einige der benötigten Punkte mit Koordinaten versehen:

$$P\left(u \mid 4 - \frac{16}{u^2}\right), \quad Q(u \mid 4) \quad \text{und} \quad R\left(0 \mid 4 - \frac{16}{u^2}\right)$$

P und Q liegen beide auf der gleichen Höhe f(u), während P und Q übereinander liegen und daher die gleiche x-Koordinate haben.

1. Schritt: Aufstellen der Flächeninhaltsfunktion:

Grundseite: $g = \overline{RP} = u$

Höhe: $h = \overline{PQ} = y_Q - y_P = 4 - \left(4 - \frac{16}{u^2}\right) = \frac{16}{u^2}$

Inhalt: $A(u) = g \cdot h = u \cdot \frac{16}{u^2} = \frac{16}{u}$

Ergebnis: $\boxed{A(u) = \frac{16}{u}}$

2. Schritt: Festlegung des Definitionsbereiches:

Aus der Aufgabenstellung geht klar u > 0 hervor. Also gilt:

$$\mathbf{D}_u =]\,0;\infty\,[$$

3. Schritt: Ableitung der Inhaltsfunktion:

$$A'(u) = -\frac{16}{u^2}$$

In Beispiel 1 besaß die Ableitungsfunktion Nullstellen, das heißt: Es gab Extremwerte. Daher wurde auch die Kontrollrechnung mit der 2. Ableitungsfunktion notwendig! Jetzt liegt eine Ableitungsfunktion vor, die keine Nullstellen besitzt. Daher gibt es keine Extremwerte. Die Funktion wächst oder fällt daher streng monoton . Dies ist jetzt das Ziel der weiteren Untersuchung!

4. **Schritt: Auswertung:**

Die Ableitungsfunktion A' besitzt keine Nullstellen, also besitzt die Flächeninhaltsfunktion keine Extremwerte.

Da für alle $u \in \mathbf{D}$ gilt $A'(u) < 0$, fällt die Funktion A streng monoton.

5. Schritt: Bestimmung der Randwerte

Die Funktion $A(u) = \frac{16}{u}$ hat bei u = 0 eine Polstelle, d.h.

Für $u \to 0$ folgt $A(u) \to \infty$.

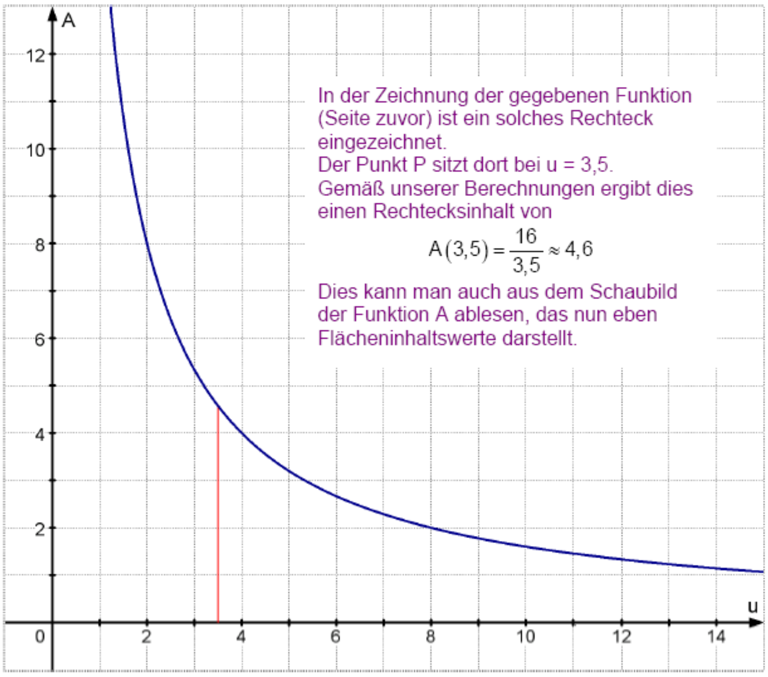
Für $u \to \infty$ folgt $A(u) \to 0$, denn $\lim\limits_{u\to\infty} A(u) = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{16}{u} = 0$

Man beachte, daß die Randwertuntersuchung hier ganz anders verläuft als in Beispiel 1, wo es zwei echte "Ränder" 0 und 5 gab, die man einfach einsetzen konnte.

