

# Reihen und Folgen

## Definition eine Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge ist eine geordnete und numerische Liste von Zahlen, die entweder in der aufzählenden Schreibweise oder durch eine Berechnungsformel gegeben sein kann.

Beispiel:  $2, 4, 6, \dots$

Bezeichnen:  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$a_1 = 2 ; a_2 = 4 ; a_3 = 6, \dots$$



Gibt man einer reellen Funktion den speziellen Definitionsbereich  $\mathbb{N}$  dann entsteht eine Zahlenfolge.

In einem solchen Fall verwendet man statt  $x$  die Variable  $n$

Beispiel:  $f(x) = x^2$

$$f(n) = n^2$$

oder  $a_n = n^2$

Beispiel:

$-8; -4; 0; 4; 8; 12; 16; 20; \dots$

geben Sie den Funktions-term  
 $a_n$ , der die obige Folge erzeugt.

→  $n$  sind Zahlen aus  $\mathbb{N}$

→ Aufsteigende Folge von Zahlen  
mit dem Abstand 4.

$$a_n = 4 \cdot (n-3) \quad (n \geq 1)$$

$$\underline{a_n = 4n - 12}$$

## Rekursive Folge

Eine Folge heißt rekursiv, wenn man keine direkte Möglichkeit hat, beliebige Glieder der Folge (z.B.  $a_{18}$ ) zu berechnen, sondern wenn man die Glieder der Folge aus seinen Vorgängern berechnet.

Beispiel:  $a_1 = 5$

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

$$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

⋮

# Lineare Folgen

## Arithmetische Folge

Bei einer linearen Folge

$$a_n = r \cdot n + s$$

ist der Abstand (die Differenz) aufeinander folgende Glieder immer konstant.

Daher heißen solche Folgen auch arithm. Folgen.

Die Differenz aufeinander folgender Glieder einer linearen Folge ~~ist~~ ist konstant und zwar so groß, wie der Koeffizient  $r$  von  $n$  angibt.

Beispiel:  $a_n = -0,5 \cdot n + 5$

$$a_1 = 4,5; a_2 = 4; a_3 = 3,5; a_4 = 3,0$$

The diagram shows four terms of the sequence: 4,5, 4, 3,5, and 3,0. Brackets connect the first to the second term, the second to the third, and the third to the fourth. Below each bracket is the value -0,5, indicating that the difference between any two consecutive terms is -0,5.

Beispiel:

Beweisen Sie, dass die Folge  $a_n$  mit  $a_n = 48 - 16n$  eine arithm. Folge ist

$$d = a_{n+1} - a_n$$

$$d = (48 - 16(n+1)) - (48 - 16n)$$

$$d = 48 - 16n - 16 - 48 + 16n$$

$$d = -16$$

Weil die Differenz  $d$  aufeinanderfolgende Glieder konstant ist, liegt eine arithm. Folge vor.

Daraus ergibt sich eine allg. Formel für eine arithm. Folge

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel.

Eine arithm. Folge ist gegeben durch  
 $a_3 = 6$  und  $a_{10} = -36$

Berechnen Sie  $a_1$  und  $d$  und  
stellen Sie die Berechnungsformel  
für  $a_n$  auf.

$$a_{10} - a_3 = -36 - 6 = -42 : 7 = -6$$

$$d = -6$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 18 + (n-1) \cdot (-6)$$

$$a_n = 18 - 6n + 6$$

$$a_1 = 18$$

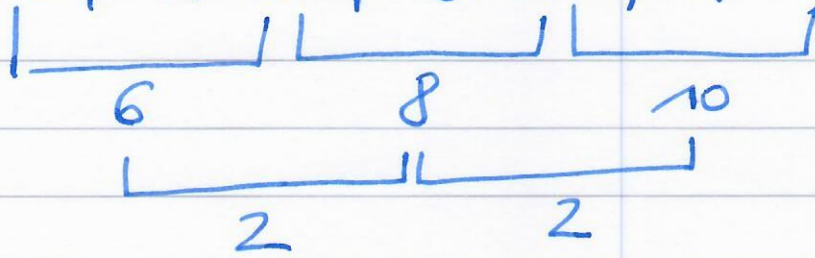
$$\underline{a_n = 24 - 6n}$$

# Arithm. Folge höherer Ordnung

## Arithm. Folge 2. Ordnung

$$a_n = n^2 + 3n + 16$$

$$a_1 = 20; a_2 = 26; a_3 = 34; a_4 = 44$$



Bei dieser quadratischen Folge ist die erste Differenzenfolge eine arithm. Folge, weil die zweite Differenzenfolge konstant ist.

