Verteilungen

→ Wenn eine bestimmte Bedingung erfüllt ist, so kann eine Verteilung verwendet werden. Man muss das Ergebnis dann nicht über die Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnen.

Diskrete Verteilung

Binomialverteilung

→ Zwei mögliche Versuchsausgänge.
→ Ziehen mit Zurücklegen (die Wahrscheinlichkeit der zwei Ereignisse darf sich während des Ziehens nicht verändern).

Stetige Verteilung

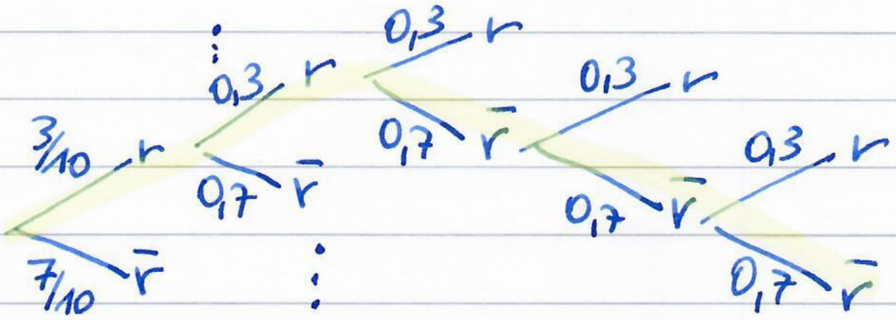
Gauß'sche Normalverteilung

Erwartungsverteilung für eine unendlich große Grundgesamtheit, die real aber immer durch eine Stichprobe charakterisiert wird.

Binomialverteilung

Beispiel:
In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, davon sind 3 rot.
Wir ziehen 5-mal mit zurücklegen und notieren das Ergebnis mit Beachtung der Reihenfolge.
Wir untersuchen folgende Ereignisse:

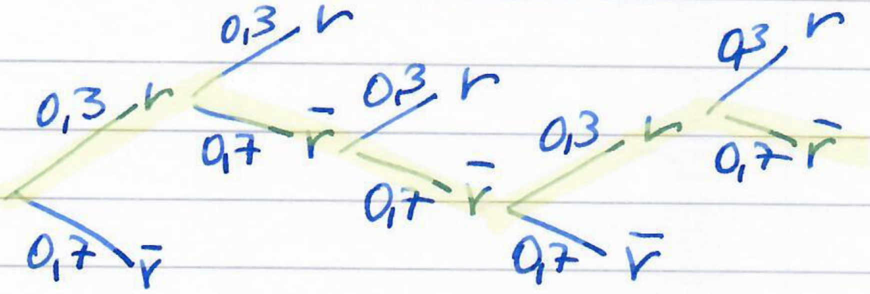
A: Genau die ersten beiden gezogenen Kugeln sind rot. Berechnen Sie hierfür die Wahrscheinlichkeit



$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3$

$P(A) = 0{,}03087$

B: Genau die erste und die vierte Kugel sind rot. Berechnen Sie hierfür die Wahrscheinlichkeit.



$P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3$

$= 0{,}03087$

c: Genau zwei der fünf gezogenen Kugeln sollen rot sein. Berechnen Sie hierfür die Wahrscheinlichkeit.

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{Wie viele Pfade gibt es?}} \cdot \underbrace{0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3}_{\text{Wahrscheinlichkeit für einen Pfad}}$$

Wie viele Pfade gibt es?

Wahrscheinlichkeit für einen Pfad..

Die Formel für eine Binomialverteilung sagt nichts anderes aus, als Anzahl der Pfade mal die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad

$$\boxed{P(A=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \underbrace{(1-p)}_{q}{}^{n-k}}$$

n: Anzahl der Ziehungen
k: Anzahl der "Treffer"
p: Wahrscheinlichkeit für einen "Treffer"
q: Wahrscheinlichkeit für eine "Niete"

Kurzschreibweise:

$$\boxed{b(k;n;p)}$$

Aufgabe 192:

Kriterien:

$\boxed{\begin{array}{l}\text{2 Ausgänge} \\ \text{mit Zurücklegen}\end{array}}$ ✓ ✓

$\Rightarrow$ Binomialverteilung
T: Treffer

a) $P(T>6) = P(T \geq 7)$

$= P(T=7) + P(T=8) + P(T=9) + P(T=10)$

$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}4^7 \cdot 0{,}6^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^2$

