Indexberechnung

→ Preisentwicklung
Beobachtung von Preisveränderungen in Bezug auf die Herstellungskosten eines Produktes oder einer Dienstleistung.

→ Das gleiche gibt es auch für Mengen und Umsatzentwicklungen.

Beispiel: Verbraucherpreisindex
- Befragung von Haushalten (~ 1200 Haushalte)
- Was verbraucht ihr in diesem Monat?
- Einteilung in verschiedene Kat. (Lebensmittel, alkoh. Getränke, ...)

- Preisermittlung wird durchgeführt

⇒ Was hat mich der Warenkorb gekostet. (in diesem Monat)

⇒ Man zieht Vergleiche und schaut, wie es sich zum Vormonat entwickelt hat.

Einfache Indexzahl

Beispiel: Eine Ware kostet am
1.7.2018 143,50 €
Die gleiche Ware kostet am
1.7.2019 148,30 €

Wie groß war die Preisveränderung in Prozent?

$$\text{Index} = \frac{148{,}30\,€}{143{,}50} = 1{,}0334 \ *$$

$\Rightarrow +3{,}34\,\%$

* Das Ergebnis wird mit 4 Nachkommastellen dargestellt. Dadurch hat man bei der prozentualen Darstellung immer noch die Möglichkeit zwei Nachkommastellen anzugeben oder auch weiter zu runden.

Bezeichnungen:

t: Bestimmter Zeitpunkt (z.B. 1.7.2018)
$t=0$ → Basisperiode (z.B. 1.7.2018)

t → Berichtsperiode (z.B. 1.7.2019)

i → Die einzelnen Güter des Warenkorbes werden durchnummeriert.

$p_t^{(i)}$: Preis des Gutes i zum Zeitpunkt t

$m_t^{(i)}$: Menge des Gutes i zum Zeitpunkt t

Verallgemeinerung des Beispiels

$$\boxed{P^{G}_{0,t} = \frac{p_t^{(i)}}{p_0^{(i)}}}$$

$$P^{G}_{1.7.2018,\,1.7.2019} = \frac{p^{(1)}_{1.7.2019}}{p^{(1)}_{1.7.2018}}$$

Beispiel: Modelleisenbahnindex

→ Was kostet mich die Anschaffung einer Grundpackung für eine Modelleisenbahn?

→ Befragung: Was muss in dieser Grundausrüstung enthalten sein?

→ Preisfindung

Nr	Artikel	Preise 1995	Preis 2000	Preisindex
1	Lok.	250	320	1
2	Wagen	40	48	2
3	Gleis	4	5	3
4	Weiche	60	69	4

Frage: Durchschnittliche Preissteigerung
für diese Grundausstattung

Ansatz: $\bar{x} = ?$

$\Rightarrow$ Einzelnen Preissteigerungen

Lok

① $\frac{320}{250} = 1{,}28$; ② $\frac{48}{40} = 1{,}20$

③ $\frac{5}{4} = 1{,}25$; ④ $\frac{69}{60} = 1{,}15$

Gleis

$\bar{x} = \frac{1}{4}(1{,}28 + 1{,}20 + 1{,}25 + 1{,}15)$

$\bar{x} = 1{,}22 \quad \rightarrow \quad (+22\%)$

Kritik:
Die Preissteigerungen eines billigen Artikels (Gleis) ist hier genauso gewichtet wie die eines teuren Artikels (Lok.)

Neuen Ansatz:

Wir nehmen direkt die Geldbeträge und nicht die prozentuale Steigerung.

$$\frac{320+48+5+69}{250+40+4+60} = 1{,}2486 \rightarrow (+24{,}86\%)$$

Kritik:
Es bleibt unberücksichtigt, dass man für eine Grundausstattung mehr Gleise als Lok. braucht. Man muss auch die Mengen berücksichtigen.

Veränderungen des Warenkorbes

→ Die entsprechenden Mengen müssen auch für die entsprechenden Zeitpunkte ermittelt werden.

Nr	Artikel	Menge 1995	Menge 2000
1	Lok	1	1
2	Wagen	4	4
3	Gleis	20	30
4	Weiche	2	4

Preisindizes

Definition:
Ein Preisindex ist ein statistische Konstrukt, der eine Aussage über die Höhe der Inflation in einem volkswirtschaftlichen Bereich machen soll. Dazu wird ermittelt, wie sich die Preise der Güter eines für diesen Wirtschaftsbereich repräsentativen Warenkorbes im Durchschnitt über die Zeit sich geändert hat.

