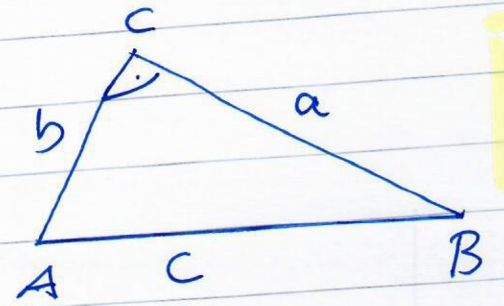
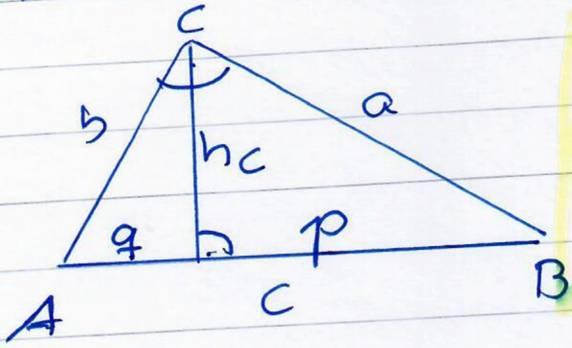
Wiederholung von trigonometrischen Zusammenhängen im rechtw. Dreieck

Satz des Pythagoras



$c^2 = a^2 + b^2$

Kathetensatz des Euklid



$a^2 = p \cdot c$

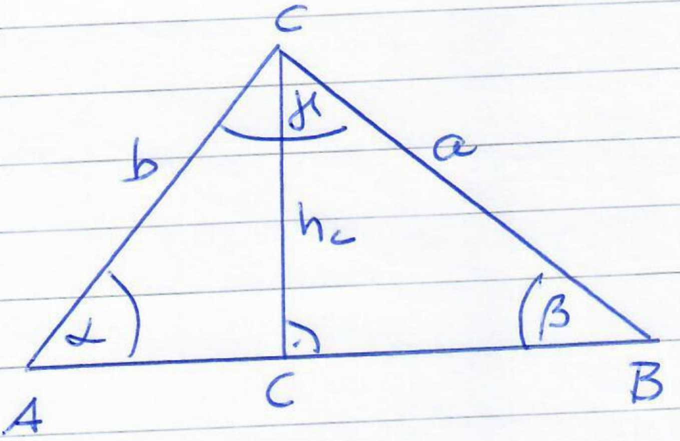
$b^2 = q \cdot c$

Höhensatz des Euklid

$h_c^2 = p \cdot q$

Sinussatz

→ Anwendung auf bel. Dreiecke



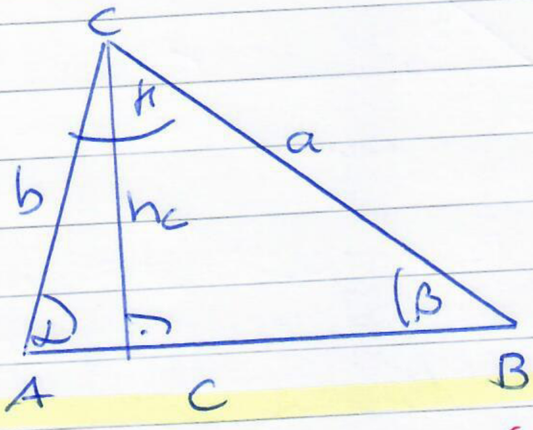
Der Sinussatz beschreibt das Verhältnis der Seitenlänge zu den gegenüberliegenden Winkeln im Dreieck

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Kosinussatz

→ Anwendung auf bel. Dreiecke

Der Kosinussatz drückt eine Beziehung zwischen den drei Seiten und einem Winkel aus



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

Bogenmaß

Das Bogenmaß ist ein Winkelmaß. Die dimensionslose Zahl trägt oft den Zusatz Radiant bzw. rad, um die Größe von Grad zu unterscheiden.

Es entspricht der Länge des Bogens (am Einheitskreis) des dazugehörigen Winkels.

Die Umrechnung eines Bogenmaßes in Grad erfolgt nach der folgenden Formel:

$$\boxed{\text{Grad} = \frac{\text{Bogenmaß} \cdot 180^\circ}{\pi}}$$

Umgekehrt lässt sich ein Bogenmaß nach der folgenden Formel bestimmen:

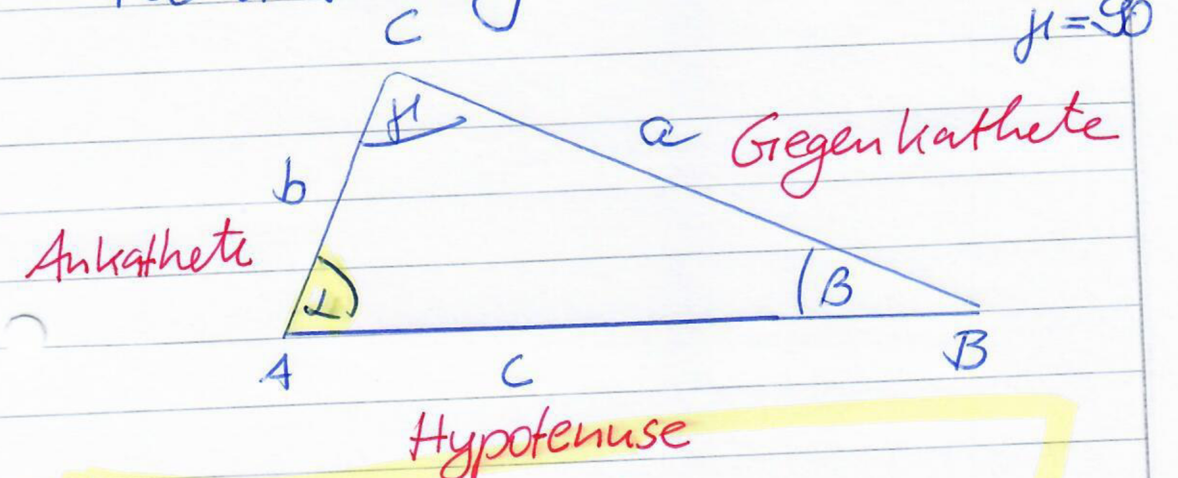
$$\boxed{\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180^\circ}}$$

Trigonometrische Funktionen

Die Winkelfunktionen am Einheitskreis

Die beiden Winkelfunktionen Sinus und Kosinus lassen sich als Längenverhältnisse in einem Rechtwinkligen Dreieck oder auch als Streckenanteile interpretieren.

Längenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkat.}}{\text{Hypotenuse}}$$

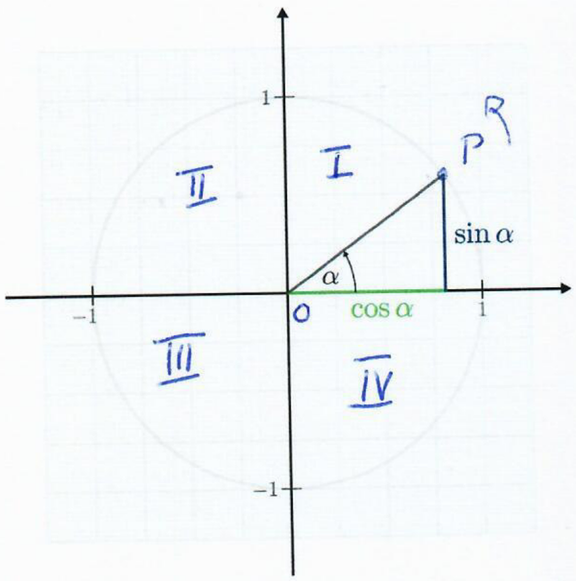
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankat.}}{\text{Hypotenuse}}$$

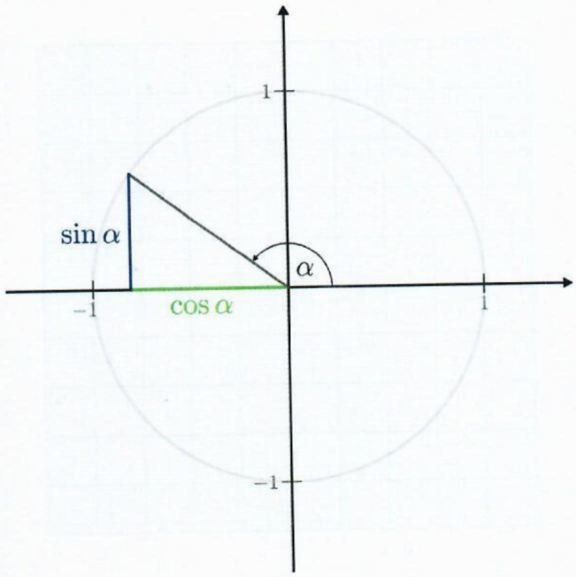
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkat.}}{\text{Ankat.}}$$