$+ \binom{10}{9} \cdot 0{,}4^9 \cdot 0{,}6^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}4^{10} \cdot 0{,}6^0$

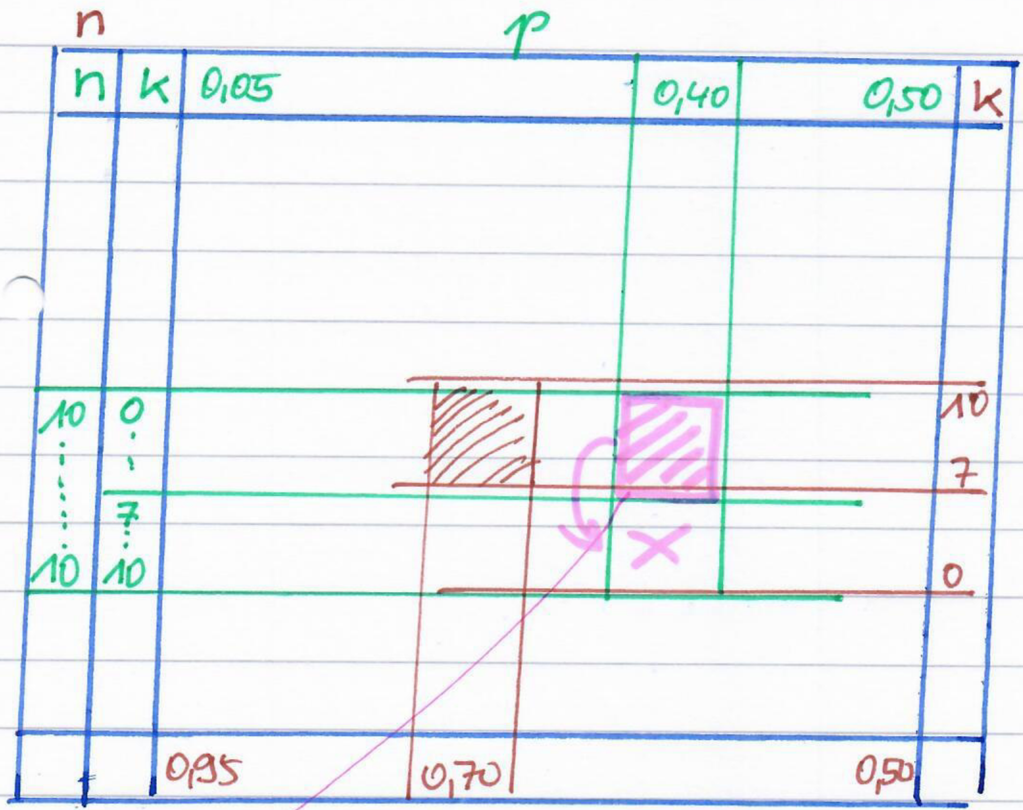
$= 0{,}0425 + 0{,}0106 + 0{,}0016 + 0{,}0001$

$= 0{,}0548$

Kurzschreibweise:

$b(7\text{-}10; 10; 0{,}4) = 0{,}0548$

In der Formelsammlung befindet sich eine Tabelle für die Binomialverteilung, dort sind die Werte schon berechnet und aufgeführt.



$P(T \geq 7) = 0{,}0425 + 0{,}0106 + 0{,}0016 + 0{,}0001$
$= 0{,}0548$

b) Die Wahrscheinlichkeit ändert sich jetzt auf 0,70.
Die Spalte, die wir jetzt brauchen, findet man ganz am Ende der Tabelle.

$P(T \geq 7) = 0{,}2668 + 0{,}2335 + 0{,}1211 + 0{,}0282$
$= 0{,}6496$

$b(7\text{–}10;\, 10;\, 0{,}70) = 0{,}6496$

Aufgabe 193:

Zwei Ausgänge ✓
mit zurücklegen ✓

a)

$b(8;10;0{,}30) = 0{,}0014$

b)

$b(8;20;0{,}30) = 0{,}1144$

Aufgabe 211:

Zwei Ausgänge ✓
mit zurücklegen ✓

a) $b(2;4;\tfrac{2}{3}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = 0{,}2963$

b) $b(1\text{-}4;4;\tfrac{2}{3}) = 1 - b(0;4;\tfrac{2}{3})$

$= 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = 0{,}9877$

c) $b(3\text{-}4;4;\tfrac{2}{3}) = \binom{4}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0$