# Geometrische Folge

Eine Zahlenfolge heißt geometrisch wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Beispiel:  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48 \rightarrow \dots$   
                   $\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$

Beispiel:  
Von einer geometrischen Folge kennt man  $a_3 = \frac{1}{64}$  und  $a_6 = \frac{1}{8}$

Berechnen Sie  $q$ ,  $a_1$  und  $a_{15}$

$$q^3 = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{1}{64}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{32}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{15-1} = a_1 \cdot q^{14} = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$

## Geometrische und arithm. Reihe

### Definition einer Reihe

Zu jeder Folge  $(a_n)$  kann man Teilsummen bilden (berechnen).

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_3 = S_2 + a_3$$

⋮

Diese Folge von Teilsummen nennt man Reihe.

## Aritmetische Reihen

Die zu einer arithm. Folge gehörenden Folge der Teilsummen heißt eine arithm. Reihe.

Für eine arithm. Reihe gilt:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Beispiel:

Berechnen Sie die Summe der natürlichen Zahlen von 17 bis 63.

$$S_n = \frac{47}{2} (17 + 63) = 1.880$$

$$S_n = \frac{47}{2} (2 \cdot 17 + (47-1) \cdot 1) = 1.880$$

Beispiel: Eine arithm. Reihe hat

$$S_3 = 33 \text{ und } S_5 = 75.$$

Berechnen Sie  $a_n$ .

$$\text{Es gilt: } S_3 = \frac{3}{2} (a_1 + a_3) = 33 \Rightarrow a_1 + a_3 = 22 \quad (1)$$

$$S_5 = \frac{5}{2} (a_1 + a_5) = 75 \Rightarrow a_1 + a_5 = 30 \quad (2)$$

Da eine arithm. Folge vorliegt:

$$a_3 = a_1 + 2d \text{ und } a_5 = a_1 + 4d$$

$$\text{Daraus folgt aus (1) } 2a_1 + 2d = 22 \quad (3)$$

$$\text{und aus (2) } 2a_1 + 4d = 30 \quad (4)$$

$$(4) - (3): 2d = 8 \Rightarrow d = 4$$

$$\text{In (3) ergibt sich } a_1 = 7$$

$$\Rightarrow a_n = 7 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 3$$

## Geometrische Reihe

Von einer geometrischen Folge mit der Berechnungsvorschrift

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

folgt dann für die Berechnung der geometrischen Reihe

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} = a_1 \frac{(q^n-1)}{(q-1)}$$

Beispiel: Berechnen Sie das Ergebnis der geom. Reihe

$$1 + 4 + 16 + \dots + 4^{10}$$

$$S_{11} = 1 \cdot \frac{(4^{11}-1)}{(4-1)} = \underline{\underline{1.398.101}}$$

Beispiel:

gegeben ist eine geom. Reihe

durch  $S_n = 8 - 0,5^{n-3}$

Welche geometrische Folge  
liegt zugrunde?

$$S_1 = 8 - 0,5^{-2} = 4 \quad \Rightarrow a_1 = 4$$

$$S_2 = 8 - 0,5^{-1} = 6 \quad \Rightarrow a_2 = 2$$

$$q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{-n+1}$$

$$a_n = 2^{3-n} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_n = \frac{8}{2^n}}}$$

