Zufallsvariablen

Definition:

Bezeichnet man eine Funktion, die den Ergebnissen eines Zufallsexperiments Werte zuordnet.

Beispiel:

In einer Druckerei gibt es 10 Drucker.

3 Stück → Alpha
2 Stück → Beta
4 Stück → Gamma
1 Stück → Delta

Bei jedem Ausfall eines Druckers wird wegen der Gewährleistung ein Wartungstechniker gerufen.

Die Kosten für die Reperatur eines Druckers ~~liegen~~ hängen vom Hersteller ab.

Kosten für die Reperatur der Drucker

Hersteller	Alpha	Beta	Gamma	Delta
Kosten(€)	50	60	30	100

Wieviel muss im Durchschnitt pro Ausfall bezahlt werden?

→ Bugetplanung

Dazu brauchen wir eine Darstellung der Wahrscheinlichkeiten.

Wahrscheinlichkeitstabelle

	a_1	a_2	a_3	a_4
Ausprägung	30	50	60	100
WN	0,4	0,3	0,2	0,1

Durchschnittliche Betrag für einen Ausfall:

$E(x) = 0{,}4 \cdot 30 + 0{,}3 \cdot 50 + 0{,}2 \cdot 60 + 0{,}1 \cdot 100$

$E(x) = 49€$

Wenn jetzt aus Erfahrung noch bekannt ist, dass pro Monat z.B. 10 Drucker ausfallen, so sollte folgender Betrag bereitgestellt werden.

$10 \cdot 49 = \underline{\underline{490 €}}$

Berechnung der Varianz

$$V(x) = (30-49)^2 \cdot 0{,}4 + (50-49)^2 \cdot 0{,}3 + (60-49)^2 \cdot 0{,}2 + (100-49)^2 \cdot 0{,}1$$