Preisindex nach Laspeyres

Formel:
$$P_{0,t}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \cdot m_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} \cdot m_0^{(i)}}$$

n: Anzahl der Güter im Warenkorb

$p_0^{(i)}$: Preis des Gutes i zum Zeitpunkt $t=0$

$p_t^{(i)}$: Preis des Gutes i zum Zeitpunkt t

$m_0^{(i)}$: Menge des Gutes i zum Zeitpunkt $t=0$

Eigenschaften:

→ Durch die Verwendung von m_0 (die Zusammensetzung des Warenkorbes bleibt gleich) spart man Erhebungskosten.

→ Konstanz im Warenkorb (der Inhalt des Warenkorbes verändert sich nicht)

→ Der Warenkorb ist veraltet

→ Der Warenkorb muss auch immer wieder aktualisiert werden. Dies geschieht aber in großeren Abständen.

→ Durch die Ersparnis von Erhebungsaufwand wird dieser Index häufig verwendet.

Beispiel:

Preisindex nach Laspeyres für unseren Modelleisenbahnindex.

$$P^{L}_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{2000} \cdot m^{(i)}_{1995}}{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{1995} \cdot m^{(i)}_{1995}}$$

Hierbei handelt es sich um eine Summe, es darf nicht gekürzt werden.

$$= \frac{p^{(1)}_{2000} \cdot m^{(1)}_{1995} + p^{(2)}_{2000} \cdot m^{(2)}_{1995} + p^{(3)}_{2000} \cdot m^{(3)}_{1995} + p^{(4)}_{2000} \cdot m^{(4)}_{1995}}{p^{(1)}_{1995} \cdot m^{(1)}_{1995} + p^{(2)}_{1995} \cdot m^{(2)}_{1995} + p^{(3)}_{1995} \cdot m^{(3)}_{1995} + p^{(4)}_{1995} \cdot m^{(4)}_{1995}}$$

$$= \frac{320 \cdot 1 + 48 \cdot 4 + 5 \cdot 20 + 69 \cdot 2}{250 \cdot 1 + 40 \cdot 4 + 4 \cdot 20 + 60 \cdot 2} = \frac{750}{610}$$

$= 1{,}2295 \rightarrow (+22{,}95\%)$

Allgemeine Aussage:

Der L-Index untersucht, was der Kauf eines Warenkorbes in der Zusammensetzung der Basisperiode ($t=0$) in der Berichtsperiode (t) kostet im Vergleich zum Kauf des gleichen Warenkorbes in der Basisperiode ($t=0$).

Paasche-Preisindex

Die wesentliche andere Aussage lautet:

Die Zusammensetzung des Warenkorbes muss immer aktuell sein
$(m_0 \rightarrow m_t)$

Formel:

$$P_{0,t}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \cdot m_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} \cdot m_t^{(i)}}$$

Eigenschaften:
- hohes Erfassungsaufwand
- → keine Konstanz im Warenkorb
- → Immer ein aktuelle Warenkorb
- → De Warenkorb muss imme aktualisiert werden
- → In Unternehmen sehr weit verbreitet.

Beispiel:

$$P^{P}_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{2000} \cdot m^{(i)}_{2000}}{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{1995} \cdot m^{(i)}_{2000}}$$

$$= \frac{320 \cdot 1 + 48 \cdot 4 + 5 \cdot 30 + 69 \cdot 4}{250 \cdot 1 + 40 \cdot 4 + 4 \cdot 30 + 60 \cdot 4}$$

$$= \frac{938}{770} = 1{,}2182 \rightarrow (+21{,}82\%)$$

Die beiden Indizes unterscheiden sich nur durch die Zusammensetzung des Warenkorbes.

Substitutionseffekt (L-Index):

Die Reaktionen der Käufer auf Preisveränderungen, nämlich der Wechsel von einem teuren zu einem billigen Lebensmittel wird nicht erfasst.

Fisher-Preisindex

→ Es wird das geom. Mittel aus dem L-Index und dem P-Index gebildet.

Formel:

$$P_{0,t}^{F} = \sqrt{P_{0,t}^{L} \cdot P_{0,t}^{P}}$$

→ Kann nur berechnet werden, wenn das Basis- und das Berichtsjahr das gleiche darstellen.

