

Mathematik-Formelsammlung

Einheitliche Formelsammlung Mathematik für Ingenieurstudiengänge

Formelsammlung

Fassung Mai 2013

Liebe WIW-Studenten,

diese Formelsammlung können Sie in den Klausuren Mathematik I+II benützen.

Sie dürfen die Formelsammlung durch weitere Formeln an den zur Verfügung gestellten Plätzen erweitern.

Die Formelsammlung darf nicht mit Beispielen ergänzt werden.

Arbeiten Sie mit dieser Formelsammlung bitte auch schon während der Übungen um sich mit der Struktur vertraut zu machen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg beim Arbeiten und Lösen.

Roland Geiger

INHALTSVERZEICHNIS

SYMBOLE IN DER MATHEMATIK	5
GRIECHISCHE SYMBOLE	6
INTERVALLE	7
RECHENREGELN FÜR POTENZEN UND WURZELN	8
RECHENREGELN FAKTORENZERLEGUNGEN UND BINOMISCHE GESETZE	9
RECHENREGELN FÜR BRÜCHE	10
ALLGEMEINE RECHENREGELN	11
GLEICHUNGEN MIT EINER UNBEKANNTEN	12
RECHENREGELN FÜR LOGARITHMEN	16
VERFAHREN ZUR LÖSUNG VON LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN	17
GRUNDLAGEN DIFFERENTIALRECHNUNG	20
GRUNDLEGENDE ABLEITUNGSREGELN	21
REGELN FÜR DAS DIFFERENZIEREN	24
KURVENUNTERSUCHUNG	25
GRUNDLAGEN INTEGRALRECHNUNG	31
INTEGRALTAFEL	41
RECHENREGELN FÜR UNGLEICHUNGEN	71
DER BETRAG	72
ERMITTLUNG DER VERSCHIEDENEN ASYMPTOTEN	74
BESTIMMUNG DER MAXIMAL- ODER MINIMALWERTE	76
WINKELFUNKTIONEN UND ZUSAMMENHÄNGE	99
SUMMENZEICHEN	106
PRODUKTZEICHEN	107
GRUNDLAGEN MATRIZEN	109
GRUNDLAGEN DETERMINANTEN	112
GRUNDLAGEN VEKTOREN	115
LINEARE FUNKTIONEN	125
GRUNDLAGEN KOMPLEXE ZAHLEN	128
GRUNDLAGEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	133
PLANIMETRIE	137
KÖRPER	141
GRUNDLAGEN	145
LAGEMAßE	146
STREUMAßE	148
RAUM FÜR EIGENE ERGÄNZUNGEN	149
KOMBINATORIK	150
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG	152
BINOMIALVERTEILUNG	155
TABELLEN ZUR BINOMIALVERTEILUNG	156

NORMAL-/STANDARDNORMALVERTEILUNG	164
TABELLEN ZUR STANDARDNORMALVERTEILUNG	165
INDEXBERECHNUNG.....	169
REGRESSIONS- UND KORRELATIONSRECHNUNG	172

SYMBOLE

Symbole in der Mathematik

Zeichen	Bedeutung
$<$	kleiner als
\leq	Kleiner oder gleich
$>$	größer als
\geq	größer oder gleich
∞	unendlich
a^b	a hoch b (Potenz)
$\sqrt{\quad}$	Quadratwurzel aus
$\sqrt[n]{\quad}$	n-te Wurzel aus
$\log_a x$	Logarithmus x zur Basis a
$\lg x$	Logarithmus x zur Basis 10
$\ln x$	Logarithmus x zur Basis e
$\lg x$	Logarithmus x zur Basis 2
A, B, M	Mengenbezeichnungen
{ c; d }	Menge mit den Elementen c und d
\emptyset { }	leere Menge
{ x ... }	Menge aller x, für die gilt: ...
$A \cap B$	Durchschnittsmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$A \setminus B$	Differenzmenge von A und B
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{D}	Definitionsmenge
\mathbb{L}	Lösungsmenge

SYMBOLE

Griechische Symbole

Name des Symbols	Kleinbuchstabe	Großbuchstabe
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε oder ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ oder ϑ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mü	μ	M
Nü	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omikron	\omicron	O
Pi	π oder ϖ	Π
Rho	ρ oder ϱ	P
Sigma	σ oder ς	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	φ oder ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Endliche Intervalle

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

Unendliche Intervalle

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty, 0) \text{ oder } -\infty < x < 0$$

$$(0, +\infty) \text{ oder } 0 < x < +\infty$$

$$(-\infty, \infty) \text{ oder } -\infty < x < +\infty$$

GRUNDLAGEN

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

Potenzgesetze

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (n mal a)}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad b \neq 0$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

Wurzelgesetze:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad a \geq 0; b > 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n-m}}$$

Binomische Gesetze:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Binomischer Lehrsatz zum ausmultiplizieren beliebiger Terme:

Für die Potenzen $(a+b)^n$ ergibt sich für $n=2, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6 \\(a+b)^7 &= a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7\end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

GRUNDLAGEN

Rechenregeln für Brüche

Bruchgesetze:

Kehrwert einer Zahl (Zähler und Nenner werden vertauscht):

$$a \rightarrow \frac{1}{a}; \quad \frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$$

Erweitern eines Bruches:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Kürzen eines gemeinsamen Faktors:

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot c}{k \cdot d} = \frac{c}{d}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y}$$

Division von einem oder zwei Brüchen:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz):

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + a)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot a)$$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot a)$$

GRUNDLAGEN

Gleichungen mit einer Unbekannten

Äquivalenzumformungen

Vertauschungsregel

Man kann die beiden Seiten einer Gleichung vertauschen.

Additionsregel/Subtraktionsregel

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Zahl bzw. den gleichen Term addieren.

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Zahl bzw. den gleichen Term subtrahieren.

Multiplikationsregel/Divisionsregel

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) bzw. dem gleichen Term ($\neq 0$) multiplizieren.

Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) bzw. dem gleichen Term ($\neq 0$) dividieren.

Lineare Gleichungen

Allgemeine Form

$$a_1x + a_0 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \text{ mit } a_1 \neq 0$$

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösungsformel (p, q-Formel):

$$x^2 + px + q = 0 \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

Die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ entscheidet über die Anzahl der Lösungen:

$D > 0$: Zwei Lösungen

$D = 0$: Eine Lösung

$D < 0$: Keine Lösung

Lösungsformel (Mitternachtsformel):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Satz von Vieta:

Für $x^2 + px + q = 0$ gilt:

$$p = -(x_1 + x_2)$$

$$q = x_1 \cdot x_2$$

Wobei x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung sind.

Kubische Gleichungen:

Allgemeine Form:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_3 \neq 0)$$

Normalform:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Die Diskriminante D entscheidet über die Art der Lösungen:

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \text{mit } p = \frac{3b - a^2}{3} \quad \text{und } q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

D>0: Eine reelle Lösung und zwei konjugiert komplexe Lösungen

D=0: Drei reelle Lösungen, dabei eine doppelte

D<0: Drei reelle Lösungen

Cardanische Lösungsformel:

$$x_1 = u + v - \frac{a}{3}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$$

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} + \frac{u-v}{2} \cdot \sqrt{3}i$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} - \frac{u-v}{2} \cdot \sqrt{3}i$$

i: imaginäre Einheit

Vietascher Wurzelsatz:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$$

$$x_1x_2x_3 = -c$$

x_1, x_2, x_3 : Lösungen der kubischen Gleichung

Spezialfall der kubischen Gleichung:

Allgemeine Form:

$$x^3 + ax^2 + bx = 0$$

Kann in folgende Form aufgelöst werden:

$$x(x^2 + ax + b) = 0$$

Biquadratische Gleichungen:

Allgemeine Form:

Es sind ausschließlich gerade Exponenten vorhanden.

Durch Substitution $u = x^2$ in quadratische Gleichung überführen.

Anschließend wieder Rücksubstitution.

$$a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0 \text{ oder } x^4 + ax^2 + b = 0 \quad (a_4 \neq 0)$$

GRUNDLAGEN

Rechenregeln für Logarithmen

Logarithmengesetze:

$$x = \log_a b \text{ falls } a^x = b \text{ mit } a, b > 0 \text{ und } a \neq 1$$

$$\log_a a = 1 \rightarrow a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \rightarrow a^0 = 1$$

$$\log_a a^n = n \cdot \log_a a = n$$

$$a^{(\log_a x)} = \log_a a^x = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^r) = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a b$$

Berechnung eines beliebigen Logarithmus

$$\log_a b = \frac{\log(b)}{\log(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Spezielle Logarithmen

Zehner-Logarithmus:

$$\log_{10}(a) = \lg(a)$$

Zweier-Logarithmen:

$$\log_{12}(a) = \text{lb}(a)$$

Natürlicher Logarithmus:

$$\log_e(a) = \ln(a)$$

Verfahren zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen

Gleichsetzungsverfahren

- 1) Lösen sie beide Gleichungen nach der gleichen Variablen auf.
- 2) Setzen sie die anderen Seiten der Gleichungen einander gleich.
- 3) Lösen sie die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.
- 4) Setzen sie die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein und berechnen so die andere Variable.

Einsetzungsverfahren

- 1) Lösen sie eine Gleichungen nach einer Variablen auf. (Eventuell liegt eine bereits gegebene Gleichung schon passend vor. Darauf achten, dass so wenig wie möglich Brüche entstehen.)
- 2) Setzen sie den Term für diese Variable in die andere Gleichung ein.
- 3) Lösen sie die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.
- 4) Setzen sie die Lösung in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 ein und berechnen sie so die andere Variable.

Additionsverfahren

- 1) Multiplizieren der beiden Gleichungen mit Faktoren, so dass bei der Addition der beiden Gleichungen nur eine Variable übrigbleibt.
- 2) Lösen sie die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.
- 3) Setzen sie die Lösung in eine der Ausgangsgleichungen ein und berechnen sie so die andere Variable.

Gauß'scher Algorithmus

Folgende Umformungen dürfen durchgeführt werden, ohne dass sich dadurch die Lösung des LGS verändert:

Das Vertauschen zweier Zeilen

Das Multiplizieren einer Zeile mit einem Wert ungleich Null

Das Addieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Der Gauß'scher-Algorithmus sagt uns in welcher Reihenfolge wir die elementaren Zeilenumformungen anwenden müssen. Befolgt man diesen Anweisungen, so erhält man automatisch eine Lösung des LGS, vorausgesetzt das LGS ist lösbar.

1) schreiben Sie das Lineare Gleichungssystem in Matrixform.

2) Vertauschen Sie die Zeilen eventuell so, dass in der ersten Zeile an erster Stelle keine Null steht.

3) Dividieren Sie die erste Zeile durch die erste Zahl in dieser Zeile. Damit hat man an erster Stelle eine Eins stehen.

4) Subtrahieren Sie von der zweiten Zeile ein Vielfaches der ersten Zeile so, dass als Ergebnis in zweiter Zeile die erste Zahl zu Null wird. Wiederholen Sie das Gleiche mit erster und dritter, erster und vierter, erster und n-ten Zeile.

Nach diesem Schritt, steht in der ersten Spalte oben eine Eins und die restlichen Einträge sind Null.

5) Denkt man sich die erste Spalte und die erste Zeile weg, so erhält man ein kleineres LGS. Wenden Sie jetzt den Algorithmus von vorne auf das kleinere LGS an.

Das Ergebnis ist eine Treppenform der Matrix, insbesondere stehen unter der Diagonale nur Nullen.

5) Wenden Sie die oberen Schritte von vorne an, mit der rechten unteren anstatt linken oberen Zahl als Startpunkt.

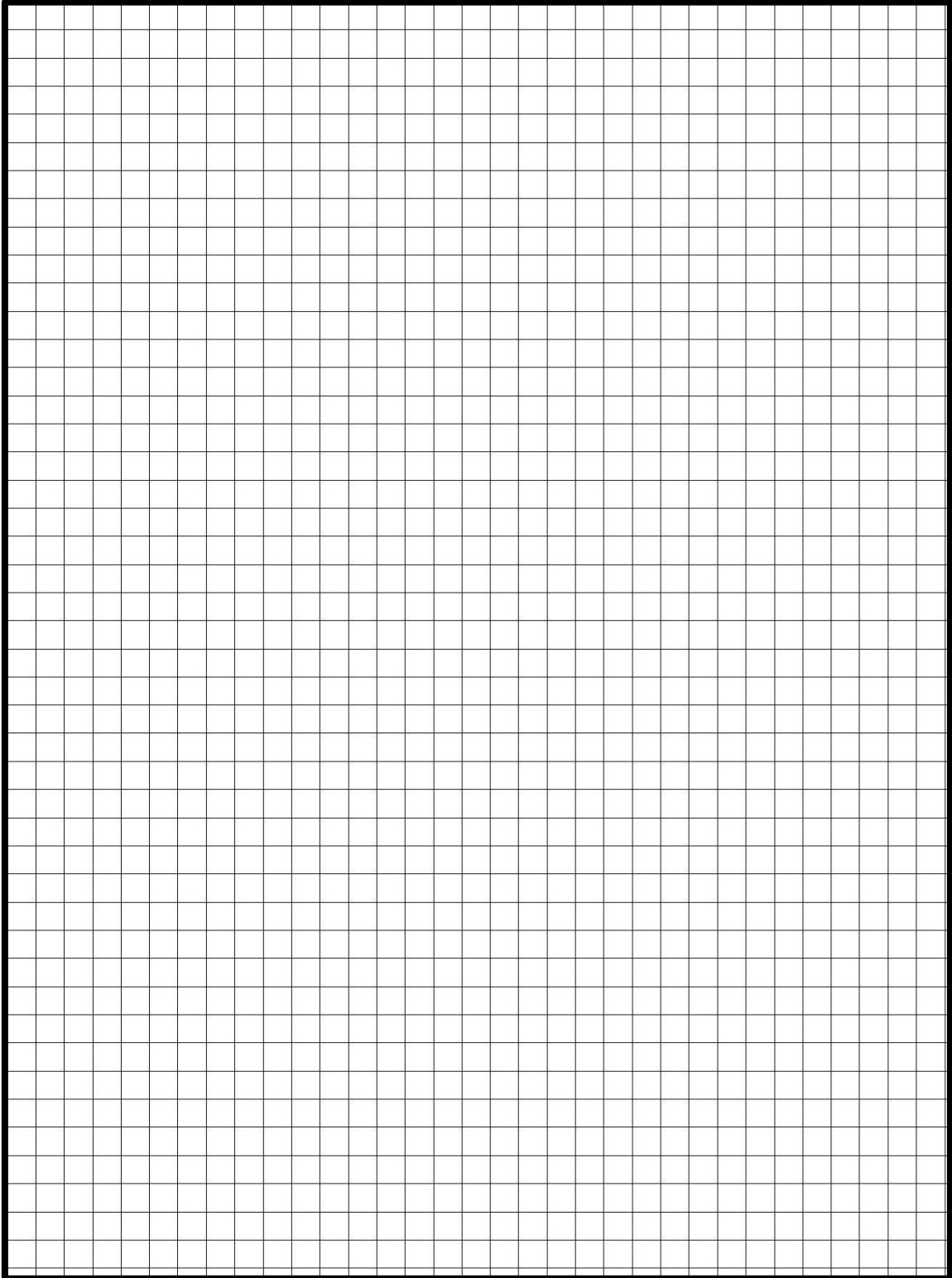
6) Berechnen Sie von unten her die einzelnen Variablen mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens.

Cramersche Regel

siehe bei Determinanten

GRUNDLAGEN

Raum für eigene Ergänzungen



DIFFERENTIALRECHNUNG

Grundlagen Differentialrechnung

Differenzenquotient:

von $y = f(x)$ an der Stelle x_0

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

Anstieg der Sekante; gute Näherung für kleine Δx

von $y = f(x)$ an der Stelle x_0

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Exakter Wert der Tangentensteigung bei x_0

Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Liefert Anstieg der Tangente für jedes x

DIFFERENTIALRECHNUNG

Grundlegende Ableitungsregeln

Basisableitungen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
	$f(x) = a^x; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
Trigonometrische Funktion	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
	$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ $= -1 - \cot^2(x)$
Arkusfunktionen	$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
	$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
Hyperbelfunktionen	$f(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
	$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$
	$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
	$f(x) = \operatorname{coth}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$ $= 1 - \operatorname{coth}^2(x)$



Funktion f (x)		Ableitung f '(x)
Areafunktionen	$f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
	$f(x) = \operatorname{arcosh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
	$f(x) = \operatorname{artanh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$
	$f(x) = \operatorname{arcoth}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$
Exponentialfunktionen	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = a^x; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

DIFFERENTIALRECHNUNG

Regeln für das Differenzieren

Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot g(x); a \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = a \cdot g'(x)$$

Summenregel:

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Produktregel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

DIFFERENTIALRECHNUNG

Kurvenuntersuchung

Monotonieverhalten

$f'(x) > 0$ für alle $x \in [a; b] \Rightarrow f$ ist in $[a, b]$ streng monoton steigend

$f'(x) < 0$ für alle $x \in [a; b] \Rightarrow f$ ist in $[a, b]$ streng monoton fallend

Konvex- bzw. Konkavbögen

$f''(x) > 0$ für alle $x \in [a; b]$, also f' in $[a, b]$ monoton wachsend

\Rightarrow Graph von f besitzt einen Konvexbogen

$f''(x) < 0$ für alle $x \in [a; b]$, also f' in $[a, b]$ monoton fallend

\Rightarrow Graph von f besitzt einen Konkavbogen

Definitionsmenge:

In der Definitionsmenge müssen alle Werte ausgeschlossen werden, die eine nicht erlaubte mathematische Berechnung nach sich ziehen würden.

Gebrochenrationale Funktion

Der Nenner muss ungleich Null sein.

Wurzel-Funktion

Der Term unter der Wurzel muss größer oder gleich Null sein.

Logarithmusfunktion

Das Argument des Logarithmus muss größer als Null sein.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad N_x(x|0)$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = y \quad \text{mit} \quad N_y(0|y)$$

Symmetrieeigenschaften:

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$-f(-x) = f(x)$$

Symmetrie zu einer beliebigen Achse

Symmetrisch zu einer Geraden mit der Gleichung $x=u$.

$$f(u-x) = f(u+x) \text{ oder } f(x) = f(2u-x)$$

Symmetrie zu einem beliebigen Punkt

Symmetrisch zum Punkt $P(a|b)$.

$$f(a+x) - b = -f(a-x) + b \text{ oder } f(x) = 2b - f(2a-x)$$

Extremwerte:

$$f'(x) = 0$$

Mit

$$f''(x_E) > 0 \rightarrow \text{relatives Minimum (Tiefpunkt)}$$

$$f''(x_E) < 0 \rightarrow \text{relatives Maximum (Hochpunkt)}$$

$$f''(x_E) = 0 \rightarrow \text{Vorzeichenwechsel muss durchgeführt werden.}$$

Für $f''(x) = 0$ kann entweder ein Minimum, ein Maximum oder gar kein Extremwert vorliegen.

Vorzeichenwechsel

Man überprüft, ob die erste Ableitung an der Stelle x_E ihr Vorzeichen wechselt.

Dazu setzt man auch oft geringfügig abweichende Werte (wie z.B. $\pm 0,01$) links und rechts der fragwürdigen Stelle x_E in $f'(x)$ ein und vergleicht die Vorzeichen der beiden errechneten Werte.

Es gilt schließlich für alle x_E , bei denen $f'(x_E) = 0$:

Ändert sich das Vorzeichen von $f(x_E \pm h)$ bei x_E von negativ zu positiv, so liegt ein Minimum vor.

Ändert sich das Vorzeichen von $f(x_E \pm h)$ bei x_E von positiv zu negativ, so liegt ein Maximum vor.

Wendepunkte:

Man nennt einen Punkt auf dem Funktionsgraphen Wendepunkt, wenn an diesem Punkt die Krümmung vom Positiven ins Negative umschlägt, oder vom Negativen ins Positive. Extremwerte sind keine Wendepunkte, da dort die Krümmung sowohl vorher also auch nachher positiv (Minima), bzw. negativ (Maxima) ist.

$$f''(x) = 0 \text{ und}$$

$$f'''(x) \neq 0$$

Terassenpunkt oder Sattelpunkt

Ist an einem so berechneten Wendepunkt ist zusätzlich noch die Bedingung

$$f'(x_W) = 0$$

also die Tangente an der Stelle x_W eine Waagrechte, so spricht man von einem speziellen Art von Wendepunkt, dem Terrassenpunkt.

Da sich an einem Terrassenpunkt nach wie vor das Vorzeichen von $f''(x)$ ändert, sind Terrassenpunkte natürlich nach wie vor auch Wendepunkte.

Beziehungen zwischen Kurven

Schnittpunkte

Der Schnittpunkt $P(x_{SP}|y_{SP})$ zweier Kurven ergibt sich aus:

$$f(x) = g(x) \rightarrow x_{SP}$$

$$f(x_{SP}) = y_{SP} \text{ oder } g(x_{SP}) = y_{SP}$$

Berührungspunkte

Der Berührungspunkt $P(x_{BP}|y_{BP})$ zweier Kurven ergibt sich aus:

$$f(x) = g(x) \text{ und } f'(x) = g'(x) \rightarrow x_{BP}$$

$$f(x_{BP}) = y_{BP} \text{ oder } g(x_{BP}) = y_{BP}$$

Tangenten

Tangentensteigung

Die Tangentensteigung in einem Punkt x_0 ergibt sich aus:

$$f'(x_0) = m_T$$

Tangente durch einen Kurvenpunkt

Berechnung der Tangentengleichung in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ der Funktion $f(x)$:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Tangente an die Kurve durch einen Punkt außerhalb der Kurve

Um die Tangentengleichung aufstellen zu können, muss der Berührungspunkt $P(x_0|f(x_0))$ gefunden werden (Punkt außerhalb der Kurve $Q(x_1|y_1)$).

Einsetzen von x_1 und y_1 in die Tangentengleichung:

$$y_1 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0)$$

Diese Gleichung nach x_0 auflösen und x_0 berechnen.

Anschließend die Tangente im Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ berechnen, diese enthält automatisch auch den Punkt $Q(x_1|y_1)$.

Senkrechter Schnitt zweier Kurven

$$f(x) = g(x) \rightarrow x_{SSP}$$

$$f'(x_{SSP}) \cdot g'(x_{SSP}) = -1$$

$$f(x_{SSP}) = y_{SSP} \text{ oder } g(x_{SSP}) = y_{SSP}$$

Normalen

Eine Normale an einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ steht senkrecht auf der Tangente durch diesen Punkt.

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ oder}$$

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Schnittwinkel

Zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ schließen an der Schnittstelle x_0 einen Winkel α ein.

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \right|$$

Funktionsscharen

Ortskurven

Wenn bei einer Funktion einer Funktionsschar f_t die Hoch-, Tief- und Wendepunkte in Abhängigkeit von t ausgerechnet sind, so ist es möglich, die Kurve zu bestimmen, auf der alle diese Punkte liegen.

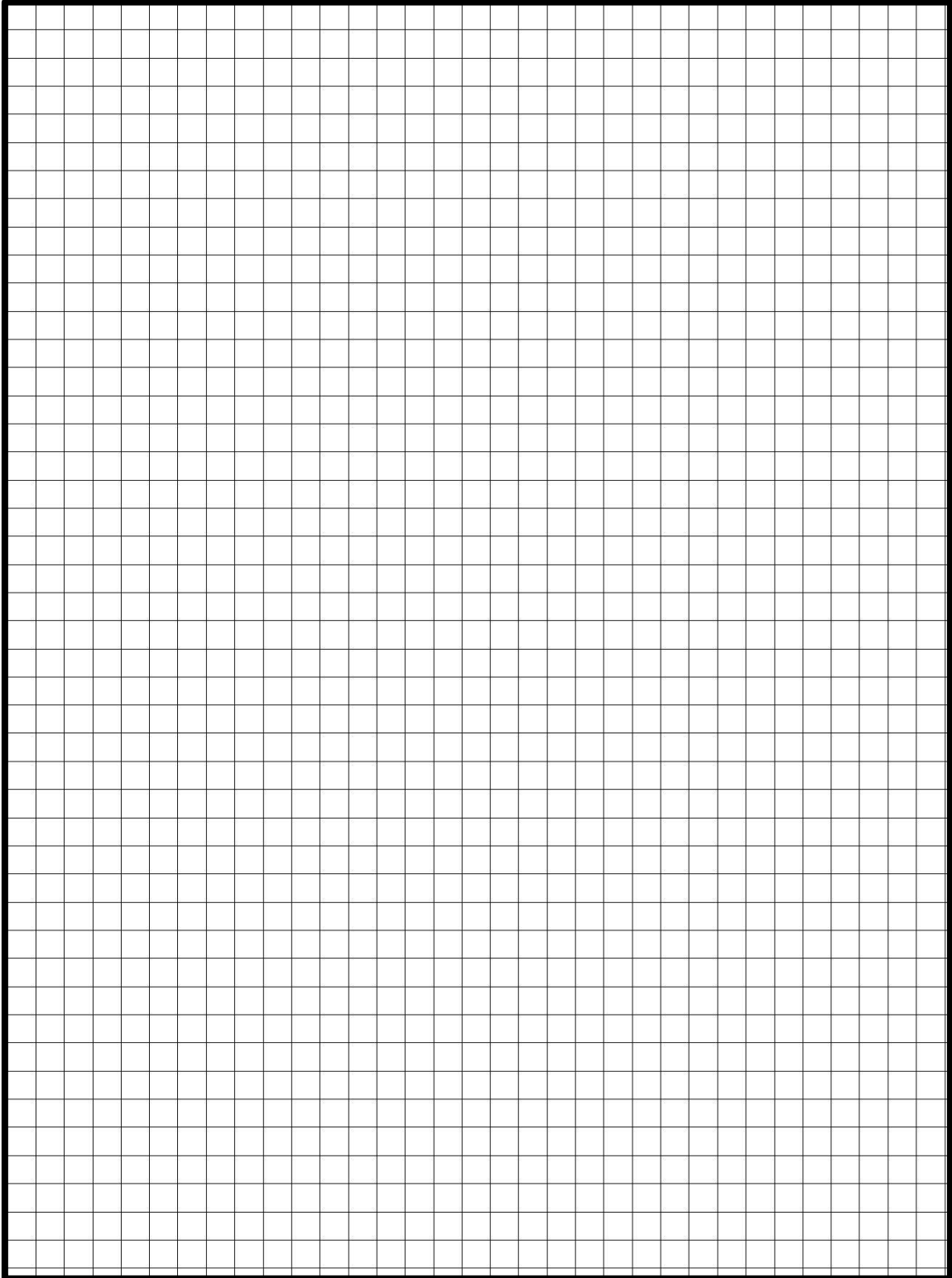
Allgemeine Bezeichnung des Hoch-, Tief- oder Wendepunktes: $P(a(t)|b(t))$

$x = a(t)$ nach t auflösen und in

$y = b(t)$ einsetzen \rightarrow Ortskurve

DIFFERENTIALRECHNUNG

Raum für eigene Ergänzungen



INTEGRALRECHNUNG

Grundlagen Integralrechnung

Stammfunktion:

F heißt Stammfunktion von f, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$

Mit F(x) ist auch jede Funktion $F(x) + c$ eine Stammfunktion

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Eigenschaften eines Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Uneigentliches Integrationsintervall

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Basis-Stammfunktionen

Funktion $f(x)$		Stammfunktion $F(x)$
Konstanter Faktor	$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
Potenzfunktionen	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$; $n \neq -1$
	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + C; x \neq 0$
	$f(x) = \frac{1}{ax + b}$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \ln ax + b + C$
Exponentialfunktionen	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
	$f(x) = e^{ax}$	$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + C$
	$f(x) = x \cdot e^{ax}$	$F(x) = \left(\frac{ax - 1}{a^2}\right) \cdot e^{ax} + C$
	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + C; a \neq 1$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C$
	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + C; a \neq 1$

Funktion f(x)		Stammfunktion F(x)
Trigonometrische Funktionen	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
	$f(x) = \sin(ax)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax) + C$
	$f(x) = \sin^2(ax)$	$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + C$
	$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$	$F(x) = -\cot(x) + C$
	$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\tan(x) + C$
	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
	$f(x) = \cos(ax)$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) + C$
	$f(x) = \cos^2(ax)$	$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + C$
	$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln \cos(x) + C$
	$f(x) = \cot(x)$	$F(x) = \ln \sin(x) + C$
	$f(x) = \sinh(x)$	$F(x) = \cosh(x) + C$
	$f(x) = \cosh(x)$	$F(x) = \sinh(x) + c$

Integralsubstitution

Berechnung eines Integrals mit Hilfe einer geeigneten Substitution

Aufstellung der Substitutionsgleichungen

$$u = g(x); \quad \frac{du}{dx} = g'(x); \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

Durchführung der Integralsubstitution durch Einsetzen der Substitutionsgleichung in das gegebene Integral.

$$\int f(x)dx = \int \varphi(u)du$$

Der Integrand ist nur noch von u abhängig.

Integration (Berechnung des neu aufgestellten Integrals)

$$\int \varphi(u)du = \Phi(u); \quad (\Phi'(u) = \varphi(u))$$

Rücksubstitution mit Hilfe der Substitutionsgleichung $u = g(x)$

$$\Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x); \quad (F'(x) = f(x))$$

Tabelle der Integralsubstitutionen

Integraltyp	Substitution
$\int f(ax + b)dx$ $(a \neq 0)$	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$
$\int f(x) \cdot f'(x) dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$
$\int f(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$x = a \cdot \sin(u)$ $dx = a \cdot \cos(u) du$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos(u)$
$\int f(x; \sqrt{x^2 + a^2}) dx$	$x = a \cdot \sinh(u)$ $dx = a \cdot \cosh(u) du$ $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot \cosh(u)$
$\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = a \cdot \cosh(u)$ $dx = a \cdot \sinh(u) du$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \sinh(u)$

Regel für die partielle Integration

Der Integrand des gegebenen Integrals wird in "passender" Weise in ein Produkt aus $u(x)$ und der Ableitung $v'(x)$ zerlegt. Dabei ist die Funktion $v(x)$ noch nicht bekannt. Diese muss noch durch bilden der Stammfunktion bestimmt werden.

Zerlegung:

$$\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

Eine echt gebrochenrationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

lässt sich schrittweise in Teilbrüche zerlegen.

Ist das Zählerpolynom vom Grad größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms, so muss die unecht gebrochenrationale Funktion mittels einer Polynomdivision in eine echt gebrochenrationale Funktion überführt werden.

Zerlegung:

Bestimmung der Nullstellen (einfach oder mehrfach)

Zu jeder Nullstelle des Nennerpolynoms einen Partialbruch aufstellen.

$$x_1: \text{Einfache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{x-x_1}$$

$$x_1: \text{Zweifache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$$

$$x_1: n\text{-fache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n}$$

A_1, A_2, \dots, A_n sind dabei noch nicht bestimmte Konstanten

Die echt gebrochenrationale Funktion $f(x)$ ist danach als Summe aller Partialbrüche darstellbar.

Bestimmung aller in den Partialbrüchen auftauchenden Konstanten mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems.

