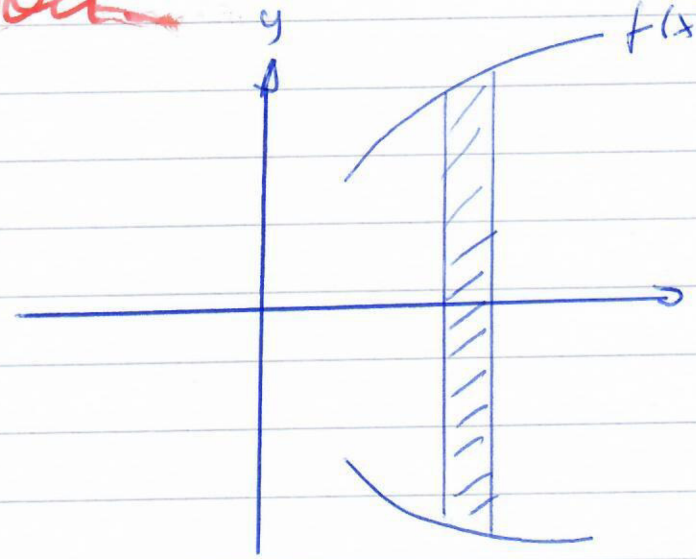
Rotationsvolumen um die x-Achse

Die Volumenfunktion ist eine Stammfunktion der Querschnittsfunktion

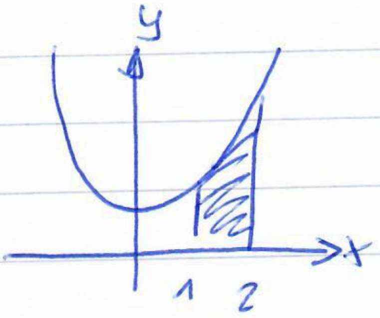


Die Funktion f sei stetig über dem Intervall [a;b]. Ihr Graph rotiere über dem Intervall [a;b] um die x-Achse. Dann gilt das Volumen V des entstehenden Körpers

$$V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \, dx$$

Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$

Krummliniges Trapez von $x=1$ bis $x=2$ rotiert um die x-Achse

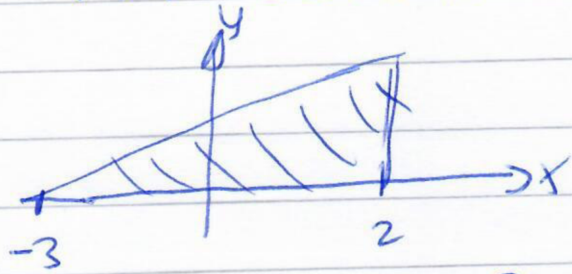


$$V = \pi \int_1^2 (x^2+1)^2 \, dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right] = \underline{\underline{\frac{178}{15}\pi}}$$

Beispiel: Die Gerade $y = \frac{2}{3}x + 2$ für $x = -3$ bis $x = 2$ begrenzt zusammen mit der x-Achse und der Geraden $x = 2$ ein Dreieck, welches um die x-Achse rotiert.



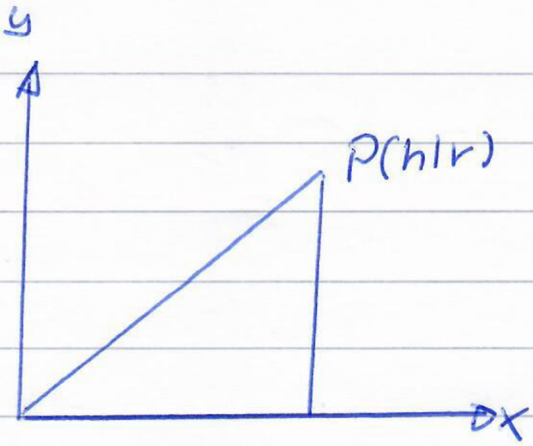
$$V = \pi \int_{-3}^{2} \left(\frac{2}{3}x + 2\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^{2} \left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 4\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{27}x^3 + \frac{8}{6}x^2 + 4x\right]_{-3}^{2}$$

$$= \pi \left[\frac{32}{27} + \frac{\cancel{32}^{16}}{\cancel{6}_3} + 8 + 4 - \cancel{\frac{72}{6}} + \cancel{12}\right]$$

$$= \pi \left[\frac{32 + 144 + 324}{27}\right] = \underline{\underline{\frac{500}{27}\pi}}$$

