Partielle Integration

→ Produktregel für die Integration

Herleitung aus der Produktregel für die Ableitungen.

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Statt f schreiben wir F
Statt f' schreiben wir f

$$(F(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g(x) + F(x)\, g'(x)$$

Integration:

$$\int (F(x)\cdot g(x))'\,dx = \int f(x)\cdot g(x)\,dx + \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$F(x)\cdot g(x) = \int f(x)\cdot g(x)\,dx + \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

Kurzform:

$$\boxed{\int_a^b u'v\,dx = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b v'u\,dx}$$

Merksatz:

Auf der linken Seite steht das "schwere" Integral und auf der rechten Seite steht das "leichte". Integral
Ist dies nicht der Fall, also das rechte Integral schwerer als das linke Integral, so ist der Ansatz falsch.

Beispiel:

$$\int_1^e x \cdot \ln|x| \, dx \qquad \int_a^b u' \cdot v \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v' \cdot u \, dx$$

$$u' = \ln|x| \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u = x \cdot \ln|x| - x \\ v' = 1 \end{array}}$$
$$v = x \rightarrow$$

$$= \int_1^e x \cdot \ln|x| \, dx = [(x \cdot \ln|x| - x) \cdot x]_1^e$$

!

$$- \int_1^e (x \cdot \ln|x| - x) \cdot 1 \, dx$$

$\Rightarrow$ falscher Ansatz

$$u' = x \rightarrow u = \frac{1}{2}x^2$$
$$v = \ln|x| \rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x|\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x|\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x|\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 \cdot \underbrace{\cancel{\ln|e|}}_{1} - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \underbrace{\cancel{\ln|1|}}_{0} + \frac{1}{4}1^2$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

Beispiel:

$$\int_1^{e^2} x^2 \cdot \ln|x| \, dx \qquad \begin{array}{l} u' = x^2 \rightarrow u = \frac{1}{3}x^3 \\ v = \ln|x| \rightarrow v' = 1/x \end{array}$$

$$= \left[1/3 x^3 \cdot \ln|x| \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \left[1/3 x^3 \cdot \ln|x| \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1/3 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln|x| - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^{e^2}$$

$$= \left[\frac{1}{3} e^6 \cdot \ln|e^2| - \frac{1}{9} e^6 - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cancel{1^3 \cdot \ln|1|}}_{0} + \frac{1}{9} \cdot 1^3 \right.$$

$$= \frac{2}{3} e^6 - 1/9 e^6 + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} e^6 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(5e^6 + 1)$$

Beispiel:

$$\int_a^b \ln|x|\,dx = \int_a^b 1\cdot \ln|x|\,dx$$

$u' = 1 \rightarrow u = x$

$v = \ln|x| \rightarrow v' = 1/x$

$$= \left[x\cdot \ln|x|\right]_a^b - \int_a^b x\cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[x\cdot \ln|x|\right]_a^b - \int_a^b 1\,dx$$

$$= \left[x\cdot \ln|x| - x\right]_a^b$$

Herleitung der Stammfunktion von $\ln|x|$.

Beispiel: $\int_0^3 x \cdot \ln|4-x|\,dx$

$\Rightarrow$ Bei manchen Beispielen braucht man eine Subst. und ein part. In.

1. Methode: par. Int., dann Subst.

$u' = x \quad \rightarrow u = \frac{1}{2}x^2$

$v = \ln(4-x) \quad \rightarrow v' = -\frac{1}{4-x} = \frac{1}{x-4}$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|4-x|\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x-4}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|4-x|\right]_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2}{x-4}\,dx$

Subst: $u = x-4;\ u' = 1;\ \frac{du}{dx} = 1;\ du = dx$

$x = u+4$

$x_1 = 0 \rightarrow u_1 = -4$

$x_2 = 3 \rightarrow u_2 = -1$

$= -\frac{1}{2} \cdot \int_{-4}^{-1} \frac{(u+4)^2}{u}\,du = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{-1} \frac{u^2+8u+16}{u}\,du$

$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^{-1} \left(u+8+\frac{16}{u}\right) du = +\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u^2+8u+16 \cdot \ln|u|\right]_{-1}^{-4}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot 16 - 32 + 16 \cdot \ln|-4| - \frac{1}{2} + 8 - 16 \cdot \underbrace{\cancel{\ln|-1|}}_{0}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[8 - 32 + 16 \cdot \ln|-4| - \frac{1}{2} + 8\right] = -\frac{33}{4} + 8 \cdot \ln|4|$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|4-x\right]_0^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \cancel{\ln}|4-3| \ldots \quad = 0$

