Wahrscheinlichkeitsrechnung

Von einer Stichprobe wird erwartet, dass sie ein mehr oder weniger getreues Abbild der Grundgesamtheit darstellt.

Zufallsexperimente (Modell)

Bernoulli-Experiment:
Es gibt nur zwei Ausgänge

Laplace-Experiment:
Alle möglichen Ausgänge eines Experiments sind gleich wahrscheinlich.

Hilfsmittel:
→ Baumdiagramm
→ Vierfeldertafel
→ Mengenalgebra
→ Kombinatorik

→ Aufgaben zu Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm

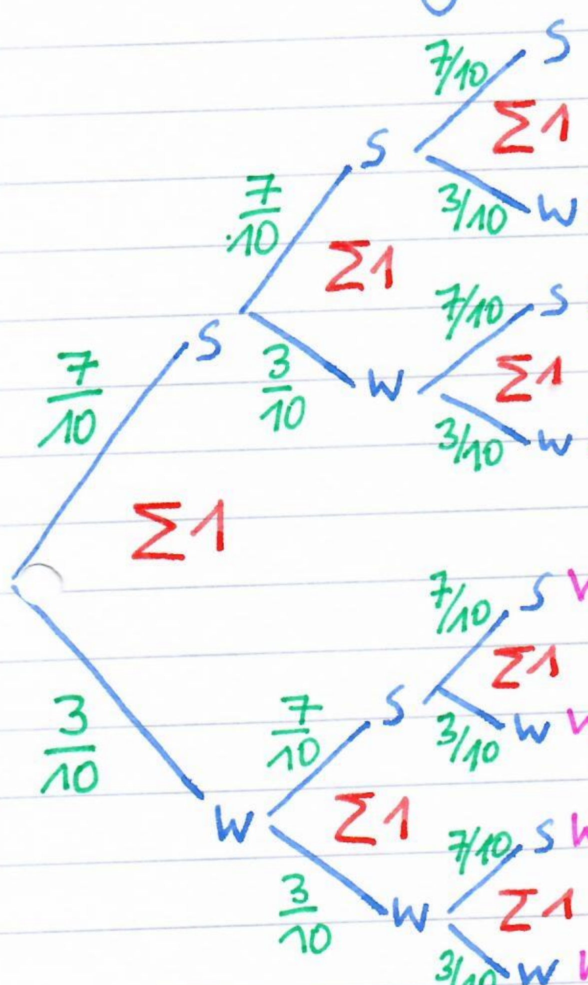
→ Grafische Darstellung der Zusammenhänge aus der Aufgabenstellung

Beispiel:

Nacheinander sollen drei Kugeln (mit zurücklegen. ohne zurücklegen) aus einer Urne mit 10 Kugeln (7 schwarz und 3 weiß) entnommen werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei schwarze Kugeln zu erhalten?

Mit zurücklegen:



SSS $\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0{,}3430$

SSW $\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}1470$

SWS $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0{,}1470$

SWW $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}0630$

WSS $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0{,}1470$

WSW $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}0630$

WWS $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0{,}0630$

WWW $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}0270$

$\Sigma 1$

S: schwarze Kugel

$P(S \geq 2) = P(S=2) + P(S=3)$

$= 3 \cdot 0{,}1470 + 1 \cdot 0{,}3430$

$= 0{,}7840 \quad (\hat{=}\ 78{,}40\%)$

Pfadregel:

Produktregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades in einem Baumdiagramm ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades im Baumdiagramm.