Beispiel:



Ursprungsgerade:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r}{h} \Rightarrow y = \frac{r}{h}x$$

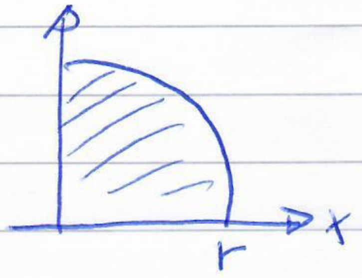
Volumen des Drehkörpers:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}h^3 - 0$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$ $\Rightarrow$ Volumenformel eines Kegels.

Beispiel: Volumen einer Kugel



Kreisgleichung: $x^2+y^2=r^2$

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

Wir drehen den Viertelskreis um die x-Achse und verdoppeln das Ergebnis.

$$V=2\cdot\pi\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}^{\,2}\,dx=2\pi\int_0^r (r^2-x^2)\,dx$$

$$=2\pi\cdot\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r=2\pi\cdot\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}r^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$ Volumen einer Kugel

Beispiel: Eine Fläche wird von einem Parabelbogen der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ und einer Geraden $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ begrenzt. Bei der Drehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper. Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers.

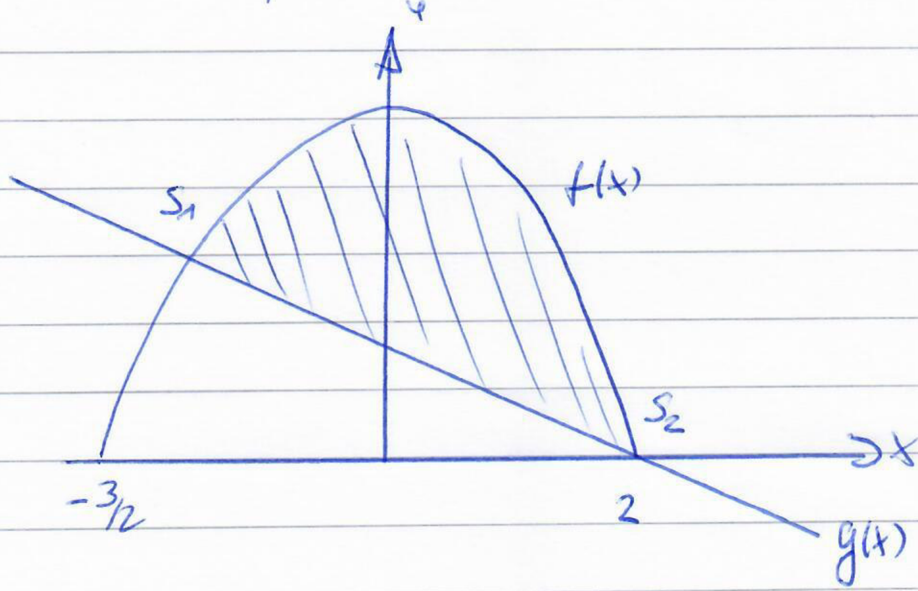
Schnittpunkte berechnen:

$$-x^2 + 4 = -\frac{1}{2}x + 1$$
$$-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0 \quad |(-2)$$