Gesamt: $-\frac{33}{4} + 8 \cdot \ln|4|$

2. Methode: Zuerst die Subst, dann die part. Integr.

$$\int_0^3 x \cdot \ln|4-x|\, dx$$

$u = 4-x$; $u' = -1$; $\frac{du}{dx} = -1$; $-du = dx$

$x = 4-u$; $x_1 = 0 \to u_1 = 4$; $x_2 = 3 \to u_2 = 1$

$$= -\int_4^1 (4-u) \cdot \ln|u|\, du = \int_1^4 (4-u) \cdot \ln|u|\, du$$

$u' = 4-u \to u = 4u - \frac{1}{2}u^2$

$v = \ln|u| \to v' = 1/u$

$$= \left[(4u - \tfrac{1}{2}u^2) \cdot \ln|u|\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{u} \cdot (4u - \tfrac{1}{2}u^2)\, du$$

$$= \left[(4u - \tfrac{1}{2}u^2) \cdot \ln|u|\right]_1^4 - \int_1^4 (4 - \tfrac{1}{2}u)\, du$$

$$= \left[(4u - \tfrac{1}{2}u^2) \cdot \ln|u| - 4u + \tfrac{1}{4}u^2\right]_1^4$$

$$= \left[(16-8) \cdot \ln|4| - 16 + 4 - (4 \cdot 1 \cdot \cancel{\tfrac{1}{2} 1^2 \cdot \ln|1|}_{0}) - \tfrac{1}{4}\right.$$

$$= 8 \cdot \ln|4| - \frac{33}{4}$$

Beispiel: $\int_{2}^{-2} (x^2-4) \cdot e^{-x} \, dx$

$u' = e^{-x} \rightarrow u = -e^{-x}$
$v = x^2-4 \rightarrow v' = 2x$

$$= \left[-e^{-x} \cdot (x^2-4)\right]_2^{-2} - \int_2^{-2} -e^{-x} \cdot 2x \, dx$$

$$= \left[-e^{-x}(x^2-4)\right]_2^{-2} + \int_2^{-2} e^{-x} \cdot 2x \, dx$$

weiteres part. Integ.

$u' = e^{-x} \rightarrow u = -e^{-x}$
$v = 2x \rightarrow v' = 2$

$$= \left[-e^{-x} \cdot 2x\right]_2^{-2} - \int_2^{-2} 2 \cdot (-e^{-x}) dx$$

$$= \left[-e^{-x} \cdot 2x\right]_2^{-2} + \int_2^{-2} 2 \cdot e^{-x} \, dx$$

$$= \left[-e^{-x} \cdot 2x\right]_2^{-2} + \left[2 \cdot (-e^{-x})\right]_2^{-2}$$

Zusammengesetzt

$$= \left[-e^{-x}(x^2-4) - e^{-x} \cdot 2x - 2e^{-x}\right]_2^{-2}$$

$$= \left[-e^{-x}(x^2-4+2x+2)\right]_2^{-2}$$

$$= \left[-e^{-x}(x^2+2x-2)\right]_2^{-2}$$

$$= -e^2(4-4-2) + e^{-2}(4+4-2)$$

$$= 2e^2 + 6e^{-2} = 2e^2 + \frac{6}{e^2}$$

Berechnen Sie folgende Aufgaben

a) $\int (e^x)^2 \, dx$

b) $\int x(\sin(x^2) + \cos(x^2)) \, dx$

c) $\int x(\sin^2(x) + \cos^2(x) \, dx$

d) $\int \sin^3(x) \, dx$

e) $\int x^2 \cdot \sin(x) \, dx$

f) $\int x \cdot e^{3x} \, dx$

g) $e^{b+a\sqrt{t}} \, dt$

h) $\int (x^2-4) \cdot \cos(2x) \, dx$

a) $\int (e^x)^2 dx = \int e^x \cdot e^x \, dx$

$u' = e^x \rightarrow u = e^x$
$v = e^x \rightarrow v = e^x$

$= [e^x \cdot e^x] - \int e^x \cdot e^x dx$

$\int e^{2x} dx = [e^{2x}] - \int e^{2x} dx \quad | + \int$

$2 \cdot \int e^{2x} dx = [e^{2x} \quad | :2$

$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

b) $\int x \cdot (\sin(x^2) + \cos(x^2))\,dx$

$u = x^2 \qquad \frac{du}{dx} = 2x \;;\; \frac{1}{2}\,du = x\,dx$

$u' = 2x$

$= \frac{1}{2}\int (\sin(u) + \cos(u))\,du$

$= \frac{1}{2}(-\cos(u) + \sin(u)) + c$

$= \frac{1}{2}(-\cos(x^2) + \sin(x^2)) + c$

c) $\int x \cdot \underbrace{(\sin^2(x) + \cos^2(x))}_{=1} \, dx$

$= \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$

d) $\int \sin^3(x)\,dx = \int \sin^2(x)\cdot \sin(x)\,dx$

$= \int (1-\cos^2(x))\cdot \sin(x)\,dx$

$= \int \sin(x)\,dx - \int \cos^2(x)\cdot \sin(x)\,dx$

$u = \cos(x)$

$u' = -\sin(x)$

$\frac{du}{dx} = -\sin(x)$

$-du = \sin(x)\,dx$

$= \int \sin(x)\,dx + \int u^2\,du$

$= -\cos(x) + \frac{1}{3}u^3 + C$

$= -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + C$

e) $\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx$

$u' = \sin(x) \rightarrow u = -\cos(x)$
$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