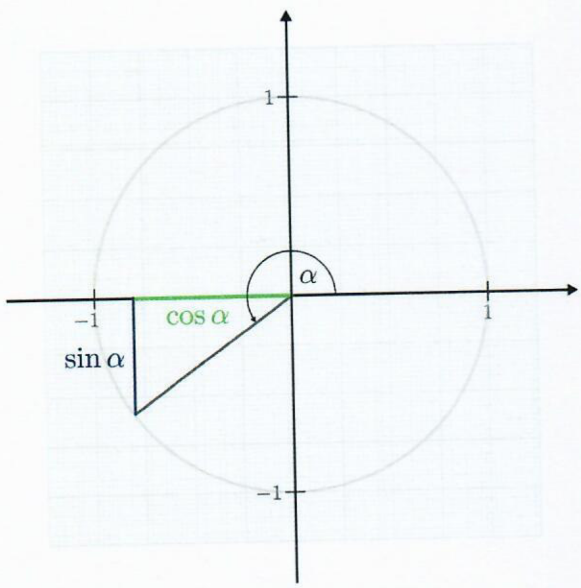
Tabelle
Formels.
S.99

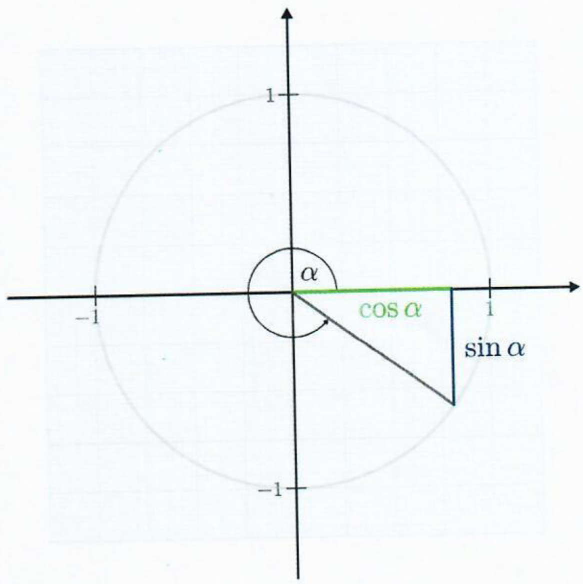
Herleitung von trig. Funktionen

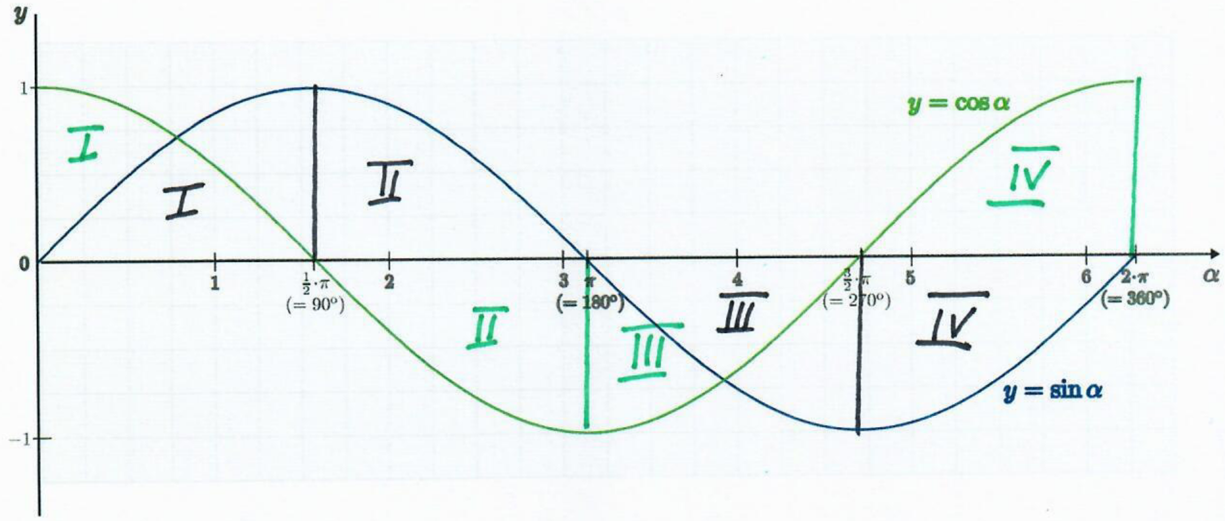
Zeichnet man in einem Koordinaten-
system einen Kreis mit dem
Radius eins um den Koordinaten-
ursprung (0|0) und verbindet den
Koordinatenursprung mit einem
auf dem Kreis entlangwandernden
Punkt P, so stellen ~~sich~~ Sinus
und Kosinus die senkrechten
Projektionen der Verbindungs-
linie auf die x- bzw y-Achse
dar.
Der Tangens entspricht der
Steigung, welche die Verbindungs-
linie OP bei einem Winkel α
hat.


1
−1
1
−1
I
II
III
IV
P
R
O
α
sin α
cos α


1
−1
1
−1
α
sin α
cos α


1
−1
1
−1
α
sin α
cos α


1
−1
1
−1
α
cos α
sin α



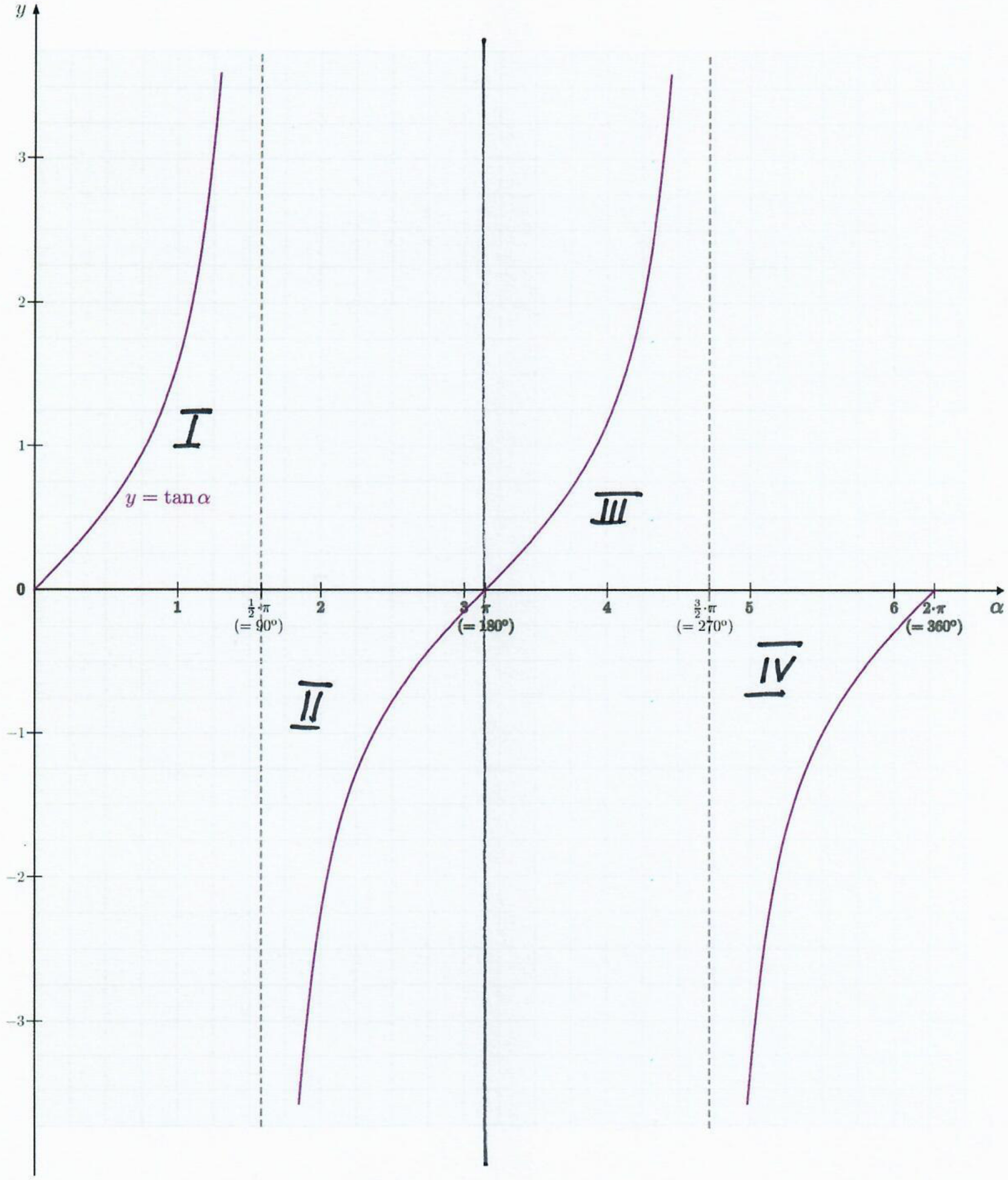
y
1
0
−1
1
2
3
4
5
6
α
$\frac{1}{2}\cdot\pi$
(= 90°)
π
(= 180°)
$\frac{3}{2}\cdot\pi$
(= 270°)
2·π
(= 360°)
y = cos α
y = sin α
I
II
III
IV