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{+1 + 7}{4}$$

$$x_1 = 2 \; ; \; x_2 = -3/2$$



Drehung des Parabelbogens:

$$V_P = \pi \cdot \int_{-3/2}^{2} (-x^2+4)^2\,dx = \pi \int_{-3/2}^{2} (x^4-8x^2+16)\,dx$$

$$= \pi \cdot \left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{-3/2}^{2}$$

$$= \pi \cdot \left[\tfrac{32}{5} - \tfrac{64}{3} + 32 + \tfrac{243}{160} - 9 + 24\right]$$

$$= \frac{16121}{480} \cdot \pi$$

Drehung der Strecke $\overline{S_1S_2}$

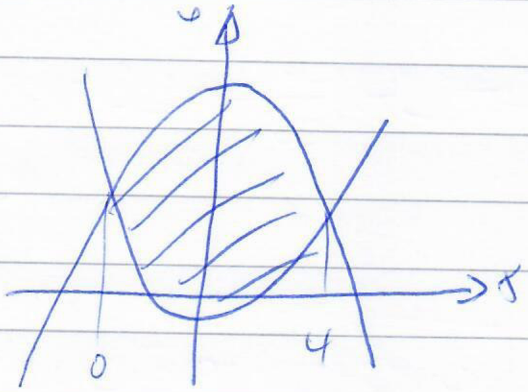
$$h = \frac{7}{2} \quad ; r = f\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{7}{4}$$

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \frac{7}{2} = \frac{343}{96}\pi$$

$$V_{ges} = V_P - V_K = \left(\frac{16121}{480} - \frac{343}{96}\right)\pi$$

$$V_{ges} = \frac{2401}{80}\pi$$

Beispiel: Die Schaubilder der Funktionen
$f(x) = -x^2+4x+4$
$g(x) = x^2-4x+4$
begrenzen eine Fläche.
Diese rotiert um die x-Achse.
Volumen?



Schnittpunkte:

$$-x^2+4x+4 = x^2-4x+4$$
$$-2x^2+8x = 0$$
$$x(-2x+8) = 0 \qquad x_1 = 0;\ x_2 = 4$$

$$V = \pi \int_0^4 (f(x)-g(x))^2\,dx = \pi \int_0^4 (-x^2+4x+4-x^2+4x-4)^2\,dx$$
$$= \pi \int_0^4 (-2x^2+8x)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 (4x^4-32x^3+64x^2)\,dx$$

falsch

...

$$V = \pi \int_0^4 f(x)^2 \, dx - \pi \int_0^4 g(x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 (-x^2+4x+4)^2 \, dx - \pi \int_0^4 (x^2-4x+4)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 (x^4+16x^2+16-8x^3-8x^2+32x) \, dx$$

$$- \pi \int_0^4 x^4+16x^2+16-8x^3+8x^2-32x) \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 (-16x^2+64x) \, dx = \pi \left[-\frac{16}{3}x^3 + 32x^2 \right]_0^4$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{16}{3} \cdot 64 + 32 \cdot 16 \right] = \frac{512}{3} \pi$$

Zur Übung rechnen Sie
bitte die Aufgaben
125/126/127

Aufgabe: $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{9-x}$

Schließt mit der x-Achse eine Fläche ein und diese rotiert um die x-Achse. Volumen?

$$V = \pi \int_0^9 \left(\frac{x}{3}\sqrt{9-x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^9 \frac{x^2}{9} \cdot (9-x)\, dx = \pi \int_0^9 \left(x^2 - \frac{x^3}{9}\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{36}x^4\right]_0^9$$

$$= \pi \cdot [243 - 182{,}25] = \underline{\underline{\frac{243}{4}\pi}}$$

Aufgabe: $f(x) = x^2 - 5x + 1$ $y = 1$

$\Rightarrow$ Verschieben der Parabel um 1 nach unten, weil nicht um die x-Achse gedreht werden kann

$\Rightarrow g(x) = x^2 - 5x$

$$V = \pi \int_0^5 (x^2 - 5x)^2 dx = \pi \int_0^5 (x^4 - 10x^3 + 25x^2) dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{25}{3}x^3 \right]_0^5$$

$$= \pi \cdot \left[625 - \frac{3125}{2} + \frac{3125}{3} \right] = \underline{\underline{\frac{625}{6}\pi}}$$

