Partielle Ableitungen

Def: Eine partielle Ableitung ist die Ableitung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen nach einer dieser Variablen. Die anderen Variablen werden dabei wie Konstanten behandelt.

Beispiele:

$$f(x,y) = 2x+5$$

$$f_x(x,y) = 2$$

$$f_y(x,y) = 0$$

$$f(x,y) = 14+y$$

$$f_x(x,y) = 0$$

$$f_y(x,y) = 1$$

Beispiel:

$$f(x,y) = 2x + 3y$$
$$f_x(x,y) = 2$$
$$f_y(x,y) = 3$$

Partielle Ableitungen höher Ordnung

Def: Im Zusammenhang mit partiellen Ableitungen spricht man von einer Ableitung 1. Ordnung, wenn einmal abgeleitet wird. Falls die Funktion jedoch zweimal abgeleitet wurde, spricht man von einer partiellen Ableitung 2. Ordnung. Entsprechend berechnet man dann die 3. und 4. Ordnung.

Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + y \\ f_y(x,y) &= x + 4y \end{aligned}\right\} \text{1. Ordnung}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 \\ f_{yy}(x,y) &= 4 \\ f_{xy}(x,y) &= 1 \\ f_{yx}(x,y) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{2. Ordnung}$$

Schreibweisen:

Folgende Schreibweisen werden häufig verwendet:

Partielle Ableitung erster Ordnung

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Partielle Ableitung zweiter Ordnung

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}$$

→ Alle bekannten Ableitungsregeln gelten auch für partielle Ableitungen.

Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 y + x^3$$

Erste partielle Ableitung nach x

$$f_x(x,y) = 2xy + 3x^2$$

Erste partielle Ableitung nach y

$$f_y(x,y) = x^2$$

Zweite partielle Ableitung nach x

$$f_{xx}(x,y) = 2y + 6x$$

Zweite partielle Ableitung nach y

$$f_{yy}(x,y) = 0$$

gemischten Ableitungen

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= 2x \\ f_{yx}(x,y) &= 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Satz von Schwarz}$$

Satz von Schwarz:

Ist die Funktion differenzierbar und stetig, so ist die Reihenfolge der Differentiation in allen Ableitungen ab der zweiten Ordnung unerheblich. Dies gilt für die meisten Funktionen.
(Für alle Funktionen die wir hier behandeln werden).

Es gilt:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

oder

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$$

Beispiel: Wir suchen die Ableitungen f_{xy} und f_{yx} der folgenden Funktion:

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)\cdot(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = f_x(x,y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^3-3xy^2)\cdot(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^4y+4x^2y^3-y^5)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\cdot[(x^4+12x^2y^2-5y^4)\cdot(x^2+y^2)-4y(x^4y+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{x^6+x^4y^2+12x^4y^2+12x^2y^4-5x^2y^4-5y^6-4x^4y^2-16x^2y^4+4y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$f_{yx}(x,y)$

$$= \frac{(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4)\cancel{(x^2+y^2)}^2 - (x^5 - 4x^3y^2 - xy^4)\cdot 2\cdot \cancel{(x^2+y^2)}\cdot 2x}{\cancel{(x^2+y^2)}^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\cdot\left[(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4)\cdot(x^2+y^2) - 4x(x^5 - 4x^3y^2 - xy^4)\right]}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{5x^6 + 5x^4y^2 - 12x^4y^2 - 12x^2y^4 - x^2y^4 - y^6 - 4x^6 + 16x^4y^2 + 4x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

Aufgabe 157:

a) $f(x,y) = x^2 y$

$f_x(x,y) = 2xy \qquad f_y(x,y) = x^2$

$f(x,y) = x \cdot y^2$

$f_x(x,y) = y^2 \qquad f_y(x,y) = 2xy$

b) $f(x,y) = e^{xy^3}$

$f_x(x,y) = y^3 \cdot e^{xy^3} \quad f_y(x,y) = 3xy^2 \cdot e^{xy^3}$

c) $f(x,y) = 4 \cdot \frac{x}{y^5}$

$f_x(x,y) = \frac{4}{y^5} \qquad f_y(x,y) = -\frac{20}{y^6}$

d)