Die Tangensfunktion

Für die Tangensfunktion

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

ergeben sich Vorzeichenwechsel an den Definitionslücken (den Stellen, an denen $\cos(\alpha) = 0$ gilt).
Je nachdem, von welche Seite aus man sich diesen "Polstellen" nähert, nehmen die Funktionswerte des Tangens - entsprechend der Vorzeichen von ~~f~~ $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ - unendlich große negative bzw. positive Werte an.


y
3
2
1
0
−1
−2
−3
1
$\frac{1}{2}\cdot\pi$
(= 90°)
2
3
π
(= 180°)
4
$\frac{3}{2}\cdot\pi$
(= 270°)
5
6
2·π
(= 360°)
α
$y = \tan\alpha$
I
II
III
IV

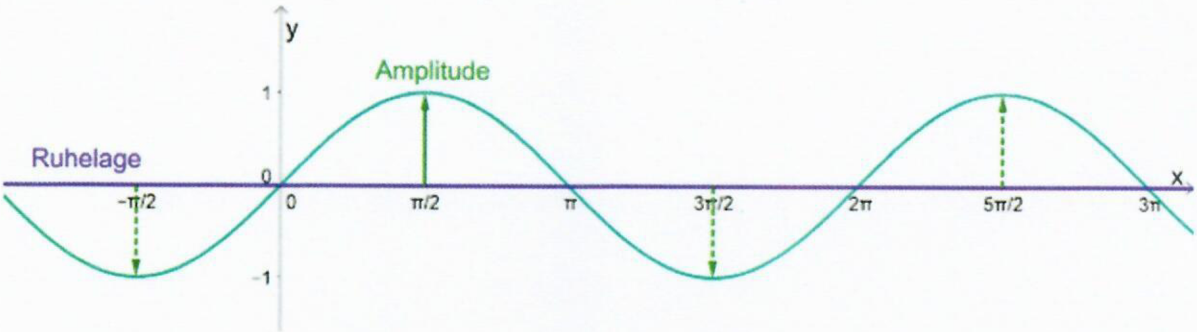
Trigonometrische Zusammenhänge

S. 101 ff

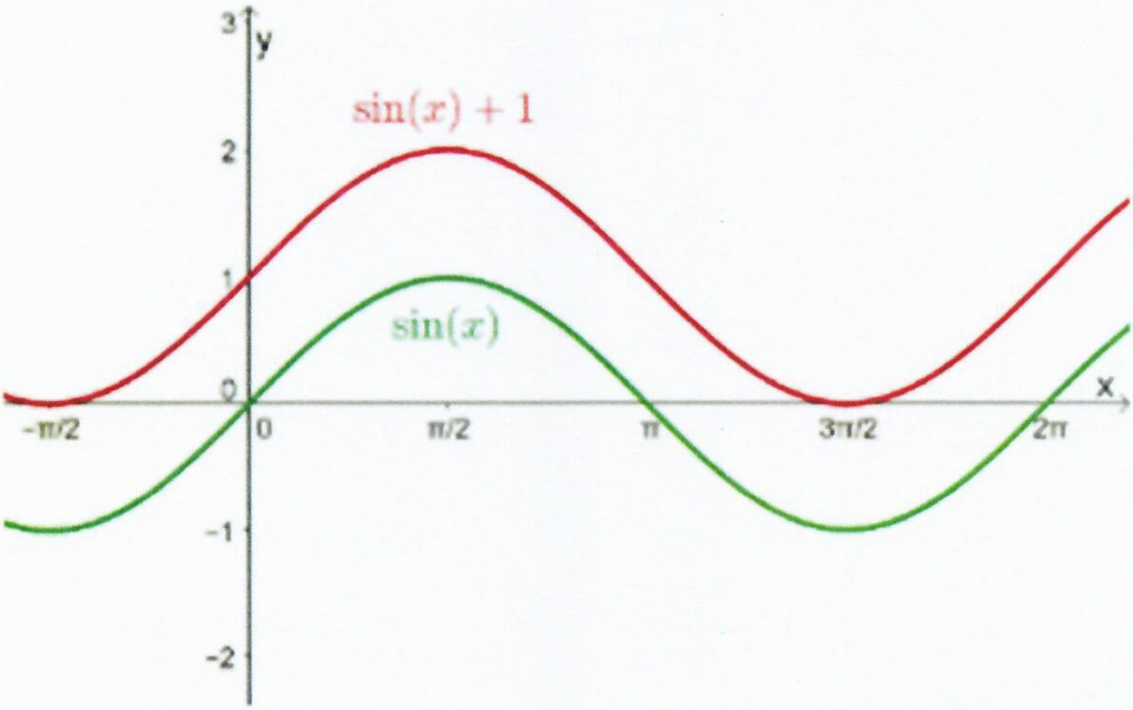
Änderung der trigonometrischen Funktionen am Beispiel des Sinus

Normalverlauf und Ruhelage

$\sin(x)$


y
Amplitude
1
Ruhelage
0
x
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1

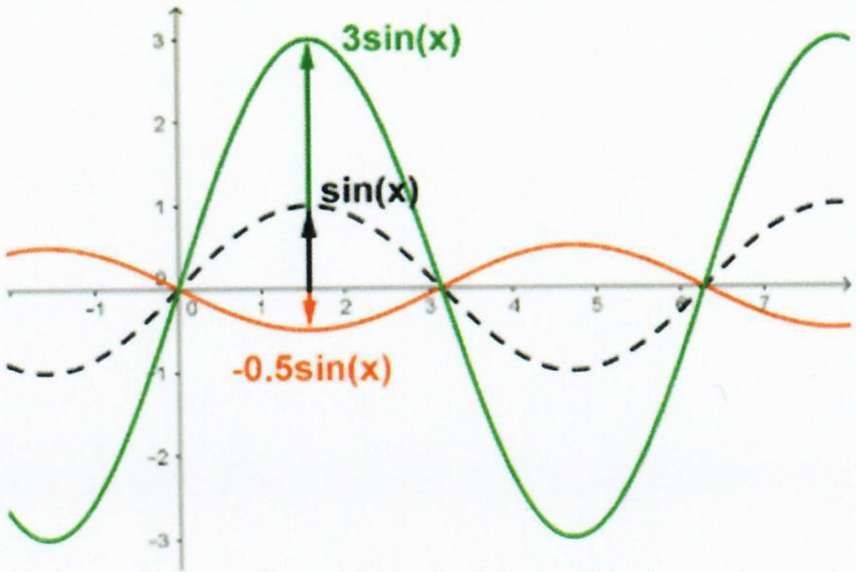
$\sin(x) + 1$


3
y
sin(x) + 1
2
1
sin(x)
0
x
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
-1
-2

Parameter a

Der Parameter a beeinflusst die **Amplitude**. Er streckt/staucht den Graph in y-Richtung.

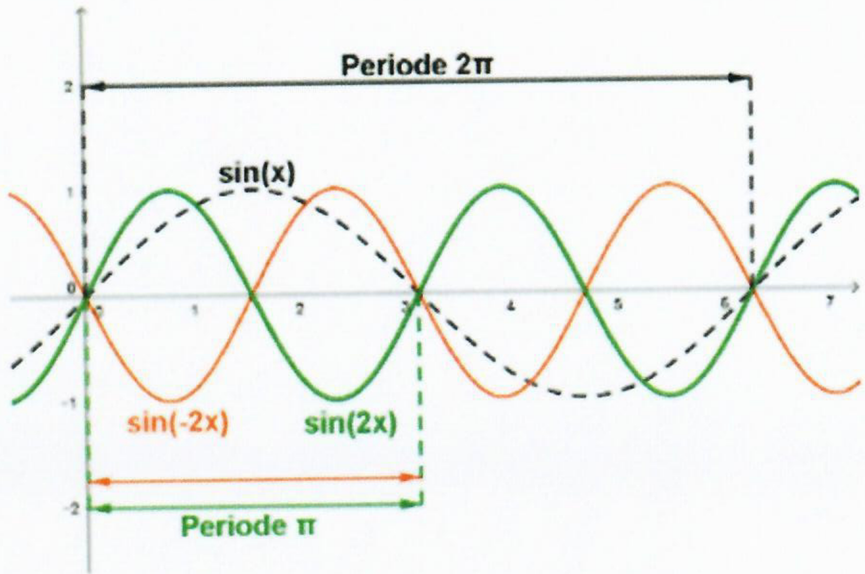
- Der Graph hat die Amplitude $|a|$
- $a < 0$: Der Graph wird zusätzlich an der Ruhelage gespiegelt.