Aufgabe: $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

$$V = \pi \int_0^4 (x \cdot e^{1-x})^2 \, dx = \pi \int_0^4 x^2 \cdot e^{2-2x} \, dx$$

$$u' = e^{2-2x} \qquad u = -\frac{1}{2} \cdot e^{2-2x}$$

$$v = x^2 \quad \rightarrow v' = 2x$$

$$V = \pi \cdot \left[x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{2-2x}\right)\right]_0^4 - \pi \int_0^4 2x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{2-2x}\right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi \cdot \int_0^4 x \cdot e^{2-2x} \, dx$$

$$u' = e^{2-2x} \rightarrow u = -\frac{1}{2} \cdot e^{2-2x}$$

$$v = x \quad \rightarrow v' = 1$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{2} x e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi \int_0^4 \frac{1}{2} \cdot e^{2-2x}$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2-2x} - \frac{1}{2} x \cdot e^{2-2x} - \frac{1}{4} e^{2-2x}\right]_0^4$$

$$= \pi \left[-8 \cdot e^{-6} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^{-6} - \frac{1}{4} e^{-6} + \frac{1}{4} e^2\right]$$

$$= \pi \left[-8 \cdot e^{-6} - 2 e^{-6} - \frac{1}{4} e^{6} + \frac{1}{4} e^2\right]$$

$$= \pi \left[-\frac{41}{4} e^{-6} + \frac{1}{4} e^2\right]$$

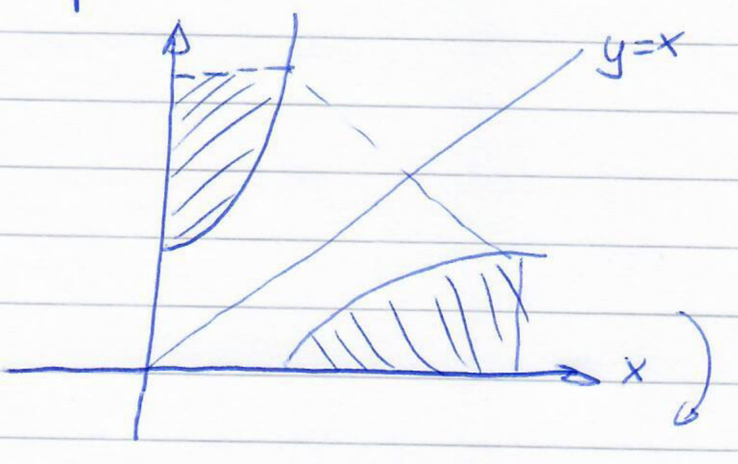
Rotation um die y-Achse

$f(x) = x^2 + 2$

Wir spiegeln die Fläche an der 1. Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$. Daraus entsteht die Umkehrfunktion

$y = x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y-2}$

Anschließend drehen wir die Umkehrfunktion um die x-Achse.



Drehung um die x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx$$

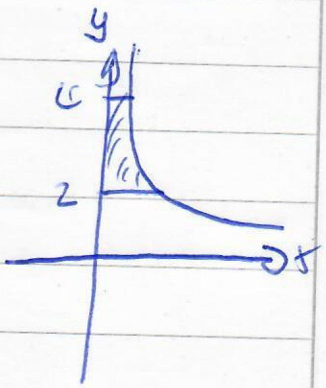
Drehung um die y-Achse

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$$

Dazu muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x^2 aufgelöst werden.
Die Integrationsgrenzen sind die y-Koordinaten der Randpunkte.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$

Der Kurvenbogen von $A(\frac{1}{4}|4)$ bis $B(\frac{1}{2}|2)$ begrenzt mit der y-Achse und den Geraden $y = 2$ und $y = 4$ eine Fläche. Diese rotiert um die y-Achse. Volumen?