## AUFGABEN

- (1) Gegeben ist die Folge  $a_n = 80 - 6n$ .
- Welche Art Folge liegt vor. Beweise dies allgemein.
  - Berechne 5 Glieder der Folge
  - Berechne die Teilsumme  $s_{16}$ , sowie  $s_n$ .
- (2) Gegeben sind die Glieder  $a_3 = 6$  und  $a_6 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$  einer geometrischen Folge.
- Berechne  $q$  sowie  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_4$ ,  $a_9$  und  $a_n$ .  
(Mache bei  $a_1, a_2, \dots$  die Nenner rational).
  - Berechne  $s_4$  mit der Formel. Zeige, daß das Ergebnis auf diese Form gebracht werden kann:  $s_4 = 8\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 1)$
- (3) a)  $368 + 444 + 520 + \dots + 1660 = ?$
- b)  $54 + 36 + 24 + \dots + \frac{256}{54} = ?$   
(1 Sonderpunkt für das Ergebnis als einen gekürzten Bruch !)
- (4) Bei einer arithmetischen Folge gilt  $s_3 = -24$  und  $s_5 = 40$ .  
Wie lautet der Folgenterm  $a_n = ?$
- (5) Folge ist gegeben durch  $a_1 = -4$ ;  $a_2 = -6$ ;  $a_3 = -4$  und  $a_4 = 2$ .  
Um was für eine Folge handelt es sich?  
Stelle einen Funktionsterm für  $a_n$  auf.

# LÖSUNGEN

## Aufgabe 1

a)  $a_n = 80 - 6n$  stellt eine arithmetische Folge dar, denn

$$a_{n+1} - a_n = (80 - 6(n+1)) - (80 - 6n) = -6.$$

Also ist die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant gleich  $-6$ .

b)  $a_1 = 74$  ;  $a_2 = 68$  ;  $a_3 = 62$  ;  $a_4 = 56$  ;  $a_5 = 50$  usw.

$$a_{16} = 80 - 96 = -16$$

c)  $s_{16} = \frac{16}{2} \cdot (74 - 16) = 8 \cdot 58 = 464$ .

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (74 + 80 - 6n) = \frac{n}{2} (154 - 6n) = 77n - 3n^2$$

## Aufgabe 2

Gegeben sind die Glieder  $a_3 = 6$  und  $a_6 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$  einer geometrischen Folge.

a) Berechne  $q$  sowie  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_9$  und  $a_n$ .

$$q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 6} = \frac{\sqrt{3}}{9} = 3^{\frac{1}{2}-2} = 3^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow q = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18, \quad a_2 = 18 \cdot q = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 18 \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^3} = \frac{18}{3\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$a_9 = a_1 \cdot q^8 = 18 \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^8} = \frac{18}{3^4} = \frac{18}{9 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 18 \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}} = \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}^n} \quad (\text{z.B. } , \text{ oder eine andere Darstellung})$$

b) Berechne  $s_4$

$$\begin{aligned} s_4 &= a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 18 \cdot \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}^4}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 18 \cdot \frac{1-\frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = 18 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 16 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \\ &= 16\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 8\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1) \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

a)  $368 + 444 + 520 + \dots + 1660 = ?$

Zunächst ist  $a_2 - a_1 = 76$ ,  $a_3 - a_2 = 76$  und  $a_n - a_1 = 1660 - 368 = 1292 = 17 \cdot 76$   
Der Faktor 17 gibt  $(n-1)$  an, also ist  $n = 18$  und es liegt eine arithmetische **Reihe** vor mit

$$s_{18} = \frac{18}{2}(368 + 1660) = 9 \cdot 2028 = 18252$$

b)  $54 + 36 + 24 + \dots + \frac{256}{54} = ?$

Zunächst ist  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Nun muß man feststellen, ob auch der letzte Summand  $\frac{256}{54}$  in diese Reihe paßt, und zu welcher Nummer  $n$  er gehört:

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{256}{54 \cdot 54} = \frac{64}{27 \cdot 27} = \frac{2^6}{3^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = q^{n-1}$$

Also liegt eine geometrische Reihe vor mit  $q = \frac{2}{3}$  und  $n = 7$ .

$$s_7 = a_1 \cdot \frac{1-q^7}{1-q} = 54 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^7}{\frac{1}{3}} = 162 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7\right] = 2 \cdot 3^4 \cdot \frac{3^7 - 2^7}{3^7} =$$

denn es ist  $162 = 2 \cdot 81 = 2 \cdot 3^4$ .