Flächeninhalt (zwischen Graph und x-Achse)

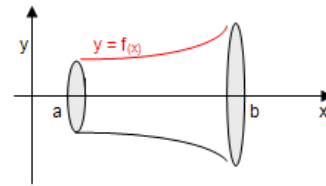
$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

Flächeninhalt (zwischen zwei Graphen)

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Rauminhalt (Rotation um die x-Achse)

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$



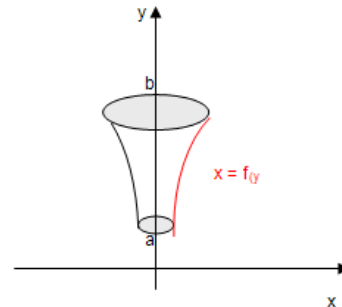
Rauminhalt (Rotation um die y-Achse)

$$V_y = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot f'(x) dx$$

$y' = f'(x)$: Rotierende Kurve nach y aufgelöst

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} (f(y))^2 dy$$

$x = f(y)$: Rotierende Kurve nach x aufgelöst



Bogenlängen

Länge des Graphen von f über $[a;b]$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Mantelflächen des Rotationskörpers um die x-Achse

Mantelfläche des Rotationskörpers um die x-Achse zu f über $[a;b]$

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Schwerpunkt eines homogenen räumlichen Körpers

Für die Koordinaten x_s, y_s und z_s des Schwerpunktes eines homogenen Körpers mit dem Volumen V , gilt folgendes

$$x_s = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} x dV; \quad y_s = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} y dV; \quad z_s = \frac{1}{V} \cdot \int_{(V)} z dV$$

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche

Für die Koordinaten x_s und y_s des Schwerpunktes einer homogenen ebenen Fläche mit dem Flächeninhalt A , gilt folgendes

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{(A)} x \, dA; \quad y_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{(A)} y \, dA$$

Schwerpunkteiner homogenen ebenen Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse

Für die Koordinaten x_s und y_s des Schwerpunktes einer homogenen ebenen Fläche mit dem Flächeninhalt A , die von einer Kurve $f(x)$ und der x -Achse begrenzt wird, gilt folgendes

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{(a)}^b x \cdot y \, dx = \frac{1}{A} \cdot \int_{(a)}^b x \cdot f(x) \, dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_{(a)}^b y^2 \, dx = \frac{1}{A} \cdot \int_{(a)}^b x \cdot (f(x))^2 \, dx$$

Voraussetzung:

Die Kurve $f(x)$ liegt im Intervall $a \leq x \leq b$ oberhalb der x -Achse

Schwerpunkteiner homogenen ebenen Fläche zwischen zwei Kurven

Für die Koordinaten x_s und y_s des Schwerpunktes einer homogenen ebenen Fläche mit dem Flächeninhalt A , die von den Kurven $f_1(x)$ und $f_2(x)$ begrenzt wird, gilt folgendes

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x(y_2 - y_1) \, dx = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)] \, dx \cdot$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) \, dx = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x [(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2] \, dx \cdot$$

Voraussetzung:

$f_2(x) \geq f_1(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers um die x-Achse

Der Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers, der durch Drehung einer Kurve $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ um die x-Achse entsteht. Dabei verschwinden die Schwerpunktskoordinaten y_s und z_s .

$$y_s = 0 \quad \text{und} \quad z_s = 0$$

$$x_s = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x \cdot y^2 \, dx = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x \cdot [f(x)]^2 \, dx$$

V_x : Rotationsvolumen

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers um die y-Achse

Der Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers, der durch Drehung einer Kurve $x = g(y)$ mit $c \leq y \leq d$ um die y-Achse entsteht. Dabei verschwinden die Schwerpunktskoordinaten x_s und z_s .

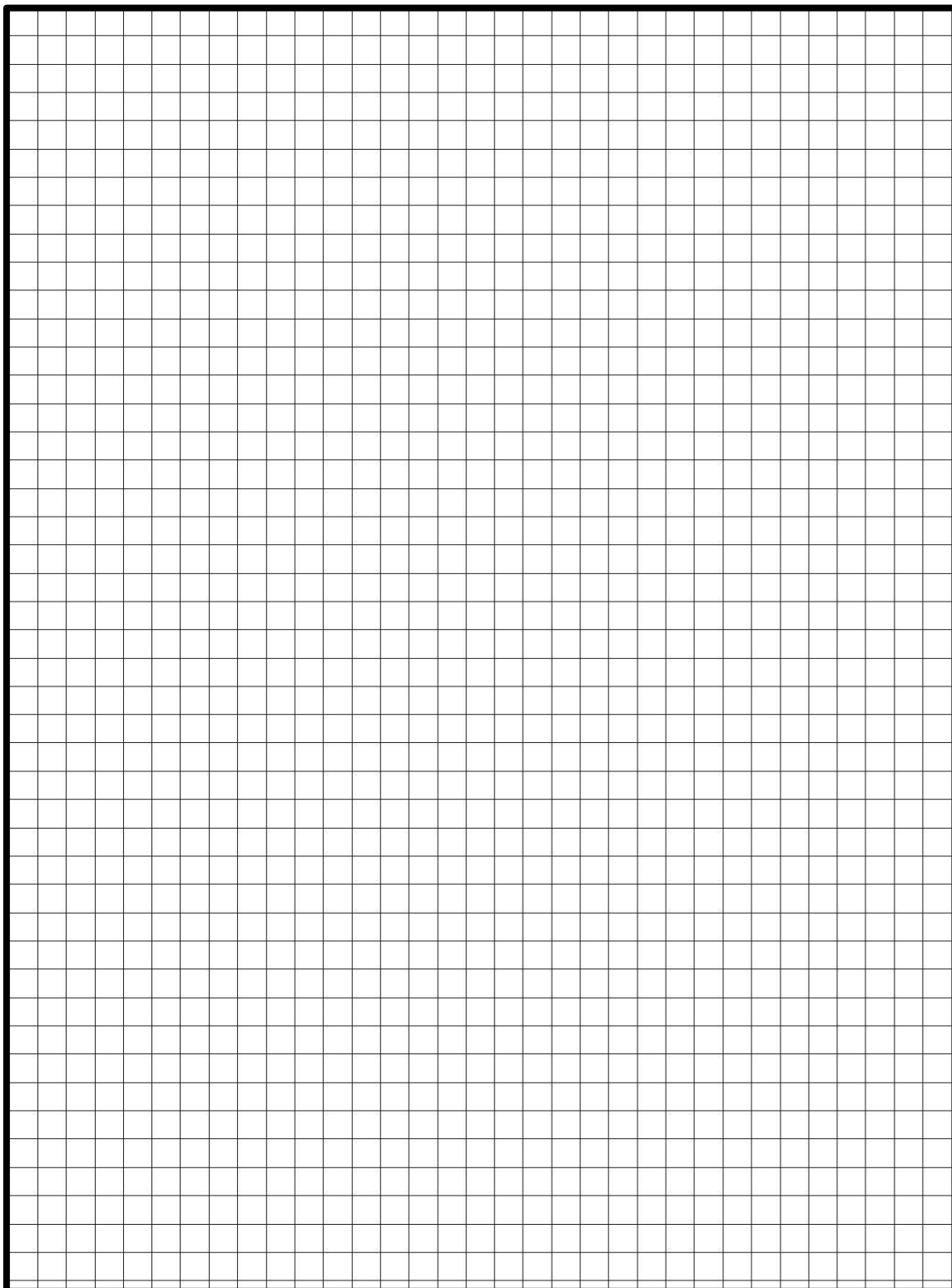
$$x_s = 0 \quad \text{und} \quad z_s = 0$$

$$y_s = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_c^d y \cdot x^2 \, dy = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_c^d y \cdot [g(y)]^2 \, dy$$

V_y : Rotationsvolumen

INTEGRALRECHNUNG

Raum für eigene Ergänzungen



Unbestimmte Integrale rationaler Funktionen	
Integrale, die $ax + b$ enthalten	
(1)	$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1)$
(2)	$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax + b + C$
(3)	$\int x \cdot (ax + b)^n dx = \frac{ax(n+1) - b}{a^2(n+1)(n+2)} \cdot (ax + b)^{n+1} + C \quad (n \neq -1; -2)$
(4)	$\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln ax + b + C$
(5)	$\int \frac{x}{(ax + b)^2} dx = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln ax + b + C$
(6)	$\int \frac{x}{(ax + b)^n} dx = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{(2-n)(ax + b)^{n-2}} - b \cdot \frac{1}{(1-n)(ax + b)^{n-1}} \right] + C$
(7)	$\int \frac{x^2}{ax + b} dx = \frac{(ax - 2b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax + b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3} \cdot \ln ax + b + C$
(8)	$\int \frac{x^2}{(ax + b)^2} dx = \frac{ax + b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax + b)} - \frac{2b}{a^3} \cdot \ln ax + b + C$
(9)	$\int \frac{x^2}{(ax + b)^3} dx = \frac{1}{a^3} \cdot \left(\ln ax + b + \frac{2b}{ax + b} - \frac{b^2}{2(ax + b)^2} \right) + C$
(10)	$\int \frac{x^2}{(ax + b)^n} dx = \frac{1}{a^3} \cdot \left(-\frac{1}{(n-3)(ax + b)^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)(ax + b)^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)(ax + b)^{n-1}} \right) + C$ ($n \neq 1, 2, 3$)
(11)	$\int \frac{x^3}{(ax + b)} dx = \frac{1}{a^4} \cdot \left(\frac{(ax + b)^3}{3} - \frac{3b(ax + b)^2}{2} + 3b^2(ax + b) - b^3 \cdot \ln ax + b \right) + C$

(12)	$\int \frac{x^3}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^4} \cdot \left(\frac{(ax+b)^2}{2} - 3b(ax+b) + 3b^2 \cdot \ln ax+b + \frac{b^3}{ax+b} \right) + C$
(13)	$\int \frac{x^3}{(ax+b)^3} dx = \frac{1}{a^4} \left(ax+b - 3b \cdot \ln ax+b - \frac{3b^2}{ax+b} + \frac{b^2}{2(ax+b)^2} \right) + C$
(14)	$\int \frac{x^3}{(ax+b)^4} dx = \frac{1}{a^4} \left(\ln ax+b + \frac{3b}{ax+b} - \frac{3b^2}{(ax+b)^2} + \frac{b^3}{3(ax+b)^3} \right) + C$
(15)	$\int \frac{1}{x(ax+b)} dx = -\frac{1}{b} \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right + C$
(16)	$\int \frac{1}{x(ax+b)^2} dx = \frac{a^2 x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{2ax}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3} \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right + C$
(17)	$\int \frac{1}{x(ax+b)^3} dx = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2} \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right + C$
(18)	$\int \frac{1}{x(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{b^n} \cdot \left[\ln \left \frac{ax+b}{x} \right - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot \frac{(-a)^i x^i}{i(ax+b)^i} \right] \quad (n \geq 1)$
(19)	$\int \frac{1}{x^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right + C$
(20)	$\int \frac{1}{x^2(ax+b)^2} dx = -a \cdot \left(\frac{1}{b^2(ax+b)} + \frac{1}{ab^2 x} - \frac{2}{b^3} \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right \right) + C$
(21)	$\int \frac{1}{x^2(ax+b)^3} dx = -a \cdot \left(\frac{1}{2b^2(ax+b)^2} + \frac{2}{b^3(ax+b)} + \frac{1}{ab^3 x} - \frac{3}{b^4} \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right \right) + C$
(22)	$\int \frac{1}{x^3(ax+b)} dx = -\frac{1}{b^3} \cdot \left[a^2 \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right - \frac{2a(ax+b)}{x} + \frac{(ax+b)^2}{2x^2} \right] + C$
(23)	$\int \frac{1}{x^3(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{b^4} \left[3a^2 \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right - \frac{a^3 x}{ax+b} + \frac{(ax+b)^2}{2x^2} - \frac{3a(ax+b)}{x} \right] + C$
(24)	$\int \frac{1}{x^3(ax+b)^3} dx = -\frac{1}{b^5} \left[6a^2 \cdot \ln \left \frac{ax+b}{x} \right - \frac{4a^3 x}{ax+b} + \frac{a^4 x^2}{2(ax+b)^2} - \frac{(ax+b)^2}{2x^2} - \frac{4a(ax+b)}{x} \right] + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int

Integrale, die zwei Linearfaktoren enthalten	
(25)	$\int \frac{ax + b}{cx + d} dx = \frac{ax + b}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \ln cx + d + C$
(26)	$\int \frac{1}{(ax + b)(cx + d)} dx = -\frac{1}{bc - ad} \cdot \ln \left \frac{ax + b}{cx + d} \right + C \quad (bc - ad \neq 0)$
(27)	$\int \frac{x}{(ax + b)(cx + d)} dx = \frac{1}{bc - ad} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \ln ax + b - \frac{d}{c} \cdot \ln cx + d \right) + C$ (bc - ad ≠ 0)
(28)	$\int \frac{1}{(ax + b)^2(cx + d)} dx = \frac{1}{bc - ad} \cdot \left(\frac{1}{ax + b} - \frac{c}{bc - ad} \cdot \ln \left \frac{ax + b}{cx + d} \right \right) + C$ (bc - ad ≠ 0)
(29)	$\int \frac{x}{(ax + b)^2(cx + d)} dx$ $= -\frac{b}{a(bc - ad)(ax + b)} + \frac{d}{(bc - ad)^2} \left(\ln \left \frac{c}{a} \right + \ln \left \frac{ax + b}{cx + d} \right \right) + C$ (bc - ad ≠ 0)
(30)	$\int \frac{x^2}{(ax + b)^2(cx + d)} dx$ $= \frac{1}{(bc - ad)^2} \cdot \left(\frac{b^2(bc - ad)}{a^2(ax + b)} + \frac{b}{a^2}(bc - 2ad) \cdot \ln ax + b + \frac{d^2}{c} \cdot \ln cx + d \right) + C$ (bc - ad ≠ 0)
(31)	$\int \frac{1}{(ax + b)^2(cx + d)^2} dx$ $= \frac{bc + ad + 2acx}{(bc - ad)^2(ax + b)(cx + d)} + \frac{2ac}{(bc - ad)^3} \cdot \left(\ln \left \frac{c}{a} \right + \ln \left \frac{ax + b}{cx + d} \right \right) + C$ (bc - ad ≠ 0)
(32)	$\int \frac{x}{(ax + b)^2(cx + d)^2} dx$ $= \frac{2bd + (bc + ad)x}{(bc - ad)^2(ax + b)(cx + d)} - \frac{bc + ad}{(bc - ad)^3} \cdot \left(\ln \left \frac{c}{a} \right + \ln \left \frac{ax + b}{cx + d} \right \right) + C \quad (bc - ad \neq 0)$
(33)	$\int \frac{x^2}{(ax + b)^2(cx + d)^2} dx$ $= \frac{bd(bc + ad) + (b^2c^2 + a^2d^2)x}{ac(bc - ad)^2(ax + b)(cx + d)} + \frac{2bd}{(bc - ad)^3} \cdot \left(\ln \left \frac{c}{a} \right + \ln \left \frac{ax + b}{cx + d} \right \right) + C \quad (bc - ad \neq 0)$

Integrale, die $x^2 \pm a^2$ enthalten	
(34)	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(35)	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
(36)	$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(37)	$\int \frac{1}{(x^2 - a^2)^2} dx = -\frac{x}{2a^2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{4a^3} \cdot \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
(35)	$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 + a^2)} + \frac{3}{8a^5} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(38)	$\int \frac{1}{(x^2 - a^2)^3} dx = -\frac{x}{4a^2(x^2 - a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 - a^2)} + \frac{3}{16a^5} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(39)	$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln x^2 \pm a^2 + C$
(40)	$\int \frac{x}{(x^2 \pm a^2)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 \pm a^2)} + C$
(41)	$\int \frac{x}{(x^2 \pm a^2)^3} dx = -\frac{1}{4(x^2 \pm a^2)^2} + C$
(42)	$\int \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx = x - a \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(43)	$\int \frac{x^2}{x^2 - a^2} dx = x - \frac{a}{2} \cdot \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
(44)	$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(45)	$\int \frac{x^2}{(x^2 - a^2)^2} dx = -\frac{x}{2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{4a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
(46)	$\int \frac{x^2}{(x^2 - a^2)^2} dx = -\frac{x}{4(x^2 + a^2)^2} - \frac{x}{8a^2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{16a^3} \cdot \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
(47)	$\int \frac{x^3}{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x^2}{2} \mp \frac{a^2}{2} \cdot \ln x^2 \pm a^2 + C$
(48)	$\int \frac{x^3}{(x^2 \pm a^2)^2} dx = \pm \frac{a^2}{2(x^2 \pm a^2)} + \frac{1}{2} \cdot \ln x^2 \pm a^2 + C$
(49)	$\int \frac{x^3}{(x^2 \pm a^2)^3} dx = -\frac{1}{2(x^2 \pm a^2)} \pm \frac{a^2}{4(x^2 \pm a^2)^2} + C$
(50)	$\int \frac{1}{x(x^2 \pm a^2)} dx = \pm \frac{1}{2a^2} \cdot \ln \left \frac{x^2}{x^2 \pm a^2} \right + C$

(51)	$\int \frac{1}{x(x^2 \pm a^2)^2} dx = \pm \frac{1}{2a^2(x^2 \pm a^2)} + \frac{1}{2a^4} \cdot \ln \left \frac{x^2}{x^2 \pm a^2} \right + C$
(52)	$\int \frac{1}{x(x^2 \pm a^2)^3} dx = \pm \frac{1}{4a^2(x^2 \pm a^2)^2} + \frac{1}{2a^4(x^2 \pm a^2)} + \frac{1}{2a^6} \cdot \ln \left \frac{x^2}{x^2 \pm a^2} \right + C$
(53)	$\int \frac{1}{x^2(x^2 + a^2)} dx = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(54)	$\int \frac{1}{x^2(x^2 - a^2)} dx = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^3} \cdot \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
(55)	$\int \frac{1}{x^2(x^2 + a^2)^2} dx = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2 + a^2)} - \frac{3}{2a^5} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(56)	$\int \frac{1}{x^2(x^2 - a^2)^2} dx = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2 - a^2)} + \frac{3}{4a^5} \cdot \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
(57)	$\int \frac{1}{x^2(x^2 + a^2)^3} dx$ $= -\frac{1}{a^6x} - \frac{x}{4a^4(x^2 + a^2)^2} - \frac{7x}{8a^6(x^2 + a^2)} - \frac{15}{8a^7} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
(58)	$\int \frac{1}{x^2(x^2 - a^2)^3} dx$ $= \frac{1}{a^6x} - \frac{x}{4a^4(x^2 - a^2)^2} + \frac{7x}{8a^6(x^2 - a^2)} - \frac{15}{16a^7} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
(59)	$\int \frac{1}{x^3(x^2 \pm a^2)} dx = \mp \frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4} \cdot \ln \left \frac{x^2}{x^2 \pm a^2} \right + C$
(60)	$\int \frac{1}{x^3(x^2 \pm a^2)^2} dx = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2 \pm a^2)} \mp \frac{1}{a^6} \cdot \ln \left \frac{x^2}{x^2 \pm a^2} \right + C$
(61)	$\int \frac{1}{x^3(x^2 \pm a^2)^3} dx$ $= \mp \frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6(x^2 \pm a^2)} - \frac{1}{4a^4(x^2 \pm a^2)^2} - \frac{3}{2a^8} \cdot \ln \left \frac{x^2}{x^2 \pm a^2} \right + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

Integrale, die $a^2 - x^2$ enthalten	
(62)	$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
(63)	$\int \frac{1}{(x^2 - a^2)^2} dx = -\frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3} \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
(64)	$\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \ln a^2 - x^2 + C$
(65)	$\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^2} dx = -\frac{1}{2(a^2 - x^2)} + C$
(66)	$\int \frac{x^2}{a^2 - x^2} dx = -x + \frac{a}{2} \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
(67)	$\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^2} dx = \frac{x}{2(a^2 - x^2)} - \frac{1}{4a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
(68)	$\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)} dx = -\frac{1}{2a^2} \cdot \ln \left \frac{a^2 - x^2}{x^2} \right + C$
(69)	$\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)^2} dx = \frac{1}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2a^4} \cdot \ln \left \frac{a^2 - x^2}{x^2} \right + C$
(70)	$\int \frac{1}{x^2(a^2 - x^2)} dx = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3} \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
(71)	$\int \frac{1}{x^2(a^2 - x^2)^2} dx = -\frac{1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4(a^2 - x^2)} + \frac{3}{4a^5} \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
Integrale, die $x^2 \pm a^2$ und einen Linearfaktor enthalten	
(72)	$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)(bx + c)} dx = \frac{1}{a^2b^2 + c^2} \left(\frac{b}{2} \cdot \ln \left(\frac{(bx + c)^2}{x^2 + a^2} \right) + \frac{c}{a} \cdot \arctan \left(\frac{x}{a} \right) \right) + C$
(73)	$\int \frac{1}{(x^2 - a^2)(bx + c)} dx = \frac{1}{c^2 - a^2b^2} \left(\frac{b}{2} \cdot \ln \left \frac{(bx + c)^2}{x^2 - a^2} \right - \frac{c}{2a} \cdot \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right \right) + C$
Integrale, die $a^2 - x^2$ und einen Linearfaktor enthalten	
(74)	$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)(bx + c)} dx = \frac{1}{a^2b^2 + c^2} \left(\frac{b}{2} \cdot \ln \left(\frac{(bx + c)^2}{a^2 - x^2} \right) - \frac{c}{2a} \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right \right) + C$
(75)	$\int \frac{x}{(a^2 - x^2)(bx + c)} dx$ $= \frac{1}{2(a^2b^2 - c^2)} \left(c \cdot \ln \left(\frac{a^2 - x^2}{(bx + c)^2} \right) + a \cdot b \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right \right) + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int

Integrale, die $ax^2 + bx + c$ enthalten	
(76)	$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ $= \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right) + C \text{ für } 4ac - b^2 > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \ln \left \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right + C \text{ für } 4ac - b^2 < 0 \end{array} \right\}$
(77)	$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^2} dx$ $= \frac{2ax + b}{(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} + \frac{2a}{4ac - b^2} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(78)	$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^3} dx$ $= \frac{2ax + b}{4ac - b^2} \cdot \left(\frac{1}{2(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{3a}{(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} \right)$ $+ \frac{6a^2}{(4ac - b^2)^2} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(79)	$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln ax^2 + bx + c - \frac{b}{2a} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(80)	$\int \frac{ex + f}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{e}{2a} \cdot \ln ax^2 + bx + c + \frac{2af - be}{2a} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(81)	$\int \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^2} dx$ $= \frac{bx + 2c}{(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} - \frac{b}{4ac - b^2} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(82)	$\int \frac{x^2}{x^2 + bx + c} dx$ $= \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \cdot \ln ax^2 + bx + c + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(83)	$\int \frac{x^2}{(ax^2 + bx + c)^2} dx$ $= \frac{(b^2 - 2ac)x + bc}{a(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} + \frac{2c}{4ac - b^2} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(84)	$\int \frac{1}{x(ax^2 + bx + c)} dx = \frac{1}{2c} \cdot \ln \left \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right - \frac{b}{2c} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(85)	$\int \frac{1}{x(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{1}{2c(n-1)(ax^2 + bx + c)^{n-1}}$ $- \frac{b}{2c} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + \frac{1}{c} \cdot \int \frac{1}{x(ax^2 + bx + c)^{n-1}} dx + C$

(86)	$\int \frac{1}{x^2(ax^2 + bx + c)} dx$ $= \frac{b}{2c^2} \cdot \ln \left \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c} \right) \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
(87)	$\int \frac{1}{x^m(ax^2 + bx + c)^n} dx$ $= -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c} \cdot \int \frac{1}{x^{m-2}(ax^2 + bx + c)^n} dx - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c} \cdot \int \frac{1}{x^{m-1}(ax^2 + bx + c)^n} dx + C$
Integrale, die $ax^2 + bx + c$ und einen Linearfaktor enthalten	
(88)	$\int \frac{1}{(dx + e)(ax^2 + bx + c)} dx = \frac{d}{2(cd^2 - bde + ae^2)} \cdot \ln \left \frac{(dx + e)^2}{ax^2 + bx + c} \right $ $+ \frac{2ae - bd}{2(cd^2 - bde + ae^2)} \cdot \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx + C$
Integrale, die drei oder vier Linearfaktoren enthalten	
(89)	$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} dx$ $= \frac{\ln x+a }{(b-a)(c-a)} + \frac{\ln x+b }{(a-b)(c-b)} + \frac{\ln x+c }{(a-c)(b-c)} + C$
(90)	$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} dx = \frac{\ln x+a }{(b-a)(c-a)(d-a)}$ $+ \frac{\ln x+b }{(a-b)(c-b)(d-b)} + \frac{\ln x+c }{(a-c)(b-c)(d-c)} + \frac{\ln x+d }{(a-d)(b-d)(d-d)} + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

Integrale, die $x^3 \pm a^3$ enthalten	
(90)	$\int \frac{1}{x^3 \pm a^3} dx = \pm \frac{1}{6a^2} \cdot \ln \left \frac{(x \pm a)^2}{x^2 \mp ax + a^2} \right + \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \arctan \left(\frac{2x \mp a}{a \cdot \sqrt{3}} \right) + C$
(91)	$\int \frac{1}{(x^3 \pm a^3)^2} dx = \frac{x}{3a^3 \cdot (x^3 \pm a^3)} \pm \frac{1}{9a^5} \cdot \ln \left \frac{(x \pm a)^2}{x^2 \mp ax + a^2} \right + \frac{2}{3a^5 \cdot \sqrt{3}} \cdot \arctan \left(\frac{2x \mp a}{a \cdot \sqrt{3}} \right) + C$
(92)	$\int \frac{x}{x^3 \pm a^3} dx = \frac{1}{6a} \cdot \ln \left \frac{x^2 \mp ax + a^2}{(x \pm a)^2} \right + \frac{1}{a \cdot \sqrt{3}} \cdot \arctan \left(\frac{2x \mp a}{a \cdot \sqrt{3}} \right) + C$
(93)	$\int \frac{x}{(x^3 \pm a^3)^2} dx = \frac{x^2}{3a^2(x^3 \pm a^3)} \pm \frac{1}{18a^4} \cdot \ln \left \frac{x^2 \mp ax + a^2}{(x \pm a)^2} \right \pm \frac{1}{3a^4 \cdot \sqrt{3}} \cdot \arctan \left(\frac{2x \mp a}{a \cdot \sqrt{3}} \right) + C$
(94)	$\int \frac{x^2}{x^3 \pm a^3} dx = \pm \frac{1}{3} \cdot \ln x^3 \pm a^3 + C$
(95)	$\int \frac{x^2}{(x^3 \pm a^3)^2} dx = -\frac{1}{3(x^3 \pm a^3)} + C$
(96)	$\int \frac{x^2}{x^3 \pm a^3} dx = x \mp a^3 \cdot \int \frac{1}{x^3 \pm a^3} dx + C$
(97)	$\int \frac{x^2}{(x^3 \pm a^3)^2} dx = -\frac{x}{3(x^3 \pm a^3)} + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x^3 \pm a^3} dx + C$
(98)	$\int \frac{1}{x \cdot (x^3 \pm a^3)} dx = \frac{1}{3a^3} \cdot \ln \left \frac{x^3}{x^3 \pm a^3} \right + C$
(99)	$\int \frac{1}{x \cdot (x^3 \pm a^3)^2} dx = \pm \frac{1}{3a^3(x^3 \pm a^3)} + \frac{1}{3a^6} \cdot \ln \left \frac{x^3}{x^3 \pm a^3} \right + C$
(100)	$\int \frac{1}{x^2 \cdot (x^3 \pm a^3)} dx = \mp \frac{1}{a^3 x} \mp \frac{1}{a^3} \cdot \int \frac{x}{x^3 \pm a^3} dx + C$
(101)	$\int \frac{1}{x^2 \cdot (x^3 \pm a^3)^2} dx = -\frac{1}{a^6 x} - \frac{x^2}{3a^6(x^3 \pm a^3)} - \frac{4}{3a^6} \cdot \int \frac{x}{x^3 \pm a^3} dx + C$
(102)	$\int \frac{1}{x^3 \cdot (x^3 \pm a^3)} dx = \mp \frac{1}{2a^3 x^2} \mp \frac{1}{a^3} \cdot \int \frac{1}{x^3 \pm a^3} dx + C$
(103)	$\int \frac{1}{x^3 \cdot (x^3 \pm a^3)^2} dx = -\frac{1}{2a^6 x^2} - \frac{x}{3a^6(x^3 \pm a^3)} - \frac{5}{3a^6} \cdot \int \frac{1}{x^3 \pm a^3} dx + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int

Integrale, die $x^4 \pm a^4$ enthalten	
(104)	$\int \frac{1}{x^4 + a^4} dx$ $= \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot a^3} \cdot \left(\ln \left \frac{x^2 + \sqrt{2} \cdot a \cdot x + a^2}{x^2 - \sqrt{2} \cdot a \cdot x + a^2} \right + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a^3} \cdot \arctan \left(\frac{\sqrt{2} \cdot a \cdot x}{x^2 - a^2} \right) \right) + C$
(105)	$\int \frac{1}{x^4 - a^4} dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}a^3} \cdot \left(\ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + 2 \cdot \arctan \left(\frac{x}{a} \right) \right) + C$
(106)	$\int \frac{x}{x^4 + a^4} dx = \frac{1}{2a^2} \cdot \arctan \left(\frac{x^2}{a^2} \right) + C$
(107)	$\int \frac{x}{x^4 - a^4} dx = \frac{1}{4a^2} \cdot \ln \left \frac{x^2 + a^2}{a^2 - x^2} \right + C$
(108)	$\int \frac{x^2}{x^4 + a^4} dx = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}a} \cdot \left(2 \cdot \arctan \left(\frac{\sqrt{2}ax}{a^2 - x^2} \right) - \ln \left \frac{x^2 + \sqrt{2}ax + a^2}{x^2 - \sqrt{2}ax + a^2} \right \right) + C$
(109)	$\int \frac{x^2}{x^4 - a^4} dx = \frac{1}{4a} \cdot \left(2 \cdot \arctan \left(\frac{x}{a} \right) - \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right \right) + C$
(110)	$\int \frac{x^3}{x^4 + a^4} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln x^4 + a^4 + C$
(111)	$\int \frac{x^2}{x^4 - a^4} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln x^4 - a^4 + C$
Integrale, die zwei quadratische Faktoren enthalten	
(112)	$\int \frac{1}{(ax^2 + b)(cx^2 + d)} dx = \frac{1}{ad - bc} \cdot \left(a \cdot \int \frac{1}{ax^2 + b} - c \int \frac{1}{cx^2 + d} \right) + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

	Integrale, die \sqrt{x} enthalten
(113)	$\int \frac{\sqrt{x}}{x+a^2} dx = 2\sqrt{x} - 2a \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(114)	$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x+a^2)} dx = \frac{2}{a} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(115)	$\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x+a^2} dx = 2\sqrt{x} \cdot \left(\frac{x}{3} - a^2\right) + 2a^3 \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(116)	$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x} \cdot (x+a^2)} dx = -\frac{2}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)\right) + C$
(117)	$\int \frac{\sqrt{x}}{x-a^2} dx = 2 \cdot \sqrt{x} - a \cdot \ln \left \frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a} \right + C$
(118)	$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x-a^2)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln \left \frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a} \right + C$
(119)	$\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x-a^2} dx = -2\sqrt{x} \cdot \left(\frac{x}{3} + a^2\right) + a^3 \cdot \ln \left \frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a} \right + C$
(120)	$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x} \cdot (x-a^2)} dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \ln \left \frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a} \right \right) + c$
(121)	$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2} dx$ $= \frac{1}{2\sqrt{2a}} \cdot \left(2 \cdot \operatorname{arccot} \left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax}} \right) + \ln \left(\frac{x - \sqrt{2ax} + a}{x + \sqrt{2ax} + a} \right) \right)$ $+ \begin{cases} c & \text{wenn } y \leq a \\ \frac{\pi}{a \cdot \sqrt{2a}} & c \text{ wenn } x > a \end{cases}$
(122)	$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x^2+a^2)} dx$ $= \frac{1}{2a\sqrt{2a}} \cdot \left(2 \cdot \operatorname{arccot} \left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax}} \right) + \ln \left(\frac{x + \sqrt{2ax} + a}{x - \sqrt{2ax} + a} \right) \right)$ $+ \begin{cases} c & \text{wenn } y \leq a \\ \frac{\pi}{a \cdot \sqrt{2a}} & c \text{ wenn } x > a \end{cases}$
(123)	$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \left(2 \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + \ln \left \frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a} \right \right) + C$

(124)	$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x^2 - a^2)} dx = -\frac{1}{2a \cdot \sqrt{a}} \cdot \left(2 \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + \ln \left \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} - a} \right \right) + C$
(125)	$\int \frac{\sqrt{x}}{(x + a^2)^2} dx = -\frac{\sqrt{x}}{x + a^2} + \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(126)	$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x + a^2)^2} dx = \frac{\sqrt{x}}{a^2 \cdot (x + a^2)} + \frac{1}{a^3} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(127)	$\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{(x + a^2)^2} dx = \frac{\sqrt{x} \cdot (3a^2 + 2x)}{x + a^2} - 3a \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(128)	$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x} \cdot (x + a^2)^2} dx = -\frac{1}{a^2(x + a^2)} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{a^2} \right) - \frac{3}{a^5} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(129)	$\int \frac{\sqrt{x}}{(x + a^2)^2} dx = -\frac{\sqrt{x}}{x + a^2} + \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(130)	$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x + a^2)^2} dx = \frac{\sqrt{x}}{a^2(x + a^2)} + \frac{1}{a^3} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(131)	$\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{(x + a^2)^2} dx = \frac{\sqrt{x}(3a^2 + 2x)}{x + a^2} - 3a \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(132)	$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x} \cdot (x + a^2)^2} dx = -\frac{1}{a^2(x + a^2)} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{a^2} \right) + \frac{3}{a^5} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right) + C$
(133)	$\int \frac{\sqrt{x}}{(x - a^2)^2} dx = \frac{\sqrt{x}}{a^2 - x} - \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} - a} \right + C$
(134)	$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x - a^2)^2} dx = \frac{\sqrt{x}}{a^2(a^2 - x)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \ln \left \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} - a} \right + C$
(135)	$\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{(x - a^2)^2} dx = \frac{\sqrt{x} \cdot (2x - 3a^2)}{x - a^2} - \frac{3}{2} a \cdot \ln \left \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} - a} \right + C$
(136)	$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x} \cdot (x - a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2(x - a^2)} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{a^2} \right) + \frac{3}{2a^5} \cdot \ln \left \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} - a} \right + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int