Beispiel: $P_{1995,2000}^{F} = \sqrt{P_{1995,2000}^{L} \cdot P_{1995,2000}^{P}}$

$$= \sqrt{1{,}2295 \cdot 1{,}2182}$$

$$= 1{,}2238 \quad (+22{,}38\%)$$

Schreibweise: $\boxed{P_{1995,2000}^{F} = 1{,}2238}$

Mengenindizes

→ Umgekehrte Fragestellung

→ Statt: "Wie haben sich die Preise entwickelt gewichtet nach den Mengen":
(die Mengen wurden konstant gehalten)

→ jetzt: "Wie haben sich die Mengen entwickelt gewichtet nach den Preisen":
(die Preise werden konstant gehalten)

Mengenindex nach Laspeyres

Formel:

$$\boxed{M^{L}_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} \cdot m_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} \cdot m_0^{(i)}}}$$

Mengenindex nach Paasche

Formel:

$$M_{q_t}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \cdot m_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \cdot m_0^{(i)}}$$

→ Hierbei wird einfach der Preis konstant gehalten und die Mengenänderungen betrachtet. Je nachdem, ob wir die Preise der Basis- oder der Berichts-periode wählen, sprechen wir dann vom Mengenindex nach Laspeyres oder Paasche.

Beispiel: Modelleisenbahnindex

$$M^L_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{1995} \cdot m^{(i)}_{2000}}{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{1995} \cdot m^{(i)}_{1995}} = \frac{770}{610}$$

$$= 1{,}2623 \quad (+26{,}23\%)$$

$$M^P_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{2000} \cdot m^{(i)}_{2000}}{\sum_{i=1}^{4} p^{(i)}_{2000} \cdot m^{(i)}_{1995}} = \frac{938}{750}$$

$$= 1{,}2507 \quad (+25{,}07\%)$$

Umsatzindex (Wertindex)

Definition:

Ein Umsatzindex wird immer dann verwendet, wenn sowohl die Veränderung der Preise als auch die Veränderung der Mengen in der Berichts- zur Basisperiode betrachtet werden soll.

Formel:

$$\boxed{U_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} \cdot m_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} \cdot m_0^{(i)}}}$$

Beispiel: Modelleisenbahnindex

$$U_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{2000}^{(i)} \cdot m_{2000}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{4} p_{1995}^{(i)} \cdot m_{1995}^{(i)}}$$

$$= \frac{938}{610} = 1,5377$$

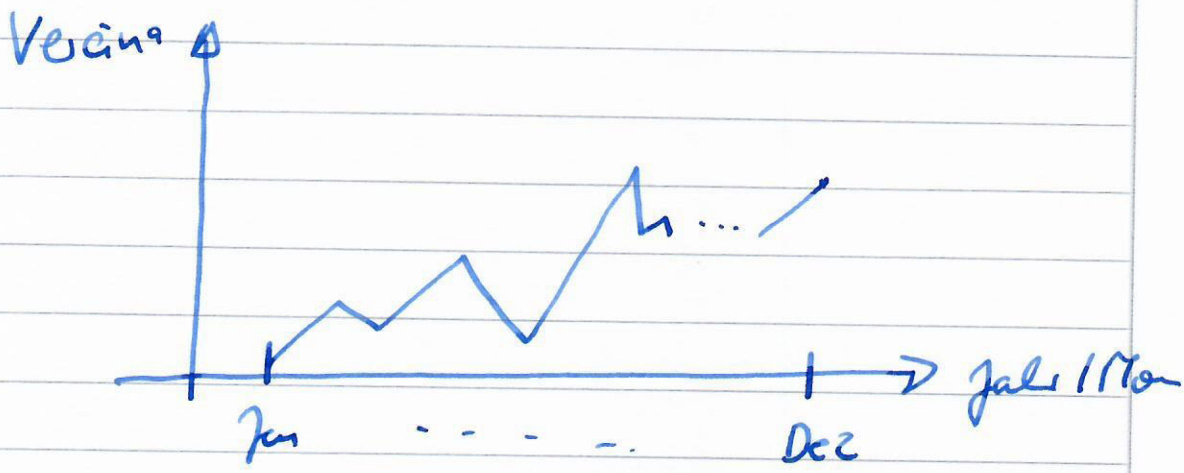
Aussage:
Für eine Modelleisenbahn nach dem jeweiligen Standard muss man im Jahr 2000 53,77% mehr bezahlen als im Jahr 1995.