Wegen  $3^7 - 2^7 = 2187 - 128 = 2059$  folgt:  $s_7 = 2 \cdot \frac{4118}{3^3} = \frac{4118}{27}$

### Aufgabe 4

Bei einer arithmetischen Folge gilt  $s_3 = -24$  und  $s_5 = 40$ . Wie lautet  $a_n = ?$

$$s_3 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) = -24 \Rightarrow a_1 + a_3 = -16 \quad (1)$$

$$s_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = 40 \Rightarrow a_1 + a_5 = 16 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow a_1 + (a_1 + 2d) = -16 \Rightarrow 2a_1 + 2d = -16 \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow a_1 + (a_1 + 4d) = 16 \Rightarrow 2a_1 + 4d = 16 \quad (4)$$

$$(4) - (3): 2d = 32 \Rightarrow d = 16$$

Eingesetzt in (3):  $2a_1 + 32 = -16 \Rightarrow 2a_1 = -48 \Rightarrow a_1 = -24$

Folgerung:  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -24 + (n-1) \cdot 16 = 16n - 40$

## Aufgabe 5

Eine Folge ist gegeben durch  $a_1 = -4$ ;  $a_2 = -6$ ;  $a_3 = -4$  und  $a_4 = 2$ . Stelle einen Funktionsterm für  $a_n$  auf.

Stammfolge:        - 4   ;   - 6   ;   - 4   ;   2

1. Differenzenfolge:   -2   ;   2   ;   6

2. Differenzenfolge:        4   ;   4

Die zweite Differenzenfolge ist konstant, also liegt eine arithmetische Folge 2. Ordnung vor, d.h. es gilt:  $a_n = an^2 + bn + c$

$$\text{Für } n = 1 \text{ folgt: } a_1 = a + b + c = -4 \quad (1)$$

$$\text{Für } n = 2 \text{ folgt: } a_2 = 4a + 2b + c = -6 \quad (2)$$

$$\text{Für } n = 3 \text{ folgt: } a_3 = 9a + 3b + c = -4 \quad (3)$$

$$(2) - (1) : \quad 3a + b = -2 \quad (4)$$

$$(3) - (2) : \quad 5a + b = 2 \quad (5)$$

$$(5) - (4) : \quad 2a = 4 \quad \text{also } a = 2. \text{ In (5): } b = -8, \text{ in (1): } c = 2$$

$$\text{Ergebnis: } a_n = 2n^2 - 8n + 2$$

### Aufgabe 1

- a) Von einer arithmetischen Folge weiß man, daß  $a_6 = 396$  und  $a_{10} = 348$  ist. Berechne  $a_{22}$ .
- b) Welche arithmetische Folge  $b_n$  besitzt zwischen den Zahlen 396 und 348 keine weiteren Glieder der Folge und hat die berechnete Zahl  $a_{22}$  als  $b_6$ ? Gib den Funktionsterm für  $b_n$  an.
- c) Berechne die zu der in a) genannten Folge  $a_n$  den Berechnungsterm für die arithmetische Reihe  $s_n$ .
- $s_n$  ist selbst wieder eine Folge. Von welcher Art ist sie?  
Beweise dies durch eine Rechnung.

### Aufgabe 2

Gegeben ist die Folge  $a_n = 48 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

- a) Zeige durch Zurückgreifen auf die Definition, daß eine geometrische Folge vorliegt.
- b) Ab welcher Nummer  $n_0$  ist  $a_n < 10^{-5}$ ?
- c) Stelle einen Berechnungsterm für die zugehörige geometrische Reihe auf. Welchem Wert nähert sich diese Reihe an, wenn man  $n$  immer größer werden läßt? Begründe Deine Antwort.
- d)  $b_n$  sei die Kehrwertfolge zu  $a_n$ :  $b_n = \frac{1}{a_n}$ .
- Stellt  $b_n$  auch noch eine geometrische Folge dar?  
Beweise allgemein (unter Verwendung beliebig großer Schranken  $M$ ), daß  $b_n$  unbeschränkt wächst.

### Aufgabe 3

- a) Berechne  $s_{34} = 512 + 540 + 568 + \dots$
- b)  $245 + 290 + 335 + \dots + 1910$   
Berechne und schreibe diese Summe auch mit dem Summenzeichen  $\Sigma$ .
- c)  $\sum_{i=8}^{20} (400 - 12 \cdot i) = ?$
- d)  $\frac{64}{27} + \frac{32}{9} + \dots + \frac{729}{8} = ?$  Berechne näherungsweise.  
Wie heißen die Summanden  $a_3$ ,  $a_4$  und  $a_5$ ?