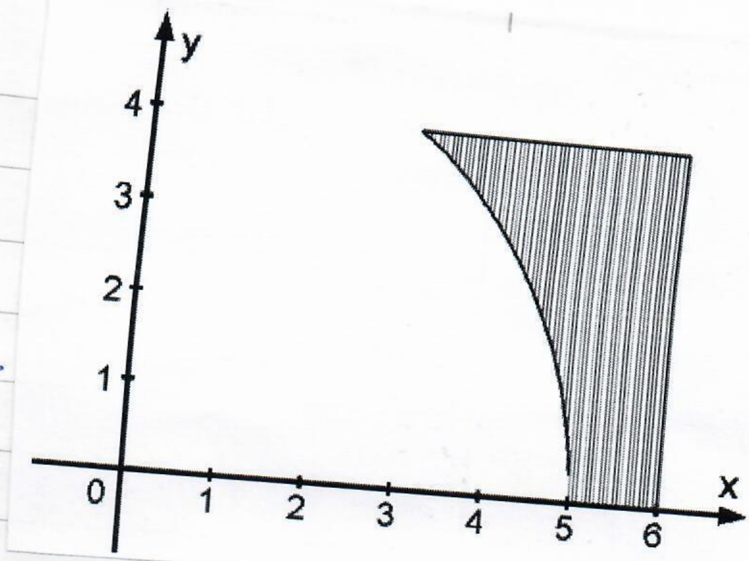


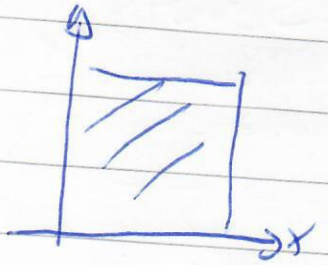
$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_2^4 \frac{1}{y^2}\,dy = \pi \int_2^4 y^{-2}\,dy$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{y}\right]_2^4 = \pi \cdot \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{\frac{1}{4}\pi}}$$

Diese Fläche wird durch einen Kreisbogen begrenzt und rotiert um die y-Achse. Volumen?

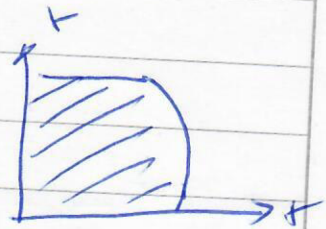




Die Gesamtfläche, wenn diese rotiert, erhalten wir einen Zylinder.

$V_{Zyl} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 144\pi$

Berechn. der inneren Fläche



$x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 25 - y^2$

$V_y = \pi \int_0^4 25 - y^2 \, dy = \pi \cdot \left[25y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^4$

$= \pi \cdot \left(100 - \frac{64}{3}\right) = \frac{236}{3}\pi$

$V_{ges} = 144\pi - \frac{236}{3}\pi = \frac{196}{3}\pi$

Laßt sich die Randkurvengleichung nicht nach x^2 auflösen, verwendet man für die Volumenberechng bei einer Drehung um die y-Achse die folgende alternative Formel.

$$\boxed{V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot y' \, dx}$$

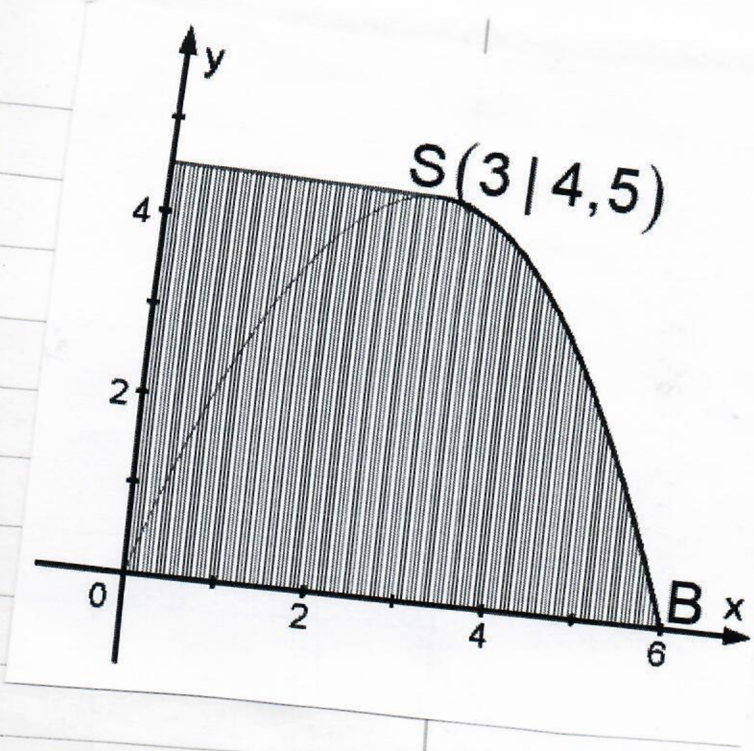
Grenzen des 1. Integrals:

Die kleinere y-Koordinate steht unten

Grenzen des 2. Integrals:

Die zugehörigen X-Koordinaten verwenden.