	Integrale, die $\sqrt{ax + b}$ enthalten
(137)	$\int \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{3a} \cdot (ax + b) \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(138)	$\int x \cdot \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{15a^2} (3ax - 2b) \cdot (ax + b) \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(139)	$\int x^2 \cdot \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{105a^3} (15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)(ax + b) \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(140)	$\int \frac{1}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(141)	$\int \frac{x}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{2}{3a^2} (ax - 2b) \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(142)	$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{2}{15a^3} \cdot (3a^2x^2 - 4abx + 8b^2) \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(143)	$\int \frac{1}{x^n \cdot \sqrt{ax + b}} dx$ $= -\frac{1}{b(n-1)} \cdot \left(\frac{\sqrt{ax + b}}{x^{n-1}} + \frac{2n-3}{2} \right) \cdot a \int \frac{1}{x^{n-1} \cdot \sqrt{ax + b}} dx + C$ $(n \geq 2)$
(144)	$\int \frac{\sqrt{ax + b}}{x} dx = 2 \cdot \sqrt{ax + b} + b \cdot \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{ax + b}} dx + C$
(145)	$\int \frac{\sqrt{ax + b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax + b}}{x} + \frac{a}{2} \cdot \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{ax + b}} dx + C$
(146)	$\int (ax + b) \cdot \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{5a} \cdot (ax + b)^2 \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(147)	$\int x \cdot (ax + b) \cdot \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{35a^2} \cdot (5ax - 2b)(ax + b)^2 \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(148)	$\int x^2 \cdot (ax + b) \cdot \sqrt{ax + b} dx$ $= \frac{2}{315a^3} \cdot (35a^2x^2 - 20abx + 8b^2)(ax + b)^2 \cdot \sqrt{ax + b} + C$
(149)	$\int \frac{1}{x} \cdot (ax + b) \cdot \sqrt{ax + b} dx$ $= \frac{2}{3} (ax + 4b) \cdot \sqrt{ax + b} + b^2 \cdot \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{ax + b}} dx + C$
(150)	$\int \frac{1}{(ax + b) \cdot \sqrt{ax + b}} dx = -\frac{2}{a \cdot \sqrt{ax + b}} + C$
(151)	$\int \frac{x}{(ax + b) \cdot \sqrt{ax + b}} dx = \frac{2 \cdot (ax + b)}{a^2 \cdot \sqrt{ax + b}} + C$

(152)	$\int \frac{x^2}{(ax+b) \cdot \sqrt{ax+b}} dx = \frac{2 \cdot (a^2x^2 - 4abx - 8b^2)}{3a^3 \cdot \sqrt{ax+b}} + C$
(153)	$\int \frac{1}{x \cdot (ax+b) \cdot \sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{2}{a \cdot \sqrt{ax+b}} + \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{ax+b}} dx \right) + C$
(154)	$\int \frac{1}{x^2 \cdot (ax+b) \cdot \sqrt{ax+b}} dx$ $= -\frac{1}{b^2} \cdot \left(\frac{3ax+b}{x \cdot \sqrt{ax+b}} + \frac{3}{2a} \cdot \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{ax+b}} dx \right) + C$
Integrale die $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ beinhalten	
(155)	$\int r dx = \frac{1}{2} \cdot (xr + a^2 \cdot \ln(x+r)) + C$
(156)	$\int r^3 dx = \frac{1}{4}x \cdot r^3 + \frac{3}{8}a^2 \cdot x \cdot r + \frac{3}{8}a^4 \cdot \ln(x+r) + C$
(157)	$\int r^5 dx = \frac{1}{6}x \cdot r^5 + \frac{5}{24}a^2 \cdot x \cdot r^3 + \frac{5}{16}a^4 \cdot x \cdot r + \frac{5}{16}a^6 \cdot \ln(x+r) + C$
(158)	$\int x \cdot r dx = \frac{r^3}{3} + C$
(159)	$\int x \cdot r^3 dx = \frac{r^5}{5} + C$
(160)	$\int x \cdot r^{2n+3} dx = \frac{r^{2n+3}}{2n+3} + C$
(161)	$\int x^2 \cdot r dx = \frac{x \cdot r^3}{4} - \frac{a^2 \cdot x \cdot r}{8} - \frac{a^4}{8} \cdot \ln(x+r) + C$
(162)	$\int x^2 \cdot r^3 dx = \frac{x \cdot r^5}{6} - \frac{a^2 \cdot x \cdot r^3}{24} - \frac{a^4 \cdot x \cdot r}{16} - \frac{a^6}{16} \cdot \ln(x+r) + C$
(163)	$\int x^3 \cdot r dx = \frac{r^5}{5} - \frac{a^2 \cdot r^3}{3} + C$
(164)	$\int x^3 \cdot r^3 dx = \frac{r^7}{7} - \frac{a^2 \cdot r^5}{5} + C$
(165)	$\int x^3 \cdot r^{2n+1} dx = \frac{r^{2n+5}}{2n+5} - \frac{a^3 \cdot r^{2n+3}}{2n+3} + C$
(166)	$\int x^4 \cdot r dx = \frac{x^3 \cdot r^3}{6} - \frac{a^2 \cdot x \cdot r^3}{8} + \frac{a^4 \cdot x \cdot r}{16} + \frac{a^6}{16} \cdot \ln(x+r) + C$
(167)	$\int x^4 \cdot r^3 dx$ $= \frac{x^3 \cdot r^5}{8} - \frac{a^2 \cdot x \cdot r^5}{16} + \frac{a^4 \cdot x \cdot r^3}{64} + \frac{3 \cdot a^6 \cdot x \cdot r}{128} + \frac{3a^8}{128} \cdot \ln(x+r) + C$

(168)	$\int x^5 r dx = \frac{r^7}{7} - \frac{2 \cdot a^2 \cdot r^5}{5} + \frac{a^4 r^3}{3} + C$
(169)	$\int x^5 r^3 dx = \frac{r^9}{9} - \frac{2 \cdot a^2 \cdot r^7}{7} + \frac{a^4 r^5}{5} + C$
(170)	$\int x^5 r^{2n+1} dx = \frac{r^{2n+7}}{2n+7} - \frac{2 \cdot a^2 \cdot r^{2n+5}}{2n+5} + \frac{a^4 r^{2n+3}}{2n+3} + C$
(171)	$\int \frac{r}{x} dx = r - a \cdot \ln \left \frac{a+r}{x} \right + C$
(172)	$\int \frac{r^3}{x} dx = \frac{r^3}{3} + a^2 \cdot r - a^3 \cdot \ln \left \frac{a+r}{x} \right + C$
(173)	$\int \frac{r^5}{x} dx = \frac{r^5}{5} + \frac{a^2 \cdot r}{3} + a^4 \cdot r - a^5 \cdot \ln \left \frac{a+r}{x} \right + C$
(174)	$\int \frac{r^7}{x} dx = \frac{r^7}{7} + \frac{a^2 \cdot r^5}{5} + \frac{a^4 \cdot r}{3} + a^6 \cdot r - a^7 \cdot \ln \left \frac{a+r}{x} \right + C$
(175)	$\int \frac{1}{r} dx = \ln x+r + C$
(176)	$\int \frac{1}{r^3} dx = \frac{x}{a^2 \cdot r} + C$
(177)	$\int \frac{x}{r} dx = -\frac{1}{r} + C$
(178)	$\int \frac{x}{r^3} dx = -\frac{1}{r} + C$
(179)	$\int \frac{x^2}{r} dx = \frac{x}{2} \cdot r - \frac{a^2}{2} \cdot \ln x+r + C$
(180)	$\int \frac{1}{x \cdot r} dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln \left \frac{a+r}{x} \right + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

	Integrale die $s = \sqrt{x^2 - a^2}$ beinhalten
(181)	$\int x \cdot s \, dx = \frac{1}{3} s^3 + C$
(182)	$\int \frac{s}{x} \, dx = s - a \cdot \cos^{-1} \left \frac{a}{x} \right + C$
(183)	$\int \frac{1}{s} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left \frac{x+s}{a} \right + C$
(184)	$\int \frac{x}{s} \, dx = s + C$
(185)	$\int \frac{x}{s^3} \, dx = -\frac{1}{s} + C$
(186)	$\int \frac{x}{s^5} \, dx = -\frac{1}{3 \cdot s^3} + C$
(187)	$\int \frac{x}{s^7} \, dx = -\frac{1}{5 \cdot s^5} + C$
(188)	$\int \frac{x^2}{s} \, dx = \frac{x \cdot s}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left \frac{x+s}{a} \right + C$
(189)	$\int \frac{x^2}{s^3} \, dx = -\frac{x}{s} + \ln \left \frac{x+s}{a} \right + C$
(190)	$\int \frac{x^4}{s} \, dx = \frac{x^3 \cdot s}{4} + \frac{3}{8} a^2 \cdot x \cdot s + \frac{3}{8} a^4 \cdot \ln \left \frac{x+s}{a} \right + C$
(191)	$\int \frac{x^4}{s^3} \, dx = \frac{x \cdot s}{2} - \frac{a^2 \cdot x}{s} + \frac{3}{2} a^2 \cdot \ln \left \frac{x+s}{a} \right + C$
(192)	$\int \frac{x^4}{s^5} \, dx = -\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3 \cdot s^3} \cdot \ln \left \frac{x+s}{a} \right + C$
(193)	$\int \frac{1}{s^3} \, dx = -\frac{x}{a^2 \cdot s} + C$
(194)	$\int \frac{1}{s^5} \, dx = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3 \cdot s^3} \right] + C$
(195)	$\int \frac{1}{s^7} \, dx = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{x}{s} - \frac{2 \cdot x^3}{3 \cdot s^3} + \frac{x^5}{5 \cdot s^5} \right] + C$
(196)	$\int \frac{1}{s^9} \, dx = -\frac{1}{a^8} \left[\frac{x}{s} - \frac{2 \cdot x^3}{3 \cdot s^3} + \frac{3 \cdot x^5}{5 \cdot s^5} - \frac{x^7}{7 \cdot s^7} \right] + C$
(197)	$\int \frac{x^2}{s^5} \, dx = -\frac{x^3}{3 \cdot a^2 \cdot s^3} + C$
(198)	$\int \frac{x^2}{s^7} \, dx = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x^3}{3 \cdot s^3} - \frac{x^5}{5 \cdot s^5} \right] + C$

(199)	$\int \frac{x^2}{s^9} dx = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{x^3}{3 \cdot s^3} - \frac{2 \cdot x^5}{5 \cdot s^5} + \frac{x^7}{7 \cdot s^7} \right] + C$
Integrale die $t = \sqrt{a^2 - x^2}$ enthalten	
(200)	$\int t dx = \frac{1}{2} \cdot \left(xt + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) + C \quad (x \leq a)$
(201)	$\int x \cdot t dx = -\frac{1}{3}t^3 + C \quad (x \leq a)$
(202)	$\int x^2 \cdot t dx = \frac{1}{8} \cdot \left(2 \cdot x^3 \cdot t - x \cdot a^2 \cdot t + a^4 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) + C \quad (x \leq a)$
(203)	$\int \frac{t}{x} dx = t - a \cdot \ln \left \frac{a+t}{x} \right + C \quad (x \leq a)$
(204)	$\int \frac{1}{t} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (x \leq a)$
(205)	$\int \frac{x^2}{t} dx = -\frac{x}{2} \cdot t + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (x \leq a)$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

Integrale die $\sqrt{R} = \sqrt{(ax^2 + bx + c)}$ beinhalten	
(206)	$\int \frac{1}{\sqrt{R}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{a \cdot R} + 2a \cdot x + b + C \quad (a > 0)$
(207)	$\int \frac{1}{\sqrt{R}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sinh^{-1} \frac{2a \cdot x + b}{\sqrt{4a \cdot c + b^2}} + C \quad (a > 0; 4ac - b^2 > 0)$
(208)	$\int \frac{1}{\sqrt{R}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln 2a \cdot x + b + C \quad (a > 0; 4ac - b^2 = 0)$
(209)	$\int \frac{1}{\sqrt{R}} dx = -\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arcsin\left(\frac{2a \cdot x + b}{\sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}\right) + C \quad (a > 0; 4ac - b^2 < 0)$
(210)	$\int \frac{1}{R^3} dx = \frac{4a \cdot x + 2b}{(4a \cdot c - b^2) \cdot \sqrt{R}} + C$
(211)	$\int \frac{1}{R^5} dx = \frac{4a \cdot x + 2b}{3 \cdot (4a \cdot c - b^2) \cdot \sqrt{R}} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{8a}{4a \cdot c - b^2}\right) + C$
(212)	$\int \frac{1}{R^{2n-1}} dx$ $= \frac{4a \cdot x + 2b}{(2n-1) \cdot (4a \cdot c - b^2) \cdot R^{\frac{2n-1}{2}}} + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4a \cdot c - b^2)} \cdot \int \frac{1}{R^{\frac{2n-1}{2}}} dx + C$
(213)	$\int \frac{x}{\sqrt{R}} dx = \frac{\sqrt{R}}{a} - \frac{b}{2a} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{R}} + c$
(214)	$\int \frac{x}{R^3} dx = -\frac{2b \cdot x + 4c}{(4a \cdot c - b^2) \cdot \sqrt{R}} + C$
(215)	$\int \frac{x}{R^{2n-1}} dx = -\frac{1}{(2n-1) \cdot a \cdot R^{\frac{2n-1}{2}}} - \frac{b}{2a} \cdot \int \frac{1}{R^{\frac{2n-1}{2}}} dx + C$
(216)	$\int \frac{x}{x \cdot \sqrt{R}} dx = -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \ln \left \frac{2 \cdot \sqrt{c \cdot R} + b \cdot x + 2c}{x} \right + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int

Integrale trigonometrischer Funktionen, die sin enthalten	
(217)	$\int \sin(cx) dx = -\frac{1}{c} \cdot \cos(cx) + C$
(218)	$\int \sin^n(cx) dx = -\frac{\sin^{n-1} \cdot c \cdot x \cdot \cos(cx)}{n \cdot c} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2}(cx) dx + C$ ($n > 0$)
(219)	$\int \sqrt{1 - \sin(x)} dx = 2 \cdot \frac{\cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2})} \cdot \sqrt{1 - \sin(x)} + C$
(220)	$\int x \cdot \sin(cx) dx = \frac{\sin(cx)}{c^2} - \frac{x \cdot \cos(cx)}{c} + C$
(221)	$\int x^n \cdot \sin(cx) dx = -\frac{x^n}{c} \cdot \cos(cx) + \frac{n}{c} \cdot \int x^{n-1} \cdot \cos(cx) dx + C$ ($n > 0$)
(222)	$\int \frac{\sin(cx)}{x} dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{(cx)^{2i+1}}{(2i+1) \cdot (2i+1)!} + C$
(223)	$\int \frac{\sin(cx)}{x^n} dx = -\frac{\sin(cx)}{(n-1) \cdot x^{n-1}} + \frac{c}{n-1} \cdot \int \frac{\cos(cx)}{x^{n-1}} dx + C$
(224)	$\int \frac{1}{\sin(cx)} dx = \frac{1}{c} \cdot \ln \left \tan\left(\frac{cx}{2}\right) \right + C$
(225)	$\int \frac{1}{\sin^n(cx)} dx = \frac{\cos(cx)}{c \cdot (1-n) \cdot \sin^{n-1}(cx)} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{1}{\sin^{n-2}(cx)} dx + C$ ($n > 1$)
(226)	$\int \frac{1}{1 \pm \sin(cx)} dx = \frac{1}{c} \cdot \tan\left(\frac{cx}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right) + C$
(227)	$\int \frac{x}{1 + \sin(cx)} dx = \frac{x}{c} \cdot \tan\left(\frac{cx}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{c^2} \cdot \ln \left \cos\left(\frac{cx}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right + C$
(228)	$\int \frac{x}{1 - \sin(cx)} dx = \frac{x}{c} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{cx}{2}\right) + \frac{2}{c^2} \cdot \ln \left \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{cx}{2}\right) \right + C$
(229)	$\int \frac{\sin(cx)}{1 \pm \sin(cx)} dx = \pm x + \frac{1}{c} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{cx}{2}\right) + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int

Integrale trigonometrischer Funktionen, die cos enthalten	
(230)	$\int \cos(cx) = \frac{1}{c} \cdot \sin(cx) + C$
(231)	$\int \cos^n(cx) = \frac{\cos^{n-1}(cx) \cdot \sin(cx)}{n \cdot c} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2}(cx) dx + C \quad (n > 0)$
(232)	$\int x \cdot \cos(cx) = \frac{\cos(cx)}{c^2} + \frac{x \cdot \sin(cx)}{c} + C$
(234)	$\int x^n \cdot \cos(cx) = \frac{x^n \cdot \sin(cx)}{c} + \frac{n}{c} \cdot \int x^{n-1} \cdot \sin(cx) dx + C$
(235)	$\int \frac{\cos(cx)}{x} dx = \ln cx + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{(cx)^{2i}}{2i \cdot (2i)!} + C$
(236)	$\int \frac{\cos(cx)}{x^n} dx = -\frac{\cos(cx)}{(n-1) \cdot x^{n-1}} - \frac{c}{n-1} \cdot \int \frac{\sin(cx)}{x^{n-1}} + C \quad (n \neq 1) + C$
(237)	$\int \frac{1}{\cos(cx)} dx = \frac{1}{c} \cdot \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
(238)	$\int \frac{1}{\cos^n(cx)} dx = \frac{\sin(cx)}{c \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-1}(cx)} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{1}{\cos^{n-2}(cx)} + C \quad (n > 1)$
(239)	$\int \frac{1}{1 - \cos(cx)} dx = -\frac{1}{c} \cdot \cot \left(\frac{cx}{2} \right) + C$
(240)	$\int \frac{x}{1 + \cos(cx)} dx = \frac{x}{c} \cdot \tan \left(\frac{cx}{2} \right) + \frac{2}{c^2} \cdot \ln \left \cos \left(\frac{cx}{2} \right) \right + C$
(241)	$\int \frac{x}{1 - \cos(cx)} dx = -\frac{x}{c} \cdot \cot \left(\frac{cx}{2} \right) + \frac{2}{c^2} \cdot \ln \left \sin \left(\frac{cx}{2} \right) \right + C$
(242)	$\int \frac{\cos(cx)}{1 + \cos(cx)} dx = x - \frac{1}{c} \cdot \tan \left(\frac{cx}{2} \right) + C$
(243)	$\int \frac{\cos(cx)}{1 - \cos(cx)} dx = -x - \frac{1}{c} \cdot \cot \left(\frac{cx}{2} \right) + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int

Integrale trigonometrischer Funktionen, die tan enthalten	
(244)	$\int \tan(cx) dx = -\frac{1}{c} \cdot \ln \cos(cx) + C$
(245)	$\int \tan^n(cx) dx = \frac{1}{c \cdot (n-1)} \cdot \tan^{n-1}(cx) - \int \tan^{n-2}(cx) dx + C \quad (n \neq 1)$
(246)	$\int \frac{1}{\tan(cx) + 1} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) + \cos(cx) + C$
(247)	$\int \frac{1}{\tan(cx) - 1} dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) - \cos(cx) + C$
(250)	$\int \frac{\tan(cx)}{\tan(cx) + 1} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) + \cos(cx) + C$
(251)	$\int \frac{\tan(cx)}{\tan(cx) - 1} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) - \cos(cx) + C$
Integrale trigonometrischer Funktionen, die cot enthalten	
(252)	$\int \cot(c \cdot x) dx = \frac{1}{c} \cdot \ln \sin(c \cdot x) + c$
(253)	$\int \cot^n(c \cdot x) dx = -\frac{1}{c \cdot (n-1)} \cdot \cot^{n-1}(cx) - \int \cot^{n-2}(cx) dx + c \quad (n \neq 1)$
(254)	$\int \frac{1}{1 + \cot(c \cdot x)} dx = \int \frac{\tan(c \cdot x)}{\tan(c \cdot x) + 1} dx$
(255)	$\int \frac{1}{1 - \cot(c \cdot x)} dx = \int \frac{\tan(c \cdot x)}{\tan(c \cdot x) - 1} dx$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

	Integrale trigonometrischer Funktionen, die sowohl sin als auch cos enthalten
(256)	$\int \frac{1}{\cos(cx) \pm \sin(cx)} dx = \frac{1}{c \cdot \sqrt{2}} \cdot \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) \right + C$
(257)	$\int \frac{1}{(\cos(cx) \pm \sin(cx))^2} dx = \frac{1}{2c} \cdot \tan \left(cx \mp \frac{\pi}{4} \right) + C$
(258)	$\int \frac{1}{(\cos(cx) \pm \sin(cx))^n} dx$ $= \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{\sin(cx) - \cos(cx)}{(\cos(cx) + \sin(cx))^{n-1}} \right) - 2(n-2) \cdot$ $\int \frac{1}{(\cos(cx) + \sin(cx))^{n-2}} dx + C$
(259)	$\int \frac{\cos(cx)}{(\cos(cx) + \sin(cx))^2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) + \cos(cx) + C$
(260)	$\int \frac{\cos(cx)}{(\cos(cx) - \sin(cx))^2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) - \cos(cx) + C$
(261)	$\int \frac{\sin(cx)}{(\cos(cx) + \sin(cx))^2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) + \cos(cx) + C$
(262)	$\int \frac{\sin(cx)}{(\cos(cx) - \sin(cx))^2} dx = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \ln \sin(cx) + \cos(cx) + C$
(263)	$\int \frac{\cos(cx)}{\sin(cx) + \cos(cx)^2} dx = -\frac{1}{4c} \cdot \tan^2 \left(\frac{cx}{2} \right) + \frac{1}{2c} \cdot \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} \right) \right + C$
(264)	$\int \frac{\cos(cx)}{\sin(cx) - \cos(cx)^2} dx = -\frac{1}{4c} \cdot \cot^2 \left(\frac{cx}{2} \right) - \frac{1}{2c} \cdot \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} \right) \right + C$
(265)	$\int \frac{\sin(cx)}{\cos(cx) \cdot (1 + \sin(cx))} dx = \frac{1}{4} \cot^2 \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2c} \cdot \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
(266)	$\int \frac{\sin(cx)}{\cos(cx) \cdot (1 - \sin(cx))} dx = \frac{1}{4c} \tan^2 \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2c} \cdot \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
(267)	$\int \sin(cx) \cdot \cos(cx) dx = \frac{1}{2c} \cdot \sin^2(cx) + C$
(268)	$\int \sin(c_1 x) \cdot \cos(c_2 x) dx = -\frac{\cos(c_1 + c_2) \cdot x}{2(c_1 + c_2)} - \frac{\cos(c_1 - c_2) \cdot x}{2(c_1 - c_2)} + C$ $(c_1 \neq c_2)$
(269)	$\int \sin^n(cx) \cdot \cos(cx) dx = \frac{1}{c \cdot (n+1)} \cdot \sin^{n+1}(cx) + C \quad (n \neq -1)$
(270)	$\int \sin(cx) \cdot \cos^n(cx) dx = -\frac{1}{c \cdot (n+1)} \cdot \cos^{n+1}(cx) + C \quad (n \neq -1)$

(271)	$\int \sin^n(cx) \cdot \cos^m(cx) dx$ $= -\frac{\sin^{n-1}(cx) \cdot \cos^{m+1}(cx)}{c \cdot (n+m)} + \frac{n-1}{n+m}$ $\cdot \int \sin^{n-2}(cx) \cdot \cos^m(cx) dx + C \quad (m, n > 0)$
(272)	$\int \frac{1}{\sin(cx) \cdot \cos(cx)} dx = \frac{1}{c} \cdot \ln \tan(cx) + C$
(273)	$\int \frac{1}{\sin(cx) \cdot \cos^n(cx)} dx$ $= \frac{1}{c \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-1}(cx)} + \int \frac{1}{\sin(cx) \cdot \cos^{n-2}(cx)} dx + C \quad (n \neq 1)$
(274)	$\int \frac{1}{\sin^n(cx) \cdot \cos(cx)} dx =$ $= \frac{1}{c \cdot (n-1) \cdot \sin^{n-1}(cx)} + \int \frac{1}{\cos(cx) \cdot \sin^{n-2}(cx)} dx + C \quad (n \neq 1)$
(275)	$\int \frac{\sin(cx)}{\cos^n(cx)} dx = \frac{1}{c \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-1}(cx)} + C \quad (n \neq 1)$
(276)	$\int \frac{\sin^2(cx)}{\cos(cx)} dx = -\frac{1}{c} \cdot \sin(cx) + \frac{1}{c} \cdot \ln \left \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{cx}{2} \right) \right + C$
(277)	$\int \frac{\sin^2(cx)}{\cos^n(cx)} dx = \frac{\sin(cx)}{c \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-1}(cx)} - \frac{1}{n-1} \cdot \int \frac{1}{\cos^{n-2}(cx)} dx + C$
(278)	$\int \frac{\sin^n(cx)}{\cos(cx)} dx = -\frac{\sin^{n-1}(cx)}{c \cdot (n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2}(cx)}{\cos(cx)} dx + C$
(279)	$\int \frac{\sin^n(cx)}{\cos^m(cx)} dx$ $= \frac{\sin^{n-1}(cx)}{c \cdot (m-1) \cdot \cos^{m-1}(cx)} - \frac{n-m+2}{m-1} \cdot \int \frac{\sin^n(cx)}{\cos^{m-2}(cx)} dx + C$
(280)	$\int \frac{\cos(cx)}{\sin^n(cx)} dx = -\frac{1}{c \cdot (n-1) \cdot \sin^{n-1}(cx)} + C \quad (n \neq 1)$
(281)	$\int \frac{\cos^2(cx)}{\sin(cx)} dx = \frac{1}{c} \cdot \left(\cos(cx) + \ln \left \tan \left(\frac{cx}{2} \right) \right \right) + C$
(282)	$\int \frac{\cos^2(cx)}{\sin^n(cx)} dx = -\frac{1}{(n-1)} \cdot \left(\frac{\cos(cx)}{c \cdot \sin^{n-1}(cx)} + \int \frac{1}{\sin^{n-2}(cx)} dx \right) + C$
(283)	$\int \frac{\cos^n(cx)}{\sin^m(cx)} dx$ $= -\frac{\cos^{n+1}(cx)}{c \cdot (m-1) \cdot \sin^{m-1}(cx)} - \frac{(n-m-2)}{m-1} \cdot \int \frac{\cos^n(cx)}{\sin^{m-2}(cx)} dx + C \quad (m \neq 1)$

	Integrale trigonometrischer Funktionen, die sowohl sin als auch tan enthalten
(284)	$\int \sin(cx) \cdot \tan(cx) dx = \frac{1}{c} \cdot (\ln \sec(cx) + \tan(cx) - \sin(cx)) + C$
(285)	$\int \frac{\tan^n(cx)}{\sin^2(cx)} dx = \frac{1}{c(n-1)} \cdot \tan^{n-1}(cx) + C \quad (n \neq 1)$
	Integrale trigonometrischer Funktionen, die sowohl cos als auch tan enthalten
(286)	$\int \frac{\tan^n(cx)}{\cos^2(cx)} dx = \frac{1}{c(n+1)} \cdot \tan^{n+1}(cx) + C \quad (n \neq -1)$
	Integrale trigonometrischer Funktionen, die sowohl sin als auch cot enthalten
(287)	$\int \frac{\cot^n(cx)}{\sin^2(cx)} dx = \frac{1}{c(n+1)} \cdot \cot^{n+1}(cx) + C \quad (n \neq -1)$
	Integrale trigonometrischer Funktionen, die sowohl cos als auch cot enthalten
(288)	$\int \frac{\cot^n(cx)}{\cos^2(cx)} dx = \frac{1}{c(1-n)} \cdot \tan^{1-n}(cx) + C \quad (n \neq 1)$
	Integrale trigonometrischer Funktionen, die sowohl tan als auch cot enthalten
(289)	$\int \frac{\tan^m(cx)}{\cot^n(cx)} dx = \frac{1}{c(m+n-1)} \cdot \tan^{m+n-1}(cx) - \int \frac{\tan^{m-2}(cx)}{\cot^n(cx)} dx + C \quad (m+n \neq 1)$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

Nachfolgende Liste enthält einige Integrale Arcus Funktionen	
(290)	$\int \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \sqrt{c^2 - x^2} + C$
(291)	$\int x \cdot \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \cdot \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{x}{4} \cdot \sqrt{c^2 - x^2} + C$
(292)	$\int x^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{x^2 + 2c^2}{9} \cdot \sqrt{c^2 - x^2} + C$
(293)	$\int \arccos\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \arccos\left(\frac{x}{c}\right) - \sqrt{c^2 - x^2} + C$
(294)	$\int x \cdot \arccos\left(\frac{x}{c}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \cdot \arccos\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{x}{4} \cdot \sqrt{c^2 - x^2} + C$
(295)	$\int x^2 \cdot \arccos\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arccos\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{x^2 + 2c^2}{9} \cdot \sqrt{c^2 - x^2} + C$
(296)	$\int \arctan\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \arctan\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{c}{2} \cdot \ln c^2 + x^2 + C$
(297)	$\int x \cdot \arctan\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{(c^2 + x^2) \cdot \arctan\left(\frac{x}{c}\right) - cx}{2} + C$
(298)	$\int x^2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{cx^2}{6} + \frac{c^3}{6} \cdot \ln c^2 + x^2 + C$
(299)	$\int x^n \cdot \arctan\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \arctan\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{c}{n+1} \cdot \int \frac{x^{n+1}}{c^2 + x^2} dx + C$
(300)	$\int \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{x}{c \cdot x } \cdot \ln x \pm \sqrt{x^2 - 1} + C$
(301)	$\int \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot \operatorname{arcsec}(x) - \sqrt{x^2 - 1}\right) + C$
(302)	$\int \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2} \cdot \ln c^2 + x^2 + C$
(303)	$\int x \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right) dx = \left(\frac{c^2 + x^2}{2}\right) \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c \cdot x}{2} + C$
(304)	$\int x^2 \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c \cdot x^2}{6} - \frac{c^3}{6} \cdot \ln c^2 + x^2 + C$
(305)	$\int \operatorname{arccsc}(x) dx = x \cdot \operatorname{arccsc}(x) + \ln \left x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) \right + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int

Nachfolgende Liste enthält einige Integrale hyperbolischer Funktionen	
(306)	$\int \sinh(cx) dx = \frac{1}{c} \cosh(cx) + C$
(307)	$\int \cosh(cx) dx = \frac{1}{c} \sinh(cx) + C$
(308)	$\int \sinh^2(cx) dx = \frac{1}{2c} \sinh(cx) \cdot \cosh(cx) - \frac{x}{2} + C$
(309)	$\int \cosh^2(cx) dx = \frac{1}{2c} \sinh(cx) \cdot \cosh(cx) + \frac{x}{2} + C$
(310)	$\int \frac{1}{\sinh(cx)} dx = \frac{1}{c} \cdot \ln \left \tanh \left(\frac{c \cdot x}{2} \right) \right + C$
(311)	$\int \frac{1}{\cosh(cx)} dx = \frac{2}{c} \cdot \arctan(e^{cx}) + C$
(312)	$\int \frac{1}{\sinh^n(cx)} dx = \frac{\cosh(cx)}{c(n-1) \cdot \sinh^{n-1}(cx)} - \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{1}{\sinh^{n-2}(cx)} dx + C \quad (n \neq 1)$
(313)	$\int \frac{1}{\cosh^n(cx)} dx = \frac{\sinh(cx)}{c(n-1) \cdot \cosh^{n-1}(cx)} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{1}{\cosh^{n-2}(cx)} dx + C$
(314)	$\int \frac{\cosh^n(cx)}{\sinh^m(cx)} dx = \frac{\cosh^{n-1}(cx)}{c(n-m) \cdot \sinh^{m-1}(cx)} + \frac{n-1}{n-m} \cdot \int \frac{\cosh^{n-2}(cx)}{\sinh^m(cx)} dx + C$
(315)	$\int x \cdot \sinh(cx) dx = \frac{1}{c} \cdot x \cdot \cosh(cx) - \frac{1}{c^2} \cdot \sinh(cx) + C$
(316)	$\int x \cdot \cosh(cx) dx = \frac{1}{c} \cdot x \cdot \sinh(cx) - \frac{1}{c^2} \cdot \cosh(cx) + C$
(317)	$\int \tanh(cx) dx = \frac{1}{c} \cdot \ln \cosh(cx) + C$
(318)	$\int \coth(cx) dx = \frac{1}{c} \cdot \ln \sinh(cx) + C$
(319)	$\int \tanh^n(cx) dx = -\frac{1}{c(n-1)} \cdot \tanh^{n-1}(cx) + \int \tanh^{n-2}(cx) dx + C \quad (n \neq 1)$
(320)	$\int \coth^n(cx) dx = -\frac{1}{c(n-1)} \cdot \coth^{n-1}(cx) + \int \coth^{n-2}(cx) dx + C \quad (n \neq 1)$
(321)	$\int \sinh(bx) \cdot \sinh(cx) dx$ $= \frac{1}{b^2 - c^2} \cdot (b \cdot \sinh(cx) \cdot \cosh(bx) - c \cdot \cosh(cx) \cdot \sinh(bx)) + c \quad (b^2 \neq c^2)$