6. Schritt. Ergebnis:

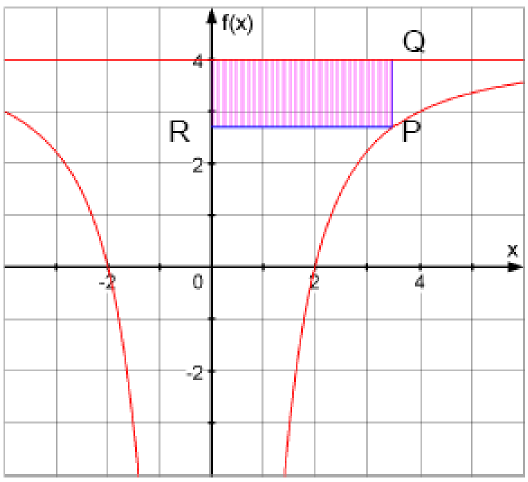
Die Flächeninhaltsfunktion fällt streng monoton von Unendlich nach Null.

Hier ihr Schaubild:



Beispiel 244:

Beispiel 3 Volumenfunktion



Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x)=4\frac{x^2-4}{x^2}=4-\frac{16}{x^2}$$

$P(u\,|\,f(u))$ sei ein Punkt des Schaubilds K von f mit u > 0.
Die beiden Asymptoten von K und die Parallelen dazu durch P begrenzen ein Rechteck. Durch Drehung dieses Rechtecks um die y-Achse entsteht ein Zylinder. Berechne und untersuche dessen Volumen V(u).

Zur Berechnung von Grundseite und Höhe des Rechtecks muß man einige der benötigten Punkte mit Koordinaten versehen:

$$P\left(u\,\middle|\,4-\frac{16}{u^2}\right),\quad Q(u\,|\,4)\quad \text{und}\quad R\left(0\,\middle|\,4-\frac{16}{u^2}\right)$$

P und Q liegen beide auf der gleichen Höhe f(u), während P und Q übereinander liegen und daher die gleiche x-Koordinate haben.