## Aufgabe 1

- a) Von einer arithmetischen Folge weiß man, daß  $a_6 = 396$  und  $a_{10} = 348$  ist. Berechne  $a_{22}$ .

$$4d = a_{10} - a_6 = 348 - 396 = -48$$

$$a_{22} = a_{10} + 12 \cdot d = 348 + 3 \cdot (-48) = 204$$

Unnötig ist hier:  $a_n = a_6 + (n-6)d = 396 + (n-6)(-12) = -12n + 468$

und ebenso  $a_1 = a_6 - 5 \cdot d = 396 - 5 \cdot (-12) = 456$

- b) Welche arithmetische Folge  $b_n$  besitzt zwischen den Zahlen 396 und 348 keine weiteren Glieder der Folge und hat die berechnete Zahl  $a_{22}$  als  $b_6$ ? Gib den Funktionsterm für  $b_n$  an.

$$d = 348 - 396 = -48,$$

$$b_6 = 204 \Rightarrow b_n = b_6 + (n-6)d = 204 + (n-6) \cdot (-48) = -48n + 492$$

- c) Berechne die zu der in a) genannten Folge  $a_n$  den Berechnungsterm für die arithmetische Reihe  $s_n$ .  
Von welcher Art ist diese Folge  $s_n$ ? Beweise dies durch eine Rechnung.

Für die arithmetische Reihe gilt  $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ .

Jetzt benötigt man  $a_1 = 456$  und  $a_n = -12n + 468$  (siehe a)

$$s_n = \frac{n}{2}(456 + 468 - 12n) = \frac{n}{2}(924 - 12n) = -6n^2 + 462n$$

Bei  $s_n$  handelt es sich um eine arithmetische Folge 2. Ordnung.

Beweis:

1. Differenzenfolge  $d_n$ :

$$d_n = s_{n+1} - s_n = [-6(n+1)^2 + 462(n+1)] - [-6n^2 + 462n]$$

$$d_n = -6(n^2 + 2n + 1) + 462n + 462 + 6n^2 - 462n$$

$$d_n = \cancel{-6n^2} - 12n - 6 + \cancel{462n} + 462 + \cancel{6n^2} - \cancel{462n} = -12n + 456$$

Diese 1. Differenzenfolge hat konstante Differenzen:

$$d_{n+1} - d_n = [-12(n+1) + 456] - [-12n + 456] = -12$$

Da die 2. Differenzenfolge konstant ist, liegt eine arithmetische Folge 2. Ordnung vor.

## Aufgabe 2

- a) Gegeben ist die Folge  $a_n = 48 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Zeige durch Zurückgreifen auf die Definition, daß eine geometrische Folge vorliegt.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{48 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{48 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

Weil der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, liegt eine geometrische Folge vor.

- b) Ab welcher Nummer  $n_0$  ist  $a_n < 10^{-5}$  ?

$$48 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{10^{-5}}{48} \quad | \lg$$

$$n \cdot \lg\left(\frac{2}{3}\right) < \lg \frac{10^{-5}}{48} \quad | : \lg\left(\frac{2}{3}\right) < 0 !$$

$$n > \frac{-5 - \lg 48}{\lg 2 - \lg 3} = 37,9\dots$$

Ergebnis: Für  $n \geq 38 (= n_0)$  ist  $a_n < 10^{-5}$

- c) Stelle einen Berechnungsterm für die zugehörige geometrische Reihe auf. Welchem Wert nähert sich diese Reihe an, wenn man  $n$  immer größer werden läßt? Begründe Deine Antwort.

$$a_1 = 48 \cdot \frac{2}{3} = 32$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 32 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 96 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

Die Reihe hat den Grenzwert 96, weil sich die geometrische Folge  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  dem Wert 0 nähert.

d)  $b_n$  sei die Kehrwertfolge zu  $a_n$ :  $b_n = \frac{1}{a_n}$ .

Stellt  $b_n$  auch noch eine geometrische Folge dar?

Beweise allgemein (unter Verwendung beliebig großer Schranken  $M$ ), daß  $b_n$  unbeschränkt wächst.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q_a} \text{ ist ebenfalls konstant mit } q_b = \frac{3}{2}.$$

Dabei sei  $q_a$  der konstante Quotient der Folge  $a_n$  und  $q_b$  der von  $b_n$ .