Parameter b

Der Parameter b beeinflusst die **Periode**. Er streckt/staucht den Graph in x-Richtung.

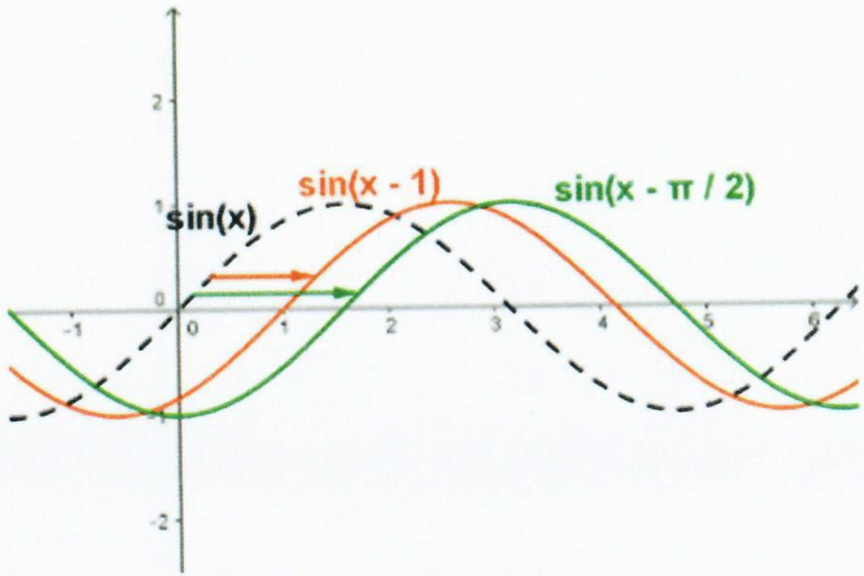
- Der Graph hat die Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$
- $b < 0$: Der Graph wird zusätzlich an der senkrechten Achse $x = -c$ gespiegelt



Parameter c

Der Parameter c verursacht eine **Verschiebung** in x-Richtung

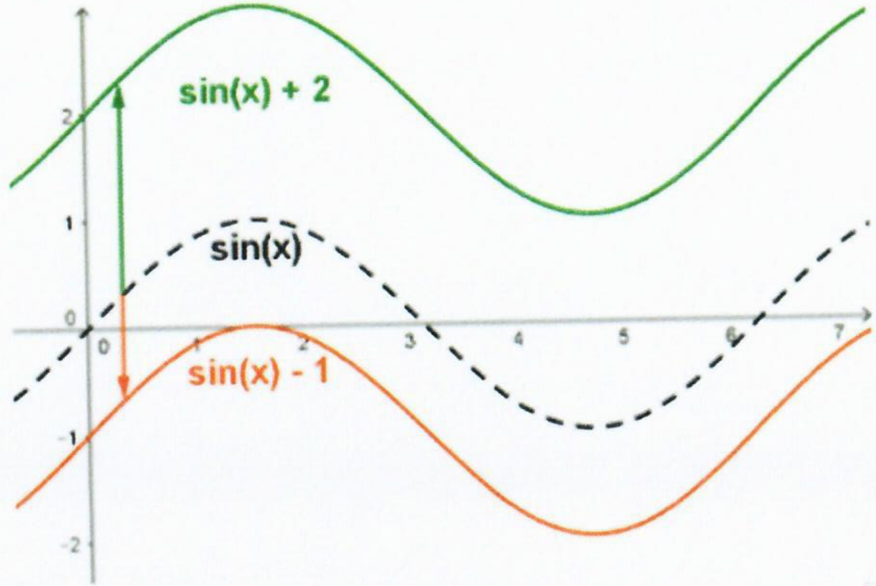
- $c > 0$: Verschiebung um c nach links
- $c < 0$: Verschiebung um c nach rechts



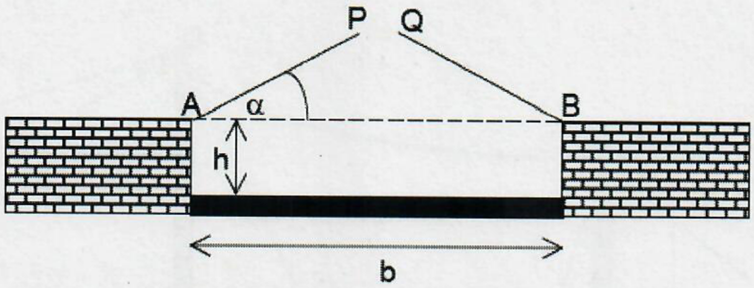
Parameter d

Der Parameter d beeinflusst die **Ruhelage**.
Er verschiebt den Graph in y-Richtung

- $d > 0$: Verschiebung um d nach oben
- $d < 0$: Verschiebung um d nach unten
- Der Graph hat die Ruhelage bei $y = d$



Aufgabe 1:



Über einen Fluß mit der Breite b = 13 m führt eine Zugbrücke. Das Gelenk A der Brücke liegt h = 3,7 m über dem Wasserspiegel. Die Brücke läßt sich höchstens so weit öffnen, daß die beiden Brückenhälften unter dem Winkel $\alpha = 31^{\circ}$ gegen die Horizontale geneigt sind.

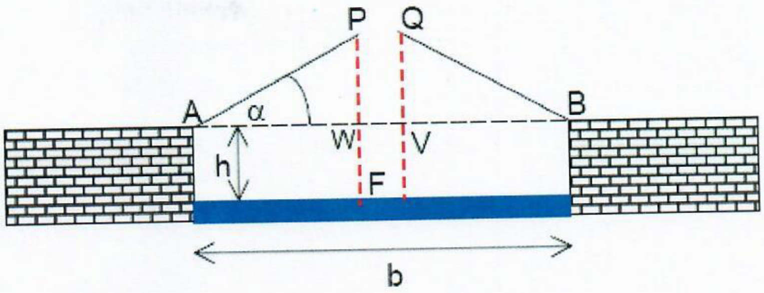
a) Wie hoch liegen die Punkte P und Q über dem Wasserspiegel, wenn die Brücke so weit wie möglich geöffnet ist ?
Wie weit sind sie dann auseinander ?

b) Das Deck eines Schiffes ist 6 m breit und ragt 4,50 m aus dem Wasser heraus.

Entscheide durch eine Rechnung, ob dieses Schiff unter der Zugbrücke durchfahren kann, wenn diese so weit wir möglich geöffnet ist.
(Von den Aufbauten des Schiffes darf in der Rechnung abgesehen werden.)

Lösung:

Gegeben:
$b = 13\,m$, $h = 3{,}7\,m$.
Maximaler Winkel
$\alpha = 31^\circ$.
Schiffsmaße:
Breite 6 m, Höhe 4,5 m



a) Berechnung der Höhe des Punktes P (bzw. Q) über der Wasseroberfläche:

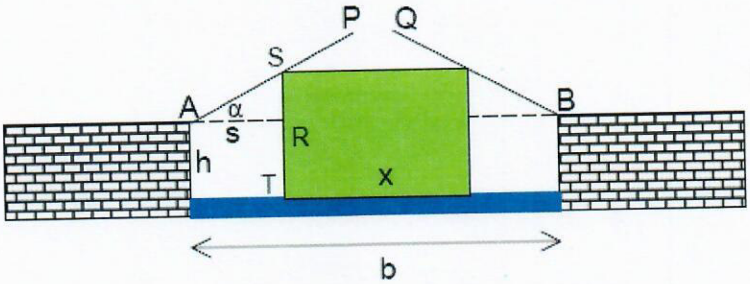
Im Dreieck AWP gilt: $\sin\alpha = \frac{\overline{PW}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{PW} = \overline{AP}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}b\cdot\sin\alpha = 3{,}35\,m$

Gesamthöhe: $\overline{FP} = h + \overline{PW} = 7{,}05\,m$

Ferner folgt: $\cos\alpha = \frac{\overline{AW}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{AW} = \overline{AP}\cdot\cos\alpha = 5{,}57\,m$

Da $\overline{BV} = \overline{AW}$, folgt $\overline{PQ} = b - 2\cdot\overline{AW} = 13\,m - 2\cdot 5{,}57\,m = 1{,}86\,m$

b)



Das Schiff, das unter der Zugbrücke durchfahren soll, hat die Breite x = 6 m. Nehmen wir an, es fährt genau in der Mitte des Flusses, dann bleibt links und rechts noch eine Strecke s frei:

$$s = \tfrac{1}{2}(b - x) = \tfrac{1}{2}\cdot(13\,m - 6\,m) = 3{,}5\,m$$

Wir berechnen nun, wie hoch das Schiff am linken Rand sein darf, wie hoch also S über der Wasserfläche liegen kann, wenn $\overline{AR} = 3{,}5\,m$ und $\alpha = 31^\circ$ betragen.