$= 0{,}3951 + 0{,}1975 = 0{,}5926$

Aufgabe 212:

a) $b(3;6;0{,}5) = 0{,}3125$

b) $b(0\text{-}2;6;0{,}5)$
$= 0{,}0156 + 0{,}0938 + 0{,}2344 = 0{,}3438$

Weitere Übungen

Aufgabe 213 / 227

Aufgabe 214:

G: Gewinn "dreimal mindestens Aufgaben"

$P(G \geq 1) \geq 0{,}90$ | Gegenereignis

$1 - P(G=0) \geq 0{,}90$ | -1

$-P(G=0) \geq -0{,}10$ | $\cdot(-1)$

$\boxed{P(G=0) \leq 0{,}10}$

$\cancel{\binom{n}{0}} \cdot \cancel{0{,}40^0} \cdot 0{,}60^{n-0} \leq 0{,}10$

$0{,}60^n \leq 0{,}10$ | $\ln()$

$\ln(0{,}60)^n \leq \ln(0{,}10)$ | 3. Log-Gesetz

$n \cdot \ln(0{,}60) \leq \ln(0{,}10)$ | $:\ln(0{,}60)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}10)}{\ln(0{,}60)} \approx 4{,}5 \Rightarrow \underline{n \geq 5}$

Aufgabe 215:

$P(G \geq 4) \geq 0{,}90$ | Gegenereignis

$1 - P(G \leq 3) \geq 0{,}90$ | -1

$-P(G \leq 3) \geq -0{,}1$ | $\cdot(-1)$

$P(G \leq 3) \leq 0{,}1$ (Bed.)

↓

Kann nicht nach n aufgelöst werden. Verschiedene n-Werte müssen aus der Tabelle probiert werden, solange bis die obige Bedingung erfüllt ist

$n=5 : b(0\text{-}3; 5; 0{,}4) \leq 0{,}1$ (falsch)

$n=10 : b(0\text{-}3; 10; 0{,}4) \leq 0{,}1$ (falsch)

$\boxed{n=15 \quad b(0\text{-}3; 15; 0{,}4) \leq 0{,}1 \quad (\text{richtig})}$ $\underline{\underline{n \geq 15}}$

$n=14 \quad b(0\text{-}3; 14; 0{,}4) \leq 0{,}1$ (falsch

Erwartungswert

Beispiel: Wir würfeln 60-mal.
Mit wievielen 6-ern können wir rechnen? Wieviele 6-er erwarten wir theoretisch?

$$\boxed{E(x) = n \cdot p}$$

n = Anzahl der Elemente
p = Wahrscheinlichkeit für ein Ele. mit einer besonderen Eigenschaft.

Beispiel: $E(x) = 60 \cdot \frac{1}{6} = 10$

Varianz

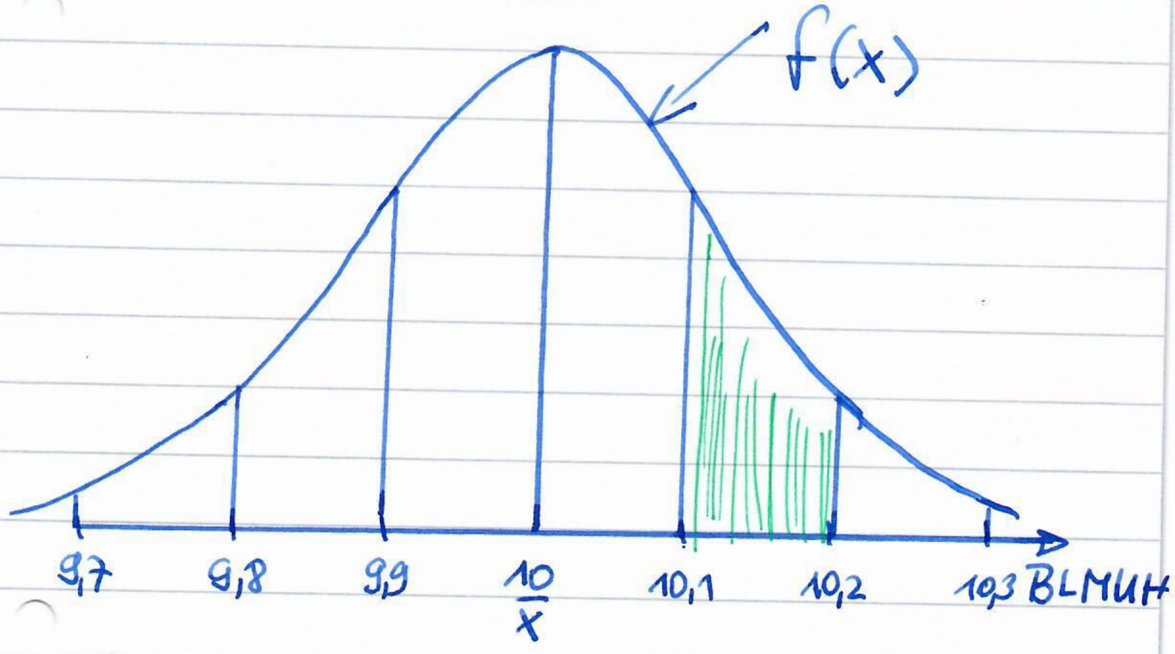
$$\boxed{V(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-q)}$$