**Behauptung:  $b_n$  wächst unbeschränkt.**

Beweis:

Es sei  $M > 0$  eine beliebig große Zahl.  
Ab wann gilt dann  $b_n > M$  ?

$$a_n = 48 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow b_n = \frac{1}{48} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{48} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n > M \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > 48 \cdot M$$

$$n \cdot \lg 1,5 > \lg(48M)$$

$$n > \frac{\lg 48 + \lg M}{\lg 1,5} \quad (1)$$

Weil  $M > 0$  ist, kann man zu jedem  $M$  den Logarithmus berechnen, d.h. die rechte Seite ist stets eine Zahl.

Es sei  $n_0$  die kleinste natürliche Zahl, welche die Ungleichung (1) löst, dann gilt für  $n \geq n_0$ :  $b_n > M$ .

$b_n$  wächst also unbeschränkt.

### Lösung Aufgabe 3

a)  $s_{34} = 512 + 540 + 568 + \dots$

Es liegt eine arithmetische Folge zugrunde, denn es gilt  
 $a_2 - a_1 = 540 - 512 = 28$  und  $a_3 - a_2 = 568 - 540 = 28$ .

Also haben aufeinanderfolgende Glieder konstante Differenzen.

$$a_{34} = a_1 + 33 \cdot d = 512 + 33 \cdot 28 = 1436$$

$$s_{34} = \frac{34}{2}(a_1 + a_{34}) = 17 \cdot (512 + 1436) = 33116$$

b)  $245 + 290 + 335 + \dots + 1910$

Es liegt eine arithmetische Folge zugrunde, denn es gilt  
 $a_2 - a_1 = 290 - 245 = 45$  und  $a_3 - a_2 = 335 - 290 = 45$ .

Also haben aufeinanderfolgende Glieder konstante Differenzen:  $d = 45$ .

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \text{ bedeutet hier: } 245 + (n-1) \cdot 45 = 1910$$

$$\text{Also ist } (n-1) \cdot 45 = 1665 \Rightarrow n-1 = \frac{1665}{45} = 37 \Rightarrow n = 38$$

$$s_{38} = 19 \cdot (245 + 1910) = 40.945$$

$$\text{Schreibweise mit dem Summenzeichen: } s_{38} = \sum_{i=0}^{37} (245 + i \cdot 45) = \sum_{i=1}^{38} (200 + i \cdot 45)$$

c)  $\sum_{i=8}^{20} (400 - 12 \cdot i) = 304 + 292 + \dots + 160$

Es liegen  $20 - 8 + 1 = 13$  Summanden zugrunde !

$$s_{13} = \frac{13}{2} \cdot (304 + 160) = \frac{13}{2} \cdot 464 = 3016$$

d)  $\frac{64}{27} + \frac{32}{9} + \dots + \frac{729}{8} = ?$

Wie heißen die Summanden  $a_3$ ,  $a_4$  und  $a_5$  ?  
 Stelle auch eine Formel für die zugrunde liegende Folge auf.

$$q = \frac{32}{9} : \frac{64}{27} = \frac{32}{9} \cdot \frac{27}{64} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Also ist } a_3 = \frac{32}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{16}{3}, \quad a_4 = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2} = 8, \quad a_5 = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

Bestimmung von n:

$$a_n = \frac{729}{8} = \frac{64}{27} \cdot q^{n-1} \Rightarrow q^{n-1} = \frac{729}{8} \cdot \frac{27}{64} = \frac{3^6 \cdot 3^3}{2^3 \cdot 2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^9 \Rightarrow n = 10.$$

$$s_{10} = \frac{64}{27} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \approx \frac{128}{27} \cdot 56,665 \approx 268,63$$

## Potenzreihe

Eine Reihe ist eine Summe von unendlich vielen Summanden.

Eine endliche Summe lässt sich immer als Reihe schreiben, indem wir einfach unendlich viele Nullen addieren.

Daraus ergibt sich eine formale Potenzreihe in folgender Form:

$$a_0 z^0 + a_1 \cdot z^1 + a_2 \cdot z^2 + \dots + a_n \cdot z^n + \dots$$

wobei die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n, \dots$  reelle Zahlen sind und  $z$  ist eine Variable.