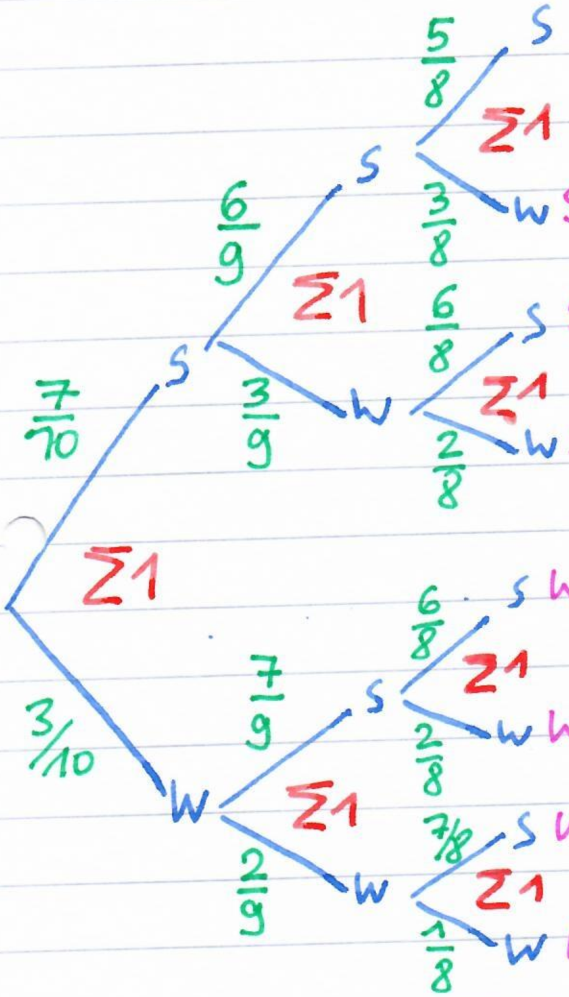
Pfade mit der gleichen Anzahl von Elementen haben auch immer die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Summenregel:

Die Wahrscheinlichkeit für ein best. Ereignis ist die Summe aller Pfade die das Ergebnis darstellen.

Auf dem Pfad wird multipliziert und verschiedene Pfade werden addiert.

Ohne zurücklegen



SSS $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = 0{,}2917$

SSW $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0{,}1750$

SWS $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0{,}1750$

SWW $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0{,}0583$

WSS $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0{,}1750$

WSW $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0{,}0583$

WWS $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0{,}0583$

WWW $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}0083$

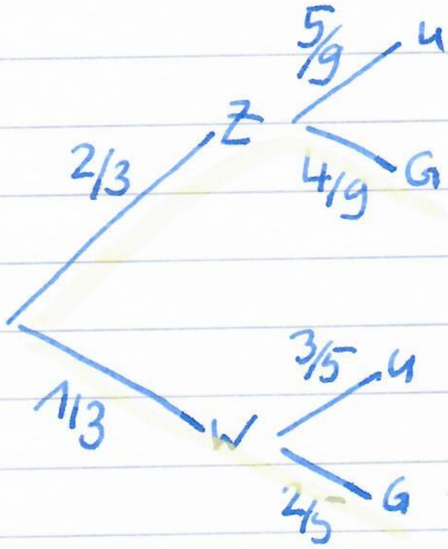
$\Sigma 1$

S: schwarze Kugel

$$P(S \geq 2) = P(S=2) + P(S=3)$$
$$= 3 \cdot 0{,}1750 + 1 \cdot 0{,}2917$$
$$= 0{,}8167 \; (\hat{=}\, 81{,}67\,\%)$$

Aufgabe 72:

→ Das Baumdiagramm auf die in de Aufgabe gefragten Sachverhalt zu reduzieren.