$= [-x^2 \cdot \cos(x)] + \int \cos(x) \cdot 2x\,dx$

$u' = \cos(x) \rightarrow u = \sin(x)$
$v = 2x \rightarrow v' = 2$

$= [-x^2 \cdot \cos(x)] + [2x \cdot \sin(x)] - 2\int \sin(x)\,dx$

$= -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) + 2\cos(x) + C$

f) $\int x \cdot e^{3x} dx$

$u' = e^{3x} \rightarrow u = \frac{1}{3}e^{3x}$

$v = x \rightarrow v' = 1$

$= \left[\frac{1}{3}x \cdot e^{3x}\right] - \int 1 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx$

$= \left[\frac{1}{3}x \cdot e^{3x}\right] - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx$

$= \frac{1}{3}x \cdot e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$

$= e^{3x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) + c$

$$g)\ \int e^{b+a\sqrt{t}}\,dt = \int e^{b}\cdot e^{a\sqrt{t}}\,dt$$

$$= e^{b}\int e^{a\sqrt{t}}\,dt$$

$$u=\sqrt{t}\ ;\ u'=\frac{1}{2}\cdot t^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\ ;\ 2\sqrt{t}\,du=dt$$

$$2u\,du=dt$$

$$=e^{b}\int e^{au}\cdot 2u\,du$$

$$u'=e^{au}\rightarrow u=\frac{1}{a}e^{au}$$

$$v=2u\rightarrow v'=2$$

$$=e^{b}\left[\left(\frac{2u}{a}\cdot e^{au}\right)-\int\frac{2}{a}e^{au}\,du\right]$$

$$=e^{b}\left[\frac{2u}{a}\cdot e^{au}-\frac{2}{a}\int e^{au}\,du\right]$$

$$=e^{b}\left[\frac{2u}{a}e^{au}-\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{au}\right]+c$$

$$=e^{b}\left[\frac{2u}{a}\cdot e^{au}-\frac{2}{a^{2}}\cdot e^{au}\right]+c$$

$$=\frac{2}{a}e^{b}\cdot e^{au}\left(u-\frac{1}{a}\right)+c$$

$$=\frac{2}{a}\cdot e^{b+a\sqrt{t}}\left(\sqrt{t}-\frac{1}{a}\right)+c$$

h) $\int (x^2-4) \cdot \cos(2x)\, dx$

$u' = \cos(2x) \rightarrow u = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$
$v = x^2-4 \rightarrow v' = 2x$

$= \left[(x^2-4) \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) \right] - \int x \cdot \sin(2x)\, dx$

$u' = \sin(2x) \rightarrow u = -\frac{1}{2} \cos(2x)$
$v = x \rightarrow v' = 1$

$= \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x \right] - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot 1\, dx$

$= \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x \right] + \int \frac{1}{2} \cos(2x)\, dx$

Gesamt:
$= (x^2-4) \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$

$= \sin(2x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x + C$

$= \sin(x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{9}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x + C$

Beispiel:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

$u' = e^x \rightarrow u = e^x$

$v = \cos(x) \rightarrow v' = -\sin(x)$

$$= \left[e^x \cdot \cos(x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \underline{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \sin(x)\, dx}$$

$u' = e^x \rightarrow u = e^x$

$v = \sin(x) \rightarrow v' = \cos(x)$

$$= \left[e^x \cdot \sin(x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = \left[e^x (\sin(x) + \cos(x)) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} \left[e^x (\sin(x) + \cos(x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{\pi/2} \cdot (\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2)) - e^{-\pi/2} (\sin(-\pi/2) + \cos(-\pi/2)))$$

$$= \frac{1}{2} (e^{\pi/2} \cdot (1 + 0) - e^{-\pi/2} (-1 + 0))$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-\pi/2} + e^{\pi/2})$$

Beispiel:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin(2x)\,dx$$

$u' = e^{-x} \rightarrow u = -e^{-x}$

$v = \sin(2x) \rightarrow v' = 2 \cdot \cos(2x)$

$$= \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \cos(2x)\,dx$$

$u' = e^{-x} \rightarrow u = -e^{-x}$

$v = \cos(2x) \rightarrow v' = -2 \cdot \sin(2x)$

$$= 2 \cdot \left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} (-e^{-x}) \cdot (-2 \cdot \sin(2x))\,dx$$

$$= 2 \cdot \left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin(2x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin(2x)\,dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2 \cdot \left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2\left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[-e^{-\pi/2} \cdot \cancel{\sin(2 \cdot \tfrac{\pi}{2})} + e^{0} \cdot \cancel{\sin(2 \cdot 0)} + 2\left[-e^{-\pi/2} \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot \tfrac{\pi}{2})}_{-1} + \underbrace{e^{0}}_{1} \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_{1}\right)\right]$$

$$= \cancel{1}\ \frac{2}{5}\left(e^{-\pi/2} + 1\right)$$

Partialbruchzerlegung

Wird für die Integration von gebr. rat. Funktionen benötigt.
Das Lösungsverfahren richtet sich nach dem Aussehen einer gebr. rat. Funktion.