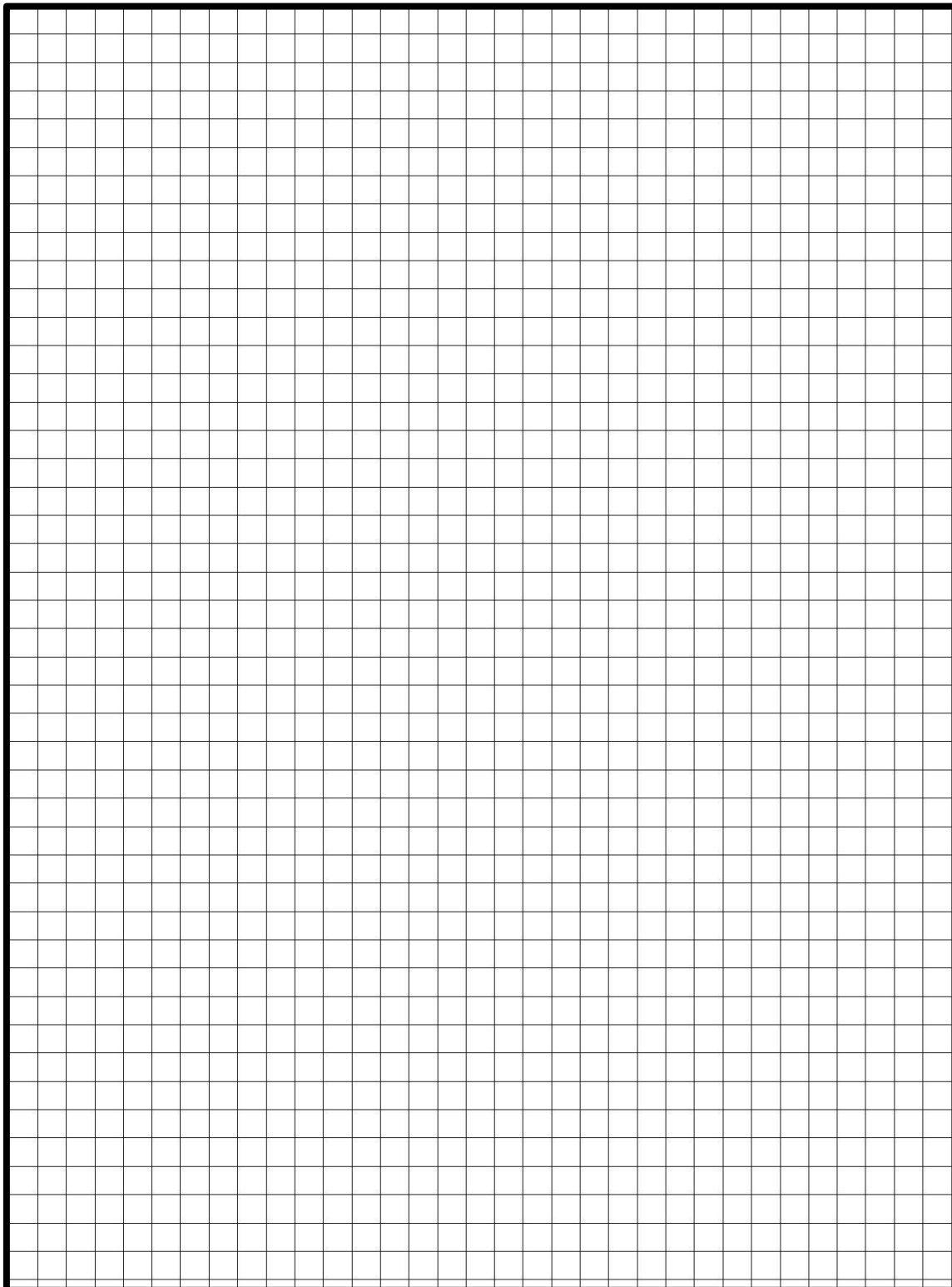
(322)	$\int \cosh(bx) \cdot \cosh(cx) dx$ $= \frac{1}{b^2 - c^2} \cdot (b \cdot \sinh(bx) \cdot \cosh(cx) - c \cdot \sinh(cx) \cdot \cosh(bx)) + c \quad (b^2 \neq c^2)$
(323)	$\int \cosh(bx) \cdot \sinh(cx) dx$ $= \frac{1}{b^2 - c^2} \cdot (b \cdot \sinh(bx) \cdot \sinh(cx) - c \cdot \cosh(bx) \cdot \cosh(cx)) + c \quad (b^2 \neq c^2)$
(324)	$\sinh(ax + b) \cdot \sin(cx + d) dx$ $= \frac{a}{a^2 + c^2} \cdot \cosh(ax + b) \cdot \sin(cx + d) - \frac{c}{a^2 + c^2} \cdot \sinh(ax + b) \cdot \cos(cx + d) + C$
(325)	$\sinh(ax + b) \cdot \cos(cx + d) dx =$ $= \frac{a}{a^2 + c^2} \cdot \cosh(ax + b) \cdot \cos(cx + d) + \frac{c}{a^2 + c^2} \cdot \sinh(ax + b) \cdot \sin(cx + d) + C$
(326)	$\cosh(ax + b) \cdot \sin(cx + d) dx =$ $= \frac{a}{a^2 + c^2} \cdot \sinh(ax + b) \cdot \sin(cx + d) - \frac{c}{a^2 + c^2} \cdot \cosh(ax + b) \cdot \cos(cx + d) + C$
(327)	$\cosh(ax + b) \cdot \cos(cx + d) dx =$ $= \frac{a}{a^2 + c^2} \cdot \sinh(ax + b) \cdot \cos(cx + d) + \frac{c}{a^2 + c^2} \cdot \cosh(ax + b) \cdot \sin(cx + d) + C$
Nachfolgende Liste enthält einige Integrale invers-hyperbolischer Funktionen	
(328)	$\int \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{c}\right) - \sqrt{x^2 + c^2} + C$
(329)	$\int \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{c}\right) - \sqrt{x^2 - c^2} + C$
(330)	$\int \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2} \cdot \ln x^2 - c^2 + C \quad x > c $
(331)	$\int \operatorname{arsech}\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \operatorname{arsech}\left(\frac{x}{c}\right) - c \cdot \arctan\left(\frac{x \cdot \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}}{x - c}\right) + C \quad (x \in (0; c))$
(332)	$\int \operatorname{arcsch}\left(\frac{x}{c}\right) dx = x \cdot \operatorname{arcsch}\left(\frac{x}{c}\right) + c \cdot \ln\left \frac{x + \sqrt{x^2 + c^2}}{c}\right + C \quad (x \in (0; c))$
Eigene Ergänzungen	
	\int

Nachfolgende Liste enthält einige Integrale exponentieller Funktionen	
(333)	$\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} \cdot e^{cx} + C$
(334)	$\int a^{cx} dx = \frac{1}{c \cdot \ln(a)} \cdot a^{cx} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
(335)	$\int x \cdot e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} \cdot (cx - 1) + C$
(336)	$\int x^2 \cdot e^{cx} dx = e^{cx} \cdot \left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3} \right) + C$
(337)	$\int \frac{e^{cx}}{x} dx = \ln x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(cx)^i}{i \cdot i!} + C$
(338)	$\int e^{cx} \cdot \ln x dx = \frac{1}{c} \cdot e^{cx} \cdot \ln x - \text{Ei}(cx) + C$
(339)	$\int e^{cx} \cdot \sin(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} \cdot (c \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)) + C$
(340)	$\int e^{cx} \cdot \cos(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} \cdot (c \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)) + C$
(341)	$\int x \cdot e^{cx^2} dx = \frac{1}{2c} \cdot e^{cx^2} + C$
(342)	$\int x^{n-1} \cdot e^{cx^n} dx = \frac{1}{nc} \cdot e^{cx^n} + C \quad (n > 1; n \in \mathbb{N})$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

Nachfolgende Liste enthält einige Integrale logarithmischer Funktionen. (Es wird angenommen, dass $x > 0$ ist)	
(343)	$\int \ln(ax + b) dx = x \cdot \ln ax + b - x + \frac{b}{a} \cdot \ln ax + b + C$
(344)	$\int (\ln cx)^n dx = x \cdot (\ln cx)^n - n \cdot \int (\ln cx)^{n-1} dx + C$
(345)	$\int \frac{1}{\ln x } dx = \ln \ln(x) + \ln(x) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^i}{i \cdot i!} + C$
(346)	$\int \frac{1}{x \cdot \ln x } dx = \ln \ln x + C$
(347)	$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$
(348)	$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$
(349)	$\int e^x \left(x \cdot \ln x - x - \frac{1}{x} \right) dx = e^x (x \cdot \ln x - x - \ln x) + C$
Eigene Ergänzungen	
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int
	\int

INTEGRALRECHNUNG

Raum für eigene Ergänzungen



UNGLEICHUNGEN

Rechenregeln für Ungleichungen

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

Additive Elementarumformungsregel:

$$a + b < c \Leftrightarrow a < c - b$$

Multiplikative Elementarumformungsregel:

$$a \cdot b < c \Leftrightarrow a < \frac{c}{b} \quad (\text{wenn } b > 0)$$

$$a \cdot b < c \Leftrightarrow a > \frac{c}{b} \quad (\text{wenn } b < 0)$$

Diese Regeln gelten auch, wenn man $<$ durch \leq und $>$ durch \geq ersetzt bzw. $<$ durch $>$ und $>$ durch $<$.

Äquivalente Umformungen für Ungleichungen:

Vertauschungsgesetz:

Die beiden Seiten einer Ungleichung dürfen vertauscht werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen zwischen den beiden Seiten umgedreht wird.

Additionsregel/Subtraktionsregel

Auf beiden Seiten der Ungleichungen darf ein beliebiger Term addiert oder subtrahiert werden.

Multiplikationsregel/Divisionsregel

Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen Term T ($T > 0$) multipliziert oder dividiert werden.

Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen Term T ($T < 0$) multipliziert oder dividiert werden, dabei muss aber das Relationszeichen gedreht werden.

BETRAG

Der Betrag

Definition des Betrages:

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ der Betrag von x .

Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}, a > 0$ gelten

Rechenregeln für den Betrag

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

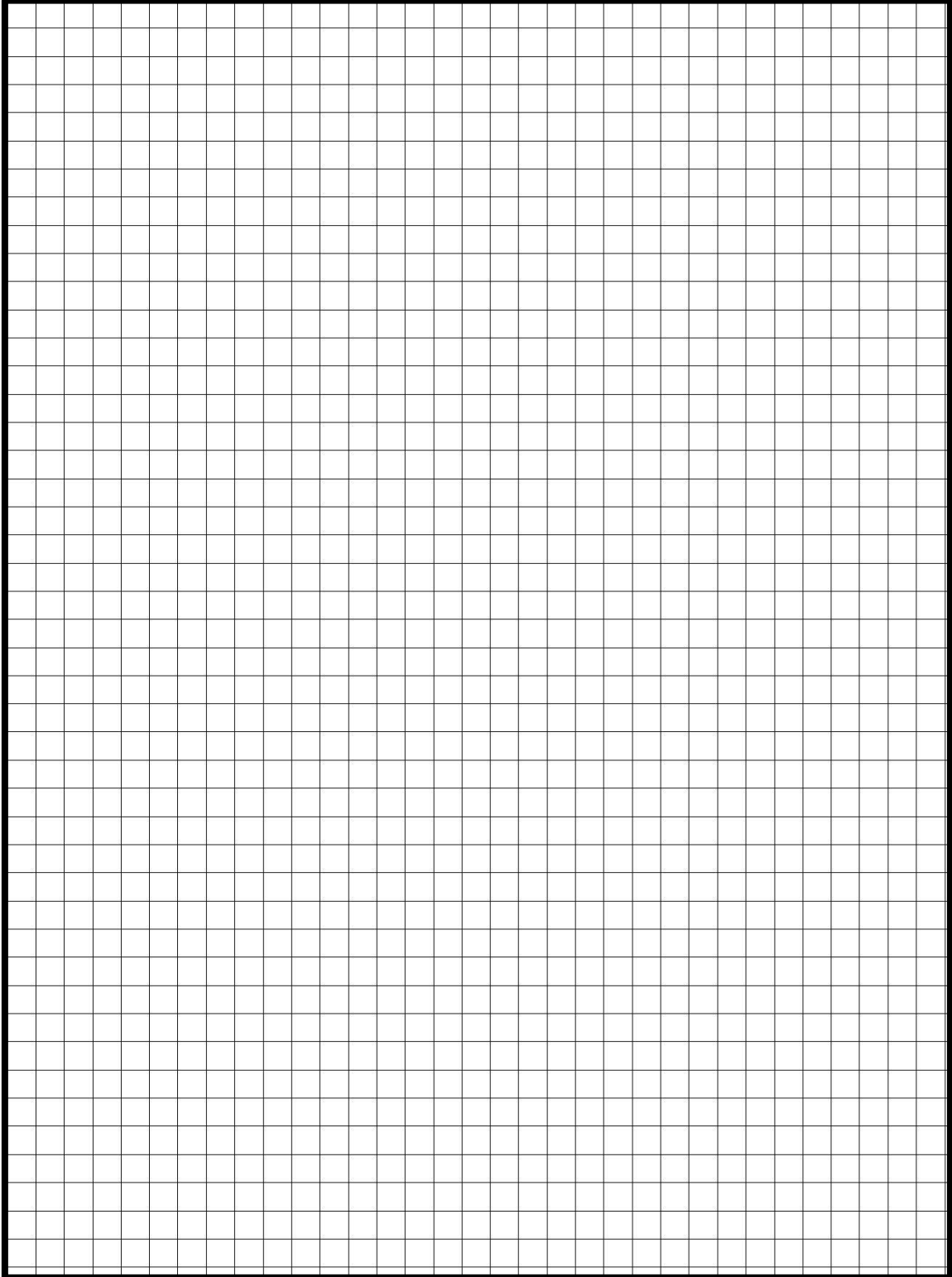
$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ falls } b \neq 0$$

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

UNGLEICHUNGEN UND BETRAG

Raum für eigene Ergänzungen



ASYMPTOTEN

Ermittlung der verschiedenen Asymptoten

Senkrechte Asymptoten oder Polstellen

Es treten Definitionslücken in der Funktion auf

Hebbare Polstellen

Wenn sich eine gebrochenrationale Funktion auf eine ganzrationale Funktion zurückführen lässt, dabei verschwindet der Nenner und damit natürlich auf die Definitionslücken.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = x_0$$

Waagrechte Asymptoten

Sie entstehen nur bei Betrachtungen für unendlich große x-Werte. Formal bedeutet dieses, einen Grenzwert für eine Funktion im unendlichen zu finden.

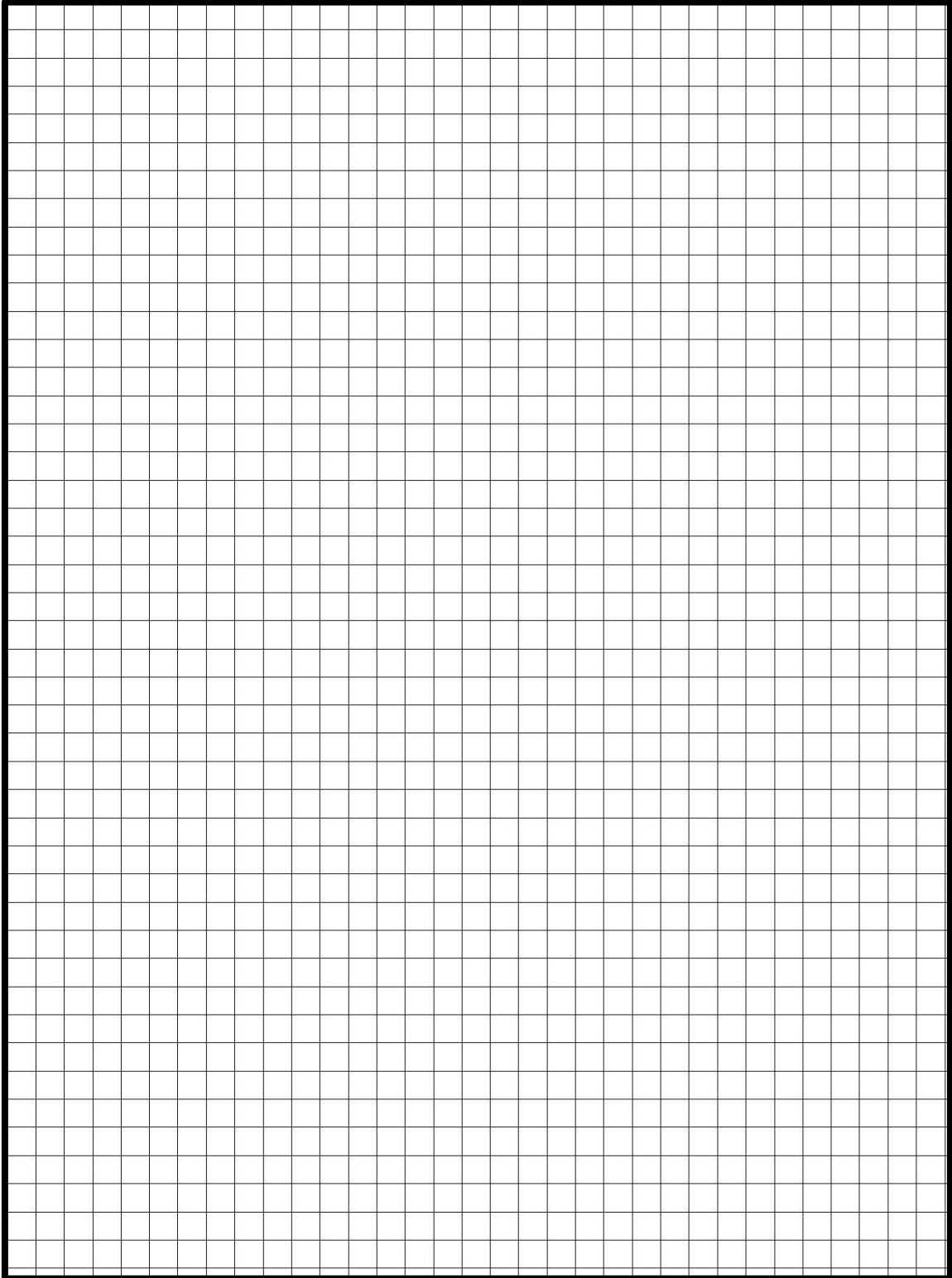
Schiefe oder schräge Asymptoten

Sie besitzen eine Funktion in der Form einer Geraden als Grenzwert im unendlichen. Formal bedeutet dieses, einen Grenzwert für eine Funktion im unendlichen zu finden.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = mx + b$$

ASYMPTOTEN

Raum für eigene Ergänzungen



EXTREMWERTAUFGABEN

Bestimmung der Maximal- oder Minimalwerte

Übersetzen Sie den Aufgabentext in eine mathematische Fragestellung!

Finden Sie eine Formel für die zu optimierende Größe (die sog. Zielfunktion)!

Falls die Zielfunktion von mehreren Variablen abhängt, so suchen Sie Gleichungen (die sog. Nebenbedingungen), die die Anzahl der Variablen in der Zielfunktion reduzieren, bis möglichst nur noch eine übrig bleibt!

Fertigen Sie ggfs. eine Skizze mit den entsprechenden Größen an.

Legen Sie für diese Variable den Gültigkeitsbereich (den sog. zulässigen Bereich) fest!

Formulieren Sie die mathematische Fragestellung für die veränderte Zielfunktion unter Einbeziehung des Gültigkeitsbereichs!

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Zielfunktion im zulässigen Bereich!

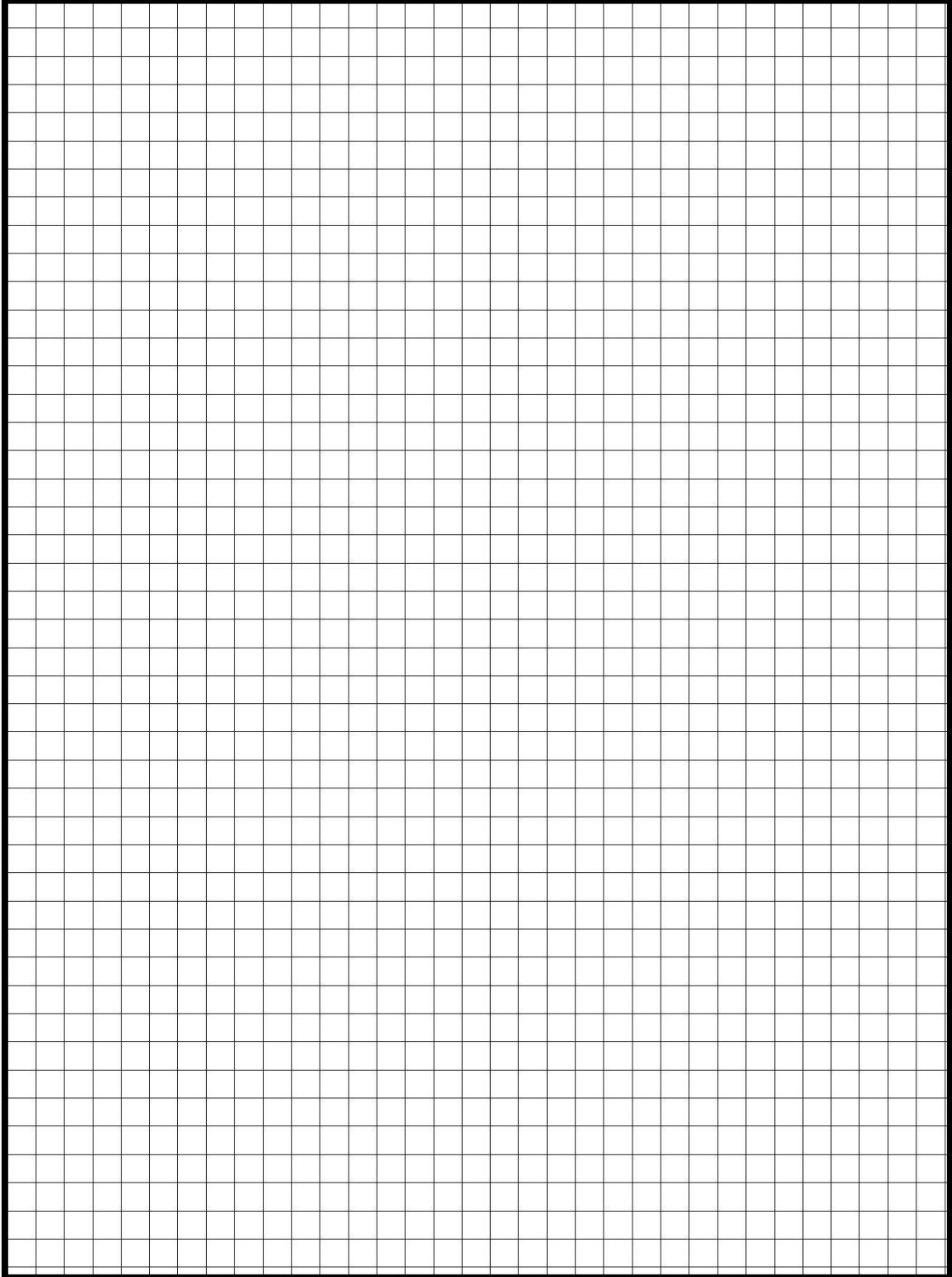
Bestimmen Sie das absolute Extremum der Zielfunktion für die verbliebene Variable durch Vergleich der Zielfunktionswerte:

Die Kandidaten sind die relativen Extrema und die Randwerte des zulässigen Bereichs!

Berechnen Sie alle übrigen relevanten Größen!

EXTREMWERTAUFGABEN

Raum für eigene Ergänzungen



FUNKTIONEN

Eigenschaften von Funktionen

Darstellung im Einheitskreis

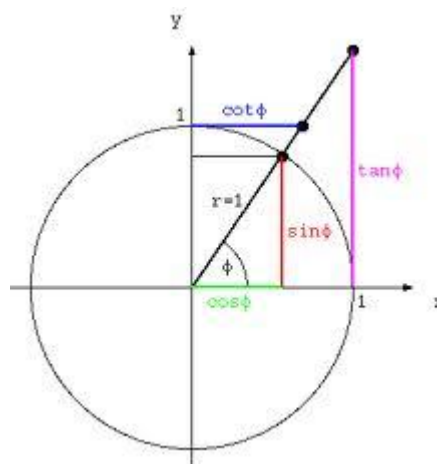
Trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis

$\sin \alpha$ = Ordinate zum Kreispunkt

$\cos \alpha$ = Abszisse zum Kreispunkt

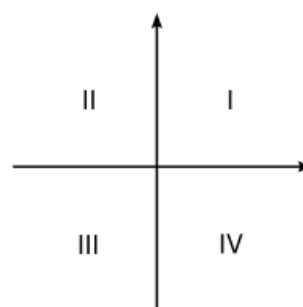
$\tan \alpha$ = Abschnitt auf der Tangente

$\cot \alpha$ = Abschnitt auf der Tangente



Quadranten bzw. Vorzeichenregel

Quadrant	I	II	III	IV
Sinus	+	+	-	-
Kosinus	+	-	-	+
Tangens	+	-	+	-
Kotangens	+	-	+	-

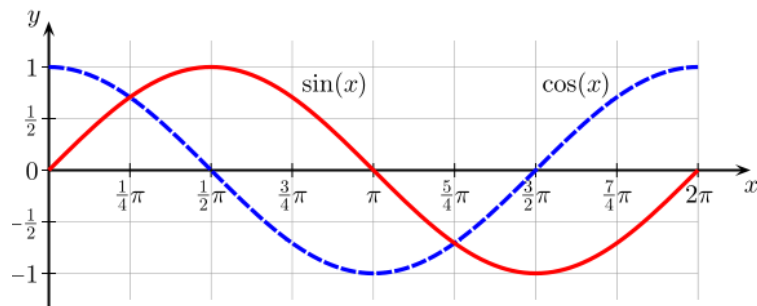


Symmetrie bei trigonometrischen Funktionen

$\cos(-x) = \cos(x)$	Gerade Funktion
$\sin(-x) = -\sin(x)$	Ungerade Funktion
$\tan(-x) = -\tan(x)$	Ungerade Funktion
$\cot(-x) = -\cot(x)$	Ungerade Funktion

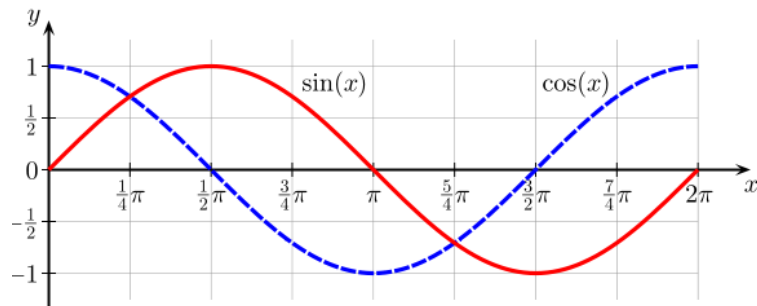
Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen

Sinus-Funktion



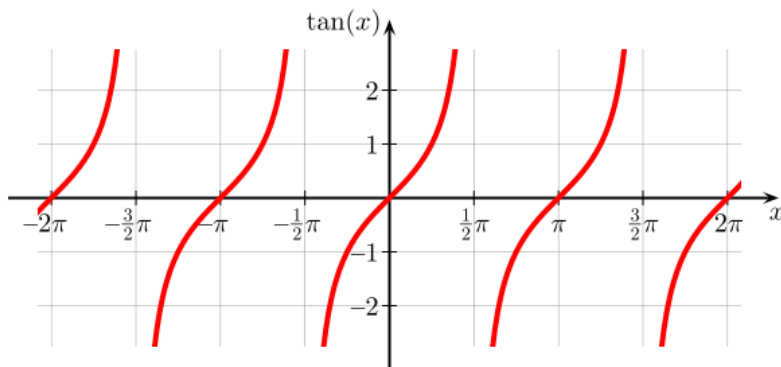
Eigenschaften der Sinus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \sin(x)$	Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
Wertebereich: $[-1; 1]$	Nullstellen: $f(0) = k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$
Hochpunkte: $x \in [0; 2\pi]$; $x = \frac{\pi}{2}$ (bzw. 90°)	Tiefpunkte: $x \in [0; 2\pi]$; $x = \frac{3\pi}{2}$ (bzw. 270°)
Periode: 360° bzw. 2π	Symmetrie: $\sin(x) = \sin(-x)$ Punktsymmetrisch zum Ursprung

Cosinus-Funktion



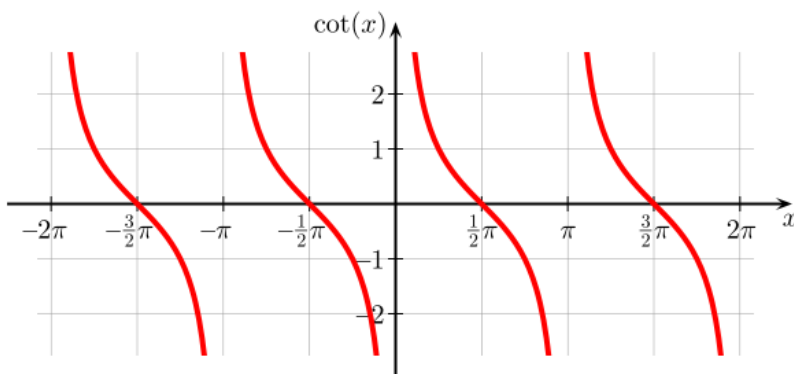
Eigenschaften der Cosinus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \cos(x)$	Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
Wertebereich: $[-1; 1]$	Nullstellen: $f(0) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$
Hochpunkte: $x \in [0; 2\pi]$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2\pi$ (bzw. 360°)	Tiefpunkte: $x \in [0; 2\pi]$; $x = \pi$ (bzw. 180°)
Periode: 360° bzw. 2π	Symmetrie: $\cos(x) = \cos(-x)$ Achsensymmetrisch zur y-Achse

Tangens-Funktion



Eigenschaften der Tangens-Funktion	
Funktion: $f(x) = \tan(x)$	Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$
Wertebereich: \mathbb{R}	Nullstellen: $f(0) = k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Periode: 180° bzw. π	Symmetrie: $-\tan(x) = \tan(-x)$ Punktsymmetrisch zum Ursprung

Kotangens-Funktion



Eigenschaften der Kotangens-Funktion	
Funktion: $f(x) = \cot(x)$	Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (k\pi + \frac{\pi}{2}) \right\}$
Wertebereich: \mathbb{R}	Nullstellen: $f(0) = \left(\frac{1}{2} + k\right) \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Periode: 180° bzw. π	Symmetrie: $\cot(x) = \cot(-x)$ Achsensymmetrisch zur y-Achse

Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Kosinus eilt dem Sinus um $\frac{\pi}{2}$ voraus.

Umrechnungen zwischen den einzelnen Funktionen

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$\sin(x)$	-	$\pm\sqrt{1 - \cos^2(x)}$	$\pm\frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}}$
$\cos(x)$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$	-	$\pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$	$\pm\frac{\cot(x)}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}}$
$\tan(x)$	$\pm\frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}$	$\pm\frac{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}{\cos(x)}$	-	$\frac{1}{\cot(x)}$
$\cot(x)$	$\pm\frac{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}{\sin(x)}$	$\pm\frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}$	$\frac{1}{\tan(x)}$	-

Reduktionsformeln:

$$\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha) = -\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(360^\circ - \alpha) = \sin(360^\circ + \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(180^\circ + \alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) = \cos(360^\circ + \alpha)$$

$$\tan(\alpha) = -\tan(180^\circ - \alpha) = \tan(180^\circ + \alpha) = -\tan(360^\circ - \alpha) = \tan(360^\circ + \alpha)$$

Umrechnungen:

$$\sin^2(x) \cdot \cos(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$$

$$\sin(x) \cdot \cos^2(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$$

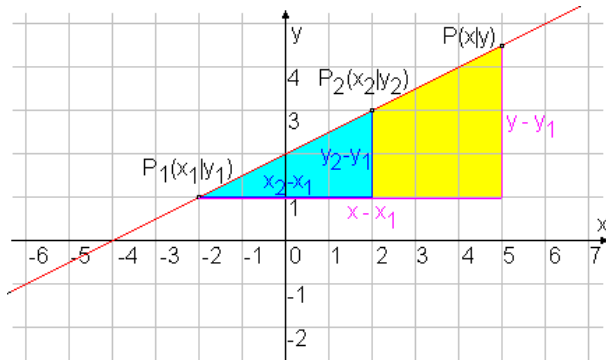
$$\sin^2(x) \cdot \cos^2(x) = \cos^2(x) - \cos^4(x)$$

Lineare Funktion

Allgemeine Form

$$y = mx + b$$

m bedeutet die Steigung, b den Orthogonalenabschnitt der linearen Funktion.



Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

Punkt-Steigungs-Form

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Schnittwinkel zweier Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen

$$g_1: y_1 = m_1x + b_1 \text{ und } g_2: y_2 = m_2x + b_2$$

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$m_1 \cdot m_2 \neq 1$$

Spezialfälle:

$$g_1 \parallel g_2: m_1 = m_2 \text{ und } \alpha = 0^\circ$$

$$g_1 \perp g_2: m_1 \cdot m_2 = -1 \text{ und } \alpha = 90^\circ$$

Polynome oder ganzrationale Funktionen

Allgemeine Form

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Verlauf des Graphen

Der Verlauf eines Graphen einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden der höchsten Potenz bestimmt.

	n gerade	n ungerade
$a_n > 0$	Verlauf von Quadrant II nach I	Verlauf von Quadrant III nach I
$a_n < 0$	Verlauf von III nach IV	Verlauf von II nach IV

Quadratische Polynome (Parabeln)

Allgemeine Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a > 0$: Nach oben geöffnet

$a < 0$: Nach unten geöffnet

Scheitelpunkt des quadratischen Polynoms

$$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Produktform einer Parabel

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1, x_2 : Nullstellen der Parabel

Sonderfall:

$$x_1 = x_2 \rightarrow f(x) = a(x - x_1)^2$$

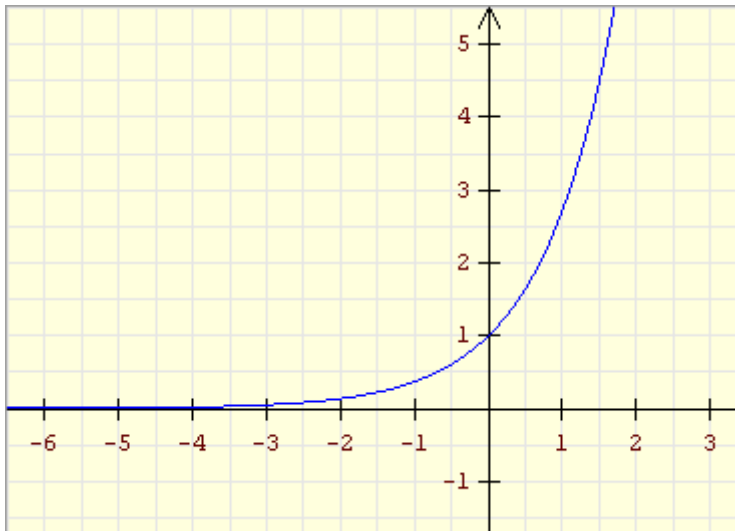
Die Parabel berührt die x-Achse im Scheitelpunkt $S(x_1|0)$ (doppelte Nullstelle)

Scheitelform der Parabel

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

x_0, y_0 : Koordinaten des Scheitelpunktes

Exponentialfunktion



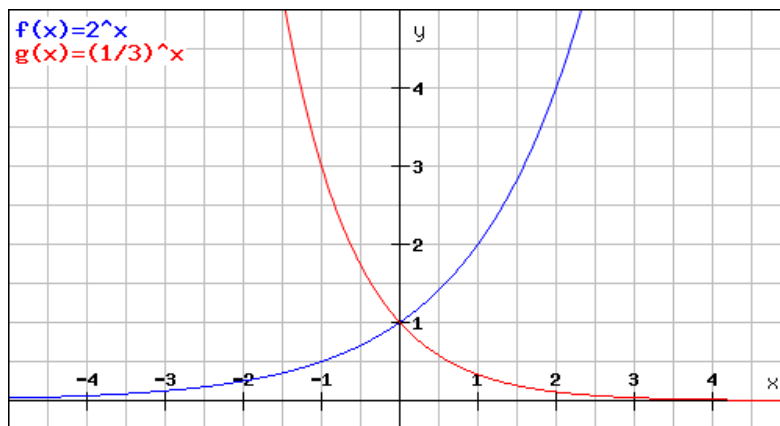
Basis ist die Eulersche Zahl e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281 \dots$$

Eigenschaften der Exponential-Funktion	
Funktion: $f(x) = e^x$	Definitionsbereich: $x \in [-\infty; +\infty]$
Wertebereich: $y \in [0; +\infty[$	Nullstellen: keine
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: $y = 0$	Symmetrie: keine

Allgemeine Exponentialfunktion

Basis a mit ($a > 0$ und $a \neq 1$)

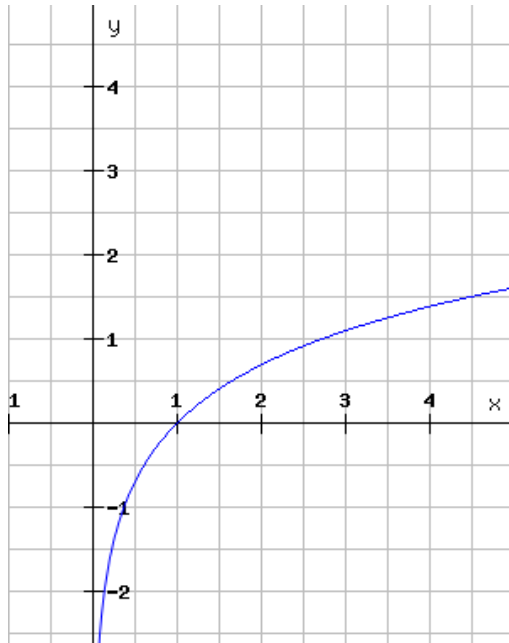


Eigenschaften der Allgemeinen Exponential-Funktion	
Funktion: $f(x) = a^x$	Definitionsbereich: $x \in [-\infty; +\infty]$
Wertebereich: $y \in [0; +\infty[$	Nullstellen: keine
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: $y = 0$	Symmetrie: keine

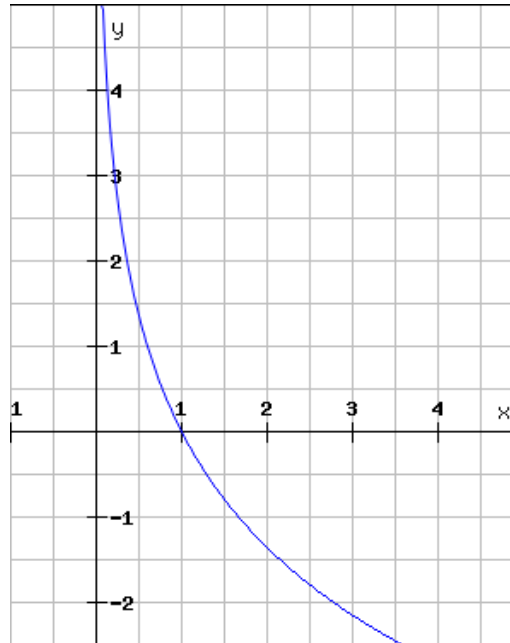
Allgemeine Logarithmusfunktion

Bei den Logarithmusfunktionen handelt es sich um die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

$\ln(x)$



$\log_{0,6}(x)$



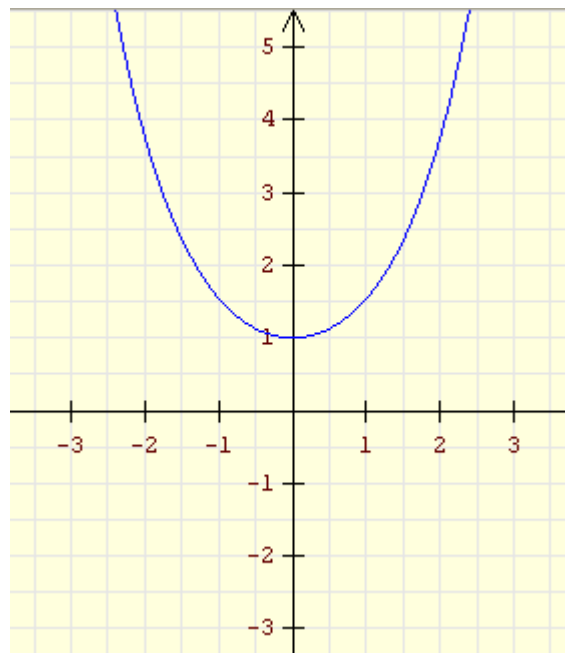
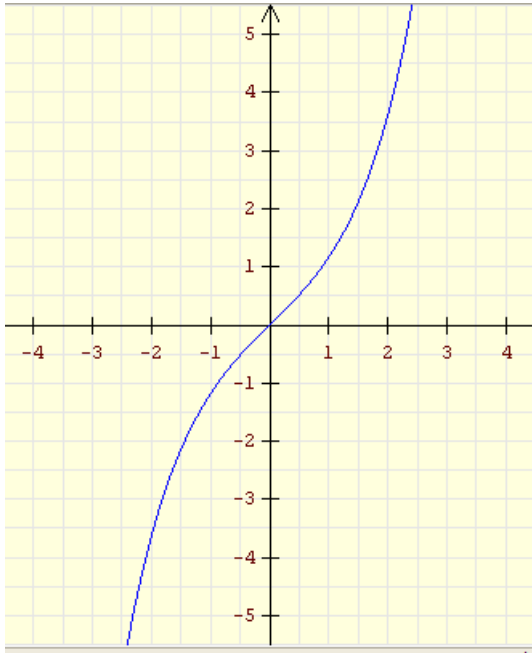
Eigenschaften der Allgemeinen Logarithmus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \log_a x$	Definitionsbereich: $x \in]0; +\infty]$
Wertebereich: $y \in]-\infty; +\infty[$	Nullstellen: $x = 1$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: $x = 0$	Symmetrie: keine

Hyperbelfunktionen

Definition Sinus- und Cosinus-Hyperbolicus

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



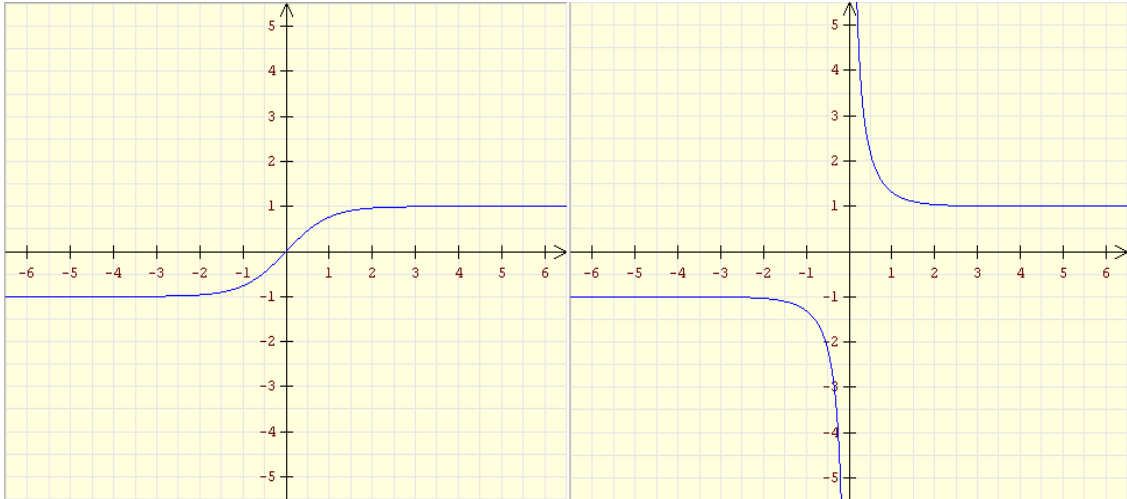
Eigenschaften der Sinus-Hyperbolicus-Funktion	
Funktion $f(x) = \sinh(x)$:	Definitionsbereich: $x \in]-\infty; +\infty]$
Wertebereich: $y \in]-\infty; +\infty[$	Nullstellen: $x = 0$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: keine	Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung

Eigenschaften der Cosinus-Hyperbolicus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \cosh(x)$	Definitionsbereich: $x \in]-\infty; +\infty]$
Wertebereich: $y \in [1; +\infty[$	Nullstellen: keine
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: $x = 0$
Asymptote: keine	Symmetrie: y-Achse

Definition Tangens- und Kotangens-Hyperbolicus

$$y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



Eigenschaften der Tangens-Hyperbolicus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \tanh(x)$	Definitionsbereich: $x \in]-\infty; +\infty]$
Wertebereich: $y \in [-1; +1[$	Nullstellen: keine
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: $x = 0; y = \pm 1$	Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung

Eigenschaften der Kotangens-Hyperbolicus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \coth(x)$	Definitionsbereich: $ x > 0$
Wertebereich: $ y > 1$	Nullstellen: keine
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: $x = 0$
Asymptote: $y = \pm 1$	Symmetrie: y-Achse

Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)}$$

Additionstheoreme

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \cosh(x_1) \cdot \sinh(x_2)$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh(x_1) \cdot \cosh(x_2) \pm \sinh(x_1) \cdot \sinh(x_2)$$

$$\tanh(x_1 \pm x_2) = \frac{\tanh(x_1) \pm \tanh(x_2)}{1 \pm \tanh(x_1) \cdot \tanh(x_2)}$$

$$\coth(x_1 \pm x_2) = \frac{1 \pm \coth(x_1) \cdot \coth(x_2)}{\coth(x_1) \pm \coth(x_2)}$$

Weitere Zusammenhänge für halbe Argumente

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(x) - 1}{2}}$$

(oberes Vorzeichen für $x \geq 0$, unteres für $x < 0$)

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x) + 1}{2}}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x) + 1} = \frac{\cosh(x) - 1}{\sinh(x)}$$

Formeln für vielfache von Argumenten

$$\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2 \cdot \cosh^2(x) - 1$$

$$\tanh(2x) = \frac{2 \cdot \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

$$\sinh(3x) = 3 \cdot \sinh(x) + 4 \cdot \sinh^3(x)$$

$$\cosh(3x) = 4 \cdot \cosh^3(x) - 3 \cdot \cosh(x)$$

$$\tanh(3x) = \frac{3 \cdot \tanh(x) + \tanh^3(x)}{1 + 3 \cdot \tanh^2(x)}$$

Formeln für Potenzen

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{2} \cdot [\cosh(2x) - 1]$$

$$\sinh^3(x) = \frac{1}{4} \cdot [\sinh(3x) - 3 \cdot \sinh(x)]$$

$$\sinh^4(x) = \frac{1}{8} \cdot [\cosh(4x) - 4 \cdot \cosh(2x) + 3]$$

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{2} [\cosh(2x) + 1]$$

$$\cosh^3(x) = \frac{1}{4} \cdot [\cosh(3x) + 3 \cdot \cosh(x)]$$

$$\cosh^4(x) = \frac{1}{8} \cdot [\cosh(4x) + 4 \cdot \cosh(2x) + 3]$$

Formeln für Summen und Differenzen

$$\sinh(x_1) + \sinh(x_2) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\sinh(x_1) - \sinh(x_2) = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\cosh(x_1) + \cosh(x_2) = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\cosh(x_1) - \cosh(x_2) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\tanh(x_1) \pm \tanh(x_2) = \frac{\sinh(x_1 \pm x_2)}{\cosh(x_1) \cdot \cosh(x_2)}$$

Formeln für Produkte

$$\sinh(x_1) \cdot \sinh(x_2) = \frac{1}{2} [\cosh(x_1 + x_2) - \cosh(x_1 - x_2)]$$

$$\cosh(x_1) \cdot \cosh(x_2) = \frac{1}{2} [\cosh(x_1 + x_2) + \cosh(x_1 - x_2)]$$

$$\sinh(x_1) \cdot \cosh(x_2) = \frac{1}{2} [\sinh(x_1 + x_2) + \sinh(x_1 - x_2)]$$

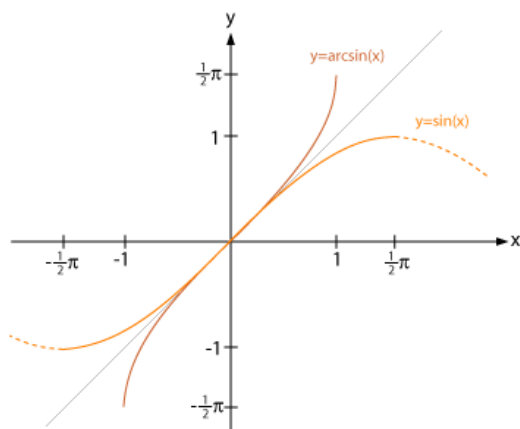
$$\tanh(x_1) \cdot \tanh(x_2) = \frac{\tanh(x_1) + \tanh(x_2)}{\coth(x_1) + \coth(x_2)}$$

Umrechnungen zwischen den einzelnen Funktionen

	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\tanh(x)$	$\coth(x)$
$\sinh(x)$	-	$\pm\sqrt{\cosh^2(x) - 1}$	$\frac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$
$\cosh(x)$	$\sqrt{\sinh^2(x) + 1}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}}$	$\pm\frac{\coth(x)}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$
$\tanh(x)$	$\frac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}}$	$\pm\frac{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}{\cosh(x)}$	-	$\frac{1}{\coth(x)}$
$\coth(x)$	$\frac{\sqrt{\sinh^2(x) + 1}}{\sinh(x)}$	$\pm\frac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}$	$\frac{1}{\tanh(x)}$	-

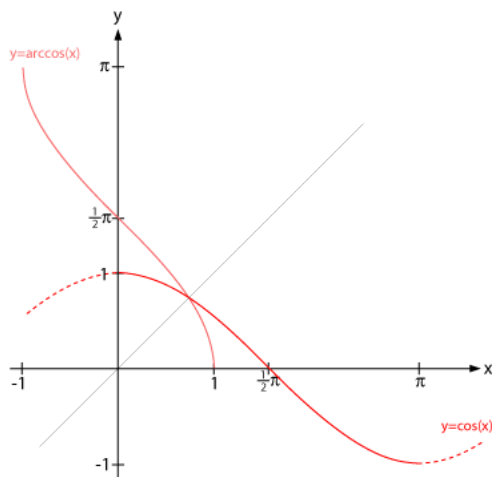
Arkusfunktionen

Arkussinus



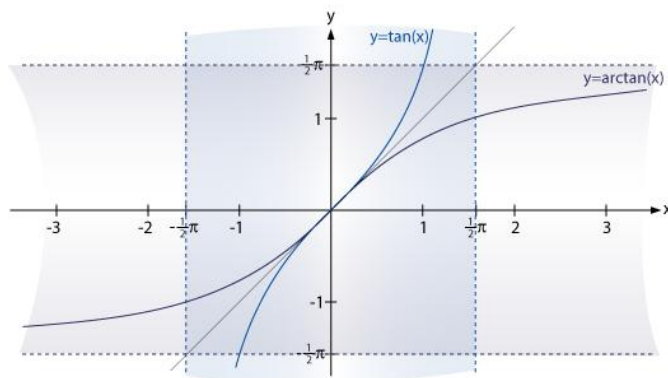
Eigenschaften der Arkussinus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \arcsin(x)$	Definitionsbereich: $x \in [-1; 1]$
Wertebereich: $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$	Nullstellen: $f(0) = 0$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Der arcsin liefert nur Winkel aus den 1. und 4. Quadranten	Symmetrie: $\arcsin(x) = \arcsin(-x)$ Punktsymmetrisch zum Ursprung

Arkuskosinus



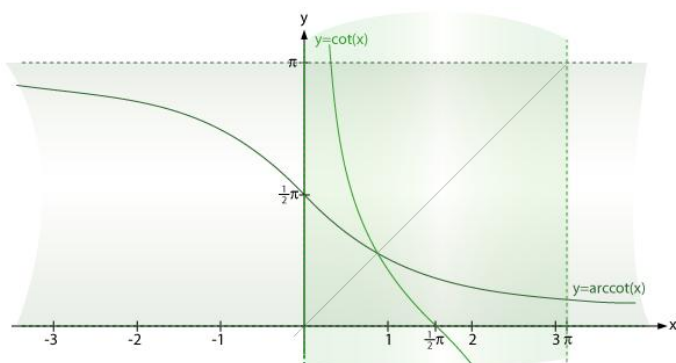
Eigenschaften der Arkuskosinus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \arccos(x)$	Definitionsbereich: $x \in [-1; 1]$
Wertebereich: $[0; +\pi]$	Nullstellen: $f(0) = \left(\frac{1}{2} + k\right) \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Der arctan liefert nur Winkel aus den 1. Und 4. Quadranten	Symmetrie: keine

Arkustangens



Eigenschaften der Arkustangens-Funktion	
Funktion: $f(x) = \arctan(x)$	Definitionsbereich: $x \in [-\infty; +\infty]$
Wertebereich: $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$	Nullstellen: $f(0) = 0$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Der arctan liefert nur Winkel aus den 1. Und 4. Quadranten	Symmetrie: keine

Arkuskotangens



Eigenschaften der Arkuskotangens-Funktion	
Funktion: $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	Definitionsbereich: $x \in [-\infty; \infty]$
Wertebereich: $[0; +\pi]$	Nullstellen: <i>keine</i>
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Der arctan liefert nur Winkel aus den 1. Und 2. Quadranten	Symmetrie: keine

Zusammenhänge

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$	$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2}$
$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
$\arccos(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	$\operatorname{arccot}(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
$\arctan(-x) = -\arctan(x)$	$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$

Areafunktionen

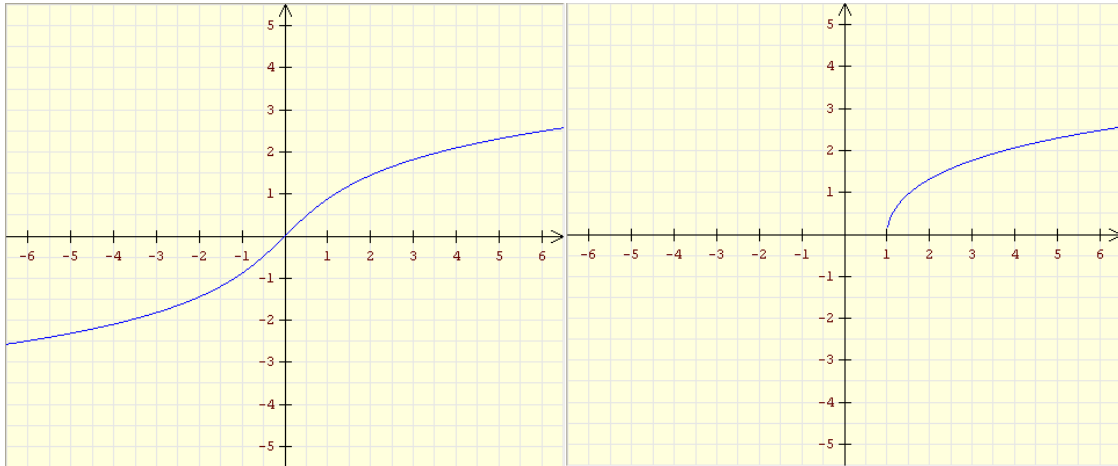
Definition der Areasinus Hyperbolicus und Areakosinus Hyperbolicus

$$y = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

mit $(-\infty < x < +\infty)$

mit $(x \geq 1)$



Eigenschaften der Areasinus Hyperbolicus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$	Definitionsbereich: $x \in]-\infty; +\infty]$
Wertebereich: $y \in]-\infty; +\infty]$	Nullstellen: $x = 0$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: keine	Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung

Eigenschaften der Areakosinus Hyperbolicus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \operatorname{arcosh}(x)$	Definitionsbereich: $x \geq 1$
Wertebereich: $y \geq 0$	Nullstellen: $x = 1$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: keine	Symmetrie: keine

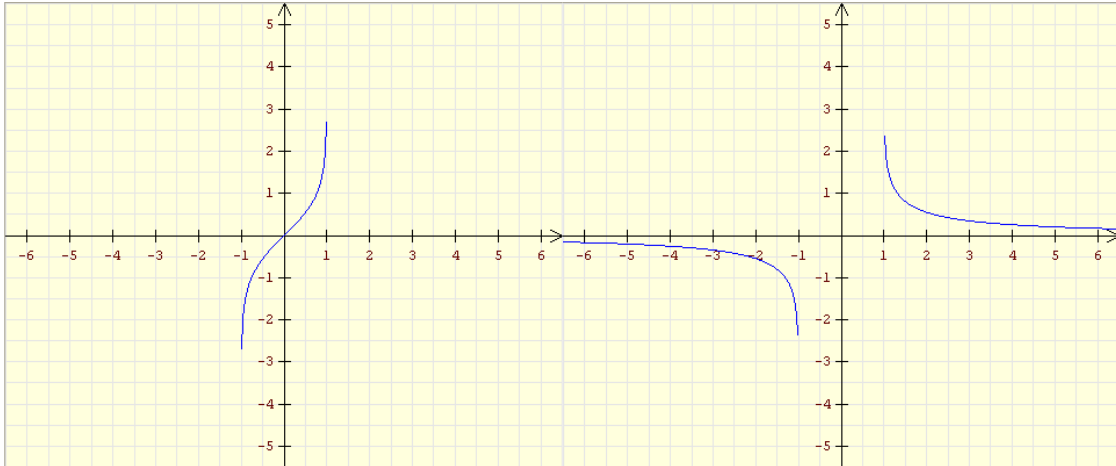
Definition der Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus

$$y = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

mit $|x| < 1$

$$y = \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

mit $|x| > 1$



Eigenschaften der Areatangens Hyperbolicus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \operatorname{atanh}(x)$	Definitionsbereich: $x \in]-1; +1]$
Wertebereich: $y \in]-\infty; +\infty]$	Nullstellen: $x = 0$
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: $x = \pm 1$	Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung

Eigenschaften der Areakotangens Hyperbolicus-Funktion	
Funktion: $f(x) = \operatorname{acoth}(x)$	Definitionsbereich: $ x > 1$
Wertebereich: $ y > 0$	Nullstellen: keine
Hochpunkte: keine vorhanden	Tiefpunkte: keine vorhanden
Asymptote: $x = \pm 1; y = 0$	Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung

Umrechnungen zwischen den einzelnen Area-Funktionen

	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\operatorname{artanh}(x)$	$\operatorname{arcoth}(x)$
$\operatorname{arsinh}(x)$	-	$\pm \operatorname{arcosh} \sqrt{x^2 + 1}$	$\operatorname{artanh} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$	$\operatorname{arcoth} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \right)$
$\operatorname{arcosh}(x)$	$\operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1}$	-	$\operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right)$	$\operatorname{arcoth} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\operatorname{arsinh} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$	$\pm \operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$	-	$\operatorname{arcoth} \left(\frac{1}{x} \right)$
$\operatorname{arcoth}(x)$	$\operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$	$\pm \operatorname{arcosh} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$	$\operatorname{artanh} \left(\frac{1}{x} \right)$	-

Kreis

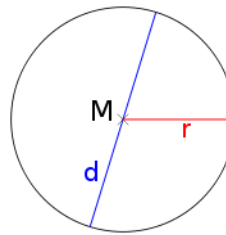
Definition eines Kreises

$$\overline{MP} = r$$

M: Mittelpunkt des Kreises

P: Punkt auf dem Kreis

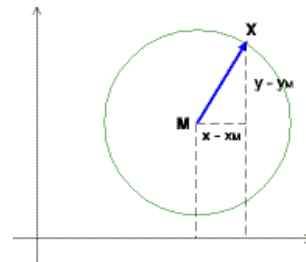
r: Radius des Kreises



Mittelpunktsgleichung oder Ursprungsgleichung des Kreises

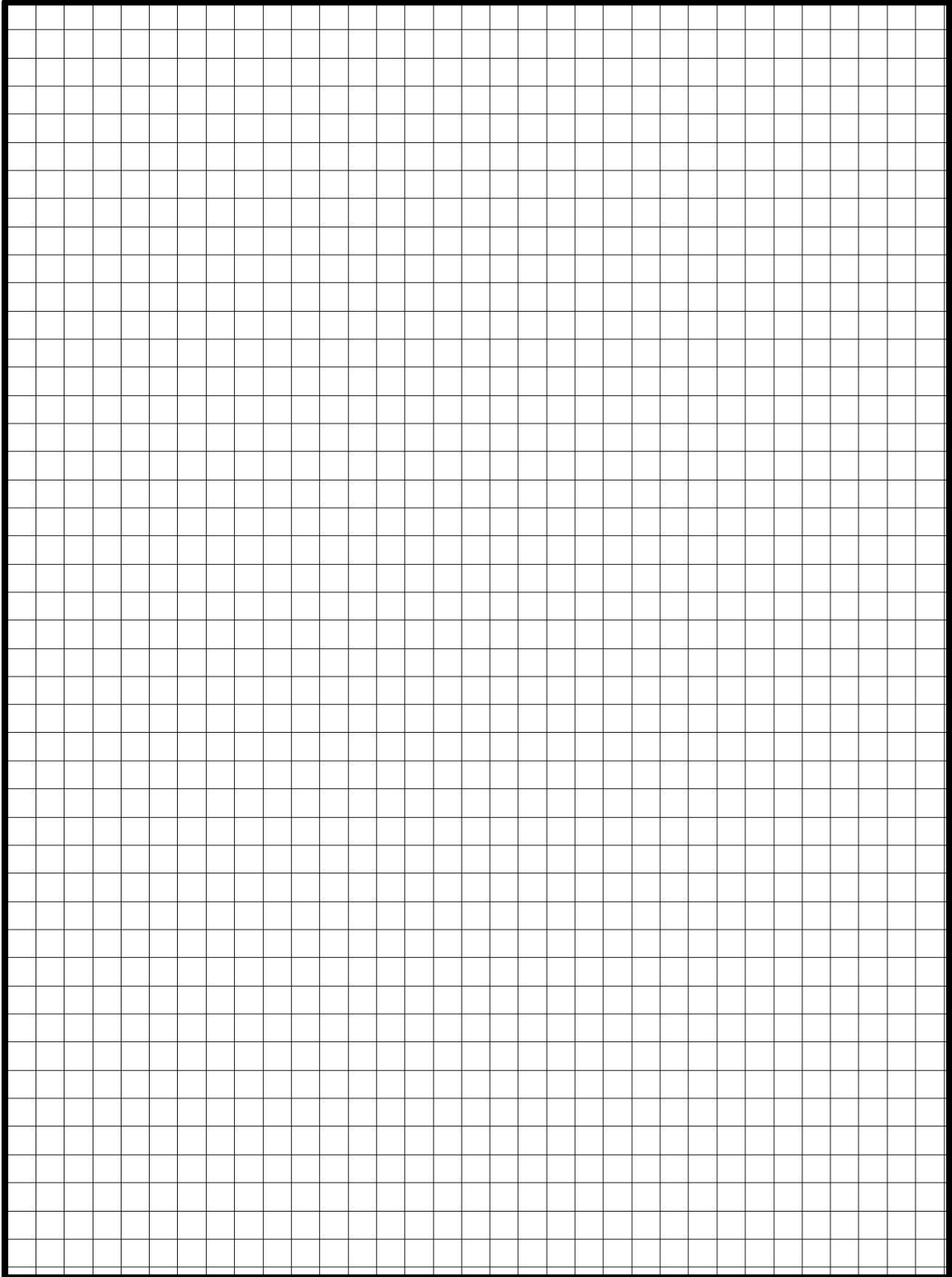
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$



EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN

Raum für eigene Ergänzungen



TRIGONOMETRIE

Winkelfunktionen und Zusammenhänge

Umrechnungstabelle

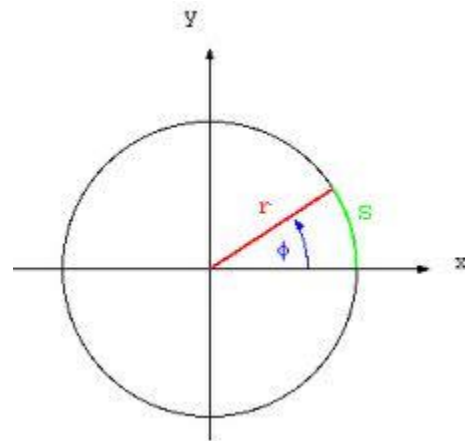
Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	120°
Bogenmaß	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
Cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$

Gradmaß	135°	150°	180°	210°	270°	360°
Bogenmaß	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Sinus	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0
Cosinus		$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	1
Tangens	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-	0

Winkelmaße

Bogenmaße eines Winkels

Bogenmaß x: Maßzahl der Länge des Kreisbogens, der im Einheitskreis dem Winkel α gegenüberliegt.