$$f(x,y) = (2x-y)^2 + \ln(xy)$$

$$f_x(x,y) = 2(2x-y)\cdot 2 + \frac{1}{x\cancel{y}}\cdot\cancel{y}$$

$$f_x(x,y) = 4(2x-y) + \frac{1}{x}$$

$$f_y(x,y) = 2\cdot(2x-y)\cdot(-1) + \frac{1}{\cancel{x}y}\cdot\cancel{x}$$

$$f_y(x,y) = -2(2x-y) + \frac{1}{y}$$

e) $f(x,y) = x \cdot y^2 \cdot (\sin(x) + \sin(y))$

$f_x(x,y) = y^2 \cdot (\sin(x) + \sin(y)) + xy^2 \cdot \cos(x)$

$f_x(x,y) = y^2(\sin(x) + \sin(y) + x \cdot \cos(x))$

$f_y(x,y) = 2xy \cdot (\sin(x) + \sin(y)) + xy^2 \cdot \cos(y)$

$f_y(x,y) = xy(2\sin(x) + 2\sin(y) + y \cdot \cos(y))$

f) $f(x,y) = \sin(x^2 - y)$

$$f_x(x,y) = \cos(x^2 - y) \cdot 2x$$
$$= 2x \cdot \cos(x^2 - y)$$

$$f_y(x,y) = \cos(x^2 - y) \cdot (-1)$$
$$= -\cos(x^2 - y)$$

g)

$$f(x,y) = \ln\left(2x + \frac{4}{y}\right)$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2x+\frac{4}{y}} \cdot 2 = \frac{2}{\frac{2xy+4}{y}} = \frac{2y}{2xy+4}$$

$$f_x(x,y) = \frac{y}{xy+2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2x+\frac{4}{y}} \cdot \left(-\frac{4}{y^2}\right) = -\frac{4}{\left(\frac{2xy+4}{y}\right)y^2}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{2}{y(xy+2)}$$

h) $f(x,y) = \ln(x+y^2) - e^{2xy} + 3x$

$f_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2} - 2y \cdot e^{2xy} + 3$

$f_y(x,y) = \frac{1}{x+y^2} \cdot 2y - 2x e^{2xy}$

$f_y(x,y) = \frac{2y}{x+y^2} - 2x e^{2xy}$

i) $f(x,y,z) = e^{x-y} \cdot \cos(5z)$

$f_x(x,y,z) = e^{x-y} \cdot \cos(5z)$

$f_y(x,y,z) = -e^{x-y} \cdot \cos(5z)$

$f_z(x,y,z) = e^{x-y} \cdot (-\sin(5z)) \cdot 5$

$f_z(x,y,z) = -5 \cdot e^{x-y} \cdot \sin(5z)$

Aufgabe 160:

a) $f(x,y) = x^2y^3 + xy^4 - x^2 + 2\sqrt{y}$

$f_x(x,y) = 2xy^3 + y^4 - 2x$

$f_{xx}(x,y) = 2y^3 - 2$

$f_y(x,y) = 3x^2y^2 + 4xy^3 + \frac{1}{\sqrt{y}} = 3x^2y^2 + 4xy^3 + y^{-1/2}$

$f_{yy}(x,y) = 6x^2y + 12xy^2 - y^{-3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$f_{yy}(x,y) = 6x^2y + 12xy^2 - \frac{1}{2\sqrt{y^3}}$

$f_{xy}(x,y) = 6xy^2 + 4y^3$

$f_{yx}(x,y) = 6xy^2 + 4y^3$

b) $f(x,y) = e^{xy}$

$f_x(x,y) = y \cdot e^{xy}$ $\quad f_y(x,y) = x \cdot e^{xy}$

$f_{xx}(x,y) = y^2 \cdot e^{xy}$ $\quad f_{yy}(x,y) = x^2 \cdot e^{xy}$

$f_{xy}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$

$f_{yx}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$

c) $f(x,y) = e^{2y} \cdot \sin(x) + \frac{y}{x}$

$f_x(x,y) = e^{2y} \cdot \cos(x) - \frac{y}{x^2}$

$f_y(x,y) = 2 \cdot \sin(x) e^{2y} + \frac{1}{x}$

$f_{xx}(x,y) = -e^{2y} \cdot \sin(x) + \frac{2y}{x^3}$

$f_{yy}(x,y) = 4 \cdot \sin(x) \cdot e^{2y}$

$f_{xy}(x,y) = 2 \cdot \cos(x) \cdot e^{2y} - \frac{1}{x^2}$

$f_{yx}(x,y) = 2 \cdot \cos(x) \cdot e^{2y} - \frac{1}{x^2}$

Die restlichen
Teilaufgaben machen
Sie bitte als Hausaufgabe
160 d-f

Differentialgleichungen (DGL)