Beispiel:

$$\int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-3} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{x+2} \right) dx + \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{x-3} \right) dx$$

$$= \left[3 \cdot \ln|x+2| + 1 \cdot \ln|x-3| \right]_{-1}^{2}$$

$$= 3 \cdot \ln|4| + \overset{0}{\cancel{\ln|-1|}} - 3 \cdot \overset{0}{\cancel{\ln|1|}} - \ln|-4|$$

$$= 2 \cdot \ln|4| = \ln|4^2| = \ln|16|$$

$$\frac{3}{(x+2)} + \frac{1}{(x-3)} = \frac{3(x-3)+1\cdot(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{3x-9+x+2}{x^2-3x+2x-6} = \frac{4x-7}{x^2-x-6}$$

Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{2} \frac{4x-7}{x^2-x-6}\,dx \quad \xrightarrow{\text{Zerlegen}}$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-3)} \right) dx$$

Das "Komplexe" Integral wird in "einfache" Integrale zerlegt.

Verfahren für Integrale mit

→ einfachen Nullstellen im Nenner und
→ Grad Zähler < Grad Nenner

Beispiel: $\int_{-1}^{2} \frac{4x-7}{x^2-x-6}\,dx$

→ Suchen der Nullstellen des Nenners

$x^2-x-6=0$

$x_{1/2} = \frac{1+\sqrt{1+4\cdot 1(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 5}{2}$

$x_1 = 3$; $x_2 = -2$

→ Aufstellung der Zerlegung

$$\frac{4x-7}{(x^2-x-6)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

Wichtig: Den Ansatz hier beachten!

$\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich im Zähler

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{x(A+B)+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

$$A+B=4 \quad \Rightarrow B=4-A$$
$$-3A+2B=-7$$

$$-3A+2(4-A)=-7$$
$$-3A+8-2A=-7$$
$$-5A=-15 \quad |:(-5)$$
$$A=3$$
$$B=4-3=1$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} \frac{4x-7}{x^2-x-6}\,dx = \int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{(x+2)} + \frac{1}{(x-3)}\right)dx$$

$$= \left[3 \cdot \ln|x+2| + 1 \cdot \ln|x-3|\right]_{-1}^{2}$$

$$\vdots$$

$$= \ln|16|$$

Beispiel:

$$\int_{-1}^{2} \frac{4x-8}{x^2-x-6}\,dx$$

→ Nullstellen des Nenners

$x^2-x-6=0 \quad ; x_1 = 3 \; ; x_2 = -2$

$$\frac{4x-8}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{x(A+B)+(2A-3B)}{(x-3)(x+2)}$$

$A+B=4 \Rightarrow B=4-A$

$2A-3B=-8$

$2A-3(4-A)=-8$

$2A-12+3A=-8$

$5A=4$

$A=4/5 \Rightarrow B=4-4/5=\frac{16}{5}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2}\left(\frac{4/5}{(x-3)}+\frac{16/5}{(x+2)}\right)dx = \left[\frac{4}{5}\cdot \ln|x-3| + \frac{16}{5}\ln|x+2\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{4}{5}\cdot \underbrace{\cancel{\ln|-1|}}_{0} + \frac{16}{5}\cdot\ln|4| - \frac{4}{5}\cdot \ln|-4| - \frac{16}{5}\cdot \underbrace{\cancel{\ln|1|}}_{0}$$

$$= \frac{12}{5}\cdot \ln|4|$$

Beispiel: $\int_3^5 \frac{4}{x^2-4}\,dx$

Nullstellen des Nenners: $x^2-4=0$

$x_{1/2} = \pm 2$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{x(A+B)+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B$$
$$2A-2B=4$$
$$-2B-2B=4$$
$$-4B=4 \Rightarrow B=-1 \;;\; A=1$$

$$\int_3^5 \frac{4}{x^2-4}\,dx = \int_3^5 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_3^5$$

$$= \ln|3| - \ln|7| - \cancel{\ln|1|} + \ln|5|$$

$$= \ln\left|\frac{3\cdot 5}{7}\right| = \ln\left|\frac{15}{7}\right|$$

Beispiel: $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+3x}\,dx$

Nullstellen des Nenners: $x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$x_1=0\ ;\ x_2=-3$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{A}{(x-0)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{A(x+3)+B\cdot x}{x\cdot(x+3)}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{x(A+B)+(3A)}{x\cdot(x+3)}$$

$A+B=2 \Rightarrow B=5/3$

$3A=1 \Rightarrow A=1/3$

$$\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+3x}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{1/3}{x} + \frac{5/3}{x+3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{5}{3}\cdot\ln|x+3| \right]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\ln|4| + \frac{5}{3}\cdot\ln|7| - \frac{1}{3}\cdot\cancel{\ln|1|} - \frac{5}{3}\cdot\ln|4|$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\ln|7| - \frac{4}{3}\ln|4|$$

Beispiel: $\int_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}\,dx$

Nullstellen des Nenners: $x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0$