Der Parabelbogen SB erzeugt zur y-Achse ein krummliniges Trapez. Dieses rotiert um die y-Achse. Volumen?



$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy$$

(kann nicht nach x aufgelöst werden)

$$V_y = \pi \int_{y_B=0}^{y_S=4,5} x^2\,dy = \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2(-x+3)\,dx$$

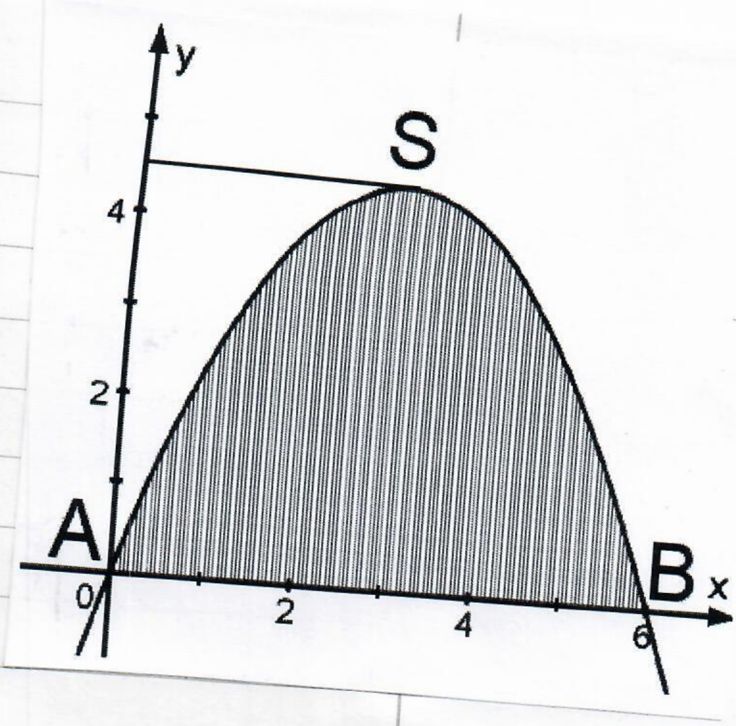
$$= \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} (-x^3+3x^2)\,dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_6^3$$

$$= \pi \left[-\frac{81}{4} + 27 + 324 - 216\right] = \frac{459}{4}\pi$$

Erzeugung v. Ringen

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

Es soll das eingefärbte Parabelsegment um die y-Achse gedreht werden. Volumen?



1. Gesamtdrehkörper

$$V_1 = \pi \int_{y_B=0}^{y_S=4{,}5} x^2\,dy = \pi \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2 \cdot y'\,dx$$

2. Nun drehen wir den Bogen AS um die y-Achse und den Geraden $y=4{,}5$ und die y-Achse

$$V_2 = \pi \int_{y_A=0}^{y_S=4{,}5} x^2\,dy = \pi \int_{x_A=0}^{x_S=3} x^2 \cdot y'\,dx$$

3. Subtr. der beiden Volumen.

$$V = V_1 - V_2$$

Dabei ergeben sich für die verschiedenen Körper unterschiedliche Grenzen.

$$V = \pi \cdot \int_{x_A=0}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx$$

Hier wird das Volumen des Hohlraumes berechnet.

$$V = \pi \cdot \int_{x_B=6}^{x_S=3} x^2 \cdot y' \, dx$$

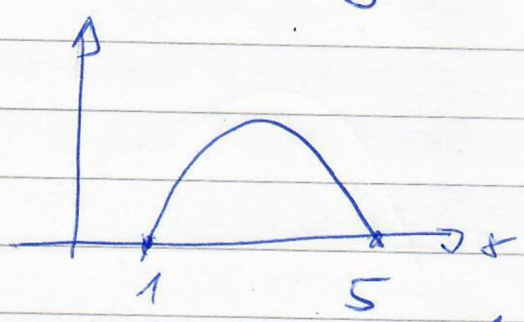
Hier wird das Gesamtvolumen berechnet.