Beispiel: $y = x^2 - 2x - 3$

$y' = 2x - 2$

Wir suchen die Stammfunktion $y(x)$?

$$\int y'(x)\,dx = \int (2x-2)\,dx$$

$$y(x) + k = x^2 - 2x + l \quad | -k$$

$$y(x) = x^2 - 2x + (l-k) \quad ②$$

$$y(x) = x^2 - 2x + C \quad ①$$

① Gegeben ist jetzt ein Punkt $P(0|-3)$ der gesuchten Funktion

$$-3 = 0^2 \cancel{+} - 2\cdot 0 + C \Rightarrow C = -3$$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 - 2x - 3$$

② $l-k=-3$ möchte man bekommen, also kann man $l=0$ und $k=3$ wählen, um die gleiche Funktion zu erhalten.

⇒ Die konstanten können zusammengefasst werden.

⇒ Nur durch einsetzen eines Punktes P(x|y) lässt sich die Funktion eindeutig bestimmen. Diese Funktion ist aber natürlich nur eine Funktion einer unendlichen Anzahl von Scharkurven.

Man nennt dieses einsetzen eines Punktes in eine gelöste Differentialgleichung ein sog.

Anfangswertproblem.

Eine Differentialgleichung zu lösen heißt demnach, alle Funktionen y(x) zu bestimmen, die mit ihren Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt für alle x die Schnittmenge der Definitionsbereiche der Funktionen und ihrer Ableitungen eine wahre Aussage ergeben.

Voraussetzung für die Lösungen sind lediglich differenzierbare und stetige Funktionen.

Die Gesamtheit dieser Funktionen
wird auch als allgemeine
Lösung oder allgemeines
Integral der Differentialgleichung
bezeichnet, wohingegen eine
einzelne Funktion der Schar
als partikuläre Lösung oder
partikuläres Integral
bezeichnet wird.

Def:

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung in der die Ableitungen von einer oder mehreren Funktionen auftreten, die von einer oder mehreren Veränderlichen abhängen.

Die gesuchten Unbekannten sind hier Funktionen.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion $y(x)$ hat die allgemeine Form:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^n(x)) = 0$$

Die Ordnung der höchsten in einer Differentialgleichung auftretenden Ableitung heißt die Ordnung der Differentialgleichung.

Eine partielle Differential-
gleichung für eine Funktion
$z(x,y)$ in zwei unabhängigen
Veränderlichen hat die
allgemeine Form:

$$F\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{(n)} z(x,y)}{\partial y^n}\right.$$

Linearen Differentialgleichung

Eine gewöhnliche Differential-gleichung heißt linear, falls sie die Form

$$a_n(x)\cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}(x) +$$

$$\ldots + a_0(x)\cdot y(x) = b(x)$$

besitzt, wobei die Koeffizienten $a_n(x)$ und die rechte Seite $b(x)$ gegebene Funktionen sind.

Alle anderen gewöhnlichen Differentialgleichungen heißen nicht linear.

Bemerkung:

→ Um die Schreibweise zu vereinfachen, schreiben wir in der Regel für die unbekannte Funktion $y(t)$ und für ihre Ableitungen $y'(t), y''(t), \dots$ in einer gewöhnlichen Differentialgleichung nur $y, y', y'', \dots$ anstelle von

$y(t), y'(t), y''(t), \dots$

→ Für die Ableitung nach der Zeitvariablen t wird gewöhnlich die Schreibweise $\dot{y}(t)$ bzw. nur $\dot{y}$ verwendet.