Weitere

Übungsaufgaben

303 – 311

Indexreihen



→ Die Indexzahlen werden in bestimmten Zeitabständen neu berechnet.
Diese bilden dann eine Indexreihe.
z.B. $P_{0,1}$; $P_{1,2}$; $P_{2,3}$; ...

Steigerung gegenüber der Vorperiode

z.B. $P_{0,1}$; $P_{0,2}$; $P_{0,3}$; ...

Steigerung gegenüber der Basisperiode

→ Die Basisperiode wird mit "100" dargestellt.

Beispiel: Lebenshaltungskosten von Deutschland (D) und Österreich (A):

	D	A	D	A
Jahr	1980=100	1966=100	1975=100	1975=100
1975	82,6	163,5	100,0	100,0
1976	86,3	175,5	104,5	107,3
1977	89,3	185,1	108,1	113,2
1978	91,6	191,7	110,9	117,2
1979	95,0	198,8	115,0	121,6
1980	100,0	211,4	121,1	129,3
1981	106,3	225,8	128,7	138,1
1982	112,0	238,1	135,6	145,6
1983	115,6	246,0	140,0	150,5
1984	118,4	260,0	143,3	159,0
1985	120,9	268,3	146,4	164,1
1986	120,7	272,8	146,1	166,9

1976 (D): $\frac{86{,}3}{82{,}6} \cdot 100 = 104{,}5$

1977 (D) = $\frac{89{,}3}{82{,}6} \cdot 100 = 108{,}1$

1976 (A): $\frac{175{,}5}{163{,}5} \cdot 100 = 107{,}3$

Frage: In welchem Land war die Preissteigerung von 1981 auf 1982 höher?

Bildung der Differenz:

D: $135{,}6 - 128{,}7 = 6{,}9\%$
A: $145{,}6 - 138{,}1 = 7{,}5\%$

In Österreich ist die Preissteigerung um 0,6% höher als in Deutschland.

Problem:

Wegen unterschiedlicher Basis-
perioden (Jahre) sind die
beiden Indizes nicht direkt
miteinander vergleichbar.
Es muss für beide Reihen
ein gleiches Basisjahr (periode)
erstellt werden.
Die Werte müssen umgerechnet
werden.
Diesen Vorgang nennt man

"<u>Umbasierung</u>"

Weitere Aufgaben
zum üben

312/313

Verknüpfung von Indizes

→ Von Zeit zu Zeit wird es notwendig, Indizes mit einer neuen Reihe beginnen zu lassen, wenn

z.B. ein Warenkorb umgestellt werden muss.

→ Der alte und der neue Index müssen über mehrere Perioden parallel geführt werden.

→ Der alte und der neue Index müssen miteinander verknüpft werden. Dazu nimmt man eine gemeinsame Basisperiode („100").

→ Es muss eine Vorwärts- und eine Rückwärtsrechnung durchgeführt werden, damit die beiden Indizes verknüpft werden können.

Beispiel: Verknüpfung von Indizes

Jahr	Alter Index 1962=100	Neuer Index 1970=100
1962	100,0	80,8
1963	103,0	83,3
1964	105,4	85,2
1965	109,0	88,1
1966	112,8	91,2
1967	114,4	92,5
1968	116,1	93,9
1969	119,3	96,4
1970	123,7	100,0
1971	130,0	105,1
1972	136,9	110,7
1973	146,8	118,7
1974	156,2	126,3

Alter Index (1971):

$$\frac{123{,}7}{100} \cdot 105{,}1 = 130{,}0$$

Alter Index (1972):

$$\frac{123{,}7}{100} \cdot 110{,}7 = 136{,}9$$

Neuer Index (1969):

$$\frac{119{,}3}{123{,}7} \cdot 100 = 96{,}4$$

Vorwärtsrechnung Rückwärtsrechnung

Weitere

Übungsaufgaben

3.14

Regressions- und Korrelationsanalyse

-> Ein Betrachtung von Zusammenhängen.