1. Schritt: Aufstellen der Volumenfunktion:

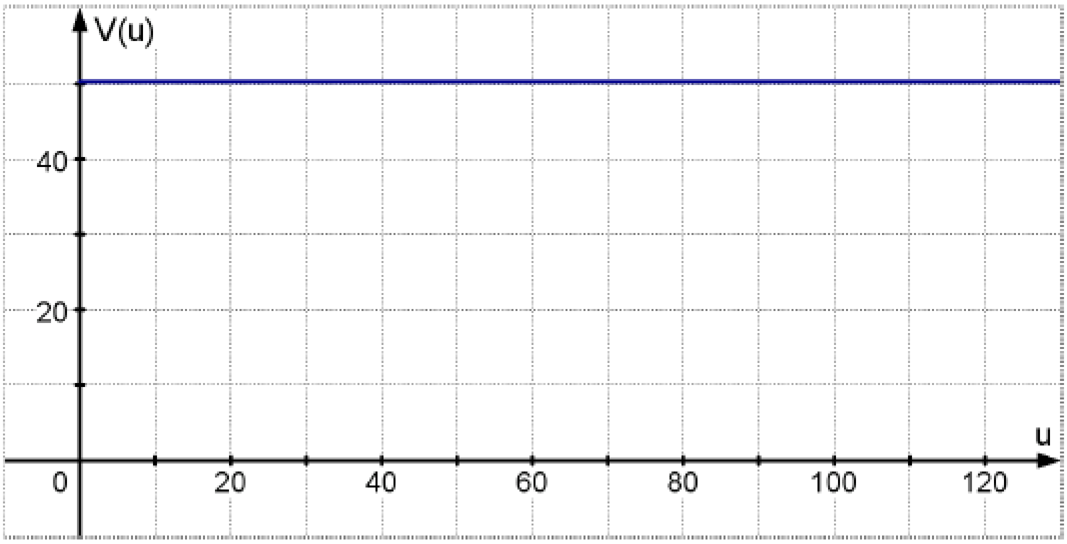
Radius: $r=\overline{RP}=u$

Höhe: $h=\overline{PQ}=y_Q-y_P=4-\left(4-\frac{16}{u^2}\right)=\frac{16}{u^2}$

Volumen: $V(u)=\pi r^2 h=\pi u^2\cdot\frac{16}{u^2}=16\pi$

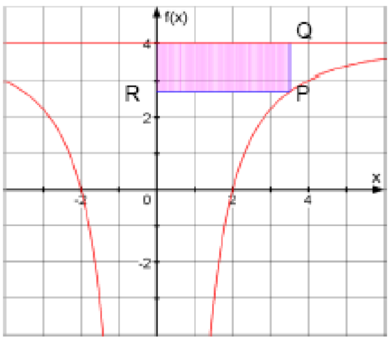
2. Schritt: **Auswertung:**

Jetzt liegt die nächste Besonderheit vor, nämlich eine konstante Funktion. Da das Volumen von u unabhängig ist, hat der Zylinder für jede Lage des Punktes P denselben Rauminhalt !



Beispiel 245:

Beispiel 4 Eine komplizierte Volumenfunktion



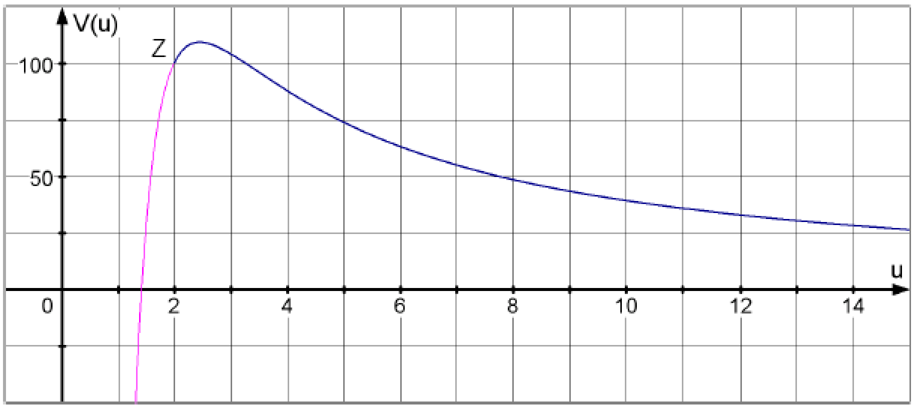
Dreht man das **Rechteck aus Beispiel 3** um die x-Achse, entsteht ein Ring. Sein Volumen entsteht, indem man aus einem großen Zylinder den Inneren Hohlraum (ebenfalls ein Zylinder) herausschneidet. Allerdings gilt dies nur, so lange $u > 2$ ist, denn für $u=2$ entsteht ein Vollzylinder und für $u < 2$ überlagern sich bei Drehung der untere und obere Teil des Rechtecks, was auszuschließen ist.