→ Auch bei den partiellen Differentialgleichungen wird so verfahren, man schreibt z, z_x oder $\frac{\partial z}{\partial x}$,

z_y oder $\frac{\partial z}{\partial y}$ und für

$z(x,y)$, $\frac{\partial (\cancel{zz}) z(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$, ...

Anfangswertproblem

Die partikuläre Lösung wird durch die Bedingung erhalten, dass die Lösungskurve durch einen bestimmten Punkt $P(x_0|y_0)$ gehen soll.

Einen solchen vorgegebenen Wert $y(x_0) = y_0$ bezeichnet man als Anfangswert.

Eine Differentialgleichung mit vorgegebenen Anfangswerten wird auch als Anfangswertproblem bezeichnet.

Differentialgleichungen, die nicht nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösbar sind, heißen implizierte Differentialgleichungen.

Somit heißen dann Differentialgleichungen expliziete Differentialgleichungen wenn sie nicht nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösbar sind.

Darstellungsformen

→ Anwendungsfälle

- Isohline (Wetter, Landkarte, ...)
- C_w-Wert Ermittlung

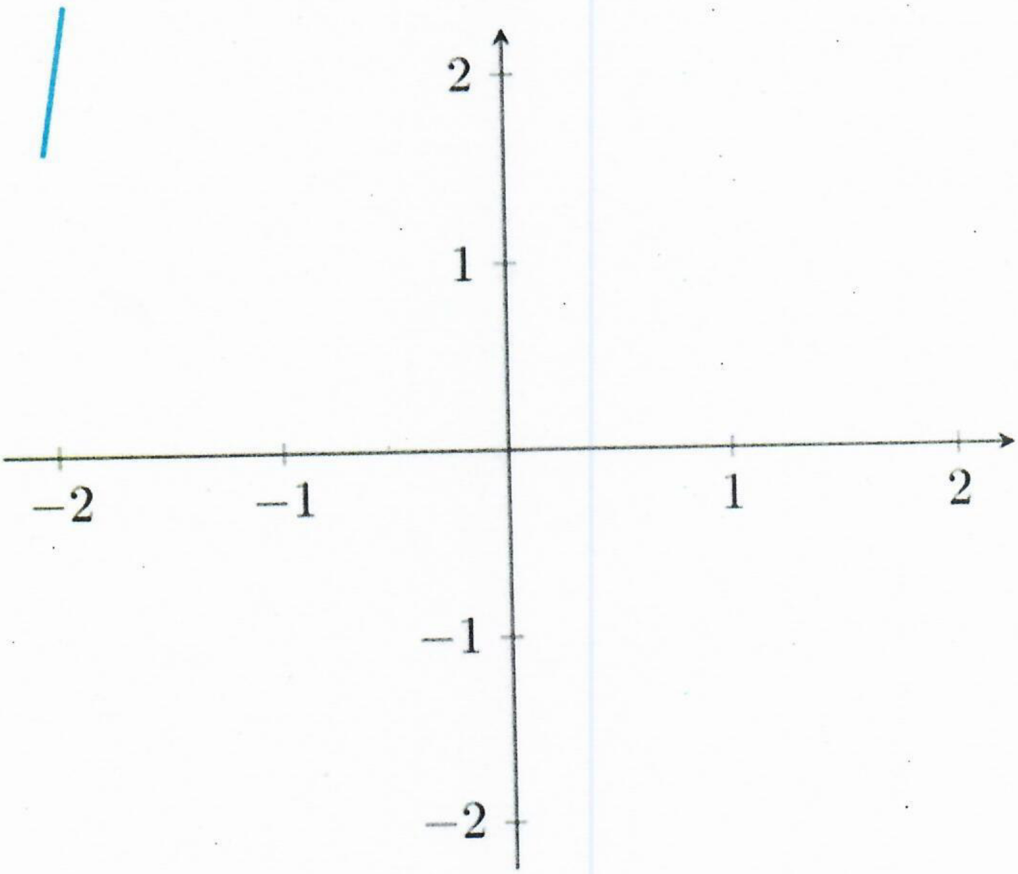
Als Beispiel schauen wir uns folgende Darstellungsform einer Differentialgleichung an

$$y' = x^2 + y^2$$

Der Punkt $(-2, 2)$ (links oben) ergibt in die Funktion eingesetzt

$$f(-2, 2) = (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

Also zeichnen wir bei $(-2, 2)$ eine kleine Strecke mit Steigung 8 ein:

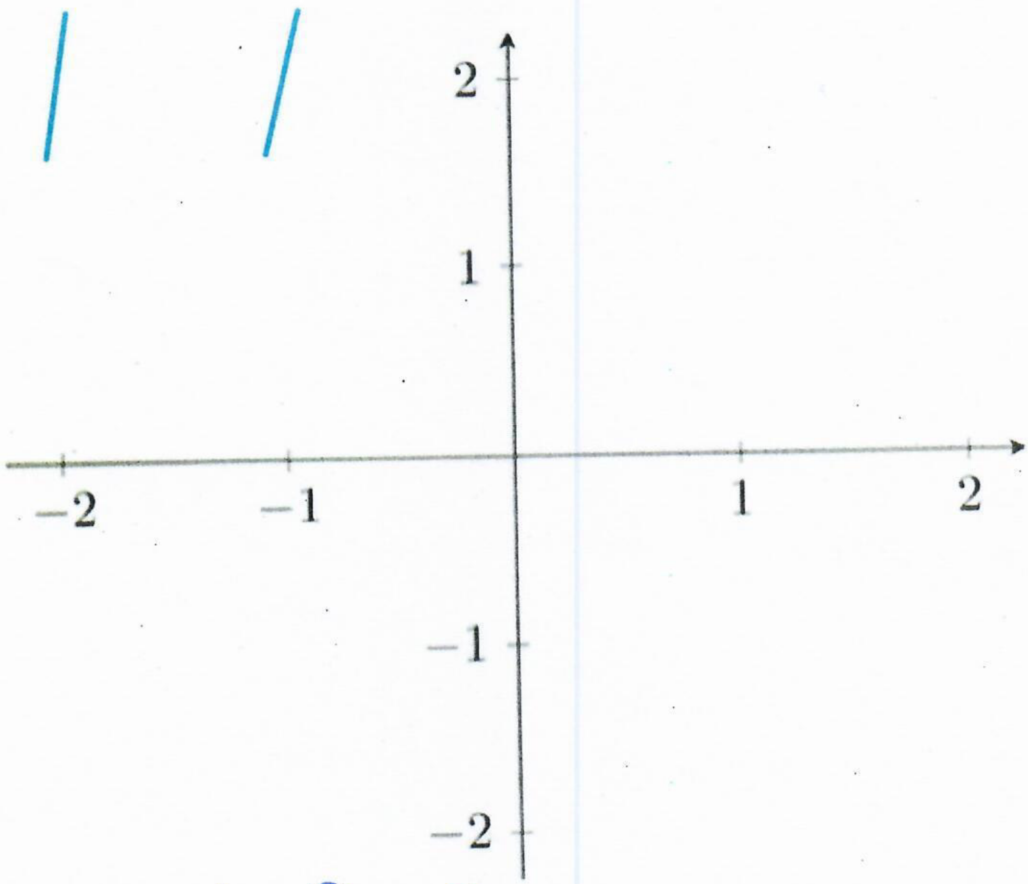


$y' = x^2 + y^2$

Bei dem Punkt $(-1, 2)$ (rechts daneben) errechnen wir

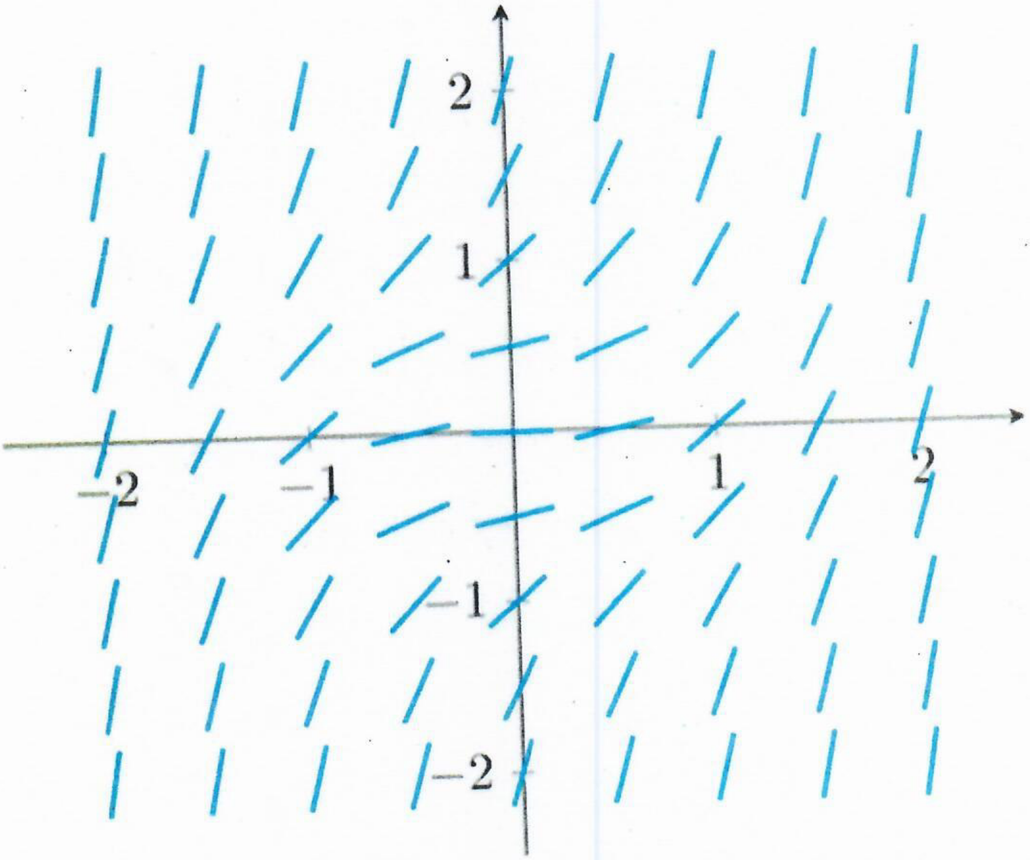
$$f(-1, 2) = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

und zeichnen deswegen eine Strecke mit Steigung 5 an den Punkt $(-1, 2)$.