Standardabweichung

$$\boxed{S(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{V(x)}}$$

Die Formel für $E(x)$, $V(x)$ und $S(x)$ können nur berechnet (verwendet) werden, wenn eine Binomialverteilung vorliegt.

Normalverteilung



→ Verteilung in der Normalverteilung
→ Die Kurve ist symmetrisch
→ Von $\bar{x}$ ausgesehen befinden sich jeweils unterhalb und oberhalb 50% der Werte
→ Gaußsche Glockenkurve bezeichnet.

Formel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot s}\cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2\right)}$$

Soll ein best. Intervall (10,1 bis 10,2) berechnet werden, so muss die Fläche berechnet werden. Dies geschieht mit der Integralrechnung.

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

Transformation

$\boxed{\text{Normalverteilung } \bar{x}, s \in \text{bel. Werte}}$

$\Downarrow$ Transformation

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$\boxed{\text{Standardnormalverteilung } \bar{x} = 0 ;\ s = 1}$

Durch diese Transformation kann man immer das gleiche Integral benützen. Wir können das Ergebnis dann aus der entsprechenden Tabelle ablesen.

Bei den folgenden zwei Aufgaben handelt es sich nicht um die Aufgaben 231 + 232

sondern um die Aufgaben

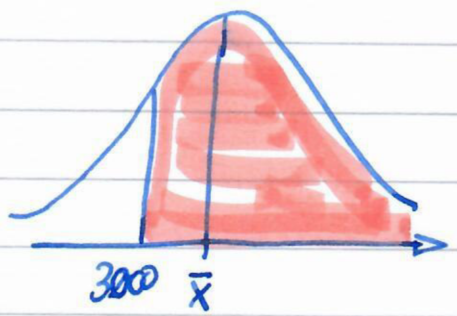
261 + 262

bitte beachten

Aufgabe 231:

-> normalverteilt
-> stetig

a)



$\bar{x} = 3.200g$
$s = 800g$

Transformation: $z = \frac{3000 - 3200}{800} = -0,25$

Das Ergebnis wird immer positiv betrachtet.

$z = 0,25$

-> Die Skizze wird mit den entsprechenden Bildern in der Formelsammlung verglichen um die richtige Tabelle zu finden.

Mit $z = 0{,}25$ das Ergebnis in der Tabelle ab-lesen.

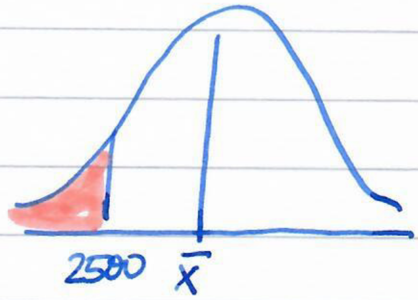
Man liest hier die erste Vorkomma- und die erste Nachkommastelle ab. (0,2)

zweite Nachkommastelle (5)

Das Ergebnis immer als 0, betrachten

$\Rightarrow$ 0,5987 oder 59,87%

b)

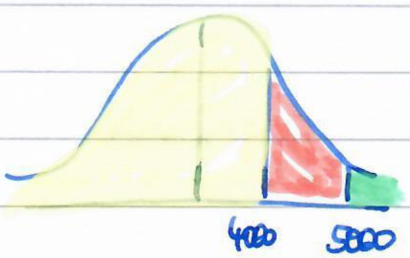


$$z = \frac{2500-3200}{800} = 0,875 = 0,88$$

$\Rightarrow$ In de ensprechenden Tabelle nachschauen und das Ergebnis ablesen.