$$V = \pi \cdot \int_{x_B=6}^{x_A=0} x^2 \cdot y' \, dx$$

Hier wird das Volumen des Ringes berechnet

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$

Volumen des Ringes bei einer Rotation um die y-Achse



$$V = \pi \int_5^1 x^2(-x+3)\,dx = \pi \int_5^1 (-x^3 + 3x^2)\,dx$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_5^1 = \pi \cdot \left[-\frac{1}{4} + 1 + \frac{625}{4} - 125\right]$$

$$= \underline{\underline{32\pi}}$$

Als weitere Übung können Sie die Aufgabe 132 rechnen.

Bogenlänge eine Kurve

Die Bogenlängenfunktion ist eine Stammfunktion der folgende Funktion.

$$B(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$$

Die Bogenlängen von $A(a/f(a))$ bis $B(b/f(b)$ werden dann mit folgende Formel berechnet.

$$L_a(b) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

Beispiel: gesucht ist die Bogenlänge der Funktion
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x|$
von 1 bis e

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x|$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$$

$$L_1(e) = \int_1^e \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}\right)}\, dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}}\, dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2}}\, dx$$

$$= \int_1^e \frac{(x^2+1)}{2x}\, dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2x} + \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\cdot \ln|x|\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\cancel{\ln|e|}}_{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\cancel{\ln|1|}}_{0}$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

Beispiel: Gesucht ist die Bogenlänge de Funktion

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

Von 1 bis a

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$L_1(a) = \int_1^a \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$L_1(a) = \int_1^a \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^a \sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}\,dx$$

$$= \int_1^a \sqrt{\left(\frac{x^2-1+1}{x^2-1}\right)}\,dx = \int_1^a \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

$$= \int_1^a \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$u = x^2-1$; $u' = 2x$; $\frac{du}{dx} = 2x$; $\frac{1}{2}du = x\,dx$

$x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 0$
$x_2 = a \rightarrow u_2 = a^2-1$

$$= \int_0^{a^2-1} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_0^{a^2-1} u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_0^{a^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot\sqrt{u}\right]_0^{a^2-1}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{a^2-1} - \cancel{\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{0}} = \sqrt{a^2-1}$$

Mehrfachintegrale

Beispiel: $\int_2^3 \int_4^5 \int_5^8 \ln|x| \, dx\, dy\, dz$

Die Integration bei einem Mehrfachintegral wird in der Reihenfolge der Differentiale ausgeführt

"Man integriert von innen nach außen"

→ Bei konstanten Integrations-grenzen kann die Reihenfolge der Integration auch vertauscht werden

Beispiele:

$$\int_{y=1}^{y=2} \boxed{\int_{x=1}^{x=3} x \cdot y \, dx} \, dy$$

$$= \cancel{\int_{y=1}^{y=2} \frac{1}{2} x^2 \cdot y} \quad = \int_{y=1}^{y=2} \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot y \right]_{x=1}^{x=3}$$

$$= \int_{y=1}^{y=2} \left(\frac{9}{2} y - \frac{1}{2} y \right) dy = \int_{y=1}^{y=2} 4y \, dy$$

$$= \left[2y^2 \right]_{y=1}^{y=2} = 8 - 2 = \underline{\underline{6}}$$

Beispiel:

$$\int_{y=1}^{y=2}\int_{x=1}^{x=3} x\cdot y \, dx \, dy$$

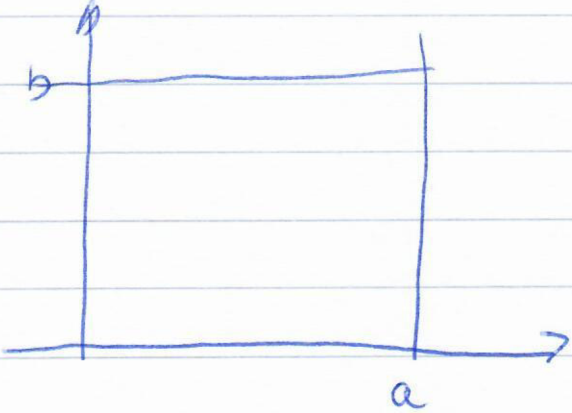
$$= \int_{x=1}^{x=3} \left[\frac{1}{2} y^2 \cdot x \right]_1^2 dx$$