$\boxed{\text{Ursache} \longrightarrow \text{Wirkung}}$

Beispiel:

Werbung -> Umsatz

Investitionen -> Gewinn

Zinsen -> Investitionen

Preis -> verkaufte Menge

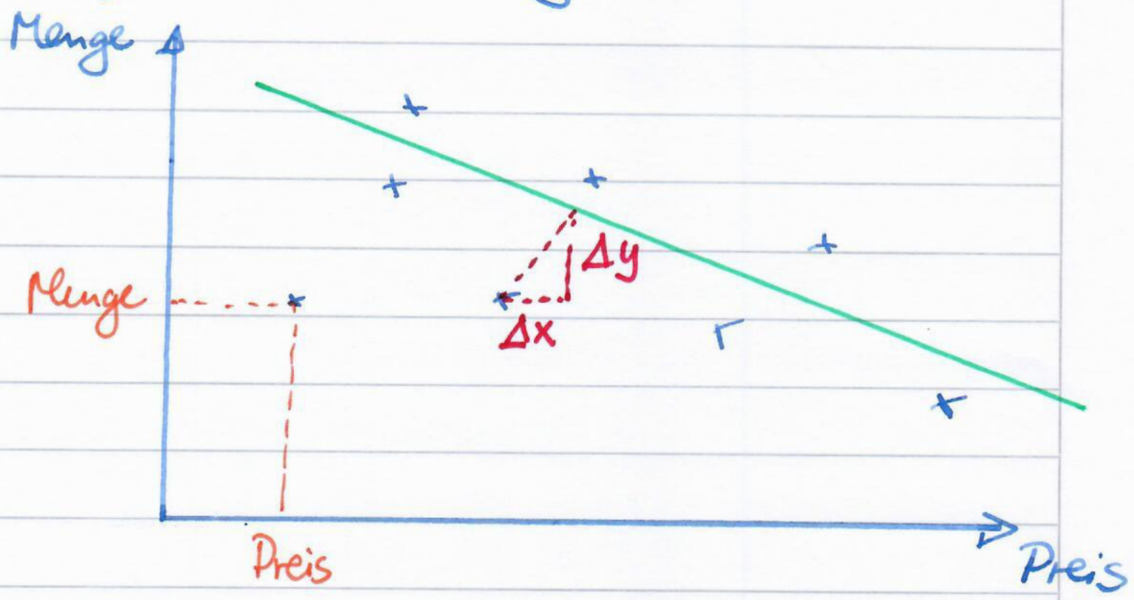
Regressionsanalyse:

Besteht ein Zusammenhang zwischen Ursache (x) und Wirkung (y).
Es kann ein positiver oder auch ein negativer Zusammenhang bestehen.

Korrelationsanalyse:

Wie stark oder wie wahrscheinlich ist dieser Zusammenhang?
Diese Berechnung liefert uns eine Zahl.

Regressionsanalyse



→ Lineare Regressionsgerade

→ Wir wollen diese lineare Regressionsgerade so durch unsere gegebenen Punkte durchlegen, dass der Abstand der Punkte zu der Geraden minimal wird.
In der Summe aller Abstände sollte auch dieser Abstand minimal werden.
Dieser Abstand ist von x und y abhängig.

Begriffe:

X: exogene Variable, Einflussfaktor, erklärende Variable, Regressor, unabhängige Variable

Y: endogene Variable, Zielvariable, abhängige Variable, Regressand.

Beispiel:

Regentage

ha - Ertrag von Weizen

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ Y \end{array} \qquad \cancel{\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ X \end{array}}$$

Geradengleichung

$$\boxed{y = mx + b}$$

m: Steigung

b: Schnittpunkt mit der y-Achse

Andere Darstellungsform

$$\boxed{\hat{y} = a + bx + \alpha}$$

b: Steigung der Geraden

a: Schnittpunkt mit der y-Achse

α: Fehler bei der Geraden

$\hat{y}$: Nährung

Methode der kleinsten Quadrate für eine lineare Regressionsrechnung

$$\boxed{\hat{y} = a + bx}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$

n: Anzahl der gegebenen Punkte
$\bar{x}$: arithm. Mittel

x_i, y_i: Punktepaare (Testmarkt)

$\bar{y}$: arithm. Mittel

$$\boxed{a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}}$$

Berechnung erfolgt mit:

→ Eintippen in den Taschenrechner und das Ergebnis notieren.