$\Rightarrow 0,1894$

c)



$= 1 - \quad -$

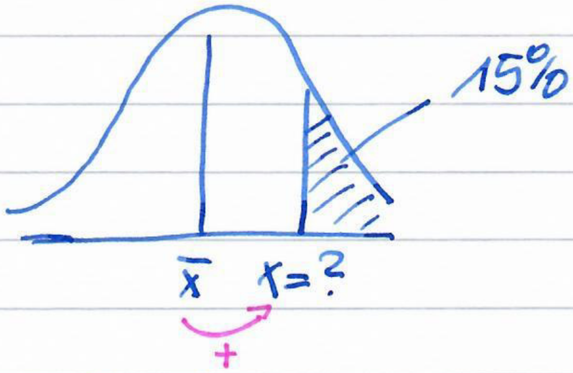
$$z_1 = \frac{4000-3200}{800} = 1,00 \Rightarrow 0,8413$$

$$z_2 = \frac{5000-3200}{800} = 2,25 \Rightarrow 0,0122$$

$$= 1 - 0,8413 - 0,0122 = 0,1465$$

Aufgabe 232:

a)



$\Rightarrow$ Die Aufgabe muss rückwärts gerechnet werden. Aus einer Standardnormalverteilung wird wieder eine Normalverteilung.

In der entsprechenden Tabelle suchen wir 1500 und lesen dazu den entsp. z-Wert ab. Es kann sein, dass man die 1500 nicht findet, dann wir der Wert genommen, welcher am nächsten liegt.

$\Rightarrow z = 1{,}04$

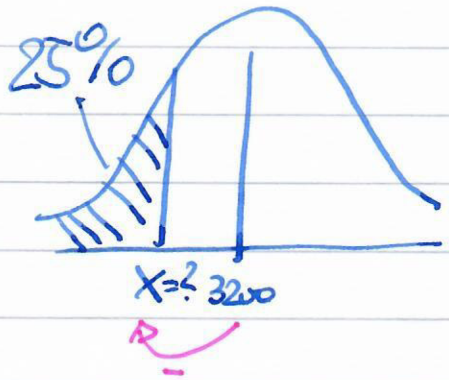
Transformation rückgängig machen

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{x} + z \cdot s$$

$$x = 3200 + 1{,}04 \cdot 800$$

$$x = 4.032\,g$$

b)

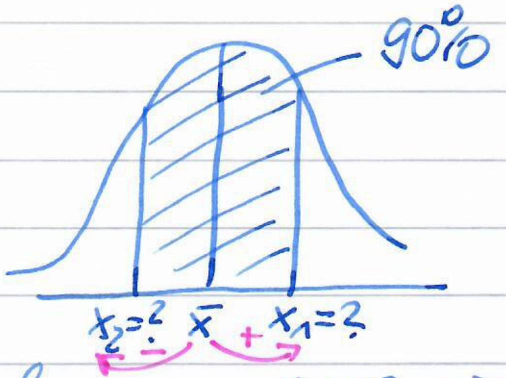


$\Rightarrow$ Suchen von 2500 $\Rightarrow z = 0{,}67$

$x = \bar{x} - z \cdot s = 3200 - 0{,}67 \cdot 800$

$x = 2.664g$

c)



$\Rightarrow$ Suchen von 9000 $\Rightarrow z = 1{,}64$

$x = \bar{x} \pm z \cdot s = 3200 \pm 1{,}64 \cdot 800$

$x = 3200 \pm 1312$

$x_1 = 3200 + 1312 = 4512g$

$x_2 = 3200 - 1312 = 1888g$

Weitere Aufgaben zum üben

267 / 268 / 272 / 273 /

274 / 277

Diskrete Verteilungen

Hypergeometrische Verteilung

Kriterien:
- → Zwei Ausgänge
- → ohne zurücklegen

Definition:

Mit Hilfe der HGV wird die Frage "Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe genau x fehlerhafte Einheiten/Objekte vorzufinden?" beantwortet.

Formel:

$$P(X=x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Erklärungen:

- Die Elementanzahl einer Grundgesamtheit wird mit N bezeichnet.

- Die Zahl der Elemente mit einer best. Eigenschaft in dieser Grundgesamtheit wird mit M bezeichnet.