$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$

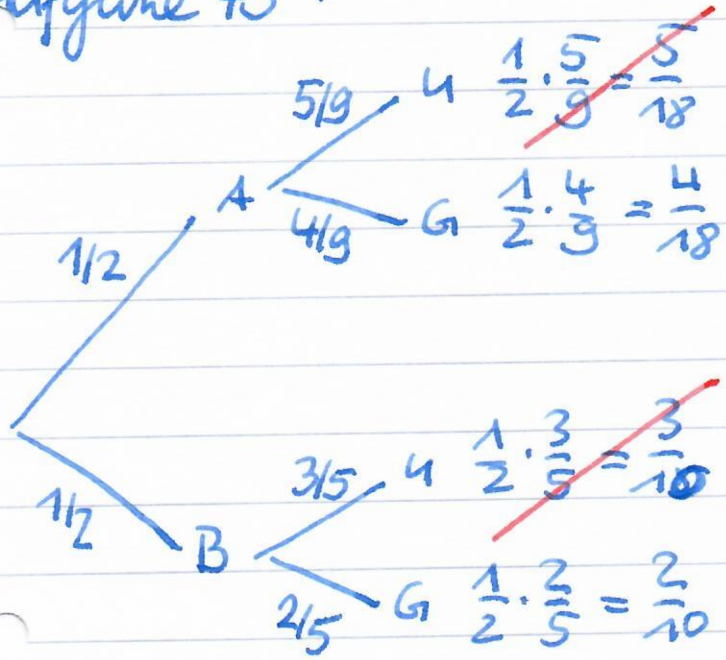
$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{15}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

gerade Zahl

$P(G) = \frac{8}{27} + \frac{2}{15} = 0{,}4296$

Aufgabe 73:



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zettel aus der Schachtel A gezogen wurde, wenn die Zahl darauf gerade ist?

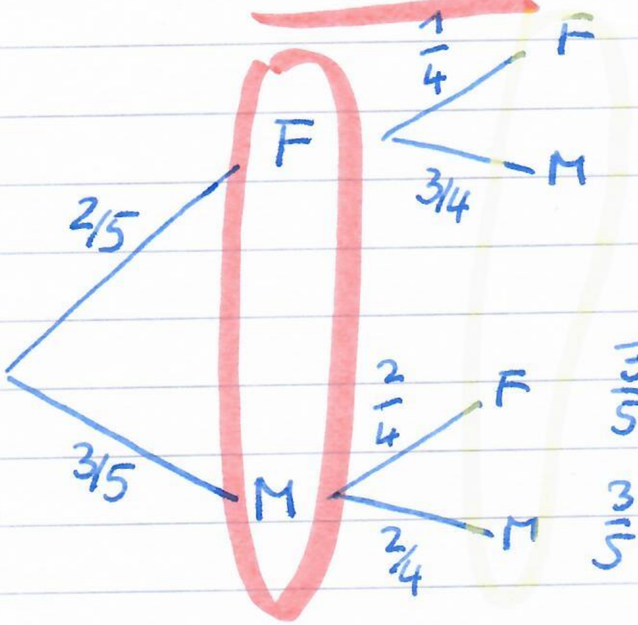
→ Durch diese bekannte Bedingung reduzieren sich die möglichen Ergebnisse.

$$P(G|A) = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18} + \frac{2}{10}} = 0{,}5263 = \frac{10}{19}$$

→ Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 75:

Vorsitzende Stellvertreter



$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}3$

$\Sigma\ 1$

a) $P(A) = 0{,}1$

b) $P(B) = 0{,}3$

c) $P(C) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$

Weitere Aufgaben
zum üben
76/78/79/81.

Vierfeldertafel:

Sie eignet sich sehr gut um Zusammenhänge grafisch (als Tabelle) darzustellen.

Sie besteht wie der Name schon sagt aus vier Feldern, die noch um die Summenberechnungen erweitert werden können.

	B	$\bar{B}$	Σ
A			
$\bar{A}$			
Σ			Gesamt

Beispiel:

Die 16 Jungen und 14 Mädchen einer Schulkasse nehmen an einem Mathematiktest teil. 13 Jungen bestehen. Insgesamt bestehen 20 Schüler den Test.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Schüler den Test nicht bestanden und ist gleichzeitig ein Mädchen?