→ Das Ergebnis mit Hilfe einer Arbeitstabelle berechnen.

Beispiel:

x	Y	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
1,9	5,1	−6,1	37,21	−2,8	7,84	17,08
3,0	5,6	−5,0	25,00	−2,3	5,29	11,50
4,2	6,1	−3,8	14,44	−1,8	3,24	6,84
5,5	6,3	−2,5	6,25	−1,6	2,56	4,00
7,0	7,0	−1,0	1,00	−0,9	0,81	0,90
8,9	8,2	0,9	0,81	0,3	0,09	0,27
10,0	9,0	2,0	4,00	1,1	1,21	2,20
11,5	9,8	3,5	12,25	1,9	3,61	6,65
13,0	10,6	5,0	25,00	2,7	7,29	13,50
15,0	11,3	7,0	49,00	3,4	11,56	23,80
$\bar{x}=8$	$\bar{y}=7,9$		Σ 174,96		Σ 43,5	Σ 86,74

Aus der Arbeitstabelle werden insgesamt 5 Werte für die Berechnung der linearen Regressions- und Korrelationsrechnung benötigt.

Kurzschreibweisen:

$\sum (x_i - \bar{x})^2 \longrightarrow S_{xx}$ 174,96

$\sum (y_i - \bar{y})^2 \longrightarrow S_{yy}$ 43,5

$\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \rightarrow S_{xy}$ 86,74

Beispiel:

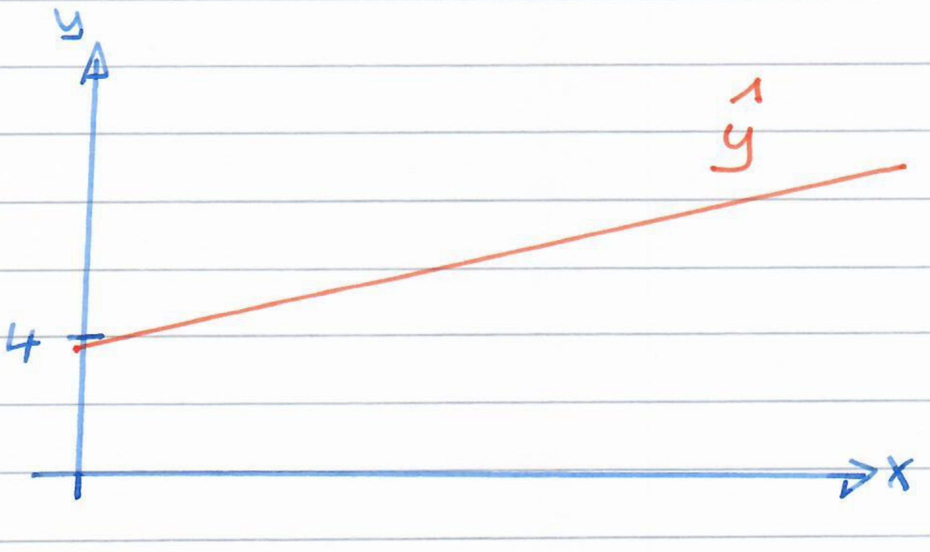
$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{86{,}74}{174{,}96} = \underline{0{,}4958}$$

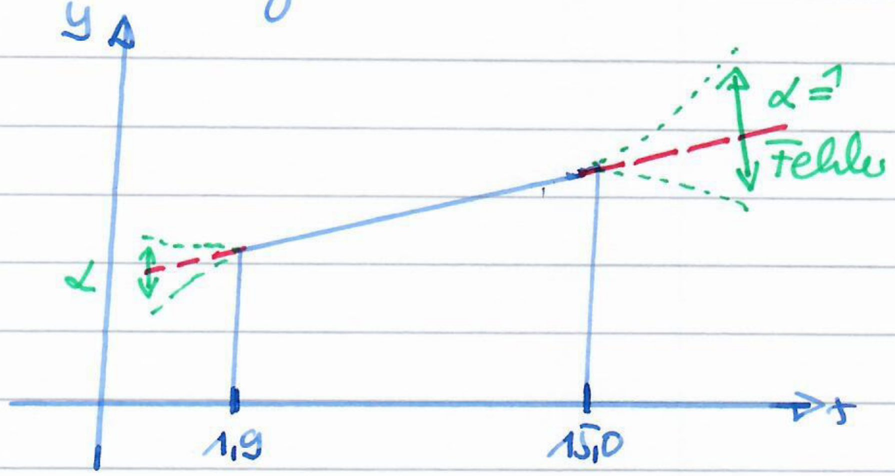
$$a = 7{,}9 - 0{,}4958 \cdot 8 = \underline{3{,}9336}$$