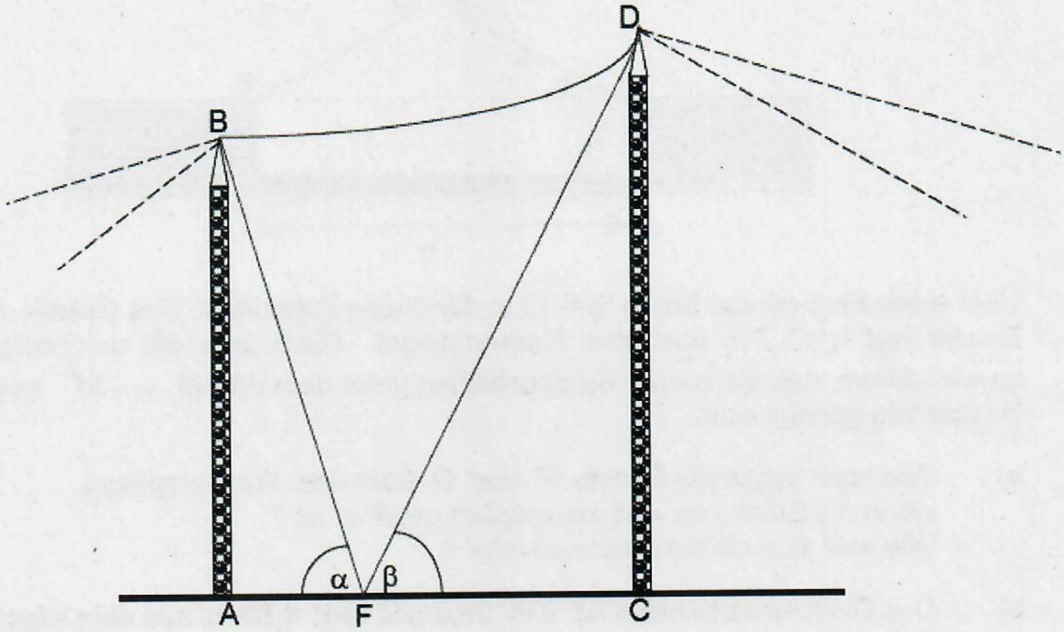
$$\tan\alpha = \frac{\overline{SR}}{\overline{AR}} \Rightarrow \overline{SR} = \overline{AR}\cdot\tan\alpha = 2{,}10\,m$$

Damit folgt für die zulässige Schiffshöhe:

$$\overline{ST} = h + \overline{SR} = 3{,}70\,m + 2{,}10\,m = 5{,}80\,m$$

Da das Schiff tatsächlich nur 4,5 m aus dem Wasser herausragt, kann das Schiff unter der Zugbrücke hindurchfahren.

Aufgabe 2:

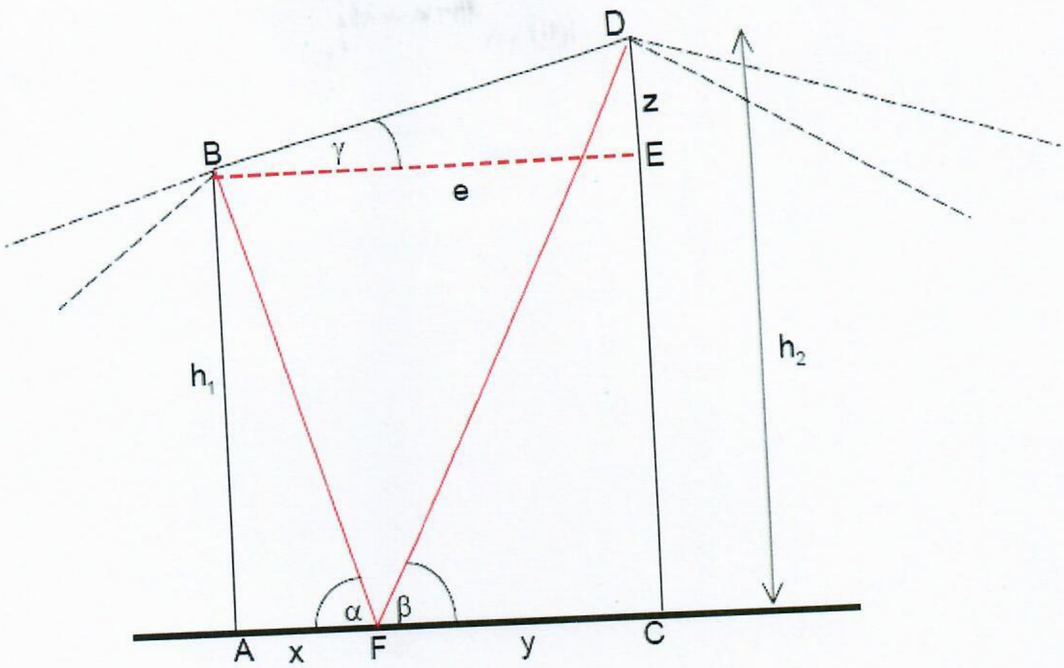


Auf einer horizontalen Ebene stehen zwei senkrechte Sendemasten AB und CD, die 180 m voneinander entfernt sind. Auf der Verbindungsstrecke ihrer Fußpunkte A und C befindet sich in F eine Verankerung, von der aus Halteseile zu den Mastspitzen führen. Von F aus erscheint der 48 m hohe Mast AB unter dem Winkel $\alpha = 36{,}5^\circ$, der Sendemast CD unter $\beta = 29^\circ$.

a) Wie weit ist die Verankerung F von den Fußpunkten A und C der beiden Sendemasten entfernt ?

b) Wie hoch ist der Sendemast CD ?

c) Zwischen den beiden Mastspitzen ist ein Antennendraht gezogen.
Wie lang ist dieser Draht, wenn er wegen seines Durchhangs um 15 % länger ist als der Abstand der Mastspitzen ?



Gegeben sind $\alpha = 36{,}5^\circ$ und $\beta = 29^\circ$ sowie $h_1 = 48$ m und $e = \overline{AC} = 180$ m

a) Im rechtwinkligen Dreieck AFB gilt: $\tan\alpha = \frac{h_1}{x} \Rightarrow x = \frac{h_1}{\tan\alpha} = 64{,}9\,\text{m}$

Damit folgt: $y = e - x = 115{,}1\,\text{m}$.

b) Im rechtwinkligen Dreieck FCD gilt: $\tan\beta = \frac{h_2}{y} \Rightarrow h_2 = y \cdot \tan\beta = 63{,}8\,\text{m}$

c) Im rechtwinkligen Dreieck BED gilt: $\tan\gamma = \frac{z}{e} = \frac{h_2 - h_1}{e} \Rightarrow \gamma = 5^\circ$

Damit folgt $\cos\gamma = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{AC}}{\cos\gamma} = 180{,}7\,\text{m}$.

Dies gelingt auch mit dem Satz des Pythagoras:

$\overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + z^2 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + z^2} = 180{,}7\,\text{m}$ mit $z = h_2 - h_1 = 13{,}8\,\text{m}$.