	J	M	Σ
B	$\frac{13}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{20}{30}$
$\overline{B}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{10}{30}$
Σ	$\frac{16}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{30}{30}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{7}{30}}}$

Aufgabe 82:

	Raucher	Nichtraucher	Summe
Sp-V.	22	24	46
K. Sp.V	14	18	32
Summe	36	42	78

Aufgabe 83:

	Mädchen	Jungen	Summe
Kinder	35	39	74
K. Kinder	13	21	34
Summe	48	60	108

Aufgabe 84

	Tagesanzeige	keine Tagesanzeige	Summe
Stahlarmband	15%	5%	20%
kein Stahlarmband	50%	30%	80%
Summe	65%	35%	100%

Aufgabe 85:

	Mann	Frau	Summe
j. als 50	25%	45%	70%
älter als 50	18%	12%	30%
Summe	43%	57%	100%

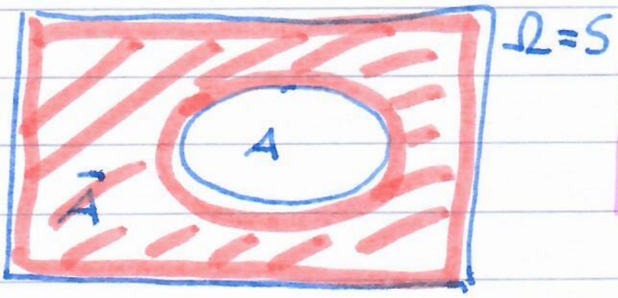
Weitere Übungen
zu der Vierfeldertafel

Aufgabe 86 – 90

Mengenalgebra

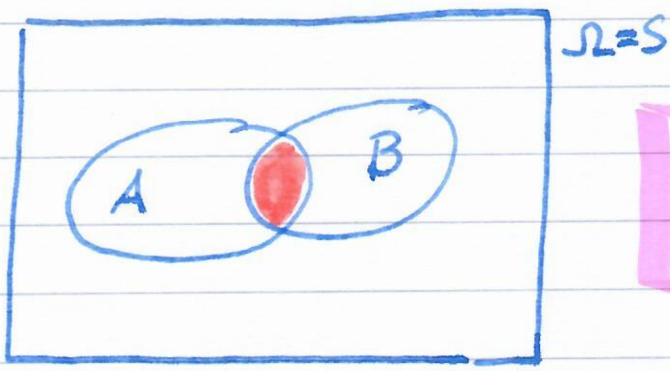
Basis-Verknüpfungen:

→ Venn-Diagramm



"Nicht"

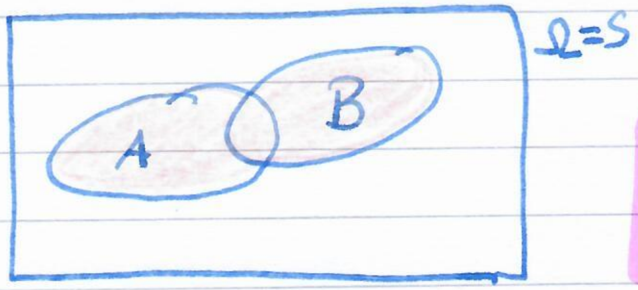
$\bar{A}$ "Nicht A" → Gegenereignis zu A



"UND"

$A \cap B$ "A geschnitten B"

Schnittmenge



"ODER"

A∪B "A vereinigt B"

Vereinigungsmenge

Gesetze für die Mengenalgebra

Beispiel:
Ein Würfel wird einmal geworfen.
Die sich ergebende Zahl wird gemerkt.

A = Wurf einer geraden Zahl $A = \{2; 4; 6\}$

B = Wurf einer ungeraden Zahl

$B = \{1; 3; 5\}$

C = Wurf einer durch 3 teilbaren Zahl

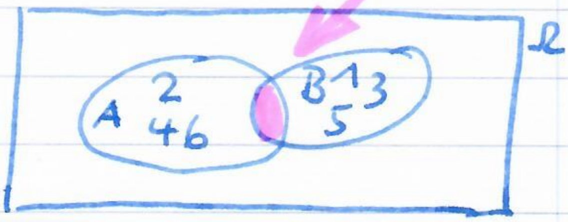
$C = \{3; 6\}$

ODER-Verknüpfung (Additionssätze)

Additionsgesetz für unvereinbare Ereignisse

A oder B

Schnittmenge ist leer !