Umrechnungen

Bogenmaß \rightarrow Gradmaß

$$\alpha = \text{Bogenmaß} \cdot \frac{180}{\pi}$$

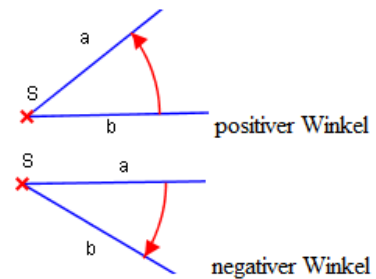
Gradmaß \rightarrow Bogenmaß

$$x = \text{Grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$

Drehsinn eines Winkels

Im Uhrzeigersinn bezeichnet man einen Winkel negativ.

Entgegen des Uhrzeigersinns bezeichnet man einen Winkel positiv.



Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

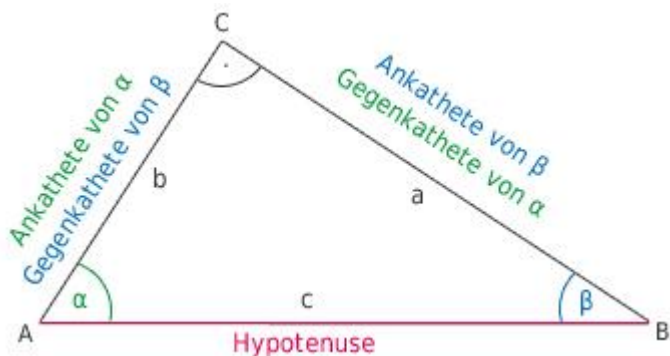
Winkelfunktionen

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$



Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

$$\cot(x + y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}$$

$$\cot(x - y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) + 1}{\cot(x) - \cot(y)}$$

Weitere trigonometrische Zusammenhänge

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot(\alpha)}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Formeln für die Vielfachen von Winkeln

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$$

$$\sin(3x) = 3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = 4 \cdot \cos^3(x) - 3 \cdot \cos(x)$$

$$\sin(4x) = 8 \cdot \cos^3(x) \cdot \sin(x) - 4 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

$$\cos(4x) = 8 \cdot \cos^4(x) - 8 \cdot \cos^2(x) + 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{(\cot^2(x) - 1)}{(2 \cdot \cot(x))}$$

$$\tan(3x) = \frac{(3 \cdot \tan(x) - \tan^3(x))}{(1 - 3 \cdot \tan^2(x))}$$

$$\cot(3x) = \frac{(\cot^3(x) - 3 \cdot \cot(x))}{(3 \cdot \cot^2(x) - 1)}$$

$$\tan(4x) = \frac{(4 \cdot \tan(x) - 4 \cdot \tan^3(x))}{(1 - 6 \cdot \tan^2(x) + \tan^4(x))}$$

$$\cot(4x) = \frac{(\cot^4(x) - 6 \cdot \cot^2(x) + 1)}{(4 \cdot \cot^3(x) - 4 \cdot \cot(x))}$$

Formeln für die halben Winkel

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$$

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}$$

Formel für die Produkte von Winkeln

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$$

$$\tan(x) \cdot \tan(y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{\cot(x) + \cot(y)}$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(z) = \frac{\sin(x + y - z) + \sin(-x + y + z) + \sin(x - y + z) - \sin(x + y + z)}{4}$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(z) = \frac{-\cos(x+y-z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) - \cos(x+y+z)}{4}$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) = \frac{\sin(x+y-z) - \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y+z)}{4}$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) = \frac{\cos(x+y-z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) + \cos(x+y+z)}{4}$$

$$\sin^2(x) \cdot \cos(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$$

$$\sin(x) \cdot \cos^2(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$$

$$\sin^2(x) \cdot \cos^2(x) = \cos^2(x) - \cos^4(x)$$

Formeln für die Potenzen von Winkeln

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^3(x) = \frac{3 \cdot \sin(x) - \sin(3x)}{4}$$

$$\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3 \cdot \cos(x)}{4}$$

$$\sin^4(x) = \frac{\cos(4x) - 4 \cdot \cos(2x) + 3}{8}$$

$$\cos^4(x) = \frac{\cos(4x) + 4 \cdot \cos(2x) + 3}{8}$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

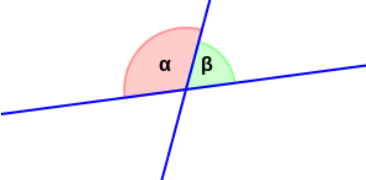
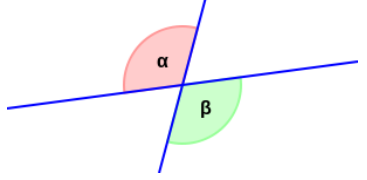
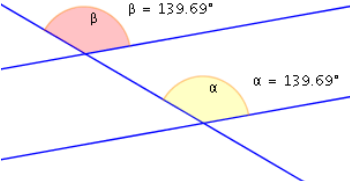
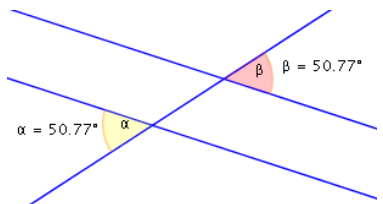
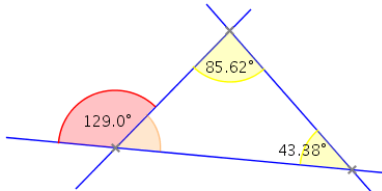
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Sinussatz

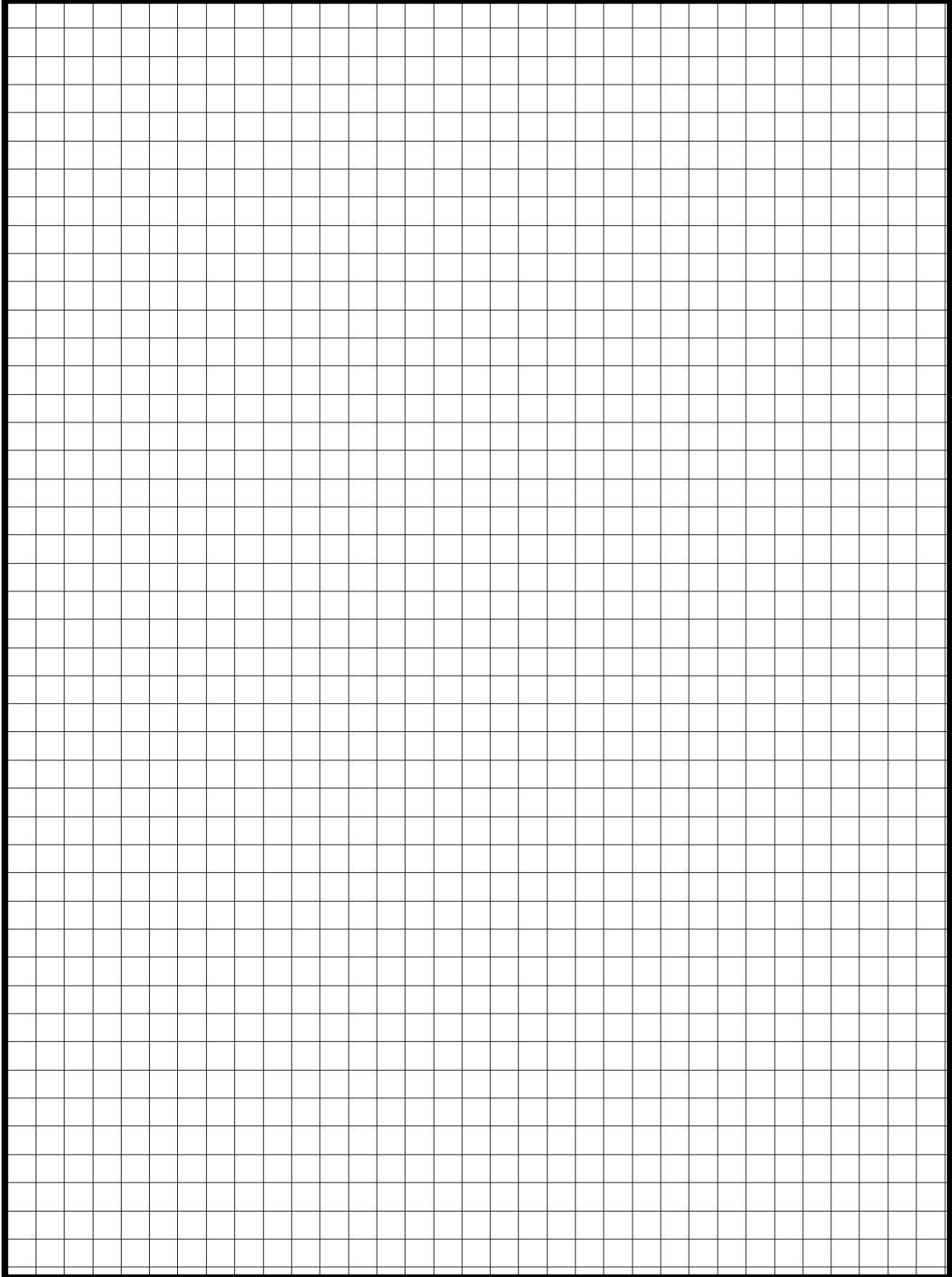
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Winkel an Geraden

<p>Nebenwinkel</p> <p>$\alpha + \beta = 180^\circ$</p> 	<p>Scheitelwinkel</p> <p>$\alpha = \beta$</p> 
<p>Stufenwinkel</p> <p>$\alpha = \beta$</p> 	<p>Wechselwinkel</p> <p>$\alpha = \beta$</p> 
<p>Außenwinkel</p> <p>Im Dreieck ist ein Außenwinkel gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.</p> 	<p>Winkelsummen</p> <p>Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ist immer 180°</p> <p>Die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck ist immer $(n - 2) \cdot 180^\circ$</p>

TRIGONOMETRIE

Raum für eigene Ergänzungen



GRUNDLAGEN

Summenzeichen

Summe gleicher Summanden

$$\sum_{i=1}^n x_i = x + x + \cdots + x = n \cdot x$$

Multiplikation einer Summe mit einem konstanten Faktor

$$c \cdot \sum_{i=1}^n x_i = c \cdot x + c \cdot x + \cdots + c \cdot x = c \cdot (x + x + \cdots + x) = c \cdot n \cdot x$$

Aufspalten einer Summe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= x_1 + \cdots + x_a + \cdots + x_{a+1} + \cdots + x_b + \cdots + x_{b+1} + \cdots + x_n \\ &= \sum_{i=1}^a x_i + \sum_{i=a+1}^b x_i + \sum_{i=b+1}^n x_i \end{aligned}$$

Addition von Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i + c_i + \cdots) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n c_i + \dots$$

Doppelsummen

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j = x_1 y_1 + x_2 y_1 + \cdots + x_n y_1 + \cdots + x_1 y_n + x_2 y_n + \cdots + x_n y_n$$

Regel zur weiteren Beachtung

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

Schreibweise

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

Rechenregeln

$$\prod_{i=m}^n a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(n-m+1)\text{-mal}} = a^{n-m+1}$$

$$\prod_{i=1}^n c^{a_i} = c^{a_1} \cdot c^{a_2} \cdot c^{a_3} \cdot \dots \cdot c^{a_n}$$

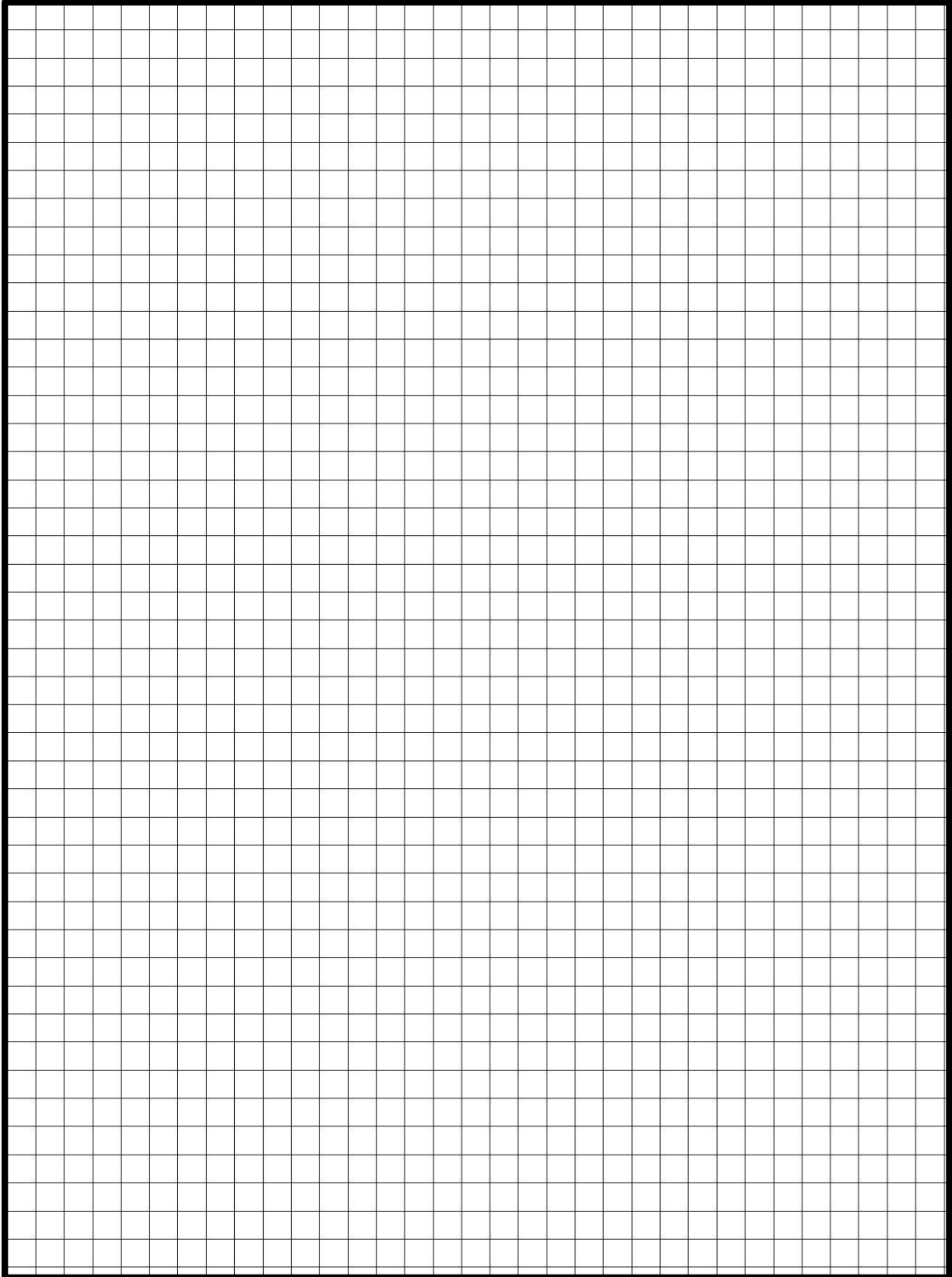
$$\prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$$

$$\prod_{i=1}^n (c \cdot b_i) = c^n \prod_{i=1}^n b_i$$

$$\prod_{i=1}^n c = c^n$$

SUMMEN- UND PRODUKTZEICHEN

Raum für eigene Ergänzungen



Addition von Matrizen

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{22} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{22} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix

$$A_{m,n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow A_{m,n}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

A_{ij} : Hier handelt es sich um Unterdeterminanten, die durch streichen der i-Zeile und der j-Spalte entstehen.

$$A_{1,1}: \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; A_{2,1}: \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; A_{3,1}: \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2}: \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}; A_{2,2}: \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}; A_{3,2}: \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_{1,3}: \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; A_{2,3}: \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; A_{3,3}: \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

Rechenregeln

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

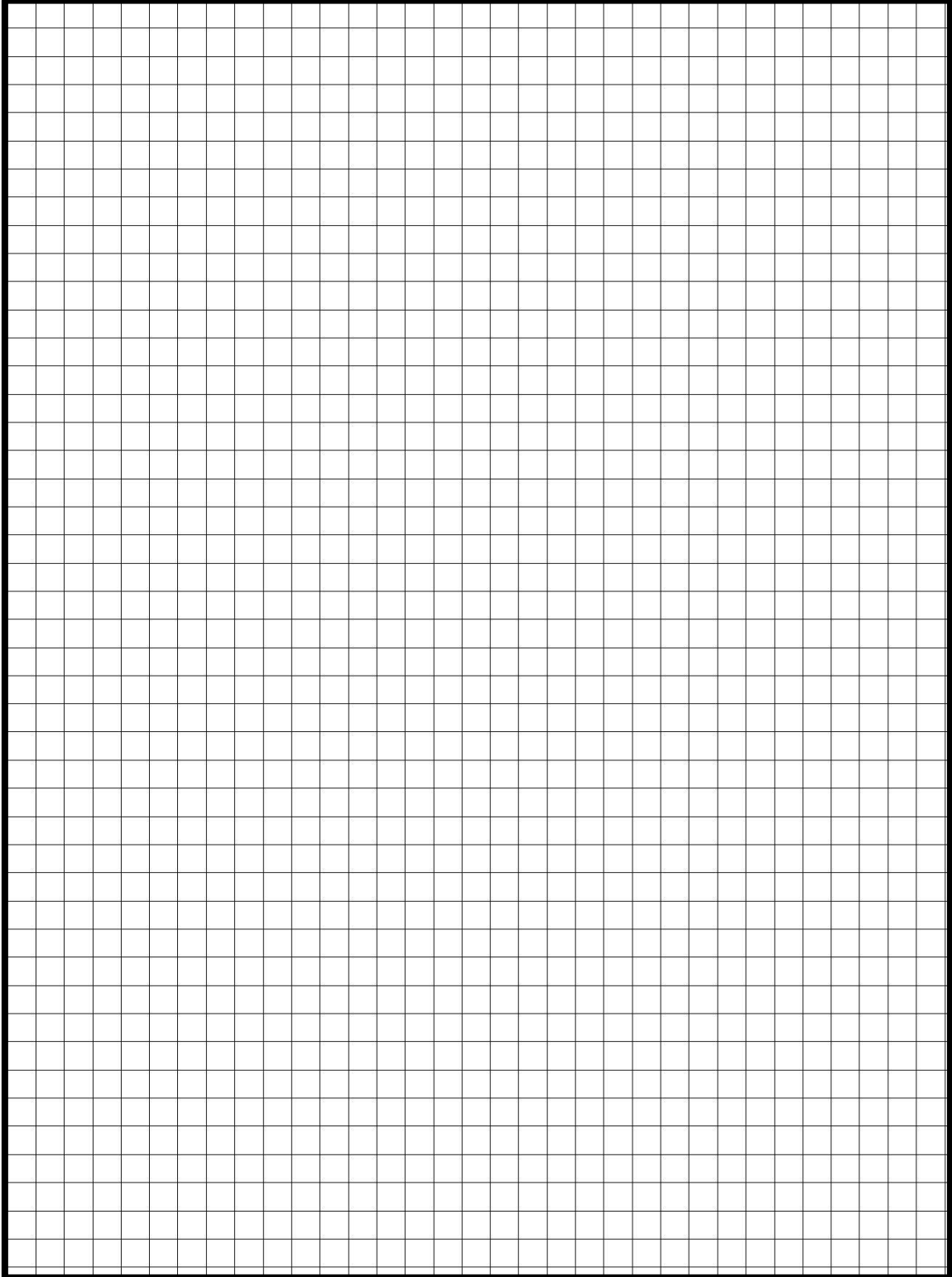
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(ABC \dots)^{-1} = \dots C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

MATRIZEN

Raum für eigene Ergänzungen



DETERMINANTEN

Grundlagen Determinanten

Determinantenberechnung

Zweireihige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Berechnungsvorschrift

$$D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dreireihige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Berechnungsvorschrift

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Transponierte

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Vorzeichen-tabelle für Entwicklungssatz nach Laplace

	1	2	3	...
1	+	-	+	...
2	-	+	-	...
3	+	-	+	...
...

Cramersche Regel

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 &= d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \text{ Lineares Gleichungssystem} \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Nennerdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Zählerdeterminanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

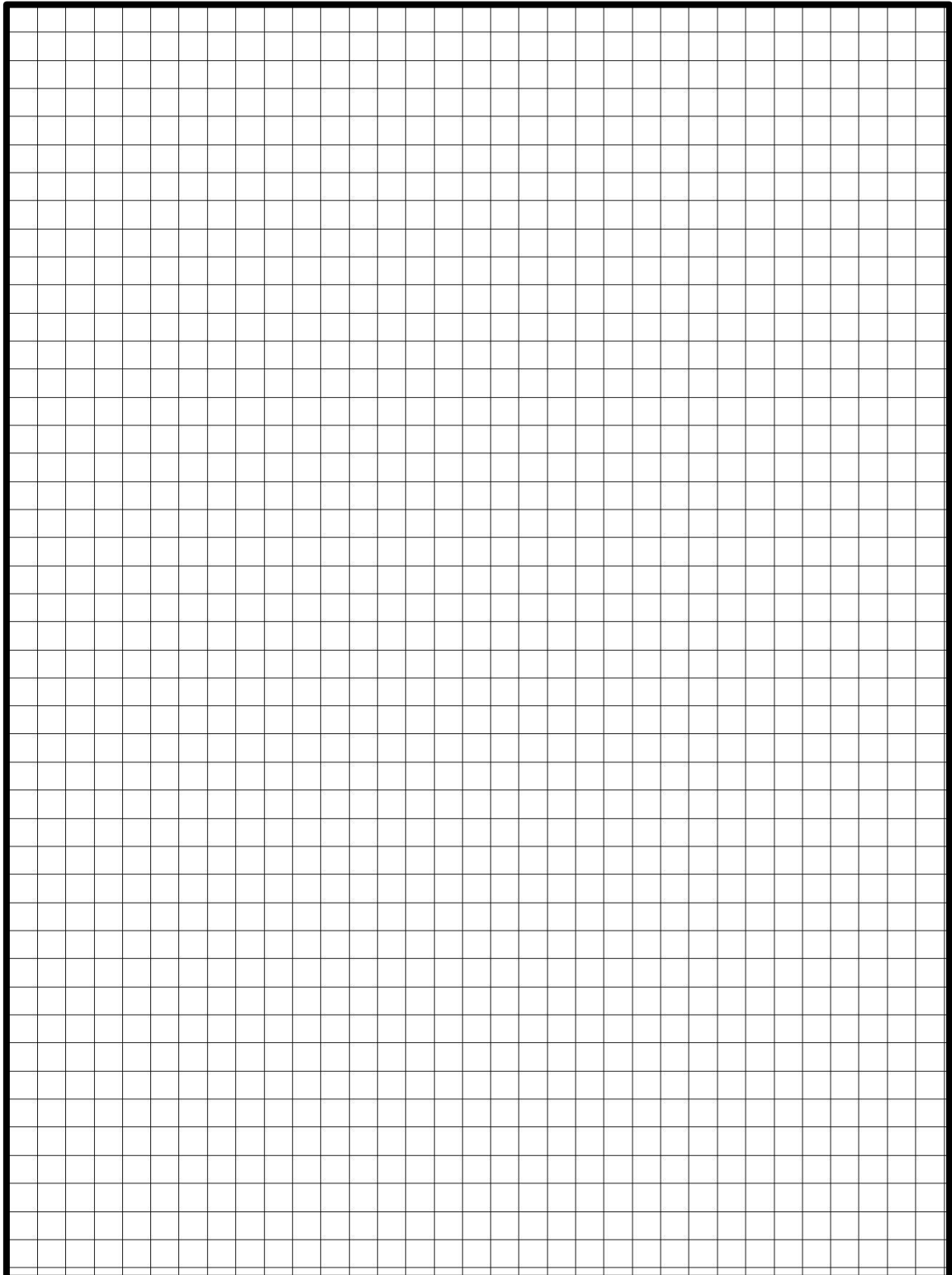
$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Lösungen

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

DETERMINANTEN

Raum für eigene Ergänzungen



Vektordarstellung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vektoreerstellung

\overrightarrow{AB} mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

Grundrechenarten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2: A \pm B = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & \pm & b_1 \\ a_2 & \pm & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^3: A \pm B = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & \pm & b_1 \\ a_2 & \pm & b_2 \\ a_3 & \pm & b_3 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot A = r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

$$r \cdot A = r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Vektorielle Geradengleichung

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$$

\vec{u} : Richtungsvektor

\vec{a} : Aufpunkt oder Stützvektor

Lagebeziehungen zwischen Geraden

Folgende Lagen können Geraden zueinander besitzen:

Identisch, parallel, windschief oder sie schneiden sich.

Nachweis von Identität und Parallelität

Lineare Abhängigkeit zwischen den Richtungsvektoren der beiden Geraden.

Wenn der Stützvektor der einen Geraden, ein Punkt der anderen ist oder umgekehrt, so sind sie identische, im anderen Fall parallel.

Nachweis von Schnitt und Windschief

Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen.

Lösen des daraus entstehenden LGS.

Eindeutige Lösung → sie schneiden sich

Keine eindeutige Lösung → sie schneiden sich nicht

Nachweismethode für windschiefe Geraden

Wenn die beiden Richtungsvektoren von g und h zusammen mit dem Verbindungsvektor \overrightarrow{AB} der Aufpunkte linear unabhängig sind, dann sind g und h windschief.

Der Nachweis erfolgt über:

$$\det(\overrightarrow{u} \ \overrightarrow{v} \ \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{u} \ \overrightarrow{v} \ \overrightarrow{AB}| \neq 0$$

Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenachsen

Ein Punkt mit den Koordinaten $(x_1 | 0 | 0)$ liegt auf der x - oder x_1 -Achse.

Ein Punkt mit den Koordinaten $(0 | x_2 | 0)$ liegt auf der y - oder x_2 -Achse.

Ein Punkt mit den Koordinaten $(0 | 0 | x_3)$ liegt auf der z - oder x_3 -Achse.

Als die Spurpunkte einer Geraden bezeichnet man die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen (in der Ebene) oder den Grundebenen des Koordinatensystems (im Raum).

Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen

In der x_1x_2 -Ebene haben alle Punkte $x_3=0$.

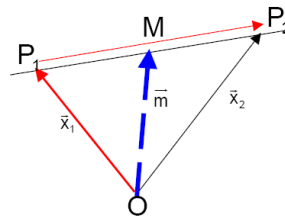
In der x_2x_3 -Ebene haben alle Punkte $x_1=0$.

In der x_1x_3 -Ebene haben alle Punkte $x_2=0$.

Auch diese Punkte werden als Spurpunkte bezeichnet. (siehe oben)

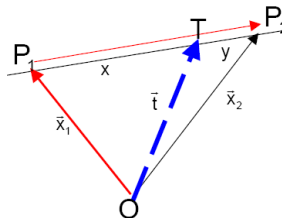
Mittelpunkt einer Strecke

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$



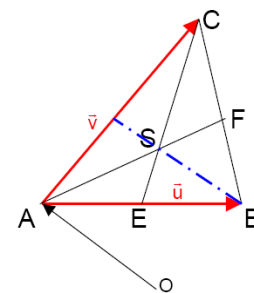
Teilpunkte einer Strecke

$$\vec{t} = \frac{y}{x+y} \cdot \vec{x}_1 + \frac{x}{x+y} \cdot \vec{x}_2$$



Berechnung der Koordinaten eines Schwerpunktes

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$



Vektorielle Ebenengleichung (Parametergleichung)

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

\vec{u}, \vec{v} : Richtungsvektor

\vec{a} : Aufpunkt oder Stützvektor

Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

Folgende Lagen können auftauchen:

Identisch, parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt.

Nachweis von Identität, Parallelität und Schnitt

Gleichsetzungsverfahren:

Gleichsetzen der beiden Gleichungen (Ebene muss in Parameterform vorhanden sein).

Lösen des daraus entstehenden LGS.

Einsetzungsverfahren

Einsetzen der Koordinatengleichungen von x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung der Ebene und berechnen des Parameters beim Richtungsvektor. Diesen Parameter in die Geradengleichung einsetzen und den Schnittpunkt berechnen.

Als Lösung kann bei beiden Verfahren folgendes bei auftreten:

Eindeutige Lösung → sie schneiden sich

Allgemeine gültige Lösung → sie sind identisch

Widerspruch → sie sind parallel

Koordinatengleichung einer Ebene

$$E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$$

Eliminationsmethode zur Umrechnung einer Parametergleichung in die Koordinatengleichung

Aufstellen der drei Koordinatengleichungen aus der Parameterform der Ebene.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = a_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1$$

$$x_2 = a_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2$$

$$x_3 = a_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3$$

Einsetzungsverfahren solange anwenden, bis nur noch x_1 , x_2 und x_3 übrig sind. Daraus ergibt sich dann die Koordinatengleichung der Ebene.

Achsenabschnittsform einer Ebene

Umformen der Koordinatenform

$E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ in folgende Darstellung

$$\frac{a_1}{c}x_1 + \frac{a_2}{c}x_2 + \frac{a_3}{c}x_3 = 1$$

Weiter umgeformt

$$\frac{x_1}{d_1} + \frac{x_2}{d_2} + \frac{x_3}{d_3} = 1$$

die Achsenabschnittspunkte sind dann

$$P_1 \left(d_1 = \frac{c}{a_1} \mid 0 \mid 0 \right), \quad P_2 \left(0 \mid d_2 = \frac{c}{a_2} \mid 0 \right), \quad P_3 \left(0 \mid 0 \mid d_3 = \frac{c}{a_3} \right)$$

Normalenvektor

$$E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene E.

Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen

Folgende Lagen können auftauchen:

Identisch, parallel oder sie schneiden sich in einer Gerade.

Nachweis von Identität, Parallelität und Schnitt

Gleichsetzungsverfahren(Beide Ebenen in Parameterform)

Gleichsetzen der beiden Gleichungen.

Lösen des daraus entstehenden LGS.

Einsetzungsverfahren (Beide Ebenen in unterschiedlichen Formen)

Einsetzen der Koordinatengleichungen von x_1 , x_2 und x_3 der Parameterform, in die Koordinatengleichung der Ebene und berechnen des Parameters beim Richtungsvektor. Diesen Parameter in die Parametergleichung einsetzen und die Schnittgerade berechnen.

Additionsverfahren (Beide Ebenen in Koordinatenform)

Durch Addition der beiden Gleichungen fällt eine der Variablen weg. Eine Variable durch einen Parameter ersetzen. Damit die Koordinatengleichung aufstellen.

Als Lösung kann bei allen Verfahren folgendes bei auftreten:

Eindeutige Lösung \rightarrow sie schneiden sich

Allgemeine gültige Lösung \rightarrow sie sind identisch

Widerspruch \rightarrow sie sind parallel

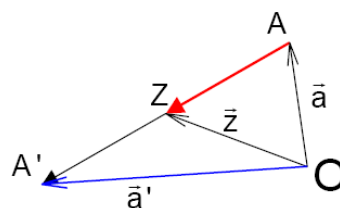
Spiegelung eines Punktes an einem Punkt

$$\vec{a}' = 2\vec{z} - \vec{a}$$

Spiegelung einer Geraden an einem Punkt

$$\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x}$$

\vec{x} : Ist die Original – Gerade



Spiegelung einer Ebene an einem Punkt

$$\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x}$$

\vec{x} : Ist die Original – Ebene

Skalares Produkt

$$\mathbb{R}^2: A \cdot B = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\mathbb{R}^3: A \cdot B = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Betrag

$$\mathbb{R}^2: |A| = \sqrt{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\mathbb{R}^3: |A| = \sqrt{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Einheitsvektoren

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$$

Orthogonale Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

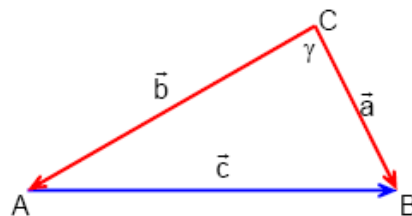
Wenn ein Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Dann erhält man zu \vec{u} orthogonale Vektoren,

indem man eine der drei Koordinaten Null setzt, die beiden anderen vertauscht und bei einer das Vorzeichen ändert.

Winkel zwischen Vektoren

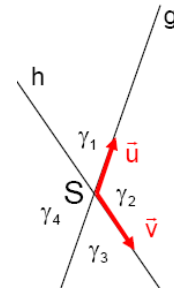
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



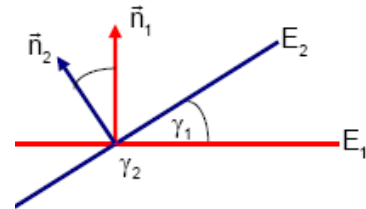
Winkel zwischen zwei Geraden

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Winkel zwischen zwei Ebenen

$$\cos(\gamma) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$



Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

$$\sin(\gamma) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

Skalarproduktverfahren

Umrechnung der Parameterform der Ebene in die Koordinatenform der Ebene.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ sei ein Normalenvektor der Ebene.

Für diesen Normalenvektor müssen zwei Bedingungen gelten:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Dieses LGS lösen, daraus ergibt sich die Koordinatengleichung.

Orthogonale Vektorverfahren

Bestimmung von einem Punkt und zwei Richtungsvektoren, die zu der Ebene senkrecht stehen.