$x_1 = 0\,;\ x_{2,3} = \pm 1$

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{A(x^2-1) + B(x^2-x) + C(x^2+x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{x^2(A+B+C) + x(-B+C) + (-A)}{x(x+1)(x-1)}$$

$A+B+C = 1 \quad = B = -1\,;\ C = -1$

$-B+C = 0 \quad \Rightarrow C = B$

$-A = -3 \quad \Rightarrow A = 3$

$$\int_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{5} \left(\frac{3}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{x-1}\right)dx$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{5} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \Big[3 \cdot \ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x-1|\Big]_{\sqrt{3}}^{5}$$

$$= 3 \cdot \ln|5| - \ln|6| - \ln|4|$$
$$- 3 \cdot \ln|\sqrt{3}| + \ln|\sqrt{3}+1| + \ln|\sqrt{3}-1|$$

$$= 3 \cdot \ln|5| - 3 \cdot \ln|\sqrt{3}| - \ln|24| + \ln|(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)|$$

$$= 3 \cdot \ln|5| - 3 \cdot \ln|\sqrt{3} - \ln|24| + \ln|2|$$

$$= 3 \cdot \ln\left|\frac{5}{\sqrt{3}}\right| + \ln\left|\frac{1}{12}\right|$$

Nenner mit einfachen Nullstellen und der Grad Zählers ist mindestens Grad Nenners.

Beispiel:

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2-4}{x^2-9}\, dx$$

Jetzt ist der Funktionsterm nicht mehr "echt" gebrochen. Man muss ihn zuerst zerlegen mit Hilfe einer Polynomdivision.

Beispiel: $\int_{-2}^{2} \frac{x^2-4}{x^2-9}\,dx$

$$(x^2-4):(x^2-9) = 1 + \frac{5}{x^2-9}$$ Rest

$$\frac{-(x^2-9)}{5}$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(1+\frac{5}{x^2-9}\right)dx = \int_{-2}^{2} 1\,dx + \underline{\int_{-2}^{2} \frac{5}{x^2-9}\,dx}$$

$$\frac{5}{x^2-9} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\frac{5}{x^2-9} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{5}{x^2-9} = \frac{x(A+B)+(3A-3B)}{(x-3)(x+3)}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B$$
$$3A-3B=5 \Rightarrow -3B-3B=5 \Rightarrow B=-\frac{5}{6}\,;\, A=\frac{5}{6}$$

$$= \int_{-2}^{2} 1\,dx + \int_{-2}^{2}\left(\frac{5/6}{(x-3)} - \frac{5/6}{(x+3)}\right)dx$$

$$= \left[x + \frac{5}{6}\cdot \ln|x-3| - \frac{5}{6}\cdot \ln|x+3|\right]_{-2}^{2}$$

$$= \underline{2} + \cancel{\frac{5}{6}\cdot \ln|-1|}^{\,0} - \frac{5}{6}\cdot \ln|5| + \underline{2} - \frac{5}{6}\cdot\ln|-5| + \cancel{\frac{5}{6}\cdot \ln|1|}^{\,0}$$

$$= 4 - \frac{10}{6}\cdot \ln|5| = 4 - \frac{5}{3}\cdot \ln|5|$$

Beispiel: Ermitteln Sie die Stammfunktion de Folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 4} \right)$$

$$(x^3 - 4x^2) : (x^2 - 4) = x - 4 + \frac{4x - 16}{x^2 - 4}$$
$$\underline{-(x^3 - 4x)}$$
$$-4x^2 + 4x$$
$$\underline{-(-4x^2 \quad +16)}$$
$$+4x - 16$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(x - 4 + \frac{4x-16}{x^2-4} \right) dx = \frac{1}{4} \int (x-4)\, dx + \frac{1}{4} \int \underline{\frac{4x-16}{x^2-4}}\, dx$$

$$\frac{4x-16}{x^2-4} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$\frac{4x-16}{x^2-4} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4x-16}{x^2-4} = \frac{x(A+B) + (2A - 2B)}{(x-2)(x+2)}$$

$$A + B = 4 \quad \Rightarrow A = 4 - B$$
$$2A - 2B = -16$$
$$2(4 - B) - 2B = -16$$
$$8 - 2B - 2B = -16$$
$$-4B = -24$$
$$B = 6 \quad \Rightarrow A = -2$$

$$= \frac{1}{4}\int (x-4)\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{-2}{x-2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{6}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (x-4)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) - \frac{1}{2}\cdot \ln|x-2| + \frac{3}{2}\cdot \ln|x+2|\right] + C$$

$$= \frac{1}{8}x^2 - x - \frac{1}{2}\cdot \ln|x-2| + \frac{3}{2}\cdot \ln|x+2| + C$$

$$= \frac{1}{8}x^2 - x - \ln|\sqrt{x-2}| + \ln|\sqrt{x+2}^{\,3}| + C$$

$$= \frac{1}{8}x^2 - x + \ln\left|\frac{\sqrt{x+2}^{\,3}}{\sqrt{x-2}}\right| + C$$

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen; Grad Zähler < Grad Nenner