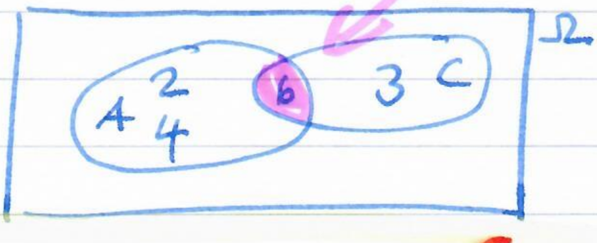
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Additionsgesetz für vereinbare Ereignisse

A oder C

Schnittmenge ist nicht leer !



$$P(A \cup C) = P(A) + P(\overset{C}{\cancel{B}}) - P(A \cap C)$$

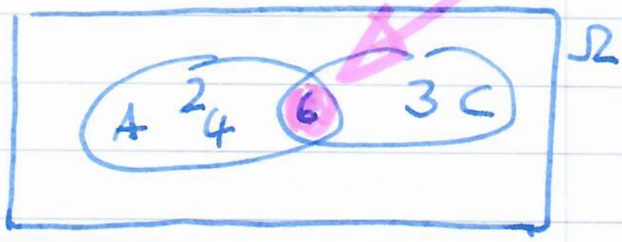
$$P(A \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

UND-Verknüpfung (Multiplikationsgesetz)

Multiplikationsgesetz für vereinbare Ereignisse

A und C

Schnittmenge ist nicht leer!



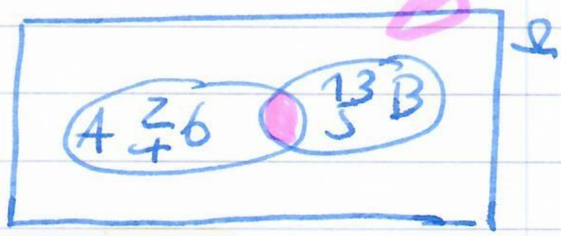
$P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C)$

$P(A\cap C) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Multiplikationsgesetz für unvereinbare Ereignisse

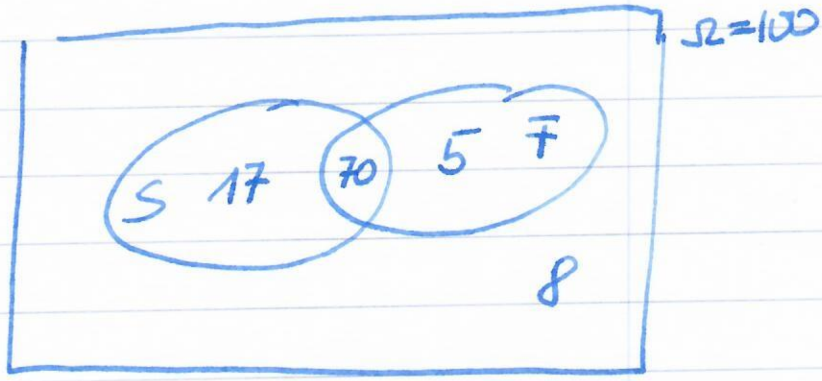
A und B

Schnittmenge ist leer!



$P(A\cap B) = 0$

Aufgabe 98:



a) 92

b) $\frac{92}{100} = 0{,}92 \mathrel{\hat{=}} 92\%$

Aufgabe 99:

$P(E) = 1/4$; $P(M) = \frac{1}{3}$

a) UND vereinbar
~~ODER~~ un~~ver~~einbar

$$P(E \cap M) = P(E) \cdot P(M) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b) ~~UND~~ vereinbar
ODER un~~ver~~einbar

$$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M)$$
$$= 1/4 + 1/3 - 1/12$$
$$= 3/12 + 4/12 - 1/12 = 6/12 = 1/2$$

Als Übung zum Thema
Mengenalgebra

Aufgabe 100/97

Kombinatorik

Um die Anzahl der möglichen Ausgänge zu bestimmen, kann man sie einfach abzählen. Ist dies nicht möglich (Anzahl) so greift man auf die Formel der Kombinatorik zurück.