Da die Länge des durchhängenden Seiles um 15 % größer ist, folgt für diese Länge:

Trigonometrische Gleichungen

→ Formelsammlung ab S. 99

Beispiel: $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Umrechnungstabelle ⇒ $30° \triangleq \frac{\pi}{6}$

Sinus ist positiv im I und II - Quadranten

$x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Im Intervall $[0; 2\pi]$

$\mathbb{L} = \{\frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi\}$

Beispiel: $\cos(x) = 1/2$

Umrechnungstabelle: $60° \hat{=} \pi/3$

$\Rightarrow$ Kosinus ist positiv im I und IV Quadranten

$x_1 = \pi/3$; $x_2 = 2\pi - \pi/3 = 5/3\,\pi$

Im Intervall $[0; 2\pi]$

$\mathbb{L} = \{ 1/3\,\pi ; 5/3\,\pi \}$

Beispiel: $\tan(x) = \sqrt{3}$

Umrechnungstabelle: $60° \hat{=} \pi/3$

Tangens ist positiv im I und III Quadranten

$x_1 = \pi/3$; $x_2 = \pi + \pi/3 = 4/3\,\pi$

Im Intervall $[0; 2\pi]$

$\mathbb{L} = \{1/3\,\pi; 4/3\,\pi\}$

Komplexere Gleichungen

Beispiel: $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Im Intervall von $[-2\pi; 4\pi]$

Umrechnungstabelle: $45° \hat{=} \frac{1}{4}\pi$

Im I und II Quadranten pos.

$x_1 = \frac{1}{4}\pi$; $x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$

$x_3 = 2\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{9}{4}\pi$

$x_4 = 3\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{11}{4}\pi$

Untersuchung Richtung -2π:

$x_5 = -\pi - \frac{1}{4}\pi = -\frac{5}{4}\pi$

$x_6 = -2\pi + \frac{1}{4}\pi = -\frac{7}{4}\pi$

$\mathbb{L} = \{-\frac{7}{4}\pi; -\frac{5}{4}\pi; \frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\}$

Beispiel: $\cos(\frac{\pi}{6}x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Im Intervall von $-3 \leq x \leq 12$

Subst.: $u = \frac{\pi}{6}x$

$\cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Umrechnungstabelle: $30° = \frac{1}{6}\pi$

pos. Richtung:

$u_1 = \frac{1}{6}\pi \overset{RS}{\Longrightarrow} \frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x \Rightarrow x_1 = 1$

$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi \overset{RS}{\Rightarrow} \frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$

$x_2 = 11$

$u_3 = 2\pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{13}{6}\pi \overset{RS}{\Rightarrow} \frac{13}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$

$x_3 = 13$

Außerhalb des Intervalls

neg. Richtung:

$u_4 = 0 - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi \overset{RS}{\Rightarrow} -\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x \Rightarrow x_4 = -1$

$u_5 = -2\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{11}{6}\pi \overset{RS}{\Rightarrow} -\frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x \Rightarrow x_5 = -11$

$\mathbb{L} = \{-1; 1; 11\}$

Beispiel:

$$\cos(2x) - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$$

$$x \in [0; 2\pi]$$

Aus Formelsammlung

$$\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$$

$$2 \cdot \cos^2(x) - 1 - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$$
$$2 \cdot \cos^2(x) - 4 \cdot \cos(x) + 2 = 0 \quad |:2$$
$$\cos^2(x) - 2 \cdot \cos(x) + 1 = 0$$

$$(\cos(x) - 1)^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\cos(x) = 1$$

$$x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 2\pi$$

$$\mathbb{L} = \{0; 2\pi\}$$

Lösen von trig. Gleichungen

Aufgabe 33-50

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$ $\quad x \in 0 \leq x \leq 2\pi$

Umrechnungstabelle: $30° \hat{=} \frac{1}{6}\pi$

Sinus ist neg. im $\overline{III} + \overline{IV}$ Q.

$x_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

$x_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$

$\mathbb{L} = \{ \frac{7}{6}\pi ; \frac{11}{6}\pi \}$

$\cos(x) = 0{,}3 \qquad x \in -\pi \leq x \leq \pi$

$TR \Rightarrow \quad x_1 = 1{,}266$

$x_2 = 0 - 1{,}266 = -1{,}266$

$\underline{\mathbb{L}} = \{\pm 1{,}266\}$

$\cos(x) = -0{,}5 = -\frac{1}{2}$ $\quad x \in -2\pi \leq x + 2\pi$

Umrechnungstabelle: $60° \hat{=} \frac{1}{3}\pi$

$x_1 = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$

$x_2 = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$

$x_3 = -\pi + \frac{1}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi$

$x_4 = -\pi - \frac{1}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi$

$\mathbb{L} = \{\pm \frac{2}{3}\pi; \pm \frac{4}{3}\pi\}$

$3 \cdot \sin(x) = 4 \quad | :3 \quad -\pi \leq x \leq +\pi$

$\sin(x) = \frac{4}{3}$

$\mathbb{L} = \{ \}$

$\cos(x) = 0$

$x_1 = 1/2\,\pi \quad ; \quad x_2 = 3/2\,\pi$

$\mathbb{L} = \{1/2\,\pi ; 3/2\,\pi\}$

$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ $\quad x\in -\pi\leq x\leq 4\pi$

Subst: $u=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$

$\sin(u)=-\frac{1}{2}$

Umrechnungstabelle: $30° \hat{=} \frac{1}{6}\pi$

$u_1=\pi+\frac{1}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi \overset{RS}{\Rightarrow} \frac{7}{6}\pi=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$

$x_1=\frac{17}{6}\pi$

$u_2=2\pi-\frac{1}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi \overset{RS}{\Rightarrow} \frac{11}{6}\pi=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$

$x_2=\frac{25}{6}\pi \Rightarrow$ Außerhalb des Bereichs

$u_3=0-\frac{1}{6}\pi=-\frac{1}{6}\pi \overset{RS}{\Rightarrow} -\frac{1}{6}\pi=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$

$x_3=\frac{1}{6}\pi$

$\underline{\mathbb{L}}=\left\{\frac{1}{6}\pi;\ \frac{17}{6}\pi\right\}$

$$4 \cdot \sin^2(x) + 3 \cdot \cos(x) = 3$$

$$x \in -\pi \leq x \leq \pi$$

Formelsammlung:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$4 \cdot (1 - \cos^2(x)) + 3 \cdot \cos(x) - 3 = 0$$

$$4 - 4 \cdot \cos^2(x) + 3 \cdot \cos(x) - 3 = 0$$

$$-4 \cdot \cos^2(x) + 3 \cdot \cos(x) + 1 = 0$$

Subst. $u = \cos(x)$

$$-4u^2 + 3u + 1 = 0$$

$$u_{1|2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-4) \cdot 1}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-3 \pm 5}{-8}$$

$u_1 = 1$ $\qquad$ $u_2 = -0{,}25$

RS

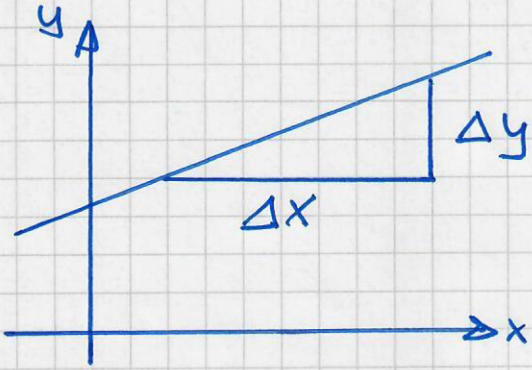
$\cos(x) = 1$ $\qquad$ $\cos(x) = -0{,}25$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_{2|3} = \pm 1{,}82$

$$\mathbb{L} = \{0; \pm 1{,}82\}$$

Änderung von Werten – Differenziale

In der Praxis sucht man Antworten auf die Frage, wie sich eine Größe y ändert, als Folge davon, dass sich eine andere Größe x ändert.



$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Beispiel: $y = f(x) = 2x + 2$ $\boxed{(y = mx + b)}$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y = 2 \cdot \Delta x$$

$\Rightarrow$ Der Funktionswert ändert sich doppelt so stark wie der x-Wert.

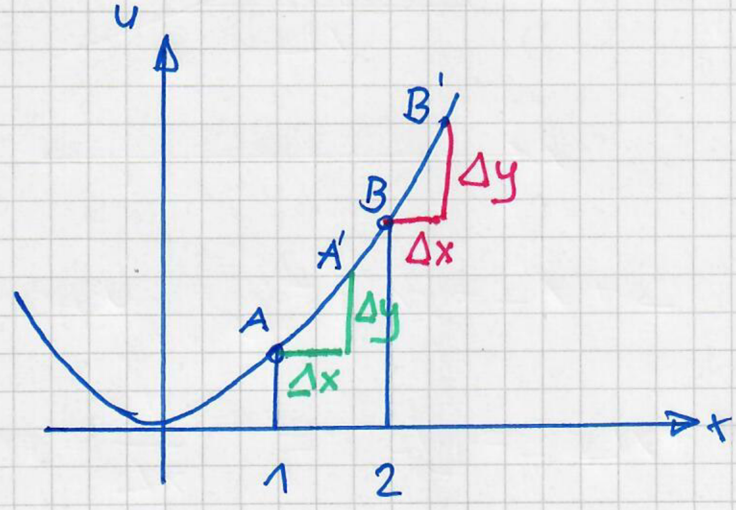
$\Rightarrow$ Wir haben eine lineare Änderung.

