Numerischen Mathematik

→ Wird immer angewendet wenn für die Lösung eine Aufgaben-stellung kein exaktes analytische Lösungs-algorithmus existiert

→ Ergibt ein Vefahren bei bestimmten Anfangswerten eine Lösung, so nennt man das Vefahren konvergent, andernfalls divegent

→ Die Güte eines Vefahrens wird durch seine Konvergenz-geschwindigkeit charakteisiert.

→ De Konvegenzradius gibt die Genauigkeit des zu berechnende Ergebnis an. ($\varepsilon \leq 0{,}01$)

Iterationsverfahren

Definition:

Die Grundprinzipien diese Verfahren sind dabei die Iteration und die Intervall-schachtelung, d.h. durch ein wiederholtes Anwenden einer Berechnungsvorschrift wird der Bereich, indem die gesuchte Lösung liegt, immer weiter eingeschränkt. Es wird solange berechnet bis der Konvergenz-Radius erfüllt ist.

Bisektionsverfahren

Definition:

Dieses Verfahren ermöglicht es, Nullstellen numerisch zu berechnen, indem das Intervall, in dem sie auftreten können, immer weiter eingegrenzt wird, bis es kleiner als die geforderte Rechengenauigkeit (Konvergenzradius) ist.

Sei $f(x)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetig mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) > 0$, dann hat $f(x)$ in $]a;b[$ eine Nullstelle.

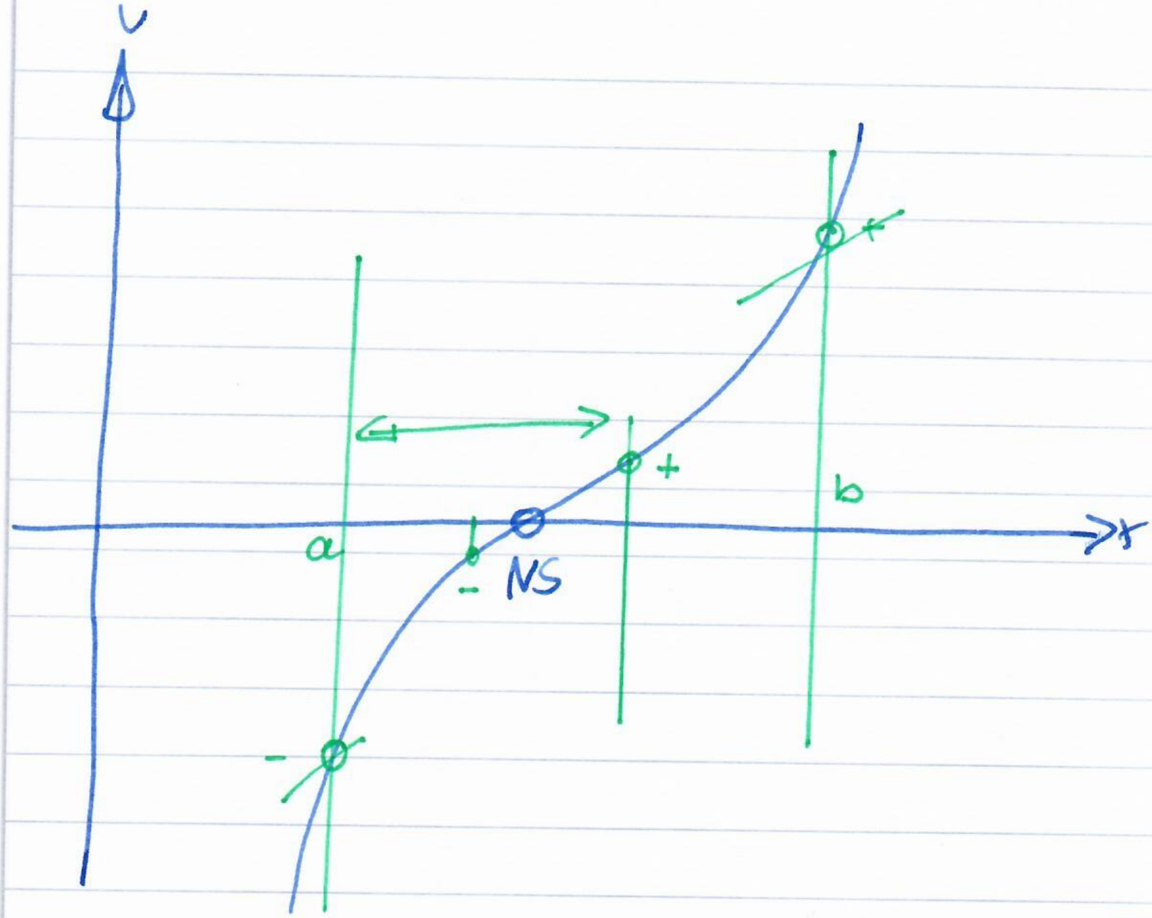
Verfahren:

→ Setze die beiden Grenzen a und b.
Bedingung: In diesem Intervall liegt eine Nullstelle

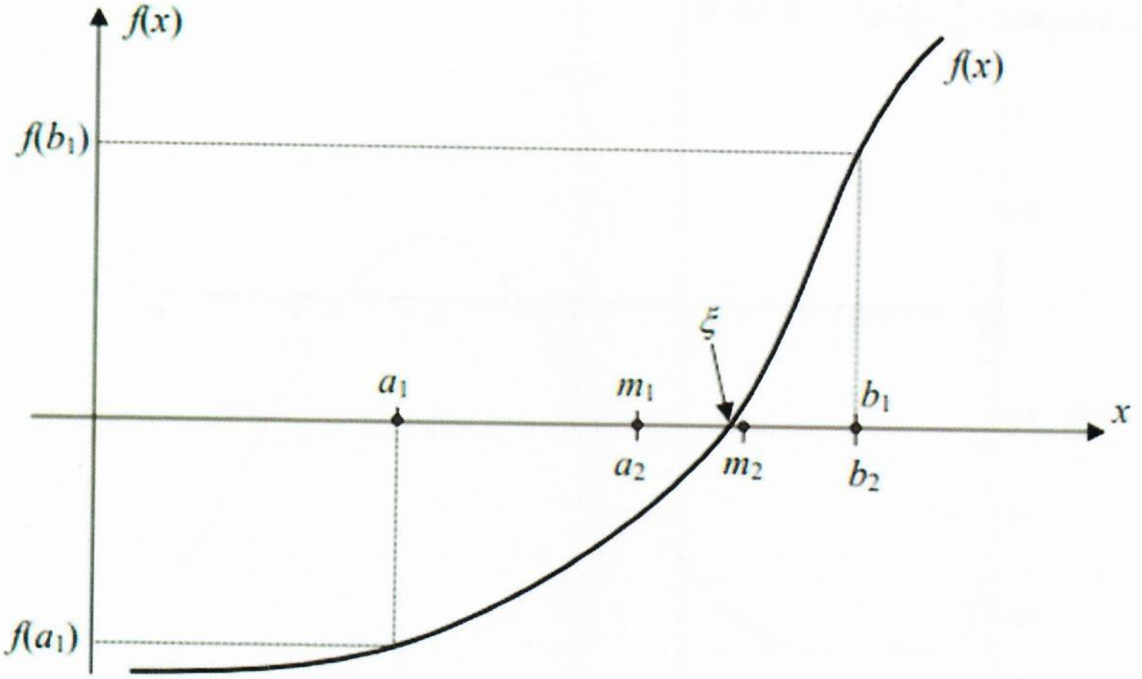
→ Testen ob eine gewünschte Genauigkeit vorhanden ist
$|b-a| < \varepsilon$. Wenn ja, ist das Lösungsintervall (Nullstelle) gefunden.

→ Sonst teile das Intervall $[a;b]$ in der Mitte und tausche das Ergebnis mit der Zahl aus dem Intervall, welches das gleiche Vorzeichen besitzt.

→ Wähle das Teilintervall, in dem wieder f das Vorzeichen wechselt.



v
x
a
b
NS
+
-



f(x)
f(x)
f(b1)
ξ
a1
m1
b1
x
a2
m2
b2
f(a1)

Beispiel:
gesucht ist die Nullstelle von
$f(x) = x^2 - 2$ im Intervall $[1;2]$
mit dem Konvergenzradius $\varepsilon < 0{,}04$.