Beispiel: $\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}\,dx$

Nullstellen des Nenners:

$$x^3-8x^2+16x=0$$
$$x(x^2-8+16)=0$$
$$x(x-4)^2=0$$

$$\swarrow \qquad \downarrow$$

$$x_1=0 \qquad x_{2,3}=4$$

Neuen Ansatz:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-4)}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}=\frac{A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx}{x(x-4)^2}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}=\frac{A(x^2-8x+16)+Bx(x-4)+Cx}{x(x-4)^2}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}=\frac{x^2(A+B)+x(-8A-4B+C)+16A}{x(x-4)}$$

$$A+B=1 \qquad \Rightarrow B=\frac{13}{16}$$

$$-8A-4B+C=-4$$

$$16A=3 \qquad \Rightarrow A=\frac{3}{16}$$

$$\cancel{-8\tfrac{3}{16}} \quad C=-4+8A+4B$$

$$C=-4+\frac{8\cdot 3}{16}+\frac{4\cdot 13}{16} \quad \Rightarrow C=\frac{3}{4}$$

$$\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}\,dx=\int_1^3\left(\frac{\frac{3}{16}}{x}+\frac{\frac{13}{16}}{(x-4)}+\frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{3}{16}\cdot\ln|x|+\frac{13}{16}\cdot\ln|x-4|-\frac{3}{4(x-4)}\right]_1^3$$

$$=\frac{3}{16}\cdot\ln|3|+\frac{13}{16}\cdot\overset{0}{\cancel{\ln|-1|}}+\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{16}\cdot\overset{0}{\cancel{\ln|1|}}-\frac{13}{16}\cdot\ln|-3|+\frac{3}{12}$$

$$=-\frac{10}{16}\cdot\ln|3|+1$$

Nenner mit nur einer doppelten Nullstelle ; Grad Zählers > Grad Nenners

$$\int_0^2 \frac{4x-x^3}{(x+1)^2}\,dx$$

Hier ist keine Partialbruchzerlegung notwendig, es reicht eine erw. Subst.

$u = x+1$; $u' = 1$; $\frac{du}{dx} = 1$; $du = dx$

$x = u-1$ $\qquad x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = +1$

$\qquad x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 3$

$$\int_1^3 \frac{4(u-1)-(u-1)^3}{u^2}\,du$$

$$= \int_1^3 \frac{4u-4-(u^3-3u^2+3u-1)}{u^2}\,du$$

$$= \int_1^3 \frac{4u-4-u^3+3u^2-3u+1}{u^2}\,du$$

$$= \int_1^3 \left(-u+3+\frac{1}{u}-\frac{3}{u^2}\right)du$$

$$\left[-\frac{1}{2}u^2+3u+\ln|u|+\frac{3}{u}\right]_1^3$$

$$= -\frac{9}{2}+9+\ln|3|+1+\frac{1}{2}-3-\cancel{\ln|1|}^{0}-3$$

$$= \ln|3|$$

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen; Grad Zählers = Grad des Nenners

$$\int_{-4}^{-1} \frac{x^3-8}{x^3-3x^2}\,dx \qquad (x^3-8):(x^3-3x^2) = 1 + \frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

$$\begin{array}{l} -(x^3-3x^2) \\ \hline +3x^2-8 \end{array}$$

$$= \int_{-4}^{-1} 1\,dx + \int_{-4}^{-1} \frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}\,dx$$

Nullstellen des Nenners:

$$x^3-3x^2=0$$

$$x^2(x^{\cancel{2}}-3)=0$$

$$\swarrow \qquad \downarrow$$

$$x_{1/2}=0 \qquad x_3=3$$

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2} = \frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}$$

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2} = \frac{x^2(A+C)+x(-3A+B)+(-3B)}{x^2(x-3)}$$

$$A+C=3 \quad \Rightarrow C = 19/9$$

$$-3A+B=0 \quad \Rightarrow A = -B/3 = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

$$-3B=-8 \quad \Rightarrow B = \frac{8}{3}$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{x^3-8}{x^3-3x^2}\,dx = \int_{-4}^{-1} 1\,dx + \int_{-4}^{1} \left(\frac{8/9}{x} + \frac{8/3}{x^2} + \frac{19/9}{x-3} \right) dx$$

$$= \left[x + \frac{8}{9} \cdot \ln|x| - \frac{8}{3x} + \frac{19}{9} \cdot \ln|x-3| \right]_{-4}^{-1}$$

$$= -1 + \cancel{\frac{8}{9} \cdot \ln|-1|}^{\,0} + \frac{8}{3} + \frac{19}{9} \cdot \ln|-4|$$

$$+4 - \frac{8}{9} \cdot \ln|-4| - \frac{2}{3} - \frac{19}{9} \cdot \ln|-7|$$

$$= 5 + \frac{11}{9} \cdot \ln|4| - \frac{19}{9} \cdot \ln|7|$$

Nenner ohne Nullstelle Grad des Nenners=2 ; Grad des Zählers =0

Beispiel: $\int_{-2}^{3} \frac{4}{x^2+1}\,dx = 4\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Allg: $\int_{a}^{b} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