Bei Funktionen haben wir aber meistens "Nicht lineare Änderungen".

Beispiel: $y = f(x) = x^2$

Wir bilden die Steigungsdreiecke bei $x = 1$ und bei $x = 2$

In beiden Fällen wählen wir $\Delta x = 0{,}5$



$A(1|1) \rightarrow A'(1{,}5|2{,}25) \quad \Delta y = 2{,}25 - 1 = 1{,}25$

$B(2|4) \rightarrow B'(2{,}5|6{,}25) \quad \Delta y = 6{,}25 - 4 = 2{,}25$

Allgemeine Berechnung:

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

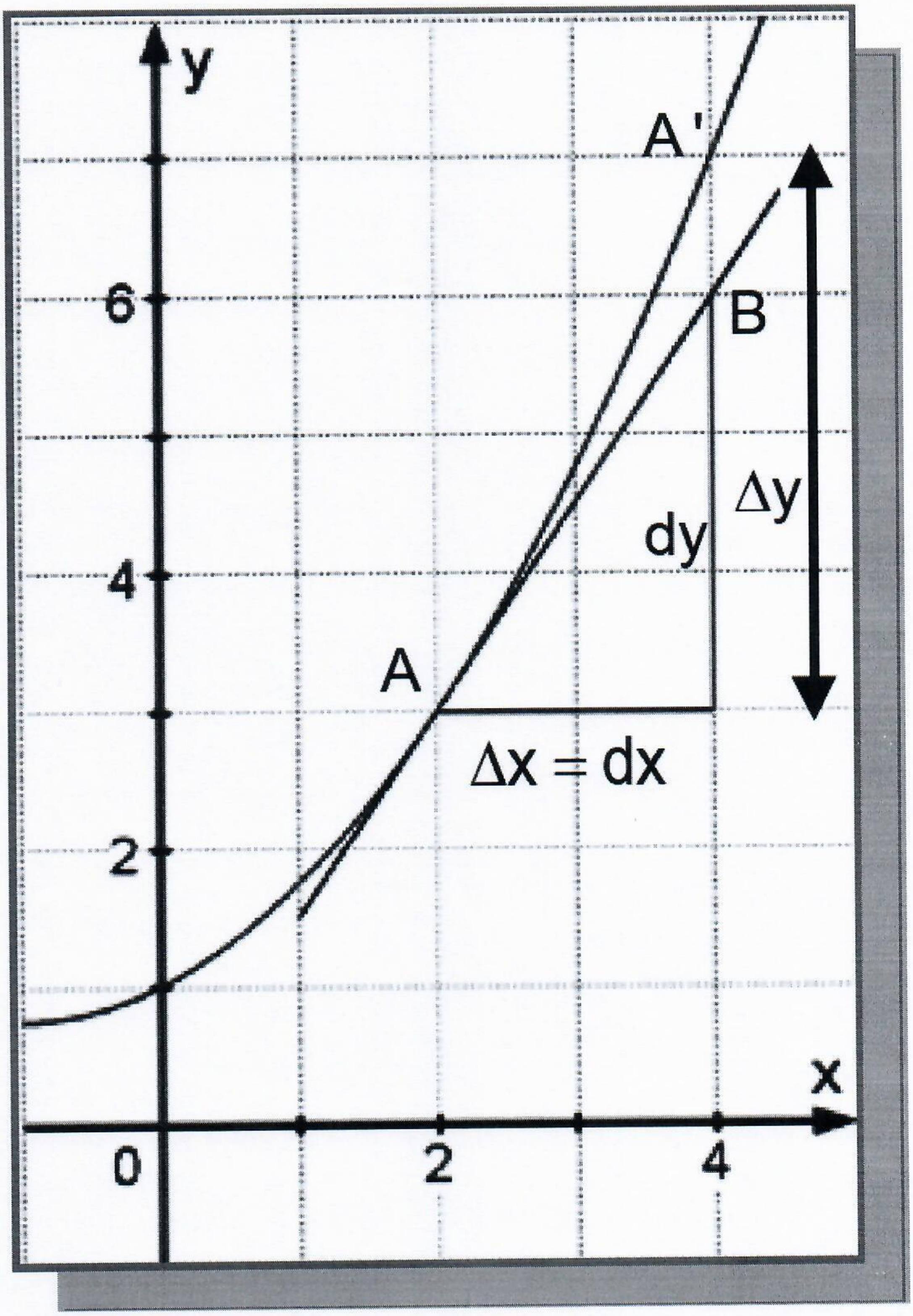
Bei der Ableitung berechnet man wie zuvor die Änderung in einem kleinen Intervall Δx.
Dann wird dazu der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ ermittelt.
Daraus resultiert der Differential-koeffizient oder auch die Ableitung benannt.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Die Ableitungsfunktion gibt uns die Änderung der Funktion an der Stelle, deren x-Koordinate man einsetzt.

Man verwendet in der Praxis dx und dy ($\hat{=}$ Änderung bis zum Punkt B).

Je größer man Δx wählt, desto ungenauer wird Δy.


y
A'
6
B
Δy
dy
4
A
Δx = dx
2
x
0
2
4

Beispiel: $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Wir suchen die momentane Änderung im Arbeitspunkt $A(2|3)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Tangentensteigung $m_T = f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}$

$$m_T = \frac{3}{2}$$

Gleichung der Tangente:

$$y = mx + b$$

$$3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 0$$

$$y_T = \frac{3}{2}x$$

Aus $m_T = \frac{dy}{dx} \Rightarrow f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow dy = y' \cdot dx$$

$$dy = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx$$

Für $x = 2$ folgt $dy = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}\right) dx$

$$dy = \frac{3}{2} dx$$

Wenn $dx = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ ist folgt daraus

$$dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Verwendet man die Tangente als Näherungskurve in der Umgebung des Arbeitspunktes A (≙ Berührpunkt der Tangente), dann erhält man über das Differential

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}$$

Näherungswerte, die für kleine dx brauchbar sind, also eine Momentänderung beschreiben.

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{x+2}$

Berechnen Sie das Differential dy und machen Sie eine Aussage über die Momentänderung des Funktionswertes im Arbeitspunkt A(3|f(3)) mit Hilfe des Differentials.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-2}{(x+2)^2}$$

$$dy = y' \cdot dx$$

$$dy = \frac{-2}{(x+2)^2} \cdot dx \qquad (x = 3)$$

$$dy = \frac{-2}{(3+2)^2} dx$$

$$dy = -\frac{2}{25} dx \qquad (dx = 1/2$$

$$\Rightarrow \quad dy = -\frac{2}{25} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{25} = -0{,}05$$

Übungsaufgabe:
Berechnen Sie das Differential zu folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-1) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x^2-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}$$

Differential:

$$dy = \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}\, dx$$

Übungsaufgabe:

Rechnen Sie die folgenden Differentiale zurück. Geben Sie eine Funktion an, zu de die folgenden Differentiale passen.

(1) $dy = 5dx$

(2) $dy = (2x-5)\,dx$

(3) $dy = x^3 - 5x^2 - 3x + 9$

Lösung:

(1) $dy = 5dx$

$\frac{dy}{dx} = 5$ oder $y' = 5 \Rightarrow y = 5x + \ldots$

(2) $dy = (2x-5)\,dx$

$\frac{dy}{dx} = (2x-5) \Rightarrow y' = (2x-5) \Rightarrow y = x^2 - 5x + \ldots$

(3) $dy = x^3 - 5x^2 - 3x + 9$

$\frac{dy}{dx} = x^3 - 5x^2 - 3x + 9$

$y' = x^3 - 5x^2 - 3x + 9$

$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x + \ldots$

Das unbestimmte Integral - Stammfunktion

Die Aufgabe, das Differential rückgängig zu machen, hat zu folgenden Schreibweisen geführt.
Man sagt, "Das Integral macht das Differential rückgängig" und schreibt dies folgendermaßen:

$$\boxed{\int dy = y} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx \qquad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein:

$$\int f'(x) \cdot dx = y$$

$$\boxed{f(x) = \int f'(x)\, dx}$$

Dies bedeutet, dass die Integration das Ableiten rückgängig macht, aber das Absolutglied nicht wiederhergestellt werden kann.

Beispiel:

$f_1(x) = x^3 - x^2 + 1$ liefert $dy = (3x^2 - 2x)\,dx$

$f_{12}(x) = x^3 - x^2 + 12$ liefert $dy = (3x^2 - 2x)\,dx$

Die beiden Funktionen unterscheiden sich im Absolutglied, haben aber das gleiche Differenzial.