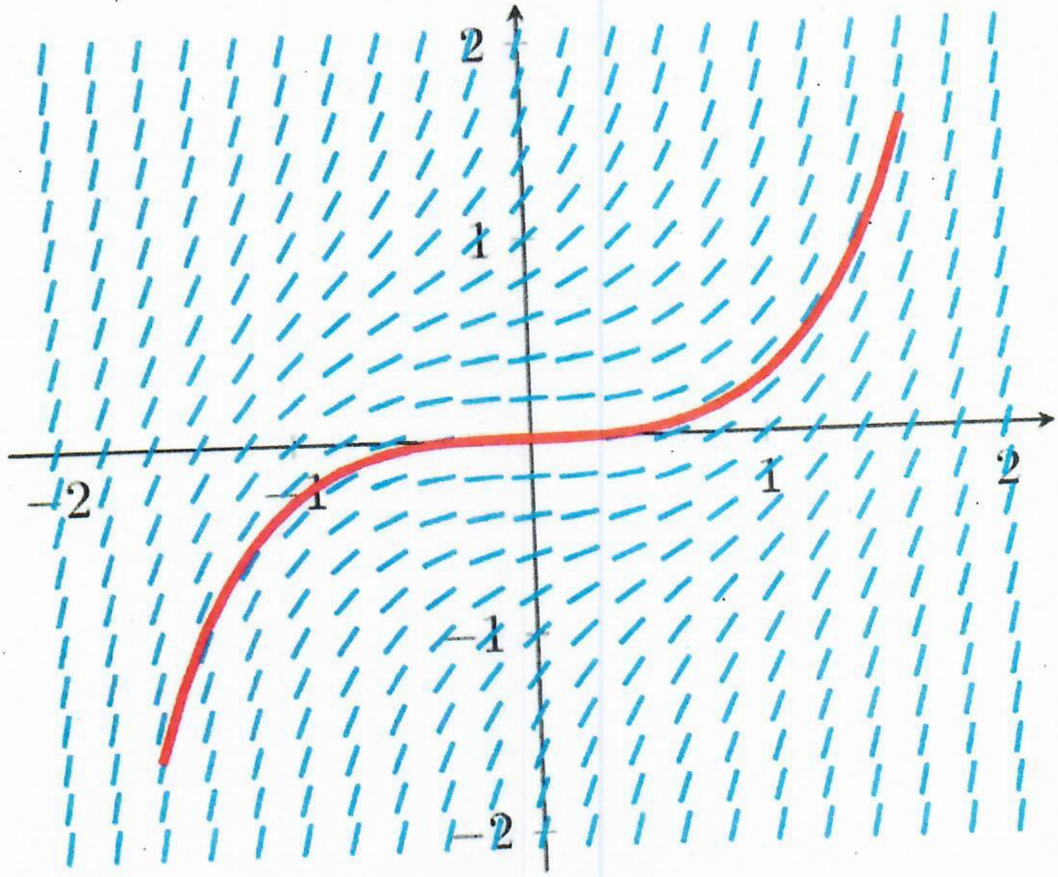


$y' = x^2 + y^2$

An je mehr Punkten man die Steigung einzeichnet, desto genauer wird das Bild. Hier das gleiche Beispiel, wenn an allen Vielfachen von $0,5$ die Steigungen eingezeichnet wurden:



Das Anschmiegen einer Lösung der DGL ist hier zu sehen:



→ Je nach Typ der Differential-gleichung gibt es verschiedene Lösungsansätze.

Wir schauen uns nun Differential-gleichungen erster Ordnung die in expliziter Form vorliegen an.

Dies bedeutet, dass die Differential-gleichung nach der höchsten auftretenden Ableitung auf-gelöst werden kann.

Trennung der Variablen

Dieses Verfahren beschränkt sich auf explizite Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Veränderlichen für die Funktion $y = y(x)$,

also Differentialgleichungen der Form

$$\boxed{y' = g(x) \cdot h(y)}$$

(g ist also ausschließlich von x, h ist ausschließlich von y abhängig.)

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad | \cdot dx$$

$$dy = \frac{-x}{y} dx \quad | \cdot y$$

$$\boxed{y\,dy = -x\,dx}$$ Trennung der Variablen

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \cancel{2}C \quad | \cdot 2$$

$$y^2 = -x^2 + C \quad | + x^2$$

$$x^2 + y^2 = 2c$$

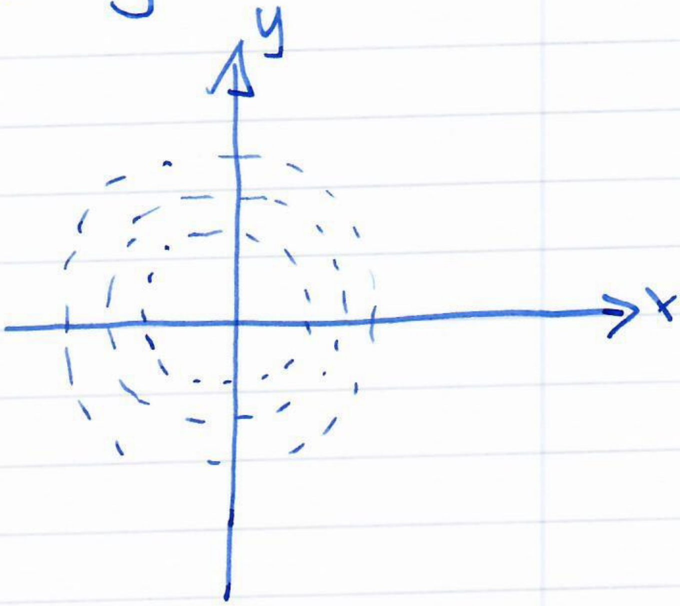
$$x^2 + y^2 = \cancel{2c}\ c_1 .$$

$$x^2 + y^2 = c$$

$$x^2+y^2=c$$

$\Rightarrow$ Kreisgleichung mit dem Radius c

$\Rightarrow$ Also erhalten wir für veschiedene c-Wete kozentrische Kreise um den Ursprung.