$x = 1{,}414213562$

$f(1) = -1 < 0$ $\quad f(2) = 2 > 0$ $\quad a_1 = 1 \; b_1 = 2$

$f(1{,}5) = 0{,}25 > 0$

$f(1) = -1 < 0$ $\quad f(1{,}5) = 0{,}25 > 0$ $\quad a_2 = 1 \; b_2 = 1{,}5$

$f(1{,}25) = -0{,}4375 < 0$

$f(1{,}25) - 0{,}4375 < 0$ $\quad f(1{,}5) = 0{,}25 > 0$ $\quad a_3 = 1{,}25$
$b_3 = 1{,}5$

$f(1{,}375) = -0{,}109375$

$f(1{,}375) = -0{,}109375$ $\quad f(1{,}5) = 0{,}25$ $\quad a_4 = 1{,}375$
$b_4 = 1{,}5$

$f(1{,}4375) = 0{,}0664$

$f(1{,}375) = -0{,}109375$ $\quad f(1{,}4375) = 0{,}0664$
$a_5 = 1{,}375 \; b_5 = 1{,}4375$

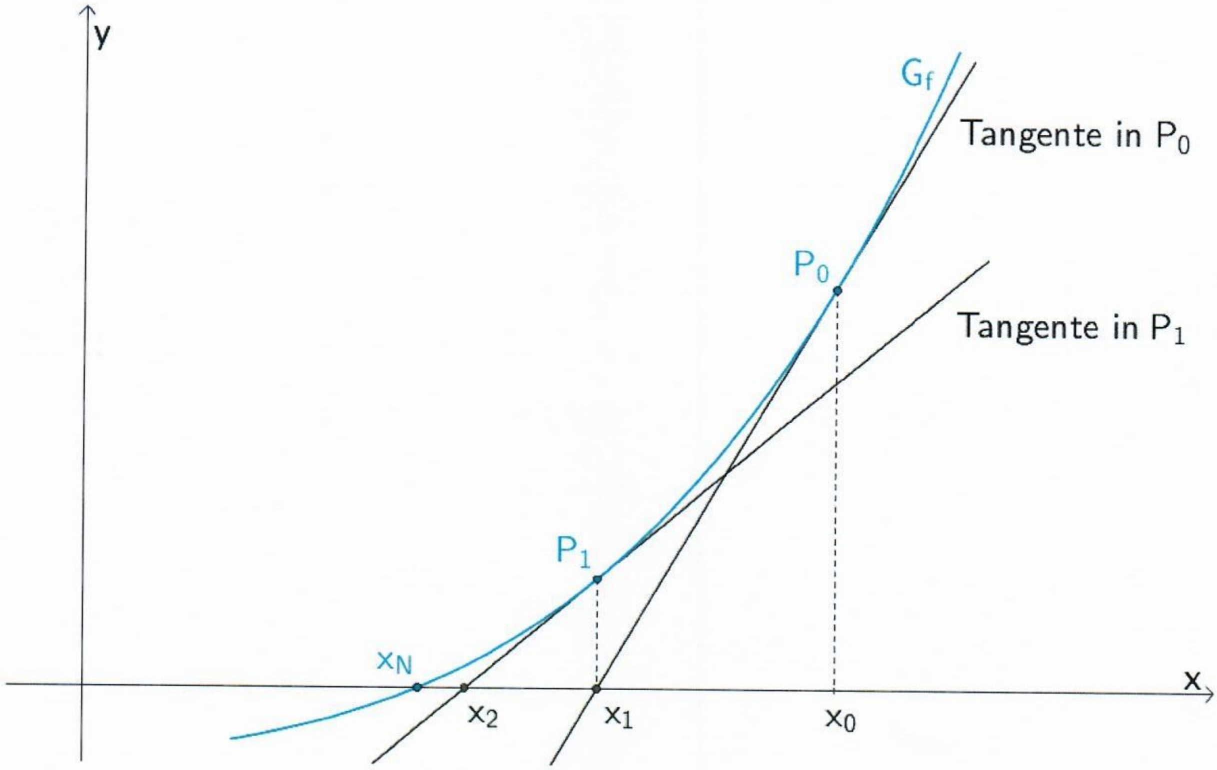
$|b_5 - a_5| = 0{,}0625 \quad (\varepsilon < 0{,}04)$