Dies bedeutet für das unbestimmte Integral folgendes:

$$\boxed{f(x) = \int f'(x)\,dx + C}$$

Man nennt den Term hinter dem Integralzeichen den Integranten und die gesuchte Funktion, deren Ableitung ja der Integrand ist, eine Stammfunktion.

Bezeichnung: $F(x)$

Integrationsregeln

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

Erhöhe die Hochzahl um eins und dividiere durch die neue Hochzahl.
Diese Schreibweise

$$\int f(x)\,dx$$

nennt man auch das unbestimmte Integral.

Darauf ergibt sich ein Grundintegral:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & \text{für } n \neq -1 \\ \ln|x| + c & \text{für } n = 1 \end{cases}}$$

Übungsaufgaben

Bilden Sie die Stammfunktion.

(1) $\int 6x^3\,dx$

(2) $\int \frac{8}{x^3}\,dx$

(3) $\int (x\cdot\sqrt{x})\,dx$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}}\,dx$

(5) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx$

(6) $\int (x^2-4)(x+1)\,dx$

Lösung der Übungsaufgaben

(1) $\int 6x^3 dx = \frac{6x^4}{4} + c = \frac{3}{2}x^4 + c$

(2) $\int \frac{8}{x^3} dx = \int 8 \cdot x^{-3} dx = \frac{8x^{-2}}{-2} + c$

$= -4x^{-2} + c = -\frac{4}{x^2} + c$

(3) $\int x \cdot \sqrt{x}\, dx = \int x \cdot x^{1/2} dx = \int x^{3/2} dx$

$= \frac{x^{5/2}}{5/2} + c = \frac{2}{5}x^{5/2} + c = \frac{2}{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} + c$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x^{1/2} + c$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + c$

(5) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{2x\cdot x^{1/2}}\,dx = \int \frac{1}{2x^{3/2}}\,dx$

$= \int \frac{1}{2}\cdot x^{-3/2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C$

$= -x^{-1/2} + C = -\frac{1}{x^{1/2}} + C = -\frac{1}{\sqrt{x}} + C$

(6) $\int (x^2-4)(x+1)\,dx$

$= \int (x^3+x^2-4x-4)\,dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + C$

Bestimmte Stammfunktionen

Eine Stammfunktion kann nur eindeutig bestimmt werden, wenn ein Punkt gegeben ist.
Diese Stammfunktion ist dann aber auch nur für diesen Punkt gültig.

Beispiel:
Welche Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ geht durch den Punkt $A(2|-1)$?

$$F(x) = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$\Rightarrow F(2) = -1$

einsetzen $\frac{1}{3} \cdot 2^3 + C = -1$

$$C = -\frac{11}{3}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{3}$$

Weitere Grundregeln der Integration

konstante Faktoren

$$\boxed{\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx}$$

Beispiel:

$$\int 5x^3 dx = 5 \cdot \int x^3 dx = 5 \cdot \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$= \frac{5}{4}x^4 + C$$

Summanden werden getrennt integriert

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx}$$

Beispiel:

$$\int (x^2 + x^3)\,dx = \int x^2 dx + \int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$$

Linearität des Integrals

$$\boxed{\begin{aligned}&\int [r\cdot f(x) \pm s\cdot g(x)]\,dx\\ &= r\cdot\int f(x)\,dx \pm s\cdot\int g(x)\,dx\end{aligned}}$$

→ Vereinigung der konstanten Faktorregel und der Summandenregel.

Zur Übung machen Sie jetzt bitte die Aufgabe 51

(1) $\int (3x+1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + x + c$

(2) $\int (x^2-2x-5)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 5x + c$

(3) $\int (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c$

(4) $\int (\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2)\,dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + c$

(5) $\int (2x^4 - x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + 5)\,dx$
$= \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 5x + c$

(6) $\int (-\frac{1}{8}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 7)\,dx$
$= -\frac{1}{40}x^5 + x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 7x + c$

(7) $f(x) = x^2 - 1 \quad P(3|-1)$
$F(x) = \int (x^2-1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x + c$
$-1 = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3 + c \quad \Rightarrow c = -7$
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 7$

(8) $f(x) = x^3 - 2x \quad P(1|0)$
$F(x) = \int (x^3 - 2x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + c$
$0 = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - 1^2 + c \quad \Rightarrow c = 3/4$
$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3/4$

(9) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x - 4 \quad P(0|8)$
$F(x) = \int (-\frac{1}{4}x^4 + 2x - 4)\,dx = -\frac{1}{20}x^5 + x^2 - 4x + c$
$8 = -\frac{1}{20}\cdot 0^5 + 0^5 - 4\cdot 0 + c \quad \Rightarrow c = 8$
$F(x) = -\frac{1}{20}x^5 + x^2 - 4x + 8$

Integration gebrochen rat. Funktionen

Reine Potenzfunktionen

Man schreibt den Bruch erst als Potenzfunktion und wendet anschließend die Regel für Potenzen an.

Beispiel:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Ausnahmeintegral:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Wer hier versucht die Regel für Potenzen anzuwenden, erhält einen Unsinn als Ergebnis.

Potenzfunktionen mit konstantem Faktor

Der konstante Faktor wird wie in der Regel mit konstantem Faktor vor das Integral geschrieben.

Beispiel:

$$\int -\frac{6}{x^2}\,dx = -6\int \frac{1}{x^2}\,dx = -6\int x^{-2}\,dx$$

$$= -6 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = 6 \cdot \frac{1}{x} + C = \frac{6}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3x} + C$$

Der Nenner enthält keine Summe

Zerlegen des Radikanten in Einzelbrüche

Beispiel:

$$\int \frac{x^2-4}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx = \int\left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$= \int 1\,dx - \int \frac{4}{x^2}\,dx = \int 1\,dx - 4\int x^{-2}\,dx$$

$$= x - 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + c = x + \frac{4}{x} + c$$

$$\int \frac{(x^2-2)^2}{8x^2}\,dx = \int \frac{x^4-4x^2+4}{8x^2}\,dx$$

$$= \int\left(\frac{x^4}{8x^2}-\frac{4x^2}{8x^2}+\frac{4}{8x^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{x^2}{8}\,dx - \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{1}{2x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int x^2\,dx - \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + c$$

Der Nenner enthält eine Summe und der Zähler kein x

Anwendung der Potenzregel und zusätzlich noch die innere Ableitung

Beispiel:

$$\int \frac{1}{(4x-1)^2}\,dx = \int (4x-1)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{(4x-1)^{-1}}{(-1)\cdot 4} + c = -\frac{1}{4(4x-1)} + c$$

Wichtig:
Diese Methode, einen Klammerterm zu integrieren, klappt nur bei linearen Klammerinhalten, also der Form $(ax+b)$

Aufgabe 52

(1) $\int \frac{3}{x^2}\,dx = 3\cdot\int x^{-2}\,dx = -\frac{3}{x} + C$

(2) $\int \frac{4}{x}\,dx = 4\cdot\int \frac{1}{x}\,dx = 4\cdot\ln|x| + C$

(3) $\int \frac{1}{2x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{4x^2} + C$

(4) $\int \frac{2x^2-1}{x^2}\,dx = \int\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)dx = 2x + \frac{1}{x} + C$

(5) $\int \frac{x-2}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \ln|x| + \frac{2}{x} + C$

(6) $\int \frac{x^2-9}{x}\,dx = \int\left(x - \frac{9}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 9\cdot\ln|x| + C$

(7) $\int \frac{(x-2)^2}{4x}\,dx = \int \frac{x^2-4x+4}{4x}\,dx = \int\left(\frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{8}x^2 - x + \ln|x| + C$

(8) $\int \frac{x^3-8}{2x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x^2}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{x} + C$

(9) $\int \frac{x^3-8}{4x}\,dx = \int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{12}x^3 - 2\cdot\ln|x| + C$

(10) $\int \frac{x^2+3x-2}{4x}\,dx = \int\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\cdot \ln|x| + C$

(11) $\int \frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \frac{1}{36}x^3 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2x} + C$

(12) $\int \frac{x^2-3}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right)dx = \ln|x| + \frac{3}{2x^2} + C$

(13) $\int \frac{x^4+x^2-2}{4x^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}\right)dx$

$= \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{4x^2} + C$

(14) $\int \frac{(x^2+1)^2}{2x^3}\,dx = \int \frac{x^4+2x^2+1}{2x^3}\,dx$

$= \int\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 + \ln|x| - \frac{1}{4x^2} + C$

(15) $\int\left(\frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2}\right)dx$

$= \int\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\cdot\ln|x| - \frac{2}{3x} + C$