Hessesche Normalform (HNF)

Eine Normalengleichung, in der der Normalenvektor den Betrag 1 hat, heißt Hessesche Normalform einer Ebene.

$$\vec{n}^0 \cdot \vec{x} - d = 0$$

Wenn $d > 0$ ist, dann gibt d den Abstand des Ursprungs von E an und \vec{n}^0 zeigt vom Ursprung auf die Ebene zu.

Gleichung: $ax + by + c = 0$

$$\text{HNF: } \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Setzt man in die linke Seite der Hesseschen Normalform einen Punkt ein, erhält man den Abstand dieses Punktes zur Ebene.

Vektorielltes Produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}; \text{ wobei } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Vektorielltes Produkt als Komponentendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Vektorielltes Produkt als Determinantendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Berechnung nach der Regel von Sarrus.

Abstand zwischen zwei Punkten

Abstand \overline{AB} der Punkte A, B

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \sqrt{(B - A)^2}$$

Abstand eines Punktes Q von einer Geraden

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}$$

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0})$$

Abstand zweier windschiefer Geraden

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0} \text{ und } [\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \neq 0)$$

Gleichung einer Ebene senkrecht zu einem Normalvektor

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$$

Abstand eines Punktes Q von einer Ebene

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

Abstand einer Geraden von einer Ebene

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a})$$

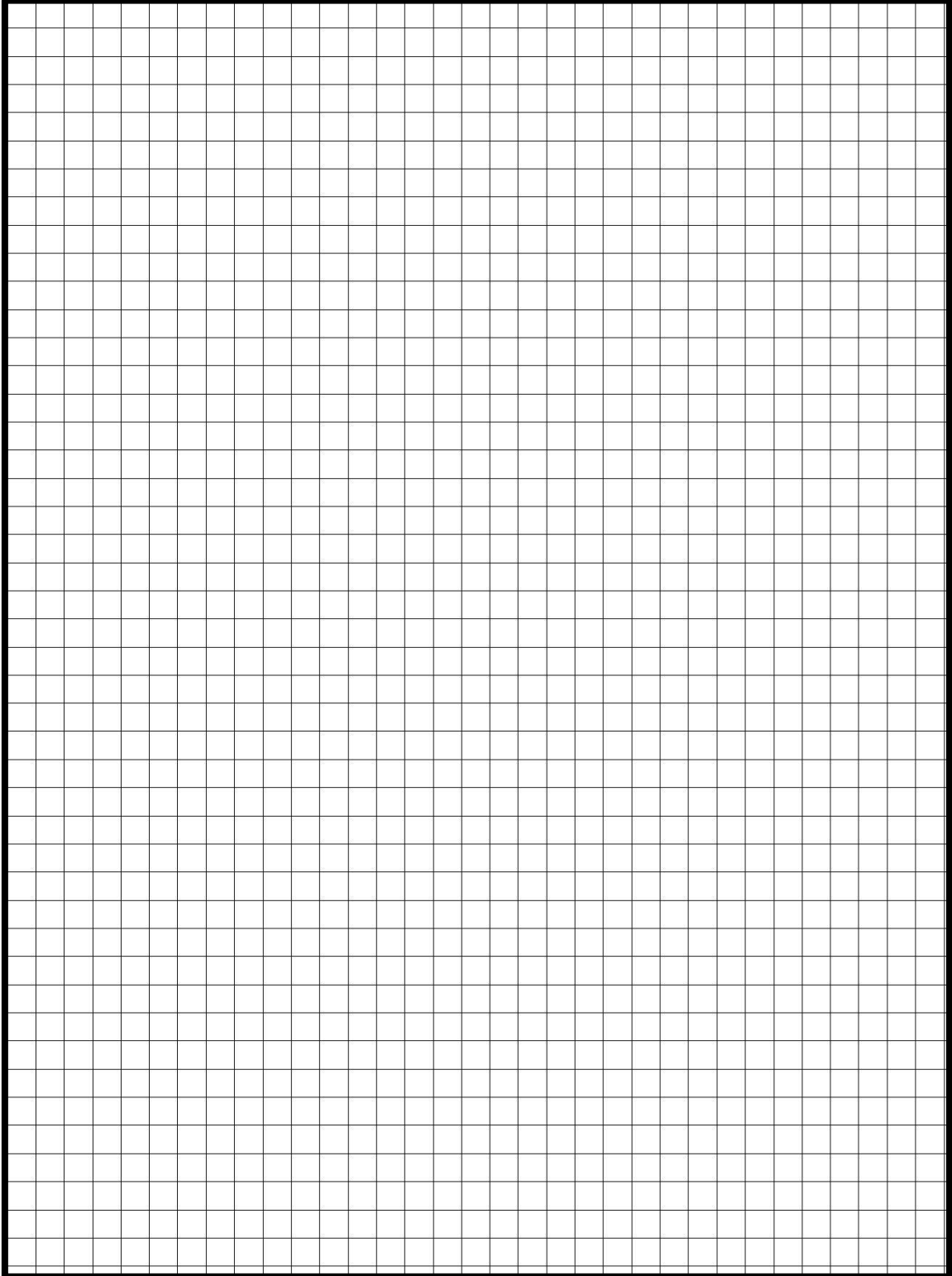
Abstand zweier paralleler Ebenen

$$d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}_1|}$$

$$(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0})$$

VEKTOREN

Raum für eigene Ergänzungen



Monotonie

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist monoton wachsend,
wenn die Folgenglieder immer größer werden

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist monoton fallend, wenn die Folgenglieder immer kleiner werden:

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wenn $<$ oder $>$ gilt, spricht man von strenger Monotonie.

Schranke

Eine Zahl s_o heißt obere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn alle Folgenglieder kleiner oder gleich s_o sind:

$$a_n \leq s_o \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Eine Zahl s_u heißt untere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn alle Folgenglieder größer oder gleich s_u sind:

$$a_n \geq s_u \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie eine obere und eine untere Schranke besitzt.

Grenzwert und Konvergenz:

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn die Differenz $|a_n - a|$ für genügend große n beliebig klein wird.

Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

(a = Limes von a_n für n gegen unendlich).

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt konvergent (sie konvergiert bzw. strebt gegen a).

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt divergent.

Wenn eine Folge monoton und beschränkt ist, ist sie konvergent.

Arithmetische Folgen:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k$$

Geometrische Folgen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Arithmetische Reihe:

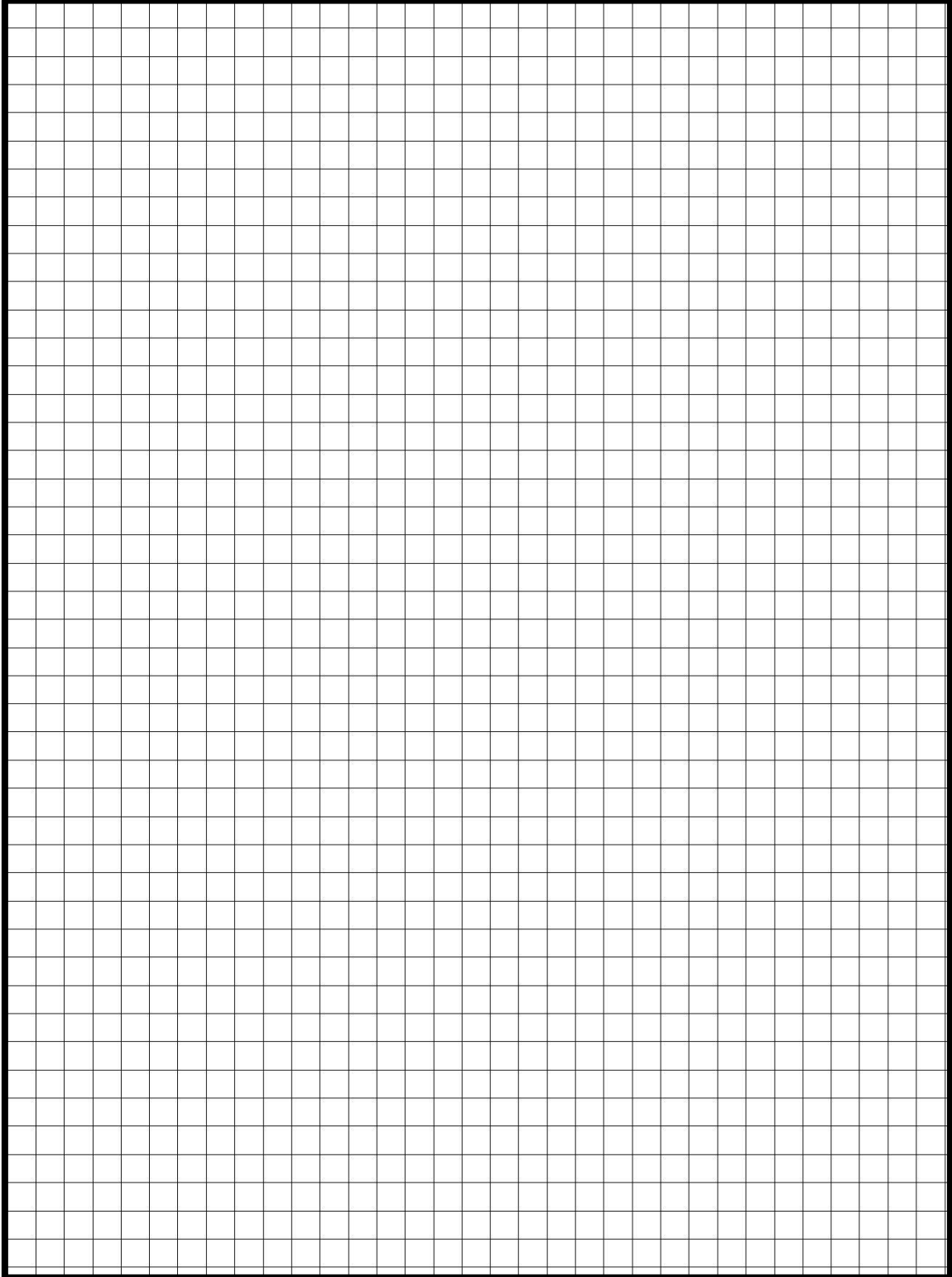
$$s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Geometrische Reihe:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ oder } s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

FOLGEN UND REIHEN

Raum für eigene Ergänzungen



KOMPLEXE ZAHLEN

Grundlagen Komplexe Zahlen

Definition

$$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a} \text{ mit } a > 0$$

$$i^2 = -1$$

Darstellung einer komplexen Zahl

$$z = a + b \cdot i \quad i \in \mathbb{C} \text{ und } a, b \in \mathbb{R}$$

Darstellung einer konjugiert komplexen Zahl

$$z^* = a - b \cdot i \quad i \in \mathbb{C} \text{ und } a, b \in \mathbb{R}$$

Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = 1, \quad \text{dann ist } \frac{1}{z} = z^*$$

Der Betrag einer komplexen Zahl gibt den Abstand des zugehörigen Punktes vom Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene an.

Addition komplexer Zahlen

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

Kommutativgesetz: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Assoziativgesetz: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

Zwei komplexe Zahlen werden addiert, indem man den Real- und Imaginärteile, jeweils getrennt addiert.

Die Addition einer konjugiert komplexen Zahl ergibt eine reelle Zahl.

Subtraktion komplexer Zahlen

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) - (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$$

Zwei komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem man den Real- und Imaginärteile, jeweils getrennt subtrahiert.

Die Subtraktion einer konjugiert komplexen Zahl ergibt eine imaginäre Zahl.

Multiplikation komplexer Zahlen

In kartesischer Form

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

Die Multiplikation einer konjugiert komplexen Zahl ergibt eine reelle Zahl und zwar das Quadrat ihres Betrages.

In Polarform

$$E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Division komplexer Zahlen

In kartesischer Form

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i$$

Zähler und Nenner der Quotienten werden zunächst mit dem konjugiertkomplexen Nenner, d.h. der Zahl $a_2 - b_2 \cdot i$ multipliziert. Die Division durch die Zahl Null ist wie im Reellen verboten.

In der Polarform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot E(\varphi_1 - \varphi_2)$$

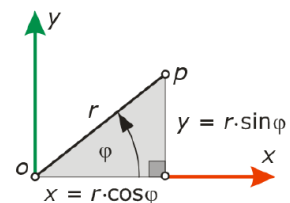
Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes P in der Gauß'schen Zahlenebene bestehen aus einer Abstandskoordinate r und einer Winkelkoordinate φ .

r : Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung

φ : Winkel zwischen dem Koordinatenursprung zum Punkt P gerichteten Radiusvektor und der positiven x-Achse.

Darstellung: $A(x|y) \rightarrow A[r, \varphi]$



Koordinatentransformation

Polarkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

Kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

Moivre-Formel

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$E(\varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = |z| \cdot E(\varphi)$$

Eigenschaften der Funktion $E(\varphi)$

$$|E(\varphi)| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$$E(\varphi + k \cdot 2\pi) = E(\varphi)$$

$$E(-\varphi) = E(360^\circ - \varphi) = \frac{1}{E(\varphi)}$$

$$\frac{1}{E(\varphi)} = \frac{1}{\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)} = \cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)$$

$$E(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)$$

Potenzieren

In der Polarform

$$E(\varphi)^n = E(n \cdot \varphi)$$

Radizieren:

$$E\left(\frac{1}{2} \cdot \varphi\right) = \sqrt{E(\varphi)}$$

Allgemein:

$$E\left(\frac{1}{n} \cdot \varphi\right) = \sqrt[n]{E(\varphi)}$$

Berechnung beliebiger rationaler Potenzen

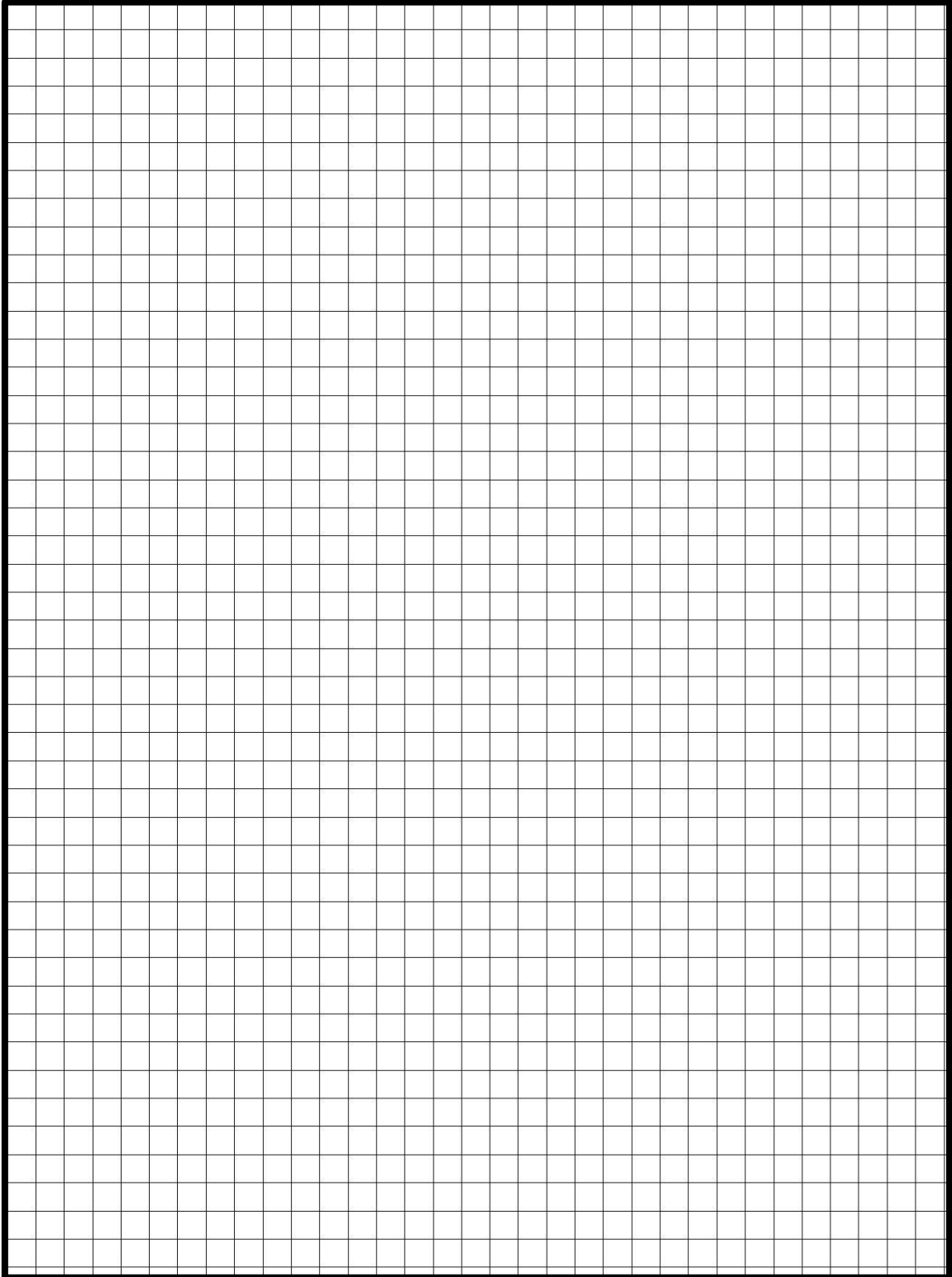
$$E\left(\frac{1}{n} \cdot \varphi\right)^m = \left(\sqrt[n]{E(\varphi)}\right)^m = E\left(\frac{m}{n} \cdot \varphi\right)$$

Rechenregeln (4. Binomisches Gesetz)

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

KOMPLEXE ZAHLEN

Raum für eigene Ergänzungen



Differentialgleichung 1. Ordnung

Trennbare (separierbare) DGL

Lassen sich in einer DGL 1. Ordnung nach Einführung von

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

die Variablen x und y trennen, d.h. lässt sich die DGL darstellen in der Form

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

dann heißt die DGL separierbar.

Kennt man die Stammfunktion $G(y)$ bzw. $F(x)$ von $g(y)$ bzw. $f(x)$, so erhält man die Lösung der DGL durch Integration in der Form

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Lineare inhomogene DGL

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

Lösungsverfahren "Variation der Konstanten":

Man bestimmt zuerst die Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL $y' = a(x) \cdot y$ durch Trennung der Variablen und variiert dann die Integrationskonstante C in $y_h(x)$.

Durch Substitution lösbare DGL 1. Ordnung

$$y' = f(ax + by + c)$$

Substitution:

$$u = ax + by + c \rightarrow (u = u(x), y = y(x))$$

Ableiten nach x :

$$u' = a + by$$

y' aus der DGL:

$$y' = f(u)$$

$$u' = a + b \cdot f(u)$$

In dieser Form ist die DGL separierbar.

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u) \quad dx = \frac{du}{a + f(u)}$$

DGL vom Typ

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Substitution:

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{mit } u = u(x), y = y(x)$$

$$u = \frac{y}{x} \rightarrow y(x) = x \cdot u(x)$$

$$y' \text{ aus der DGL:} \quad y' = f(u)$$

$$u + x \cdot u' = f(u)$$

$$x \cdot u' = f(u) - u$$

In dieser Form ist die DGL separierbar.

$$\frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u$$

$$\int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Rücksubstitution ergibt $y(x)$

Lösen der linearen inhomogenen DGL 1. Ordnung

Erster Schritt:

Lösung der homogenen DGL durch Trennung der Variablen

$$y' + g(y) \cdot y = 0 \quad \text{lineare homogene DGL erster Ordnung}$$

$$\ln|y| = - \int g(x) dx + \ln|c| = -G(x) + \ln|c|$$

$$y_h(x) = c \cdot e^{-G(x)} = c \cdot e^{\int g(x) dx} = c \cdot y_1(x)$$

$y_1(x)$ heißt Fundamentallösung (Grundlösung) der homogenen DGL

Zweiter Schritt:

Lösung der inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstanten

$$y' + g(x) \cdot y = r(x) \quad \text{Lineare inhomogenen Dgl. erster Ordnung}$$

$$y(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{r(x)}{y_1(x)} dx + K \cdot y_1(x)$$

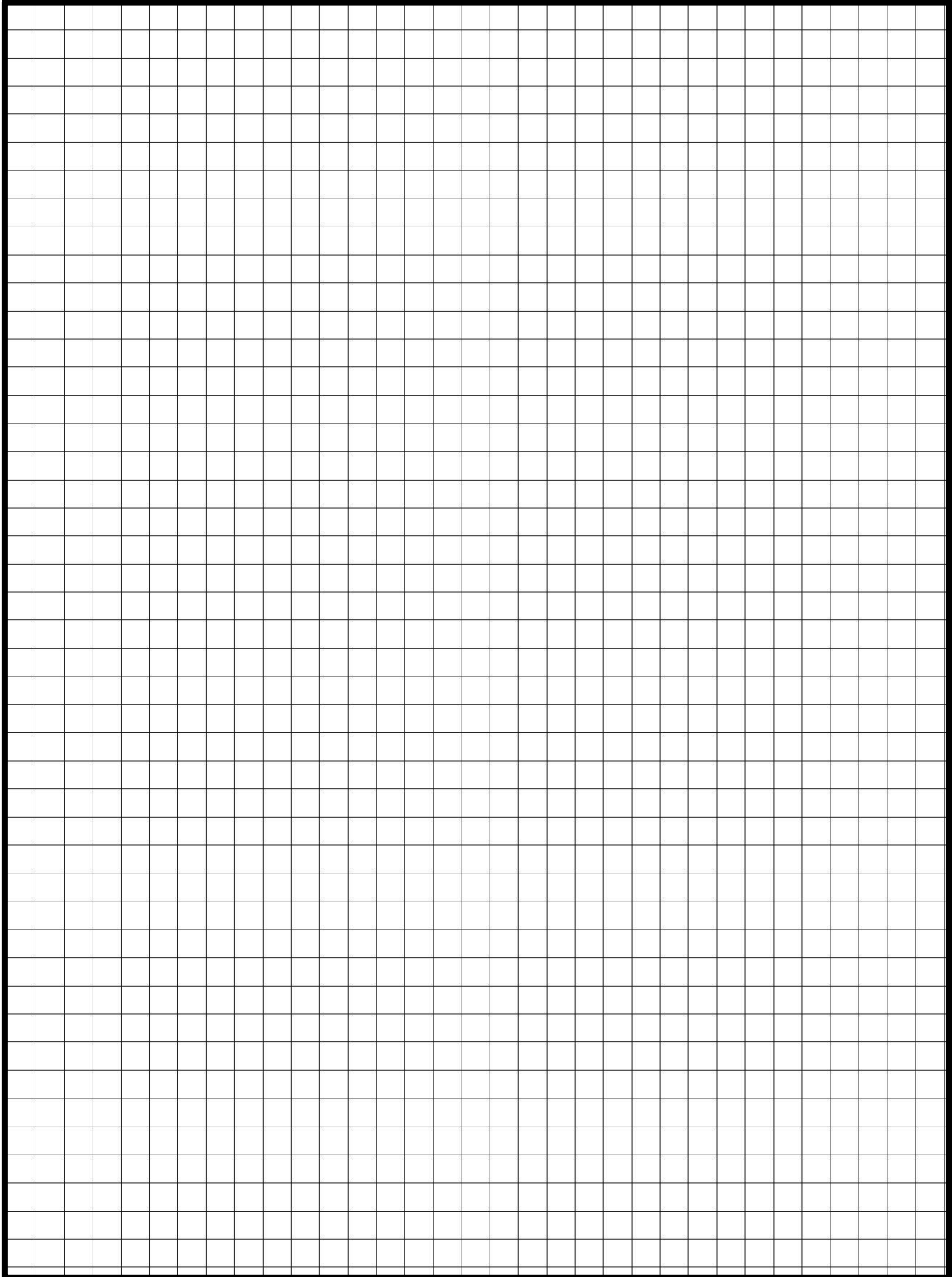
$$\rightarrow y_p(x), y_h(x)$$

$r(x)$: Störfunktion der Differentialgleichung

$y_1(x)$: Fundamentallösung (Grundlösung) der homogenen Differentialgleichung

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Raum für eigene Ergänzungen



Bezeichnungen

A...Flächeninhalt

V...Volumen

h...Höhe

r...Radius

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras:

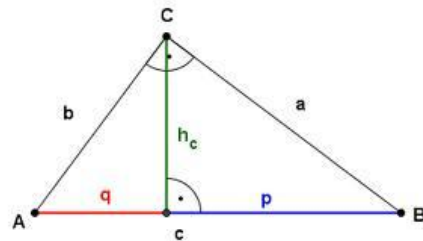
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kathetensatz (oder Satz des Euklid):

$$a^2 = c \cdot p \text{ und } b^2 = c \cdot q$$

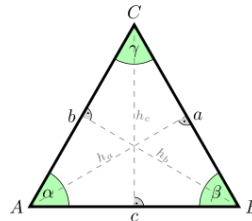
Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q$$



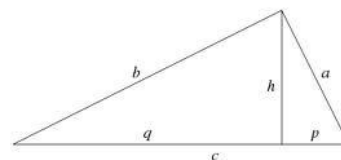
Gleichseitiges Dreieck:

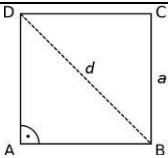
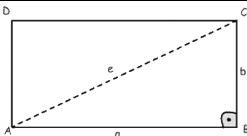
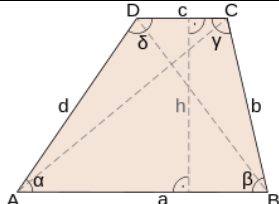
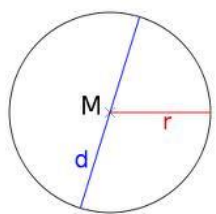
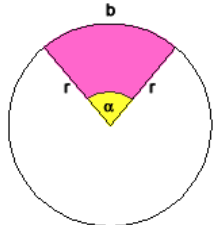
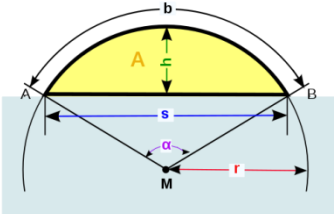
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$



Dreieck

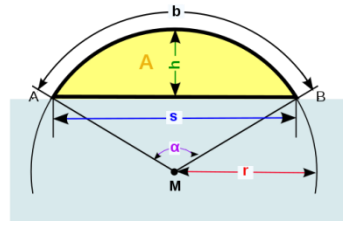
$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$



Quadrat	
$A = a^2$ $d = a \cdot \sqrt{2}$	
Rechteck	
$A = a \cdot b$ $e = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Trapez	
$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$	
Kreis	
$u = 2\pi r$ $A = r^2 \cdot \pi$	
Kreis Sektor	
$A = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$	
Kreisbogen	
$b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360} = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$	

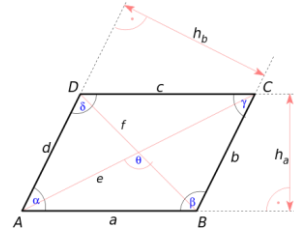
Kreisabschnitt

$$A = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin(\alpha))$$



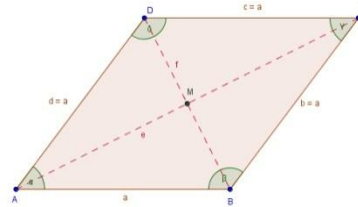
Parallelogramm

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$



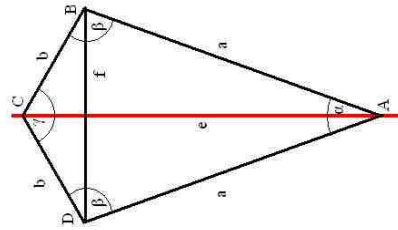
Rhombus (Raute)

$$A = a \cdot h = \frac{e \cdot f}{2}$$



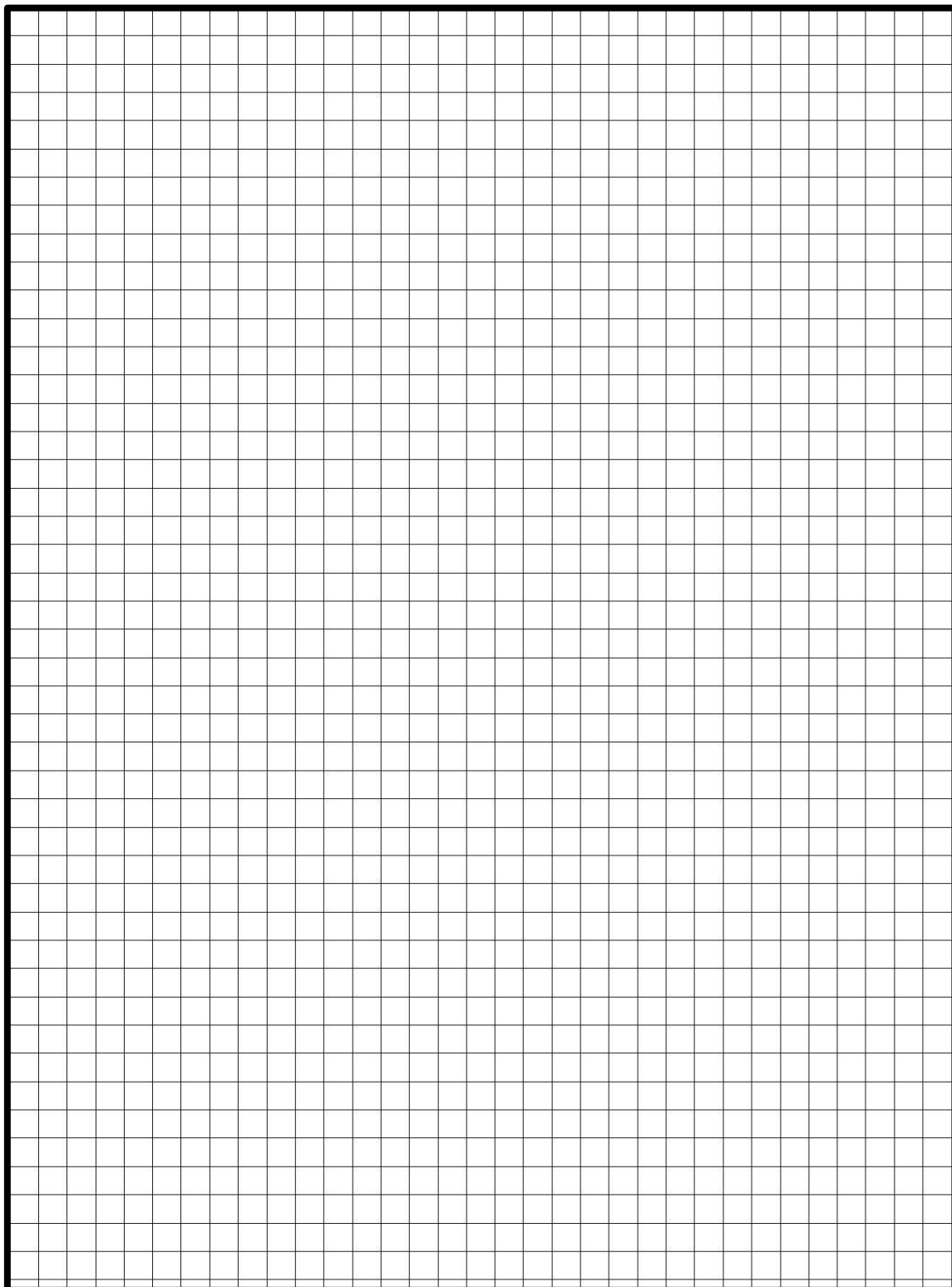
Drachen

$$A = a \cdot h = \frac{e \cdot f}{2}$$



GEOMETRIE

Raum für eigene Ergänzungen



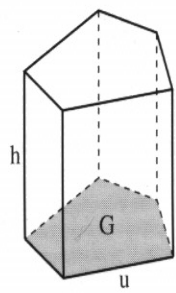
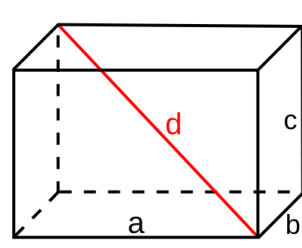
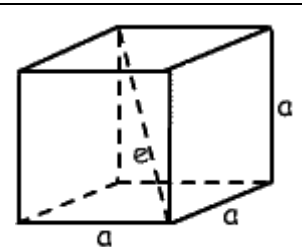
Bezeichnungen:

G...Inhalt der Grundfläche

M...Inhalt der Mantelfläche

O...Inhalt der Oberfläche

R... Radius des Torus

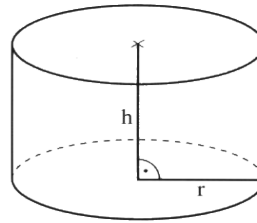
Prisma	
$O = 2 \cdot G + M$ $V = G \cdot h$	
Quader	
$O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$ $V = a \cdot b \cdot c$	
Würfel	
$O = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$ <p>Raumdiagonale</p> $d = a\sqrt{3}$	