$f(1{,}40625) = -0{,}0225$

$f(1{,}40625) = -0{,}0225$ $\quad f(1{,}4375) = 0{,}0664$
$a_6 = -0{,}0225$
$b_6 = 0{,}0664$

$$|b_6 - a_6| = 0{,}03125 < \varepsilon$$

$$1{,}40625 < \sqrt{2} < 1{,}4375$$



Newton-Verfahren

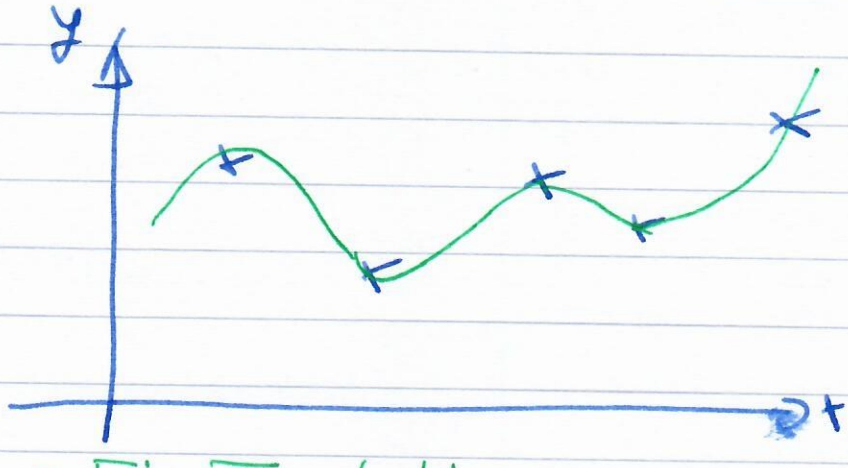
Weitere Aufgaben
zum üben

347, 348

Interpolationsverfahren

Definition:

In der numerischen Mathematik bezeichnet der Begriff Interpolation (lat. inter = dazwischen und polire = glätten, schleifen) eine Klasse von Problemen und Verfahren. Zu gegebenen Werten (Daten, Messwerte, ...) soll eine stetige Funktion (die sog. Interpolante oder Interpolierende) gefunden werden, die diese Daten abbildet. Man sagt auch, die Funktion interpoliert die Daten.



→ Eine Funktion wird durch diese Punkte durchgelegt.

Lagrange-Interpolation

Von einer Funktion $f(x)$ seien Funktionswerte $(x_i; f(x_i))$ mit $i = 0, 1, \dots, n$ bekannt.
Diese nennt man Stützstellen oder Knoten. Gesucht ist eine Funktion die alle Stützstellen enthält.
Dabei ergeben sich Polynome mit einem bestimmten Höchstgrad.

Die Lagrange-Polynome werden folgendermaßen definiert.

$$L_k(x_i) = \prod_{i=0;\, i \neq k}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

Beispiel:

$P_0(1|2)$; $P_1(2|3)$; $P_2(3|1)$; $P_3(4|3)$

-> Ergibt ein Polynom 3. Grades

-> Aufstellen der Lagrange-Polynome
L_0; L_1; L_2; L_3

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)}$$

$$= \frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(1-2)\cdot(1-3)\cdot(1-4)}$$

$$= -\frac{1}{6}(x^3-9x^2-26x-24)$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3}$$

$$= \frac{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(2-1)\cdot(2-3)\cdot(2-4)}$$

$$= \frac{1}{2}(x^3-8x^2+19x-12)$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}$$

$$= \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)}{(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-4)}$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3-7x^2+14x-8)$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}$$

$$= \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(4-1)\cdot(4-1)\cdot(4-1)}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(x^3-6x^2+11x+6)$$

Das gesamte Lagrange-Interpolationspolynom ergibt sich aus

$$L(x) = y_0\cdot L_0 + y_1\cdot L_1 + y_2\cdot L_2 + y_3\cdot L_3 + \ldots$$

$$L(x) = 2\cdot\left(-\frac{1}{6}(x^3-9x^2-26x-24)\right)$$

$$+3\cdot\left(\frac{1}{2}(x^3-8x^2+19x-12)\right)$$

$$+1\cdot\left(-\frac{1}{2}(x^3-7x^2+14x-8)\right)$$

$$+3\cdot\left(\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x+6)\right)$$

$$L(x) = \frac{1}{6}(7x^3-51x^2+110x-54)$$

Weiter Aufgaben

zum üben

Aufgabe: $P_0(2|3)$; $P_1(7|2)$; $P_3(10|4)$

Lösung: $\frac{13}{120}x^2 - \frac{47}{40}x - \frac{59}{12}$

Aus der Aufgabensammlung

351 – 353