mit zurücklegen
ohne zurücklegen

mit Reihenfolge
ohne Reihenfolge

Reihenfolge: Die Reihenfolge für das Ergebnis (Frage)

Geordnete Stichprobe mit zurücklegen

geordnet ≙ mit Reihenfolge

$n=3 \qquad M=\{1;2;3\}$

$k=1 \qquad V=\{1;2;3\} = 3^1 = 3$

$k=2 \qquad V=\{11\ 21\ 31$
$12\ 22\ 32$
$13\ 23\ 33\} = 3^2 = 9$

$k=3 \qquad V=\{111\ 211\ 311$
$112\ 212\ 312$
$113\ 213\ 313$
$121\ 221\ 321$
$122\ 222\ 322$
$123\ 223\ 323$
$131\ 231\ 331$
$132\ 232\ 332$
$133\ 233\ 333\} = 3^3 = 27$

$$n^k$$

n: Anzahl der enthaltenen Ele
k: Anzahl der Ziehungen

Beispiel: Sie sollen 11 Fussballspiele tippen.
Folgende Tipps sind möglich
1 – Heimsieg
0 – Unendschieden
2 – Auswärtssieg

mit zurücklegen
~~ohne zurücklegen~~
mit Reihenfolge
~~ohne Reihenfolge~~

3^{11} oder $\cancel{11^3}$

$3^{11} = 177.147$ Möglichkeiten

$$\frac{1}{3^{11}} = 5{,}6450 \cdot 10^{-6}$$
$$= 0{,}00000564$$ (sehr klein)

Geordnete Stichprobe ohne zurücklegen

$n=3 \qquad M=\{1;2;3\}$

$k=1 \qquad V=\{1;2;3\} = \frac{3!}{(3-1)!} = 3$

$k=2 \qquad V=\left\{\begin{matrix} 12 & 21 & 31 \\ 13 & 23 & 32 \end{matrix}\right\} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

$k=3 \qquad V=\left\{\begin{matrix} 123 & 213 & 312 \\ 132 & 231 & 321 \end{matrix}\right\} = \frac{3!}{(3-3)!} = 6$

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

Beispiel: $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ $\quad \boxed{!} \rightarrow$ TR

$0! = 1$

Beispiel: Wir sollen den Einlauf de ersten drei Pfede von insgesamt 10 Pfeden tippen

~~mit~~ / ohne zurücklegen
mit / ~~ohne~~ Reihenfolge

$\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720$ $\qquad$ TR: $\boxed{nPr}$

$10 \boxed{nPr} 3$
$= 720$

Geordnete Stichprobe ohne zurücklegen

Geordnete Vollerhebung

→ Es wird solange gezogen bis kein Element mehr enthalten ist.

Beispiel: 10 Pferde → 10 Plätze tippen

$$\frac{10!}{(10-10)!} = \frac{10!}{0!} = \frac{10!}{1} = 10! = n!$$

$$\boxed{n!}$$

Geordnete Stichprobe ohne zurücklegen

Geordnete Vollerhebung mit gleichen Ele.

→ Einige Elemente können nicht unterschieden werden (sind genau gleich)

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot ...}$$

n: Anzahl der enth. Ele

q, p: Anzahl mehrfache Ele.

Beispiel: 1 1 2 3 4 5

$\frac{6!}{2!} = 360$ Möglichkeiten

1 1 1 2 3 4

$\frac{6!}{3!} = 120$ Möglichkeiten

1 1 1 2 2 3

$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ Möglichkeiten

$\underset{p}{3!} \cdot \underset{q}{2!}$

Ungeordnete Stichprobe ohne zurücklegen

$n=4 \quad M=\{1;2;3;4\}$

$k=1 \quad V=\{1;2;3;4\} = \qquad = 4$

$k=2 \quad V=\{12,\ 23\ 34,\ 13\ 24,\ 14\} = \qquad = 6$

$k=3 \quad V=\{123\ 234,\ 124,\ 134\} = \qquad = 4$

$k=4 \quad V=\{1234\} = \qquad = 1$

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k} \Rightarrow TR: \boxed{nCr}$$