In der endlichen Variante entspricht ein Polynom eine Potenzreihe

Beispiel:  $(a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \dots)$

beidem nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind.

Wenn wir folgendes schreiben

$$(1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 3z^2 + \dots)$$

Wissen wir nicht genau wie diese Potenzreihe weitergeht, außer wir besitzen die Bernoulli formel.

Solche Reihen werden auch mit Hilfe der Summenformel geschrieben.

Beispiel:  $(1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 3z^2 + \dots)$   
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot z^n$

Wenn man die Potenzreihe einer Funktion nach der  $n$ -ten Potenz abbricht, erhält man eine Näherungsformel für diese Funktion.

Je mehr Terme berücksichtigt werden, umso genauer ist diese Näherungsformel.

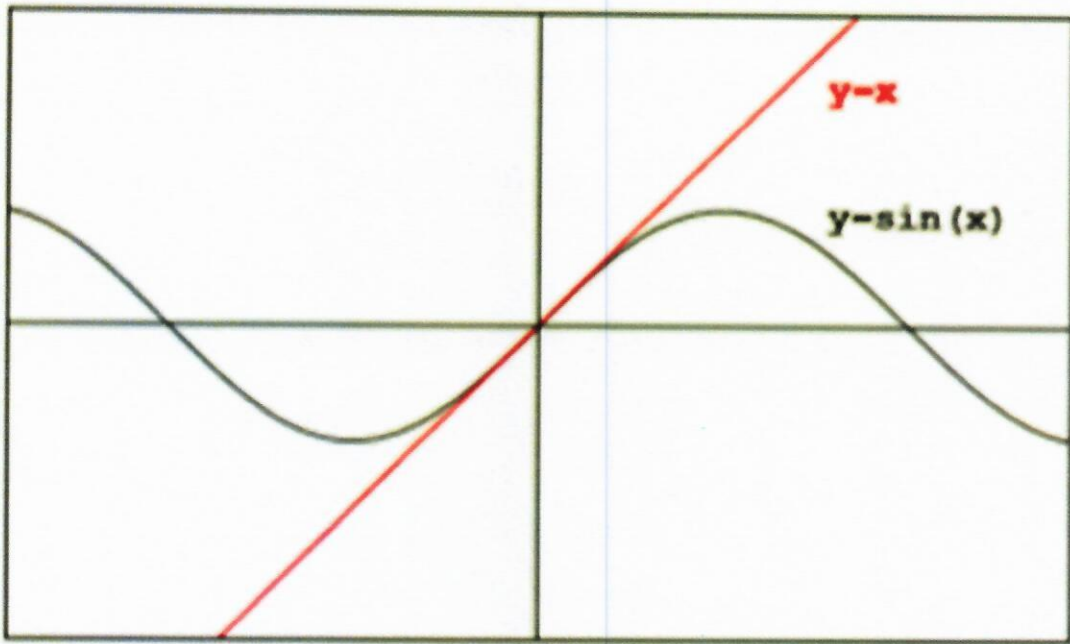
Den Abstand zwischen der Näherungsformel und der real vorhandenen Funktion bezeichnet man auch als Konvergenzradius.

Dies bedeutet, je geringer der Abstand ist, umso besser stelle ich eine Funktion durch eine Potenzreihe dar.

Beispiel:

Näherung erster Ordnung für

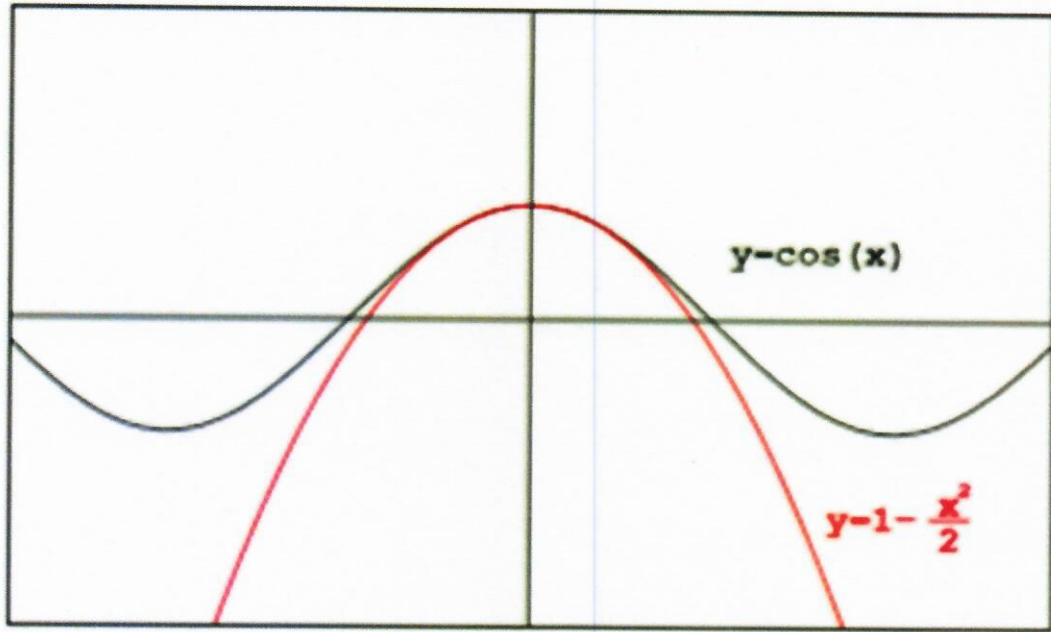
$$\sin(x) \approx x$$



Beispiel:

Näherung zweiter Ordnung für

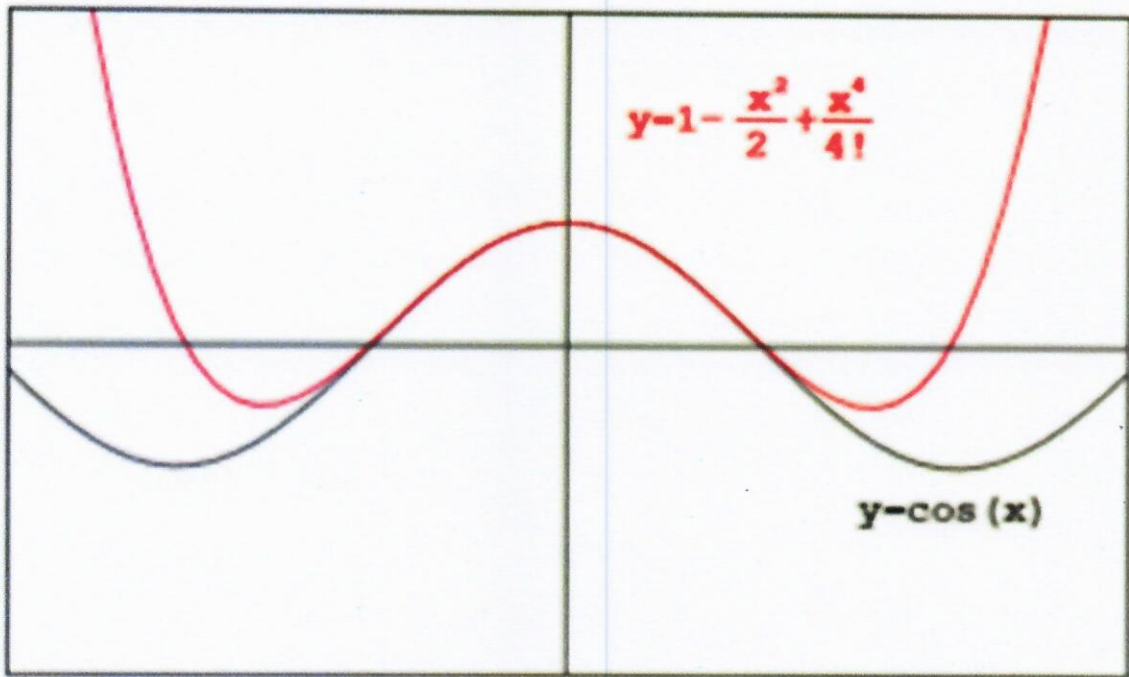
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$



Beispiel:

Näherung viertes Ordnung für

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$



$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots, \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots, \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots, \quad |x| < 1$$