Der Radius des äußeren Zylinders ist y_Q, der des inneren ist y_P. Als Höhe dient jetzt u. Dies ergibt folgendes Volumen.

$$V(u) = \pi {y_Q}^2 u - \pi {y_P}^2 u = \pi u\left(16 - \left(4 - \frac{16}{u^2}\right)^2\right) = \pi u\left(16 - \left(16 - \frac{128}{u^2} + \frac{256}{u^4}\right)\right) = \pi u\left(\frac{128}{u^2} - \frac{256}{u^4}\right)$$

also: $V(u) = 128\pi\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^3}\right) = 128\pi\frac{u^2 - 2}{u^3}$ mit $\mathbf{D}_u = [\,2;\infty[$.

Sehen wir uns zunächst einmal diese Funktion im Schaubild an, damit wir sehen, was uns erwartet:



1. Beobachtung: Das Schaubild beginnt wegen $\mathbf{D}_u = [\,2;\infty[$ am Startpunkt Z.

Dieser hat die Koordinaten $Z\left(2 \mid V(2)\right) = \left(2 \mid 32\pi\right) \approx \left(2 \mid 100{,}5\right)$

Seine y-Koordinate stellt den linken Randwert dar, also das Volumen des Vollzylinders (P liegt jetzt in der Nullstelle N(2I0) der Funktion f.

Dann gilt: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi \approx 100{,}5$.

Diesen Wert erhält man auch aus der Volumenfunktion über V(2) .

2. Beobachtung: Das Schaubild hat einen Hochpunkt, also besitzt die Volumenfunktion ein absolutes Maximum.

Berechnung: (teilweise schon oben ausgeführt)

1. Schritt: Aufstellung der Volumenfunktion:

$$V(u) = 128\pi \frac{u^2 - 2}{u^3} = 128\pi\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^3}\right) = 128\pi\left(u^{-1} - 2u^{-3}\right)$$

2. Schritt: Festlegung des Definitionsbereichs:

$$\mathbf{D}_u = [\,2;\infty[$$

3. Schritt: Ableitungen der Volumenfunktion:

$$V'(u) = 128\pi\left(-\frac{1}{u^2} + \frac{6}{u^4}\right) = 128\pi \frac{-u^2 + 6}{u^4}$$

$$V''(u) = 128\pi\left(\frac{2}{u^3} - \frac{24}{u^5}\right) = 128\pi \frac{2u^2 - 24}{u^5}$$

4. Schritt: Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion:

Extremwertbedingung: $V'(u_E) = 0 \Leftrightarrow u^2 = 6$

ergibt $u_E = \pm\sqrt{6}$. Da $-\sqrt{6} \notin \mathbf{D}_u$ folgt: $u_E = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.

5. Schritt: Kontrollrechnung:

$$V'\left(\sqrt{6}\right) = 128\pi \frac{2 \cdot 6 - 24}{\sqrt{6}^5} < 0$$

Also hat die Funktion V bei $u_E = \sqrt{6} \approx 2{,}45$ ein relatives Maximum.

6. Schritt: Randwert-Bestimmung.

Linker Rand: $V(2) = 128\pi \frac{2}{8} = 32\pi \approx 100{,}5$

Rechter Rand: $u \to \infty \;\Rightarrow\; V(u) \to 0$, denn

$$\lim_{u\to\infty} V(u) = \lim_{u\to\infty}\left(128\pi\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^3}\right)\right) = 128\pi\left(\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u} - \lim_{u\to\infty}\frac{2}{u^3}\right) = 128\pi \cdot 0 = 0$$