Binomialkoeffizienten "n über k"

Beispiel: $\binom{4}{2} = 4 \boxed{nCr} 2 = 6$

$\binom{8}{5} = 56$

$\binom{9}{3} = 84$ "Zahlenbeispiele"

$\binom{6}{6} = 1$

$\binom{6}{1} = 6$

Beispiel: Samstags-Lotto
Aus 49 Kugeln werden
6 Kugeln gezogen.

~~mit~~ / ohne zurücklegen
~~mit~~ / ohne Reihenfolge

$\binom{49}{6}$ = 13.983.816 Möglichkeiten

Wahrscheinlichkeit für 6-richtige Zahlen

$$\frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Ungeordnete Stichprobe mit zurücklegen

$n=3 \quad M=\{1;2;3\}$

$k=1 \quad V=\{1;2;3\} = \binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1} = 3$

$k=2 \quad V=\{11 \; 22 \; 33 \; 12 \; 23 \; 13\} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

$k=3 \quad V=\{111 \; 222 \; 333 \; 112 \; 223 \; 113 \; 233 \; 122 \; 123 \; 133\} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$

$\binom{n+k-1}{k}$: TR $\boxed{nCr}$

Aufgabe 102

$n=12$ $k=3$	mit zurücklegen	ohne zurücklegen
mit Reihenfolge	$n^k = 12^3$ $= 1728$ Mögl. $\boxed{x^{\square}}$	$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{12!}{(12-3)!}$ $= 1320$ Mögl. $\boxed{nPr}$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{12+3-1}{3}$ $= \binom{14}{3} = 364$ Mögl. $\boxed{nCr}$	$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$ $\binom{12}{3} = 220$ Mögl. $\boxed{nCr}$

Aufgabe 103:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{~~mit zurücklegen~~} \\ \text{ohne zurücklegen} \\ \text{mit Reihenfolge} \\ \text{~~ohne Reihenfolge~~} \end{array}}$

$n^k = 10^6 = 1.000.000$ Möglichkeiten

Aufgabe 106:

~~mit zurücklegen~~
ohne zurücklegen
~~mit Reihenfolge~~
ohne Reihenfolge

$\binom{11}{5} = 462$ Möglichkeiten

Aufgabe 108:

~~mit zurücklegen~~
ohne zurücklegen
mit Reihenfolge
~~ohne Reihenfolge~~

$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{11!}{(11-5)!} = 11 \text{ nPr } 5 = 55.440$ Möglichkeiten

Aufgabe 109

mit zurücklegen
~~ohne zurücklegen~~
mit Reihenfolge
~~ohne Reihenfolge~~

$n^k = 3^4 = 81$ Möglichkeiten

Aufgabe 114:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cancel{\text{mit zurücklegen}} \\ \text{ohne zurücklegen} \\ \text{mit Reihenfolge} \\ \cancel{\text{ohne Reihenfolge}} \end{array}}$$

geordneten Vollerhebung

$4! = 24$ Möglichkeiten

Aufgabe 115:

~~mit zurücklegen~~
ohne zurücklegen
mit Reihenfolge
~~ohne Reihenfolge~~

geordnete Vollerhebung

mit gleichen Elementen ("F")

$\frac{4!}{2!} = 12$ Möglichkeiten

Aufgabe 127:

~~mit zurücklegen~~
ohne zurücklegen
~~mit Reihenfolge~~
ohne Reihenfolge

Männer Frauen

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 350 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 136:

mit zurücklegen
~~ohne zurücklegen~~
mit Reihenfolge
~~ohne Reihenfolge~~

a) $n^k = 6^3 = 216$ Möglichkeiten

b) $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ Möglichkeiten

c) $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ Möglichkeiten

d) $216 - 72 = 144$ Möglichkeiten

e) $6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$ Möglichkeiten

Wenn Sie weitere Übungen machen wollen, so können Sie die folgenden Aufgaben noch rechnen.