$$V(x) = 429$$

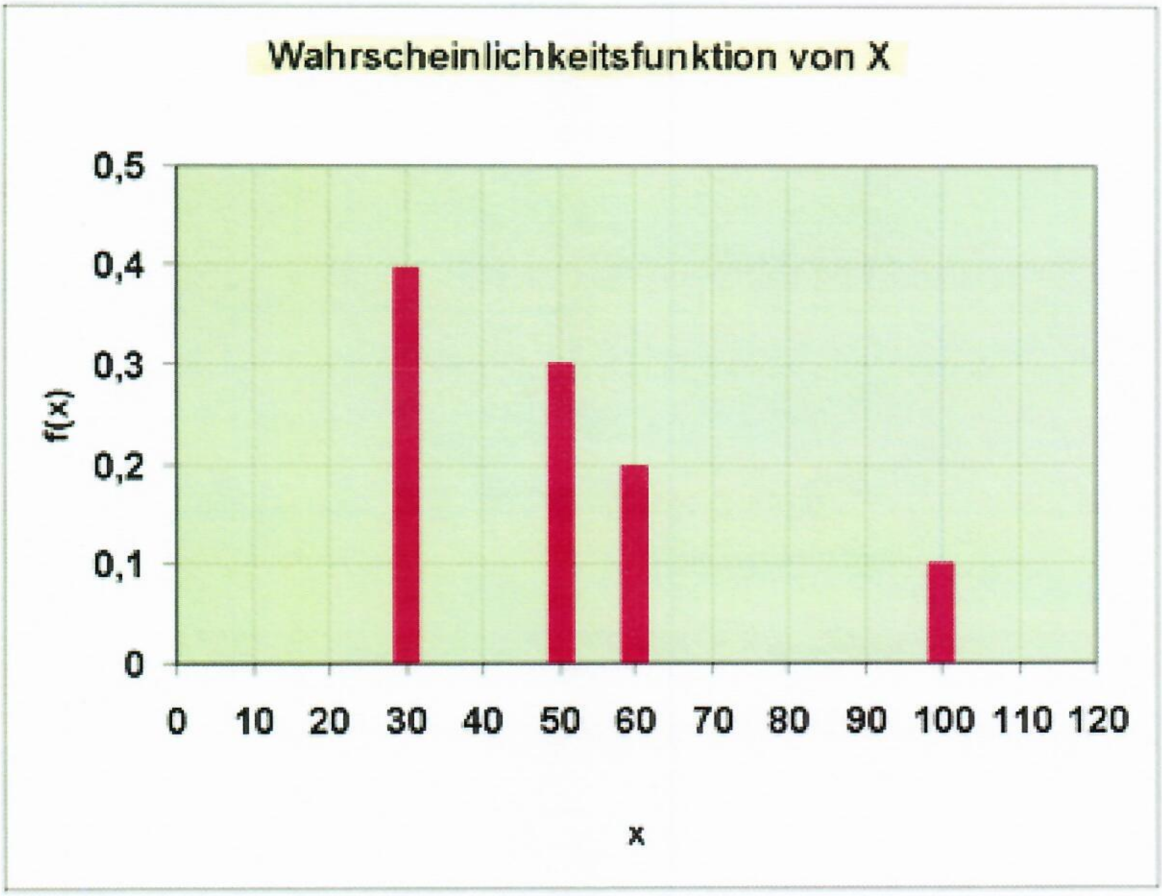
Berechnung der Standardabweichung

$$S(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{429} = 20{,}71 €$$

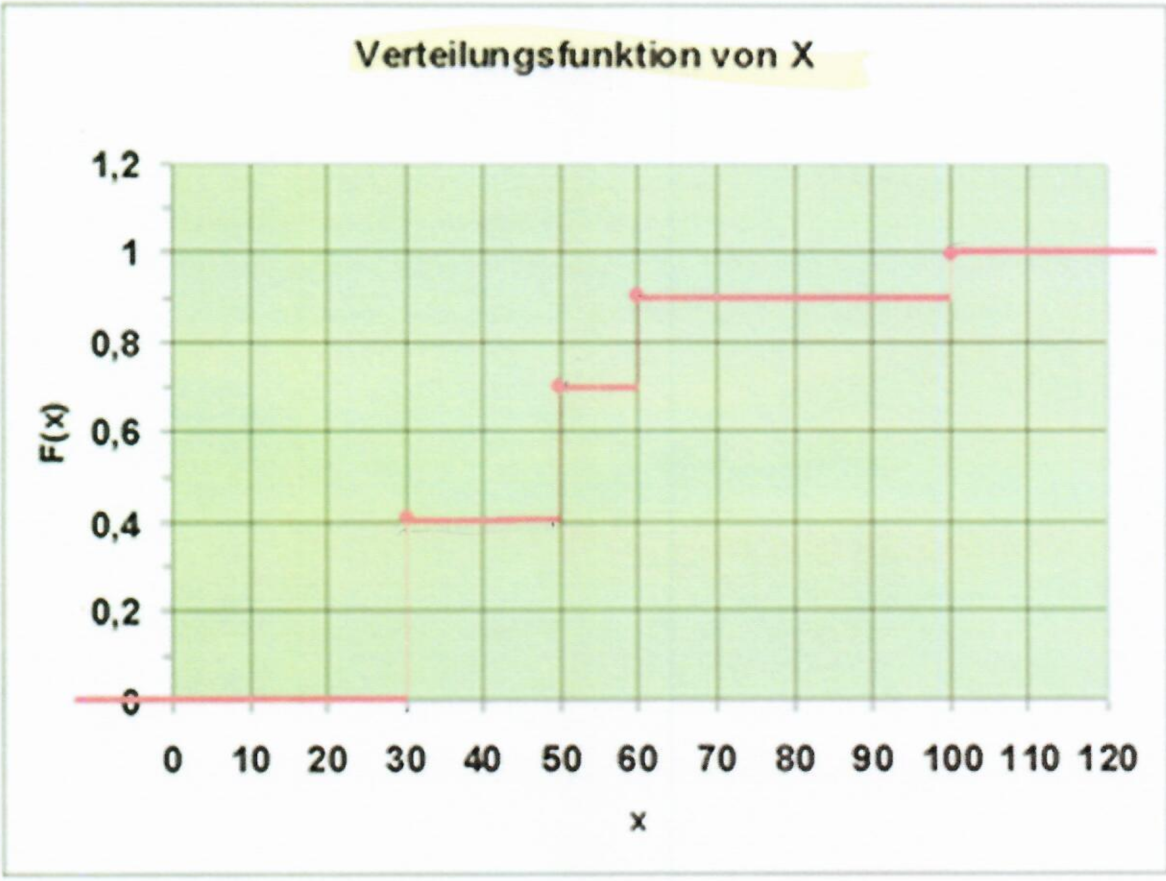
Durchschnittlichen Reparaturkosten

$$49 € \pm 20{,}71 €$$

→ Wir beschäftigen uns nur mit diskreten Zufallsvariablen.



Wahrscheinlichkeitsfunktion von X
f(x)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120
x



Verteilungsfunktion von X: Reparaturkosten

$$P(X \leq a) = F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 30 \\ 0,4 & \text{für } 30 \leq a < 50 \\ 0,7 & \text{für } 50 \leq a < 60 \\ 0,9 & \text{für } 60 \leq a < 100 \\ 1 & \text{für } a \geq 100 \end{cases}$$

Experiment: siehe Aufgabenstellung

Zufallsvariable:

X sei die Zahl der gezogenen Kugeln, bis man beide roten Kugeln gezogen hat.

Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ausgänge des Versuchs:

$p_r = \frac{2}{6}$; $p_b = \frac{4}{6}$

X	Anzahl Ziehunge	WN
r-r	2	$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$
r-b-r b-r-r	3	$2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{30}$
r-b-b-r b-r-b-r b-b-r-r	4	$3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{30}$
r-b-b-b-r b-r-b-b-r b-b-r-b-r b-b-b-r-r	5	$4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{30}$
r-b-b-b-b-r b-r-b-b-b-r b-b-r-b-b-r b-b-b-r-b-r b-b-b-b-r-r	6	$5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{10}{30}$

$\Rightarrow$ ev. Baumdiagramm

$$E(x) = 2 \cdot \frac{2}{30} + 3 \cdot \frac{4}{30} + 4 \cdot \frac{6}{30} + 5 \cdot \frac{8}{30} + 6 \cdot \frac{10}{30}$$

$$= \frac{1}{30} \cdot (2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 10)$$

$E(x) = 4{,}7$ Ziehungen

Man muss durchschnittlich 4,7 mal ziehen, bis man beide roten Kugeln gezogen hat.

Berechnung der Wahrscheinlichkeits-
verteilung

→ 2 Ausgänge
→ ohne Zurücklegen

⇒ Hypergeometrische Verteilung

R: rote Kugel

$$P(R=0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = 0{,}0707$$

$$P(R=1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{12}{4}} = 0{,}3535$$

$$P(R=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = 0{,}4243$$

$$P(R=3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{12}{4}} = 0{,}1414$$

$$P(R=4) = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{7}{0}}{\binom{12}{4}} = 0{,}0101$$

Darstellung für die Auszahlung und den Reingewinn

R	Auszahlung	Reingew.	WN
4	99 €	98 €	0,0101
3	5 €	4 €	0,1414
2	0 €	−1 €	0,4243
1	0 €	−1 €	0,3535
0	−10 €	−11 €	0,0707
			$\approx \Sigma 1$

Erwartungswert für die Auszahlung

$$E(X) = 99 \cdot 0{,}0101 + 5 \cdot 0{,}1414 + 0 \cdot 0{,}4243 + 0 \cdot 0{,}3535 + (-10) \cdot 0{,}0707$$

$$E(X) = 1\text{ €}$$

Erwartungswert für den Reingewinn

$$E(X) = 98 \cdot 0{,}0101 + 4 \cdot 0{,}1414 + (-1) \cdot 0{,}4243 + (-1) \cdot 0{,}3535 + (-11) \cdot 0{,}0707 = 0\text{ €}$$

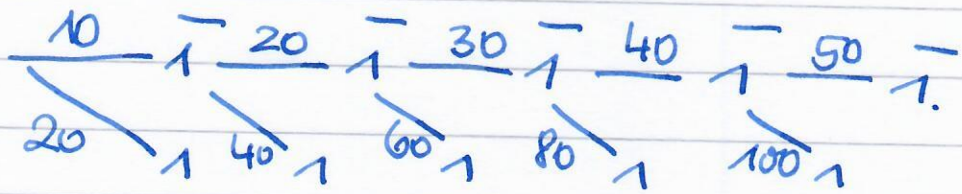
$$E_R(x) = E_A(x) - \text{Einsatz}$$

$$= 1€ - 1€ = 0€$$

$\Rightarrow$ Das Spiel ist fair.

$p_1 = \frac{2}{6}$; $p_2 = \frac{3}{6}$; $p_5 = \frac{1}{6}$

Spielablauf mit Hilfe eines Baumdiagramms festlegen.



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ergebnis	Gewinn	Einsatz	Reing.	WK
1	20	10	10	$\frac{2}{6}$
$\bar{1}-1$	40	30	10	$\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$
$\bar{1}-\bar{1}-1$	60	60	0	$\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{27}$
$\bar{1}-\bar{1}-\bar{1}-1$	80	100	−20	$\left(\frac{4}{6}\right)^3\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{81}$
$\bar{1}-\bar{1}-\bar{1}-\bar{1}-1$	100	150	−50	$\left(\frac{4}{6}\right)^4\cdot\frac{2}{6}=\frac{16}{243}$
$\bar{1}-\bar{1}-\bar{1}-\bar{1}-\bar{1}$		150	−150	$\left(\frac{4}{6}\right)^5=\frac{32}{243}$

$\sim \Sigma\, 1$

Erwartungswert für den Reingewinn

$$E(x) = 10 \cdot \frac{2}{6} + 10 \cdot \frac{2}{9} + 0 \cdot \frac{4}{27} + (-20) \cdot \frac{8}{81} + (-50) \cdot \frac{16}{243} + (-150) \cdot \frac{32}{243}$$

$$E(x) = -19{,}47 \text{ €}$$

$\Rightarrow$ Es lohnt sich nicht!

Weiter Aufgaben
zum Üben

283 - 297