7. Schritt: Extremwertliste:

$$V(2) = 128\pi\frac{2}{8} = 32\pi \approx 100{,}5 \quad \text{(Linker Rand)}$$

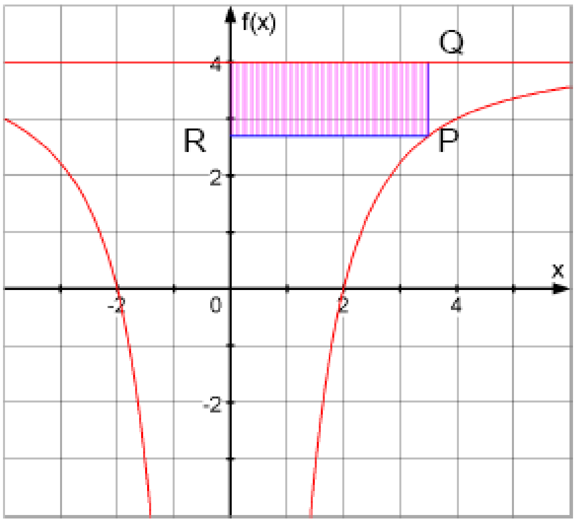
$$V\left(\sqrt{6}\right) = 128\pi\frac{6-2}{\sqrt{6}^3} = 128\pi\cdot\frac{4}{6\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 128\pi\cdot\frac{4}{36}\sqrt{6} = \frac{128\pi}{9}\sqrt{6} \approx 109{,}4$$

Durch Vergleich erkennt man, daß bei $\sqrt{6}$ das absolute Maximum liegt.

Ergebnis: Das Volumen des Drehkörpers erhält für $u = \sqrt{6}$ sein absolutes Maximum. Dieses beträgt $V_{max} = \frac{128\pi}{9}\sqrt{6} \approx 109{,}4$.

Beispiel 246:

Beispiel 5 Eine Umfangsfunktion



Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = 4\frac{x^2-4}{x^2} = 4 - \frac{16}{x^2}$$

$P\left(u \mid f(u)\right)$ sei ein Punkt des Schaubilds K von f mit u > 0.
Die beiden Asymptoten von K und die Parallelen dazu durch P begrenzen ein Rechteck.
Berechne und untersuche dessen Umfang U(u).

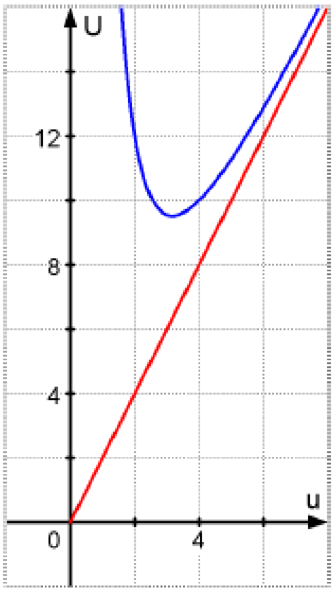
1. Schritt: Aufstellung der Umfangsfunktion:

$$U(u) = 2g + 2h = 2u + 2\frac{16}{u^2} = 2u + \frac{32}{u^2} = \frac{2u^3+32}{u^2}$$

2. Schritt: Festlegung des Definitionsbereichs:

$$\mathbf{D}_u =]0;\infty[$$

3. Schritt: **Ableitungen der Volumenfunktion:**



$$U'(u) = 2 - \frac{64}{u^3} = \frac{2u^3 - 64}{u^3}$$

$$U''(u) = \frac{192}{u^4}$$

4. Schritt: **Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion:**

$$2u^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow u^3 = 32$$

$$\text{also} \quad u_E = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \approx 3{,}17$$

5. Schritt: **Kontrollrechnung:**

$$U''\left(\sqrt[3]{32}\right) = \frac{192}{\sqrt[3]{32}^4} > 0$$

Also hat die Funktion U bei
$u_E = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \approx 3{,}17$
ein relatives Minimum.

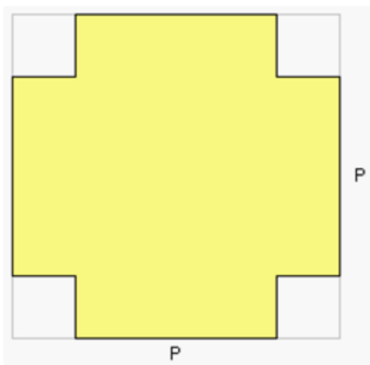
6. Schritt: **Randwert-Bestimmung.**

Linker Rand:	$u \to 0$:	$U(u) \to \infty$	(Polstelle von U)
Rechter Rand:	$u \to \infty$:	$U(u) \to \infty$	(Grad Zähler > Grad N)

Ergebnis:
Das Rechteck hat für $u_E = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \approx 3{,}17$ den absolut kleinsten Umfang.