$\Rightarrow$ Die lineare Regressionsgerade lautet:

$$\underline{\hat{y} = 3{,}9336 + 0{,}4958\,x}$$



Trendanalyse



Man möchte herausfinden was passieren würde, wenn die Variablen (x,y) verändert werden und dafür keine Punkte mehr vorhanden sind.

Beispiel: Mit welchem y kann gerechnet werden, wenn der x-Wert auf 16 erhöht wird.

$\hat{y} = 3,9336 + 0,4958 \cdot 16$

$\hat{y} = 11,8664$

Beispiel: Wie muss x gewählt werden, damit man einen y-Wert von 12 erhält?

$$\hat{y} = 3{,}9336 + 0{,}4958 \cdot x \quad | -3{,}9336$$

$$\hat{y} - 3{,}9336 = 0{,}4958x \quad | : 0{,}4958$$

$$x = \frac{\hat{y} - 3{,}9336}{0{,}4958} = \frac{12 - 3{,}9336}{0{,}4958}$$

$$x = 16{,}2695$$

$\Rightarrow$ Bei einer Trendanalyse muss man immer beachten, dass ein nicht unerheblicher Fehler auftreten kann.

Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson

Definition:
Die Korrelationsrechnung dient dazu, die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Untersuchungsvariablen (x,y) in einer einzigen statistischen Maßzahl zum Ausdruck zu bringen. Das Ergebnis ist eine dimensionslose Zahl.

Formel:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}$$

Beispiel:

$$r = \frac{86,74}{\sqrt{174,96 \cdot 43,5}} = 0,9943$$

Interpretation von r:

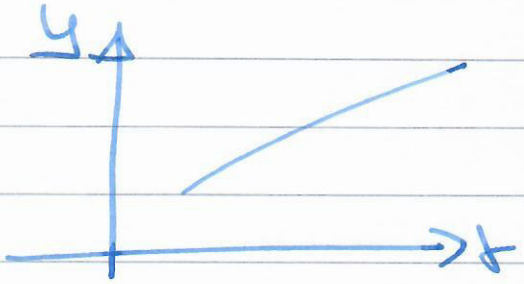
→ Der Korrelationskoeffizient r bewegt sich immer zwischen 1 und -1.

→ $r \to -1$:
maximalen reziproken Zusammenhang, d.h. mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nehmen die y-Werte ab, wenn die x-Werte zunehmen

→ $r \to 0$:
Es besteht kein Zusammenhang zwischen x und y

→ $r \to 1$:

maximaler gleichgerichteter Zusammenhang, d.h. mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nehmen die Y-Werte zu, wenn die X-Werte zunehmen.



→ In der Praxis taucht ein Wert für r größer als 0,5 oder kleiner als -0,5 nur sehr selten auf. Man betrachtet Werte für r die zwischen 0,3 und 0,5 oder zwischen -0,3 und -0,5 liegen als einen starken Zusammenhang.

→ Je mehr Wertepaare vorhanden sind, umso aussagekräftiger ist r.

Erstellen der Arbeits-
tabelle mit
Aufgabe 322
üben
Lösung im
nächsten Video

Aufgabe 289:

x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
20	0	5	25	-5	25	-25
16	3	1	1	-2	4	-2
15	7	0	0	2	4	0
16	4	1	1	-1	1	-1
13	6	-2	4	1	1	-2
10	10	-5	25	5	25	-25
			$S_{xx}=56$		$S_{yy}=60$	$S_{xy}=-55$

$\bar{x}=15$ $\bar{y}=5$

Regressionsgerade:

$$b=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{-55}{56}=-0{,}9821$$

$$a=5-(-0{,}9821)\cdot 15=19{,}7315$$

$$\hat{y}=19{,}7315-0{,}9821x$$

$$r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}=\frac{-55}{\sqrt{56\cdot 60}}=-0{,}9488$$

$\Rightarrow$ maximale reziproke Zusammenhang.

Weitere Aufgaben

zum Üben

323/324/325