$$= \int_{x=1}^{x=3} \left(2x - \frac{1}{2}x\right) dx = \int_{x=1}^{x=3} \frac{3}{2} x \, dx$$

$$= \left[\frac{3}{4} x^2 \right]_{x=1}^{x=3} = \frac{27}{4} - \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = \underline{\underline{6}}$$

Zweifachintegrals

Beispiel:



$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b} dy\,dx = \int_{x=0}^{x=a} [y]_0^b\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} b\,dx = [bx]_0^a = \underline{\underline{a\cdot b}}$$

Beispiel:

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=-2}^{1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x\right]_{-2}^{1}dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{1}{3}+y^2+\frac{8}{3}+2y^2\right)dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=1}(3y^2+3)\,dy=\left[y^3+3y\right]_0^1$$

$$=1+3=\underline{\underline{4}}$$

Aufgabe 151:

a)

$$\int_{y=0}^{y=\pi/2} \int_{x=0}^{x=\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(2y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=\pi/2} \Big[-\cos(x) \cdot \cos(2y) \Big]_{x=0}^{x=\pi/2} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=\pi/2} -\overset{0}{\cancel{\cos(\tfrac{\pi}{2})}} \cdot \cos(2y) + \overset{1}{\cancel{\cos(0)}} \cdot \cos(2y)\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=\pi/2} \cos(2y)\, dy = \Big[\frac{1}{2} \sin(2y) \Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overset{0}{\cancel{\sin(2 \cdot \tfrac{\pi}{2})}} - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{2} \cdot \sin(0)}} = \underline{\underline{0}}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cdot\cos(3y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\cdot\cos(3y)\right]_0^{\pi/2} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \Big(-\frac{1}{2}\overset{-1}{\cancel{\cos(2\cdot\tfrac{\pi}{2})}}\cdot\cos(3y)$$

$$+ \frac{1}{2}\overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\cdot\cos(3y)\Big)\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(3y)\,dy = \left[+\frac{1}{3}\sin(3y)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \Big[\frac{1}{3}\underset{-1}{\cancel{\sin(3\cdot\tfrac{\pi}{2})}} - \frac{1}{3}\cdot\underset{0}{\cancel{\sin(0)}}\Big] = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

b) $$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cdot\cos^2(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\cos(x)\cdot\cos^2(y)\right]_0^{\pi/2} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\underbrace{\cancel{\cos}(\tfrac{\pi}{2})}_{0}\cos^2(y) + \underbrace{\cancel{\cos}(0)}_{1}\cdot\cos^2(y)\right] dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2(y)\,dy \qquad \text{FS S. 33}$$

$$= \left[\frac{y}{2} + \frac{1}{4}\cdot\sin(2y)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\cancel{\sin(2\cdot\tfrac{\pi}{2})}}_{0} \cancel{-0} - \cancel{\frac{1}{4}\cdot\sin(0)}$$

$$= \pi/4$$

c)

$$I_1 = \int_0^{\pi} \int_1^{2} y \cdot \cos(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{\cancel{y} \cdot \sin(xy)}{\cancel{y}} \right]_1^2 dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\sin(xy) \right]_1^2 dy$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(2y) - \sin(y)\, dy$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos(2y) + \cos(y) \right]_0^{\pi}$$

$$= \Big[-\frac{1}{2} \cancel{\cos(2\pi)} + \overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}}$$

$$+ \frac{1}{2} \overset{1}{\underset{1}{\cancel{\cos(0)}}} - \overset{1}{\cancel{\cos(0)}} = \underline{\underline{-2}}$$

Weitere Übungsaufgaben

Aufgaben 151
152
153
155