- Die Zahl der Elemente ~~mit einer best~~ in einer Stichprobe, die gezogen werden, erhalten den Buchstaben n.

- Die Verteilung gibt nun Auskunft darüber, wie wahrscheinlich es ist, dass sich x Elemente mit der zu prüfenden Eigenschaft in der Stichprobe befinden.

Erwartungswert:

$$\boxed{E(x) = n \cdot \frac{M}{N}}$$

Varianz:

$$\boxed{V(x) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

Standardabweichung:

$$\boxed{S(x) = \sqrt{V(x)}}$$

Aufgabe 231:

$$P(R=3) = \frac{\underbrace{\binom{6}{3}}^{\text{Richtige}} \underbrace{\binom{43}{3}}^{\text{Falsche}}}{\underbrace{\binom{49}{6}}_{\text{Alle Möglichkeiten}}} = 0{,}0177 \ (\sim 1{,}8\%)$$

Aufgabe 235:

a) (1) $P(V=3) = \dfrac{\binom{7}{3} \cdot \binom{143}{27}}{\binom{150}{30}}$

$= 0{,}1134$

(2) $P(V=5) = \dfrac{\binom{7}{5} \cdot \binom{143}{25}}{\binom{150}{30}}$

$= 0{,}00345$

b) (1) $P(V \geq 1) = 1 - P(V=0)$

$= 1 - \dfrac{\binom{7}{0} \cdot \binom{143}{30}}{\binom{150}{30}}$

$= 1 - 0{,}2023 = 0{,}7977$

(2)

$$P(V<3) = P(V\leq 2) = P(V=0) + P(V=1) + P(V=2)$$

$$= \frac{\binom{7}{0}\cdot\binom{143}{30}}{\binom{150}{30}} + \frac{\binom{7}{1}\cdot\binom{143}{29}}{\binom{150}{30}} + \frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{143}{28}}{\binom{150}{30}}$$

$$= 0{,}2023 + 0{,}3726 + 0{,}2819 = 0{,}8568$$

c) $E(x) = n\cdot\frac{M}{N} = 30\cdot\frac{7}{150} = 1{,}4$

$$S(x) = \sqrt{n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

$$= \sqrt{30\cdot\frac{7}{150}\cdot\left(1-\frac{7}{150}\right)\cdot\left(\frac{150-30}{150-1}\right)}$$

$$\approx 1{,}04$$

$$\Rightarrow 1{,}4 \pm 1{,}04$$

Weitere

Übungsaufgaben

236/237/238/240

Poisson - Verteilung

Führt man ein Experiment sehr oft durch ($n \geq 100$) und ist die Erfolgswahrscheinlichkeit gering ($p \leq 10\%$), so ist die Poisson-Verteilung eine gute Näherung für die Binomial-Verteilung.

→ In der Aufgabenstellung sind keine Wahrscheinlichkeiten gegeben und es können auch keine berechnet werden.

Beispiel:

Von 100 Personen ist durchschnittlich eine Person farbenblind.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 Personen die zufällig ausgewählt wurden mindestens zwei farbenblinde Personen?

$p = 1\%$

$P(F \geq 2) = 1 - P(F \leq 1) = 1 - (P(F=0) + P(F=1))$

$= 1 - b(0-1; 100; 0{,}01)$

$= 1 - \left(\binom{100}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{99} \right)$

$= 0{,}2642$

Beispiel:

Durchschnittlich ist 1 Person farbenblind. Wie wahrscheinlich ist es mindestens zwei farbenblinde Personen zu erhalten?

Formel:

$$P(X=k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

k: Anzahl der "Treffer"

μ: Durchschnittliche Wert

$$P(F \geq 2) = 1 - P(F \leq 1)$$

$$= 1 - \left(\frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} \right)$$

$$= 0{,}2642$$

		K		
	0	1	…	20
0,01				
μ 1,00				
9,00				

$$P(F \geq 2) = 1 - P(F \leq 1)$$

$$= 1 - (0{,}3679 + 0{,}3679) = 0{,}2642$$

Aufgabe 246:

$k = 0-5 \; ; \; \mu = 2$

Aus der Tabelle:

$= 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1804$
$+ 0{,}0902 + 0{,}0361$

$= 0{,}9834$

Aufgabe 251:

$k < 4$; $\mu = 2 \cdot 2 = 4$

$= 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 + 0{,}1954$

$= 0{,}4335$

Übungsaufgaben

247 / 248 / 250 / 254