102 – 138

Aufgabe 144:

~~mit zurücklegen~~
ohne zurücklegen
~~mit Reihenfolge~~
ohne Reihenfolge

$\binom{n}{k}$

a) $$\frac{\overset{D+P}{\binom{2}{2}} \cdot \overset{R}{\binom{18}{0}}}{\binom{20}{2}} = 0{,}0053$$

b) $$\frac{\overset{P}{\binom{1}{1}} \overset{P}{\binom{1}{0}} \cdot \overset{R}{\binom{18}{1}}}{\binom{20}{2}} = 0{,}0947$$

c) $$\frac{\overset{D}{\binom{1}{0}} \binom{1}{1} \binom{18}{1}}{\binom{20}{2}} = 0{,}0947$$

d) $$\frac{\overset{P}{\binom{1}{1}} \binom{19}{1}}{\binom{20}{2}} = 0{,}1$$

e) $$\frac{\binom{1}{1} \binom{19}{1}}{\binom{20}{2}} = 0{,}1$$

f) $$\frac{\overset{D+P}{\binom{2}{0}} \binom{18}{2}}{\binom{20}{2}} = 0{,}8053$$

Um eine Wahrscheinlichkeit / Möglichkeiten auszurechnen müssen die Elemente nach ihren Eigenschaften sortiert werden.

Aufgabe 145:

Alle moglichen Fälle die es gibt:

(J,J) ; (J,M) ; (M;J) ; (M,M)

a) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

b) Nicht (M,M) $\frac{1}{3}$

c) Nicht (M,M) ; (M,J) $\frac{1}{2} = 0{,}5$

Aufgabe 146:

~~mit zurücklegen~~
ohne zurücklegen
~~mit Reihenfolge~~
Ohne Reihenfolge

$\binom{n}{k}$

a) $\binom{10}{8} = 45$ Möglichkeiten

b) $\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{5} = 21$ Möglichkeiten

c) $\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \cdot \binom{5}{3}$

$5 \cdot 5 \quad + 1 \cdot 10 \quad = 35$ Möglichkeiten

Aufgabe 147:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{~~mit zurücklegen~~} \\ \text{ohne zurücklegen} \\ \text{~~mit Reihenfolge~~} \\ \text{ohne Reihenfolge} \end{array}}$$

$\binom{n}{k}$

$$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{1}}{\binom{32}{2}} = 0,2258$$

Aufgabe 153:

a) (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6)

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6)
(1,5); (2,5); (3,5); (4,5) (6,5)

$$P(B) = \frac{3}{11} = 0,2727$$

Aufgabe 154:

(ZZZ) (ZZW) (ZWZ) (ZWW)
(WWW) (WWZ) (WZW) (WZZ)

a) $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

b) $P(B) = \frac{1}{7}$

Aufgabe 163:

~~mit zurücklegen~~
ohne zurücklegen
~~mit Reihenfolge~~
ohne Reihenfolge

$\binom{n}{k}$

A G

$$\frac{\binom{2}{0}\binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = 0{,}7158$$

Aufgabe 175:

$p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}3$; $p_5 = 0{,}1$

a) $P(A) = 0{,}1^3 = 0{,}001$

b) $P(B) = 0{,}1$

c) $1+2+5 = 8$ (Quersumme)

$\left.\begin{matrix} 125 & 215 & 512 \\ 152 & 251 & 521 \end{matrix}\right\}$ 6 Möglichkeiten (3!)

$P(C) = 6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}1080$

d) Gegenereignis keine "eins"

$P(D) = 1 - (0{,}3 + 0{,}4)^3 = 0{,}9360$

e) zweimal jeweils eine "1" ; "2" ; "5"

1++
+1+
++1

$3 \cdot (0{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1^2 \cdot 0{,}9)$

$= 0{,}6480$

Sie können jetzt noch
folgende Übungen machen

139 – 191