Beispiel 247:

Aufgabenstellung



Aus einem quadratischen Stück Pappe soll eine nach oben offene Schachtel hergestellt werden.

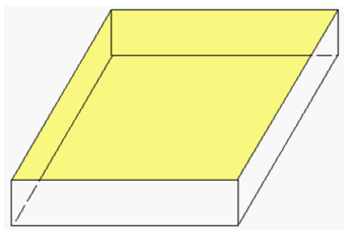
Dazu werden aus den 4 Ecken Quadrate ausgeschnitten. Die Pappe ist p cm lang und breit.

Wie müssen die Quadrate ausgeschnitten werden, damit das Fassungsvermögen der Schachtel möglich groß ist? Klebeflächen sollen nicht berücksichtigt werden.

Lösung:

Übersetzung:

Die offene Schachtel ist ein oben offener Quader. Gesucht ist das absolute Maximum des Quadervolumens!



Zielfunktion:

Für das Volumen V eines Quaders gilt die Formel:

V = Länge L * Breite B * Höhe H

Nebenbedingungen:

Die Zielfunktion hängt von drei Größen ab:

L, B, H

Die Anzahl dieser Größen muss so weit wie möglich reduziert werden:

Ist S die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate, dann ist

L = P-2S

B = P-2S

H = S

Jetzt hängt das Volumen V nur noch von den Größen P und S ab:

V = (P-2S)(P-2S)S

P ist konstant und vorgegeben, so dass das Volumen V jetzt nur noch von der variablen Größe S abhängt.

zulässiger Bereich:

Die Zielfunktion hängt jetzt nur noch von der Variablen S ab.

S ist die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate.

Nach der Konstruktion muss

$S \geq 0$ und $S \leq 0{,}5P$

sein.

Der zulässige Bereich für S

ist das Intervall [0 | 0,5P].

Die mathematische Fragestellung lautet jetzt:

Gesucht ist das absolute Maximum von

V(S) = (P-2S)(P-2S)S im Intervall [0 | 0,5P] !

relative Extrema:

$V(S) = (P-2S)(P-2S)S = 4S^3-4PS^2+P^2S$ hat im gesamten Definitionsbereich

ein relatives Maximum bei S1 = P/6 und

ein relatives Minimum bei S2 = 0,5P.

Beide relativen Extrema liegen innerhalb des zulässigen Bereichs [0 | 0,5P].

absolutes Extremum:

Für das absolute Maximum gibt es drei Kandidaten:

S1 = 0 (linker Randwert)

S2 = P/6 (relatives Maximum)

S3 = 0,5 P (relatives Minimum und rechter Randwert)

Der Vergleich der Funktionswerte (= Volumenwerte):

V(0) = 0

V(P/6) = 2P3/27

V(P/2) = 0

ergibt, dass das absolute Maximum der Funktion V(S) im Intervall [0 | 0,5P] bei S = P/6 vorliegt, nämlich V = 2P3/27

Lösung:

Die Schachtel mit dem maximalen Fassungsvermögen hat

die Länge L = 2P/3 cm,

die Breite B = 2P/3 cm,

die Höhe H = P/6 cm und

das Volumen 2P3/27 cm3.

Um diese Schachtel herzustellen, müssen 4 Quadrate mit der Seitenlänge

S = P/6 cm ausgeschnitten werden.

Manuskript und Lösungen Mathematik I

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart

Campus Horb

Dozent

Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Auf der folgenden Seite finden Sie Unterlagen und die Lösungen der Aufgabensammlung.

www.cs-geiger.de/wiw.htm