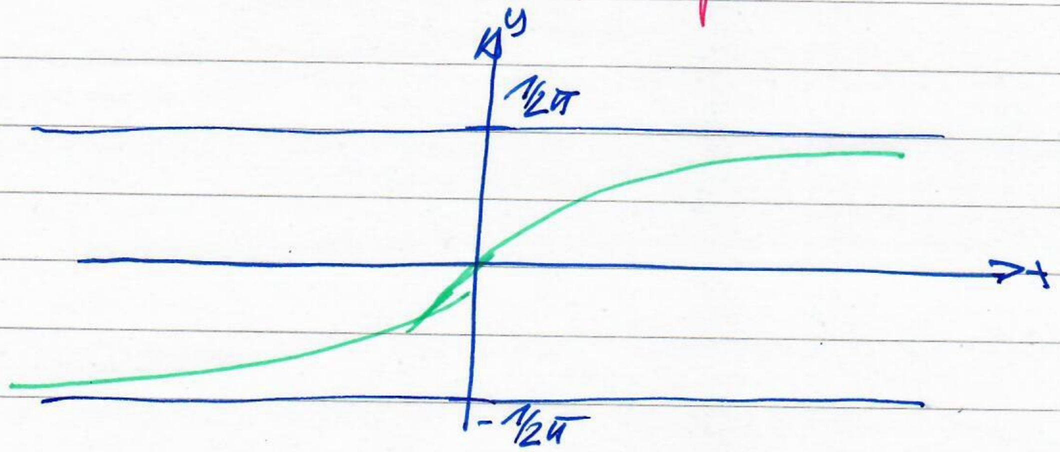
Integral Nr. 34

Grundintegral

$= 4\left[\arctan(x)\right]_{-2}^{3} = 4\left[\arctan(3) - \arctan(-2)\right]$

$= 3\pi$

arctan(x) → Umkehrfunktion von tan



Beispiel: $\int_0^5 \frac{32}{x^2+16}\,dx = 32\int_0^5 \frac{1}{x^2+4^2}\,dx$

$= 32\left[\frac{1}{4}\cdot \arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^5$

$= 32\cdot\left(\frac{1}{4}\arctan(5/4) - \frac{1}{4}\cdot \cancelto{0}{\arctan(0)}\right]$

$= 8\cdot \arctan(5/4)$

Nenner ohne Nullstelle; Grad Nenner = 2
Grad Zähler = 1

Beispiel: $\int_0^5 \frac{9x}{x^2+9}\,dx$

$u = x^2+9$; $u' = 2x$; $\frac{du}{dx} = 2x$; $du = 2x\,dx$
$\frac{1}{2}du = x\,dx$

$x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 9$
$x_2 = 5 \Rightarrow u_2 = 34$

$= \int_9^{34} \frac{9}{u} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{9}{2}\int_9^{34} \frac{1}{u}\,du = \frac{9}{2}\left[\ln|u|\right]_9^{34}$

$= \frac{9}{2}\left[\ln|34| - \ln|9|\right] = \frac{9}{2} \cdot \ln\left|\frac{34}{9}\right|$

Beispiel: $\int_4^2 4\cdot \frac{x^4-20x^2+64}{x^4-1}\,dx$

Nullstellen des Nenners:

$$(x^4-1) = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$= 4\int_4^2 \frac{(x^4-1)+(65-20x^2)}{x^4-1}\,dx$$

$$= 4\int_4^2 \frac{\cancel{(x^4-1)}}{\cancel{(x^4-1)}}\,dx + 4\int_4^2 \frac{65-\cancel{x}20x^2}{(x+1)(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{65-20x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x+1)\cdot(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)\cdot(x^2-1)}{(x-1)(x+1)\cdot(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^3(A+B+C)+x^2(A-B+D)+x(A+B-C)+(A-B-D)}{(x-1)(x+1)\cdot(x^2+1)}$$

$$A+B+C = 0$$
$$A-B+D = -20$$
$$A+B-C = 0$$
$$A-B-D = 65$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -20 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 65 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 65 \end{array}\right) \Rightarrow C=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 85 \end{array}\right) \Rightarrow D = -\frac{85}{2}$$

2. Gleichung: $B = \frac{-20-D}{-2} = \frac{-20+\frac{85}{2}}{-2} = -\frac{45}{4}$

1. Gleichg: $A+B=0 \Rightarrow A = \frac{45}{4}$

$$\int_4^2 4+4\left(\frac{45/4}{(x-1)}-\frac{45/4}{(x+1)}-\frac{85/2}{(x^2+1)}\right)dx$$

$$=\left[4x+45\cdot\ln|x-1|-45\ln|x+1|-170\arctan(x)\right]_4^2$$

$$=\left[4x+45\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-170\arctan(x)\right]_4^2$$

$$=8+45\cdot\ln\left|\frac{1}{3}\right|-170\arctan(2)$$
$$-16-45\cdot\ln\left|\frac{3}{5}\right|+170\arctan(4)$$

$$=-8+45\cdot\ln\left|\frac{5}{9}\right|+170\left(\arctan(4)-\arctan(2)\right)$$

Fläche zwischen zwei Kurven

Wird eine Fläche von einer oberen und einer unteren Kurve begrenzt, kann die Fläche folgendermaßen berechnet werden.