Beispiel:

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

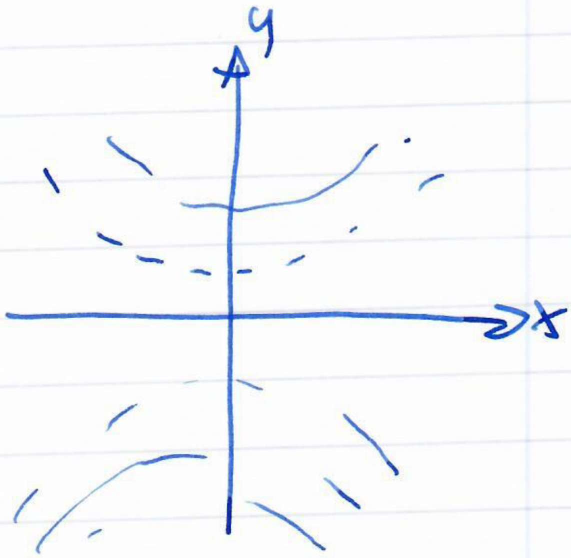
$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c \quad | \cdot 2$$

$$y^2 = x^2 + c$$

$$y^2 - x^2 = c$$

$\Rightarrow$ Als Ergebnis erhalten wir Hyperbeln.



Beispiel:

$$y' = y + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y + 1$$

$$\int \frac{1}{(y+1)} = \int dx$$

$$\ln|y+1| = x + c \qquad | e$$

$$y + 1 = e^{x+c}$$

$$y + 1 = e^{x} \cdot e^{c}$$

$$y + 1 = c \cdot e^{x} \qquad | -1$$

$$y = c \cdot e^{x} - 1$$

Probe: $y' = y + 1$

$$c \cdot e^{x} = c \cdot e^{x} - 1 + 1$$

$$c \cdot e^{x} = c \cdot e^{x}$$

Beispiel: $$y' = -\frac{1+y^2}{x\cdot y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{x\cdot y}$$

$$\frac{1}{1+y^2}\, dy = -\frac{1}{x\cdot y}\, dx$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, dy = \int -\frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+y^2| = -\ln|x| + c \quad | \cdot 2$$

$$\ln|1+y^2| = -2\cdot \ln|x| + c$$

$$\ln|1+y^2| = \ln\left|\frac{1}{x^2}\right| + c \quad | e$$

$$1+y^2 = \frac{1}{x^2} + c$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2} - 1 + c$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + c$$

Anfangswertproblem mit $y(1) = 2$

$$4 = \frac{1}{1} - 1 + c$$

$$c = 4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2} - 1 + 4$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2} + 3$$

Beispiel:

$$y' = \frac{y}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + C \qquad | e$$

$$y = e^{-\frac{1}{x}+c}$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Probe:

$$y = c \cdot e^{-1/x}$$
$$y' = c \cdot e^{-1/x} \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$y' = \frac{c}{x^2} \cdot e^{-1/x}$$

$$y' = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{c}{x^2} \cdot e^{-1/x} = \frac{c \cdot e^{-1/x}}{x^2}$$

$$\frac{c}{x^2} \cdot e^{-1/x} = \frac{c}{x^2} \cdot e^{-1/x}$$

Beispiel:

$$y' = \frac{y+1}{x-1} \qquad \text{mit } x > 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{y+1}\,dy = \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\ln|y+1| = \ln|x-1| + c \qquad |e$$

$$y+1 = (x-1)\cdot e^c$$

$$y = -1 + (x-1)\cdot e^c$$

Beispiel:

$$y' = -4x \cdot \sqrt{y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -4x \cdot \sqrt{y-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}}\, dy = -4x\, dx \qquad (y>1)$$

$$\int (y-1)^{-1/2}\, dy = \int -4x\, dx$$

$$2 \cdot (y-1)^{1/2} = -2x^2 + c \quad | :2$$

$$\sqrt{y-1} = -x^2 + \frac{c}{2} \quad | (\,)^2$$

$$y-1 = (-x^2+c)^2 \qquad (c = \tfrac{c}{2})$$

$$y = (-x^2+c)^2 + 1$$

Weitere Übungen
finden Sie in der
Aufgabensammlung
unter Trennung der Variablen