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

"Integral aus der oberen Kurve minus Integral aus der unteren Kurve"

Beispiel: Das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, die waagrechte Asymp. und die Geraden $x=0$ und $x=5$ bilden eine Fläche. Inhalt?

$$\int_0^5 \left(2 - \frac{2x-1}{x+1}\right) dx = \int_0^5 \frac{2(x+1)-2x+1}{x+1}$$

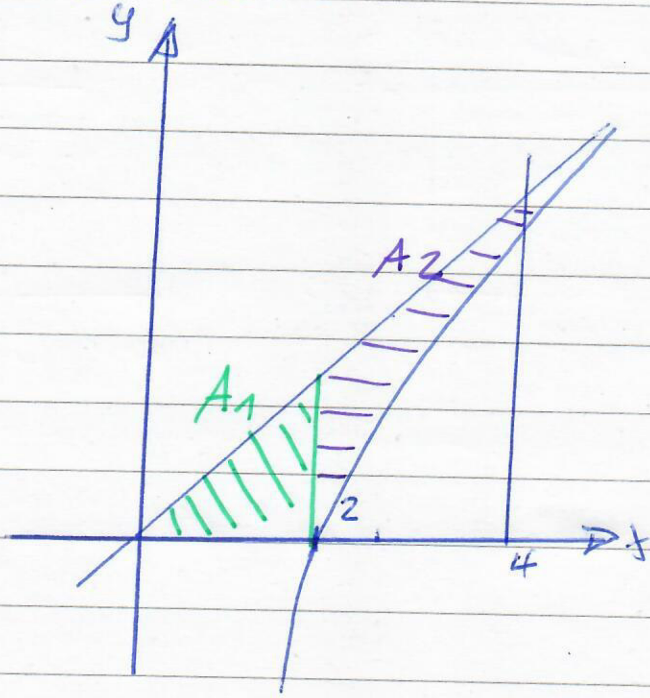
$$= \int_0^5 \frac{2x+2-2x+1}{x+1} dx = \int_0^5 \frac{3}{x+1} dx$$

$$= \left[3 \cdot \ln|x+1|\right]_0^5$$

$$= 3 \cdot \ln|6| - 3 \cdot \cancel{\ln|1|}^{0} = \ln|6^3| = \ln|216|$$

Beispiel: Das Schaubild k der Funktion

$f(x) = \frac{x^3-8}{x^2}$, die schiefe Asymp., die x-Achse und die Gerade x=4 bilden eine Fläche. Inhalt?



$$A_1 = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(x - \frac{x^3-8}{x^2}\right) dx = \int_2^4 \frac{x^3-x^3+8}{x^2}\,dx$$

$$= \int_2^4 \frac{8}{x^2}\,dx = \left[-\frac{8}{x}\right]_2^4 = -2+4 = 2$$

$$A_g = A_1 + A_2 = 2+2 = 4$$

Weitere Übungen

Aufgabe 76
78
88
101
107

Aufgabe 91:

$$f_k(x) = k\cdot(-x^3+3x+4)$$
$$f'_k(x) = k\cdot(-3x^2+3)$$
$$f''_k(x) = k\cdot(-6x)$$

$f'_k(x)=0 \qquad -3x^2+3=0$
$$-3x^2=-3$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$

$f''_k(1)<0$ HP $\qquad$ HP$(1|6k)$
$f''_k(-1)>0$ TP

Tangente im HP: $y=6k$

Schnittpunkte bestimmen.

$$k\cdot(-x^3+3x+4)=6k$$
$$-kx^3+3kx+4k=6k \quad |-6k$$
$$-kx^3+3kx-2k=0$$

$$(-kx^3+3kx-2k):(x-1)=-kx^2-kx+2k$$
$$\underline{-(-kx^3+kx^2)}$$
$$-kx^2+3kx$$
$$\underline{-(-kx^2+kx)}$$
$$+2kx-2k$$
$$\underline{-(+2kx-2k)}$$
$$—$$

$-kx^2-kx+2k$

$$x_{2|3} = \frac{+k \pm \sqrt{k^2-4(-kx^2)\cdot 2k}}{2(-k)}$$

$$x_{2|3} = \frac{+k \pm 3k}{-2k} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\int_{-2}^{1} (f(x) - f_k(x)\,dx = \int_{-2}^{1} (64 + kx^3 - 3kx - 44)\,dx = 45$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{1} (kx^3 - 3kx + 2k)\,dx = 45$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1k}{4}x^4 - \frac{3}{2}kx^2 + 2kx\right]_{-2}^{1} = 45$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}k - \frac{3}{2}k + 2k - \frac{16}{4}k + \frac{12}{2}k + 4k = 45$$

$$\frac{27}{4}k = 45$$

$$k = {}^{20}/_{3}$$

Weitere Aufgaben

92
96