Zylinder

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

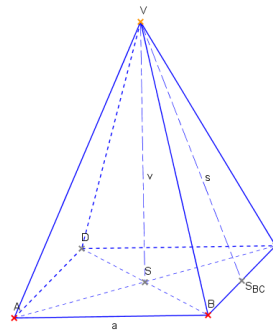
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$



Pyramide

$$O = G + M$$

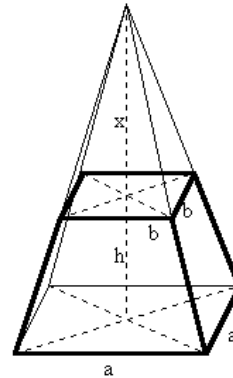
$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



Pyramidenstumpf

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$$

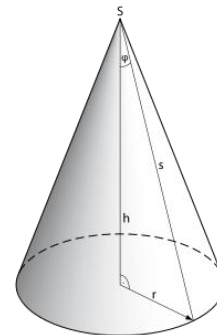


Kegel

$$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$$

$$M = r \cdot \pi \cdot s$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

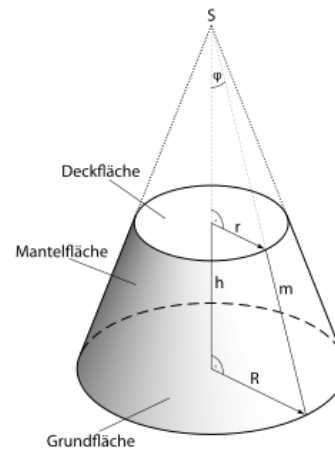


Kegelstumpf

$$O = R_1^2 \cdot \pi + r^2 \cdot \pi + (R + r) \cdot \pi \cdot m$$

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

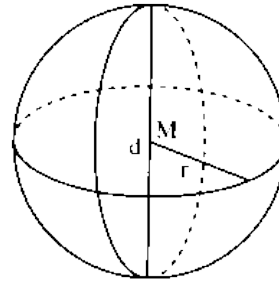
$$M = (R + r) \cdot \pi \cdot s$$



Kugel

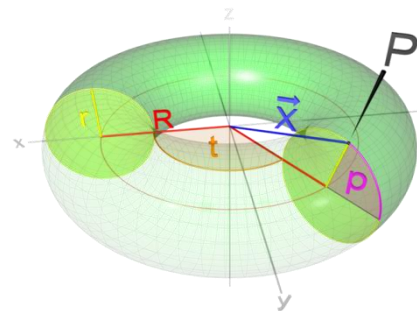
$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$



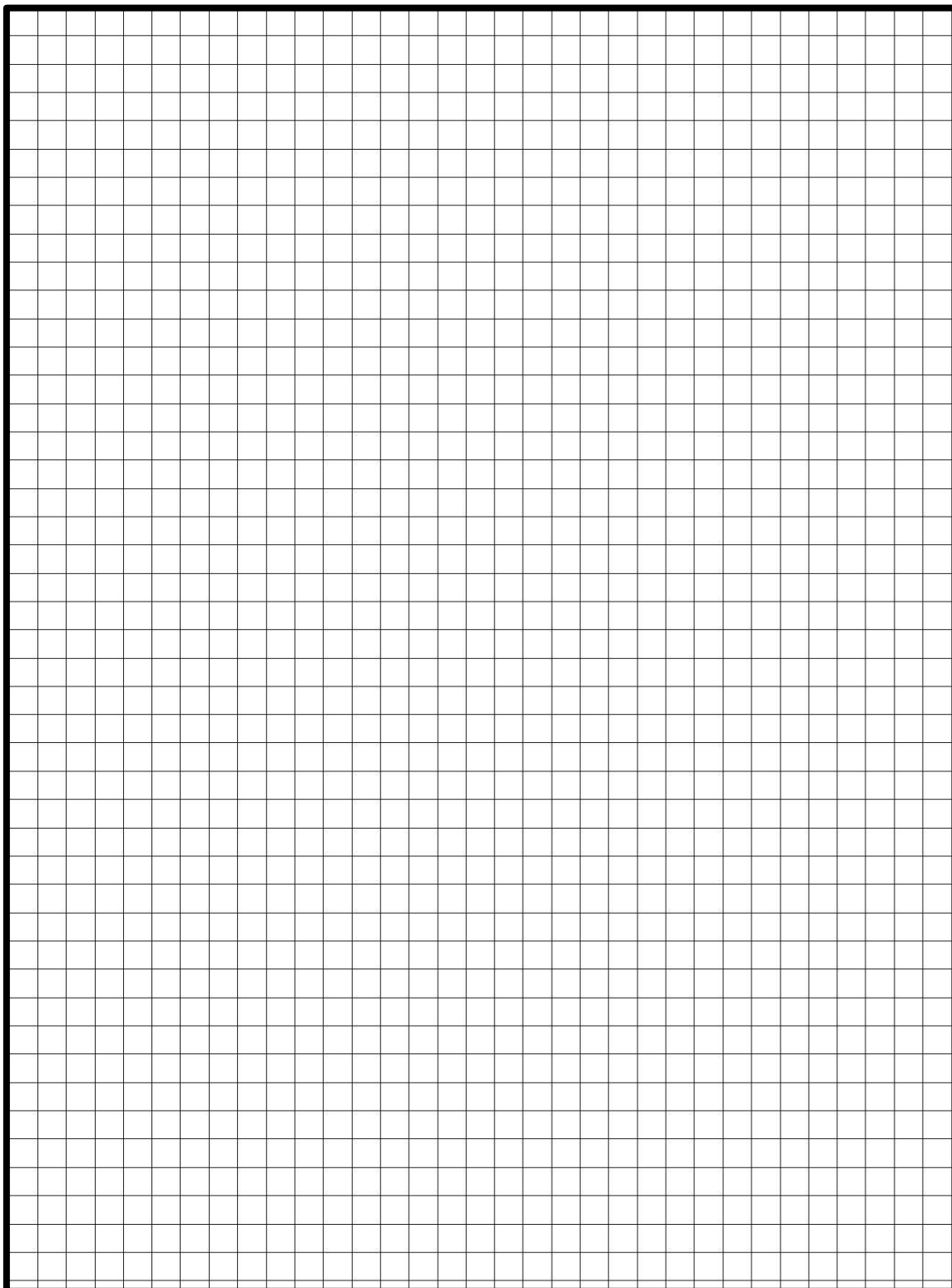
Torus

$$V = 2 \cdot \pi^2 \cdot r^2 \cdot R$$



GEOMETRIE

Raum für eigene Ergänzungen



Bezeichnungen

x_i	einzelnen Messergebnisse einer Stichprobe
n_i	absolute Häufigkeit
h_i	relative Häufigkeit
N_i	absolute Summenhäufigkeit oder absolute kumulierte Häufigkeit
H_i	relative Summenhäufigkeit oder relative kumulierte Häufigkeit
Ω	Menge aller Merkmalsausprägungen
\emptyset	Leere Menge

Relative Häufigkeit

$$h_i = \frac{n_i}{n}$$

n_i : absolute Häufigkeit

n : Anzahl aller Möglichkeiten

STATISTIK

Lagemaße

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

n: Gesamtanzahl der Werte in der Stichprobe

Median

Die Merkmalsausprägung des genau in der Mitte liegenden Einzelwertes. Dabei müssen die Messergebnisse der Größe nach sortiert werden.

n: Anzahl der Messergebnisse

n ist gerade

$$x_{\text{Median}} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right)$$

n ist ungerade

$$x_{\text{Median}} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Modus oder Modalwert

Derjenige Wert der am häufigsten in einer Stichprobe vorkommt.

Schiefe

$$v = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

n: Anzahl der Messergebnisse

s: Standardabweichung

Wölbung

$$w = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4$$

Gewogenes(gewichtetes arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k \bar{x}_i \cdot n_i$$

x_i : unterschiedlichen Mittelwerte der Teilmengen

n_i : absolute Häufigkeit in den einzelnen Teilmengen

Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_{geo} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Harmonisches Mittel

$$\bar{x}_h = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \dots + \frac{a_n}{x_n}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

STATISTIK

Streuemaße

Spannweite

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Quartil

Einteilung in 25%-ige Intervalle (n: Anzahl der Werte der Stichprobe)

Q_0 : Der kleinste Wert

$Q_1 = Q_{unten}$: $x = 0,25 \cdot (n + 1)$

$Q_2 = x_{Med}$: Median

$Q_3 = Q_{oben}$: $x = 0,75 \cdot (n + 1)$

Q_4 : Der größte Wert

Quartilsabstand

$$QA = Q_3 - Q_1$$

Durchschnittliche Abweichung

$$x_D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |(x_i - \bar{x})|$$

Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Standardabweichung

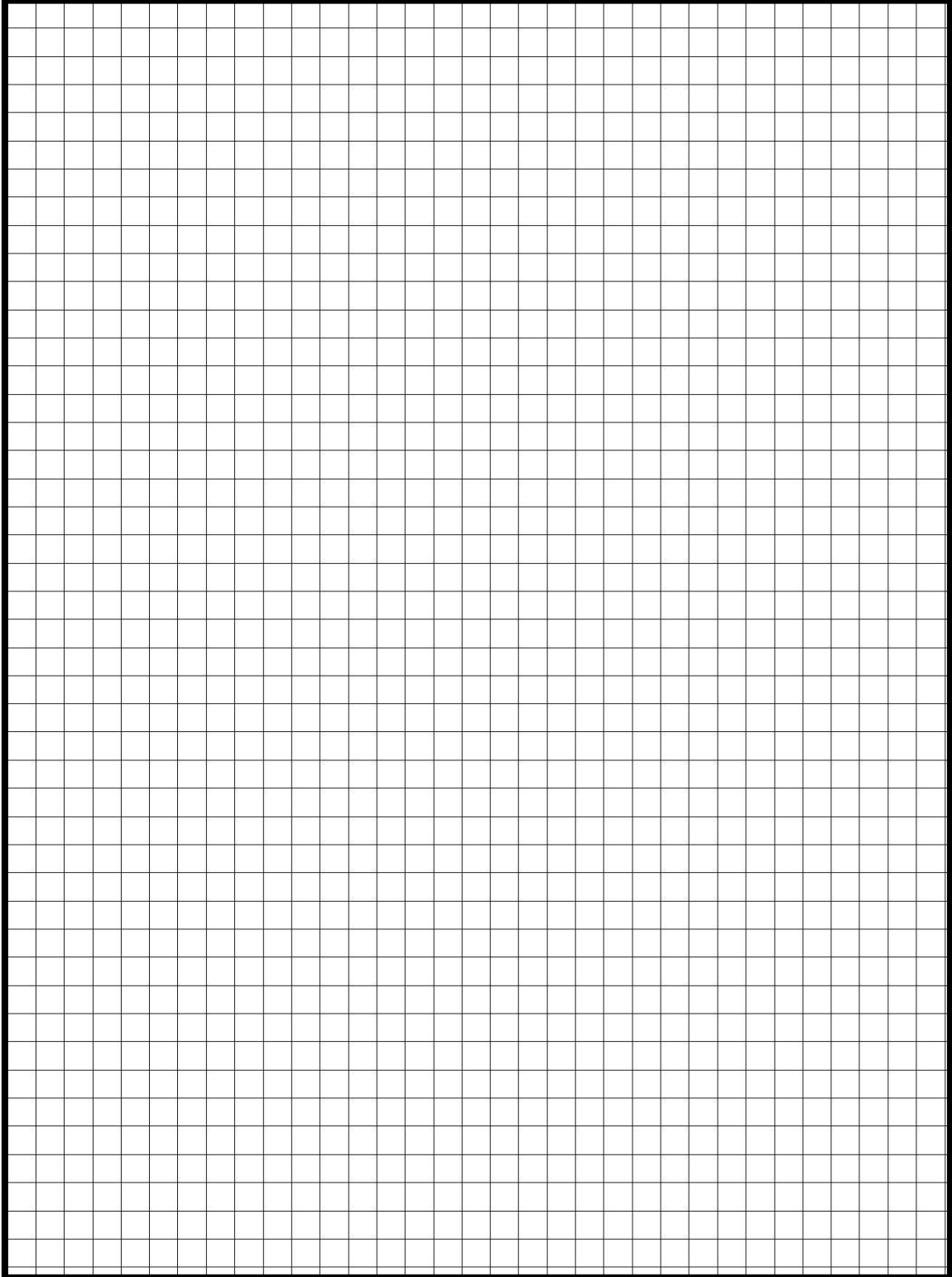
$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Variationskoeffizient

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

GRUNDLAGEN, LAGE- UND STREUMAßE

Raum für eigene Ergänzungen



STATISTIK

Kombinatorik

Kombinatorik-Modelle

Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente anzuordnen

$$n!$$

Geordnete Stichprobe mit zurücklegen

$$n^k$$

n : Anzahl der zur Verfügung stehenden Elemente

k : Anzahl der Ziehvorgänge

Geordnete Stichprobe mit zurücklegen

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Taschenrechner: \boxed{nPr}

n : Anzahl der zur Verfügung stehenden Elemente

k : Anzahl der Ziehvorgänge

Ungeordnete Stichprobe ohne zurücklegen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Taschenrechner: \boxed{nCr}

n : Anzahl der zur Verfügung stehenden Elemente

k : Anzahl der Ziehvorgänge

Ungeordnete Stichprobe mit zurücklegen

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Taschenrechner: \boxed{nCr}

n : Anzahl der zur Verfügung stehenden Elemente

k : Anzahl der Ziehvorgänge

Anzahl der Kombinationen n-ter Ordnung aus N Elementen:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

STATISTIK

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Berechnung der Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{n_i}{n}$$

n_i : Anzahl der günstigen Möglichkeiten

n : Anzahl aller Möglichkeiten

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Sicheres Ereignis

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$P(\Omega) = 1$$

Unmögliches Ereignis

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Unvereinbarkeit

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow \text{unvereinbarkeit}$$

Negierte Wahrscheinlichkeit

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

Pfadregel

Produktregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades in einem Baumdiagramm ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades im Baumdiagramm.

Summenregel

Gibt es mehrere Pfade als mögliche Lösungen, so werden die Wahrscheinlichkeiten dieser einzelnen Pfade addiert.

Additionsgesetz

Additionsgesetz für unvereinbare Ereignisse (ODER-Verknüpfung)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Additionsgesetz für vereinbare Ereignisse (ODER-Verknüpfung)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Multiplikationsgesetz

Multiplikationsgesetz für unvereinbare Ereignisse (UND-Verknüpfung)

$$P(A \cap B) = 0$$

Multiplikationsgesetz für vereinbare Ereignisse (UND-Verknüpfung)

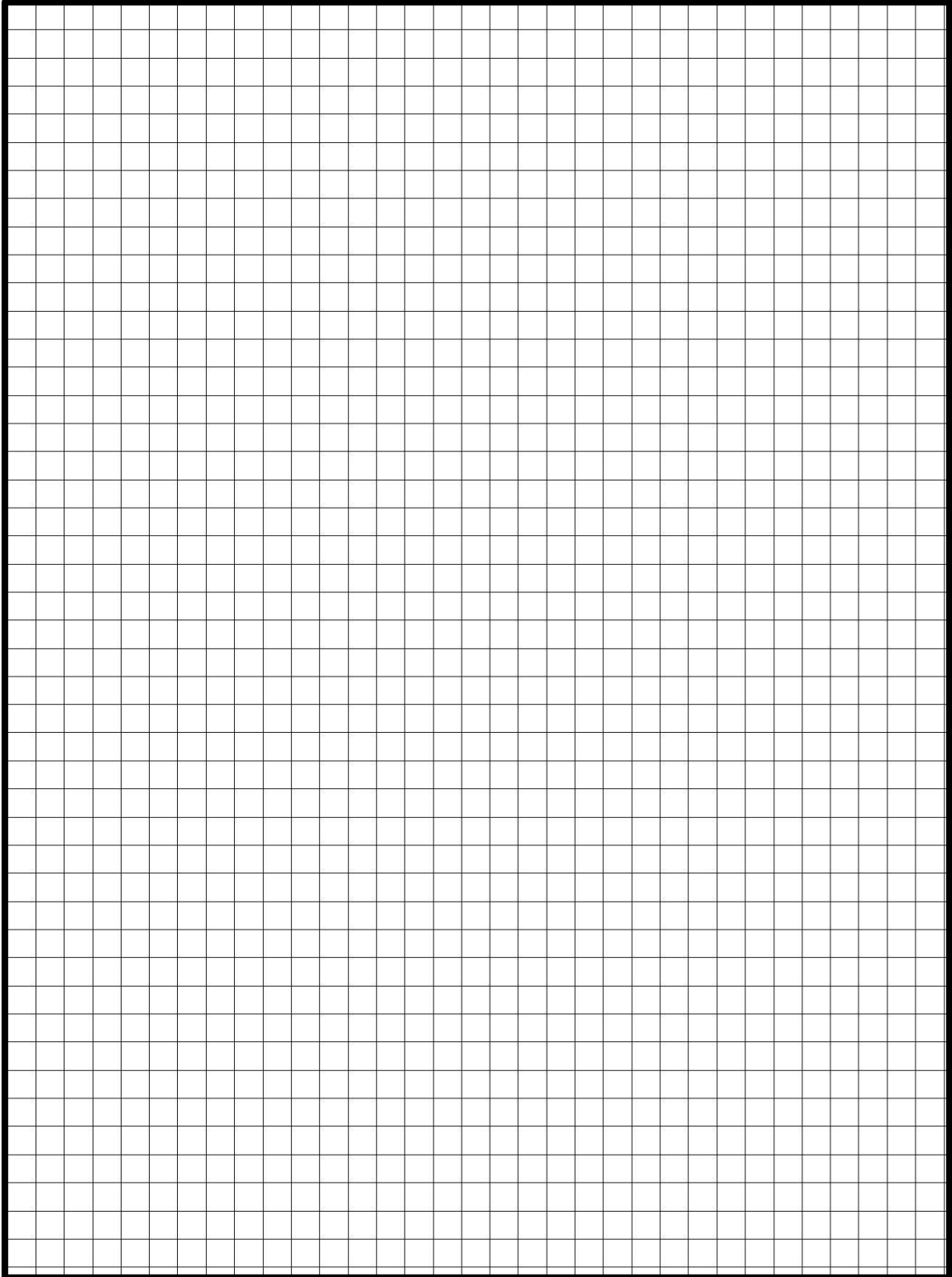
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

KOMBINATORIK UND WAHRSCHEINLICHKEITEN

Raum für eigene Ergänzungen



Formel der Binomialverteilung

$$b(n; k; p) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

n : Anzahl der Ziehversuche

k : Anzahl der "Treffer" die erzielt werden sollen

p : Wahrscheinlichkeit für einen "Treffer"

q : Wahrscheinlichkeit für eine "Niete" oder keinen "Treffer"

Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable

$$E(x) = n \cdot p$$

Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariable

$$V(x) = n \cdot p \cdot q$$

Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable

$$S(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

STATISTIK

Tabellen zur Binomialverteilung

		Tabelle Binomialverteilung										
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000	1
1	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000	0
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500	2
2	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000	1
2	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500	0
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250	3
3	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750	2
3	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750	1
3	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250	0
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625	4
4	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500	3
4	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750	2
4	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500	1
4	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625	0
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313	5
5	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563	4
5	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125	3
5	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125	2
5	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563	1
5	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313	0
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156	6
6	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938	5
6	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344	4
6	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125	3
6	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344	2
6	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938	1
6	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156	0
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078	7
7	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547	6
7	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641	5
7	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734	4
7	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734	3
7	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641	2
7	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547	1
7	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078	0
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039	8
8	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313	7
8	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094	6
8	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188	5
8	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734	4
8	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188	3
8	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094	2
8	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313	1
8	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039	0
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020	9
9	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176	8
9	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703	7
9	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641	6
9	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461	5
9	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461	4
9	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641	3
9	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703	2
9	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176	1
9	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020	0

Tabelle Binomialverteilung

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010	10
10	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098	9
10	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439	8
10	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172	7
10	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051	6
10	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461	5
10	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051	4
10	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172	3
10	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439	2
10	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098	1
10	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005	11
11	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054	10
11	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269	9
11	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806	8
11	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611	7
11	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256	6
11	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256	5
11	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611	4
11	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806	3
11	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269	2
11	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054	1
11	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005	0
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002	12
12	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029	11
12	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161	10
12	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537	9
12	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208	8
12	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934	7
12	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256	6
12	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934	5
12	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208	4
12	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537	3
12	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161	2
12	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029	1
12	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001	13
13	1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016	12
13	2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095	11
13	3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349	10
13	4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873	9
13	5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571	8
13	6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095	7
13	7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095	6
13	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571	5
13	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873	4
13	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349	3
13	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095	2
13	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	1
13	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001	14
14	1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0832	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009	13
14	2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056	12
14	3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222	11

Tabelle Binomialverteilung

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
14	4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611	10
14	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222	9
14	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833	8
14	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095	7
14	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833	6
14	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222	5
14	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611	4
14	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222	3
14	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056	2
14	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009	1
14	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	15
15	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005	14
15	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032	13
15	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,2252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139	12
15	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417	11
15	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916	10
15	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527	9
15	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964	8
15	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964	7
15	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527	6
15	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916	5
15	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417	4
15	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139	3
15	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032	2
15	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	1
15	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	16
16	1	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0535	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002	15
16	2	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018	14
16	3	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1465	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085	13
16	4	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278	12
16	5	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667	11
16	6	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222	10
16	7	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746	9
16	8	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964	8
16	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746	7
16	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222	6
16	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667	5
16	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278	4
16	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085	3
16	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	2
16	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	1
16	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	17
17	1	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001	16
17	2	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010	15
17	3	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052	14
17	4	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182	13
17	5	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472	12
17	6	0,0001	0,0039	0,0236	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944	11
17	7	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484	10
17	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855	9
17	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855	8

Tabelle Binomialverteilung

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
17	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484	7
17	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944	6
17	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472	5
17	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182	4
17	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	3
17	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	2
17	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	1
17	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	18
18	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001	17
18	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,1723	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006	16
18	3	0,0473	0,1680	0,2406	0,2297	0,1704	0,1046	0,0547	0,0246	0,0095	0,0031	15
18	4	0,0093	0,0700	0,1592	0,2153	0,2130	0,1681	0,1104	0,0614	0,0291	0,0117	14
18	5	0,0014	0,0218	0,0787	0,1507	0,1988	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,0327	13
18	6	0,0002	0,0052	0,0301	0,0816	0,1436	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,0708	12
18	7	0,0000	0,0010	0,0091	0,0350	0,0820	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,1214	11
18	8	0,0000	0,0002	0,0022	0,0120	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,1669	10
18	9	0,0000	0,0000	0,0004	0,0033	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,1855	9
18	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,1669	8
18	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0742	0,1214	7
18	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,0708	6
18	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,0327	5
18	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0117	4
18	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0031	3
18	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	2
18	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	1
18	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	19
19	1	0,3774	0,2852	0,1529	0,0685	0,0268	0,0093	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000	18
19	2	0,1787	0,2852	0,2428	0,1540	0,0803	0,0358	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003	17
19	3	0,0533	0,1796	0,2428	0,2182	0,1517	0,0869	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018	16
19	4	0,0112	0,0798	0,1714	0,2182	0,2023	0,1491	0,0909	0,0467	0,0203	0,0074	15
19	5	0,0018	0,0266	0,0907	0,1636	0,2023	0,1916	0,1468	0,0933	0,0497	0,0222	14
19	6	0,0002	0,0069	0,0374	0,0955	0,1574	0,1916	0,1844	0,1451	0,0949	0,0518	13
19	7	0,0000	0,0014	0,0122	0,0443	0,0974	0,1525	0,1844	0,1797	0,1443	0,0961	12
19	8	0,0000	0,0002	0,0032	0,0166	0,0487	0,0981	0,1489	0,1797	0,1771	0,1442	11
19	9	0,0000	0,0000	0,0007	0,0051	0,0198	0,0514	0,0980	0,1464	0,1771	0,1762	10
19	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0066	0,0220	0,0528	0,0976	0,1449	0,1762	9
19	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0077	0,0233	0,0532	0,0970	0,1442	8
19	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0237	0,0529	0,0961	7
19	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0085	0,0233	0,0518	6
19	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0082	0,0222	5
19	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0074	4
19	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	3
19	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	2
19	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
19	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	20
20	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000	19
20	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002	18
20	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011	17
20	4	0,0133	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046	16
20	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148	15
20	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370	14

Tabelle Binomialverteilung

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
20	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739	13
20	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201	12
20	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602	11
20	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762	10
20	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602	9
20	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201	8
20	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739	7
20	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370	6
20	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148	5
20	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046	4
20	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	3
20	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	2
20	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
20	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
30	0	0,2146	0,0424	0,0076	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	30
30	1	0,3389	0,1413	0,0404	0,0093	0,0018	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	29
30	2	0,2586	0,2277	0,1034	0,0337	0,0086	0,0018	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	28
30	3	0,1270	0,2361	0,1703	0,0785	0,0269	0,0072	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	27
30	4	0,0451	0,1771	0,2028	0,1325	0,0604	0,0208	0,0056	0,0012	0,0002	0,0000	26
30	5	0,0124	0,1023	0,1861	0,1723	0,1047	0,0464	0,0157	0,0041	0,0008	0,0001	25
30	6	0,0027	0,0474	0,1368	0,1795	0,1455	0,0829	0,0353	0,0115	0,0029	0,0006	24
30	7	0,0005	0,0180	0,0828	0,1538	0,1662	0,1219	0,0652	0,0263	0,0081	0,0019	23
30	8	0,0001	0,0058	0,0420	0,1106	0,1593	0,1501	0,1009	0,0505	0,0191	0,0055	22
30	9	0,0000	0,0016	0,0181	0,0676	0,1298	0,1573	0,1328	0,0823	0,0382	0,0133	21
30	10	0,0000	0,0004	0,0067	0,0355	0,0909	0,1416	0,1502	0,1152	0,0656	0,0280	20
30	11	0,0000	0,0001	0,0022	0,0161	0,0551	0,1103	0,1471	0,1396	0,0976	0,0509	19
30	12	0,0000	0,0000	0,0006	0,0064	0,0291	0,0749	0,1254	0,1474	0,1265	0,0806	18
30	13	0,0000	0,0000	0,0001	0,0022	0,0134	0,0444	0,0935	0,1360	0,1433	0,1115	17
30	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0054	0,0231	0,0611	0,1101	0,1424	0,1354	16
30	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0106	0,0351	0,0783	0,1242	0,1445	15
30	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0042	0,0177	0,0489	0,0953	0,1354	14
30	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0015	0,0079	0,0269	0,0642	0,1115	13
30	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0031	0,0129	0,0379	0,0806	12
30	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0054	0,0196	0,0509	11
30	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0088	0,0280	10
30	21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0133	9
30	22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0055	8
30	23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0019	7
30	24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	6
30	25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	5
30	26	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4
30	27	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3
30	28	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2
30	29	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
30	30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
40	0	0,1285	0,0148	0,0015	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	40
40	1	0,2706	0,0657	0,0106	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	39
40	2	0,2777	0,1423	0,0365	0,0065	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	38
40	3	0,1851	0,2003	0,0816	0,0205	0,0037	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	37
40	4	0,0901	0,2059	0,1332	0,0475	0,0113	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	36
40	5	0,0342	0,1647	0,1692	0,0854	0,0272	0,0061	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	35
40	6	0,0105	0,1068	0,1742	0,1246	0,0530	0,0151	0,0031	0,0005	0,0000	0,0000	34
40	7	0,0027	0,0576	0,1493	0,1513	0,0857	0,0315	0,0080	0,0015	0,0002	0,0000	33
40	8	0,0006	0,0264	0,1087	0,1560	0,1179	0,0557	0,0179	0,0040	0,0006	0,0001	32

Tabelle Binomialverteilung

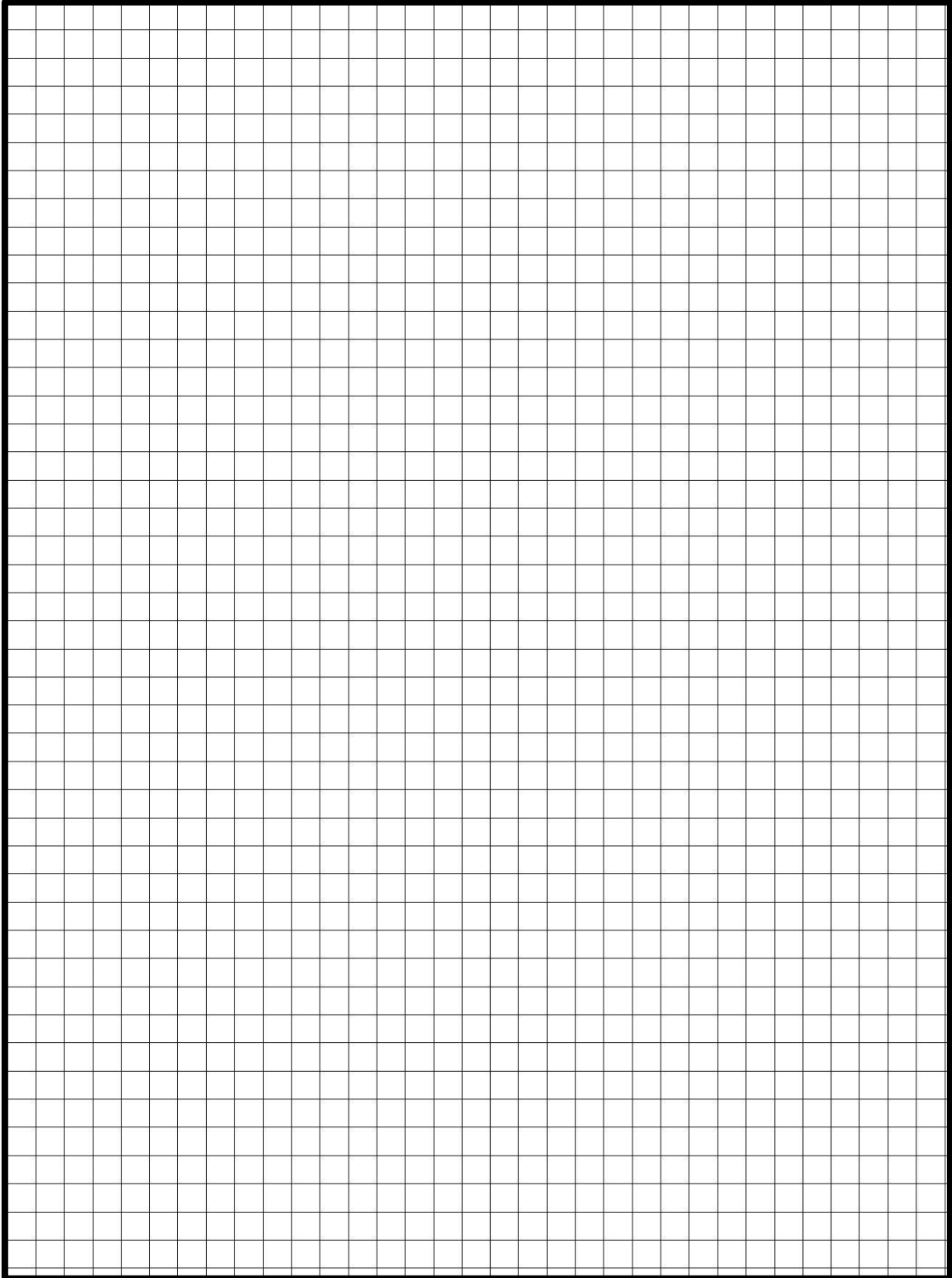
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
40	9	0,0001	0,0104	0,0682	0,1386	0,1397	0,0849	0,0342	0,0095	0,0018	0,0002	31
40	10	0,0000	0,0036	0,0373	0,1075	0,1444	0,1128	0,0571	0,0196	0,0047	0,0008	30
40	11	0,0000	0,0011	0,0180	0,0733	0,1312	0,1319	0,0838	0,0357	0,0105	0,0021	29
40	12	0,0000	0,0003	0,0077	0,0443	0,1057	0,1366	0,1090	0,0576	0,0207	0,0051	28
40	13	0,0000	0,0001	0,0029	0,0238	0,0759	0,1261	0,1265	0,0827	0,0365	0,0109	27
40	14	0,0000	0,0000	0,0010	0,0115	0,0488	0,1042	0,1313	0,1063	0,0575	0,0211	26
40	15	0,0000	0,0000	0,0003	0,0050	0,0282	0,0774	0,1226	0,1228	0,0816	0,0366	25
40	16	0,0000	0,0000	0,0001	0,0019	0,0147	0,0518	0,1031	0,1279	0,1043	0,0572	24
40	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0069	0,0314	0,0784	0,1204	0,1205	0,0807	23
40	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0029	0,0172	0,0539	0,1026	0,1260	0,1031	22
40	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0085	0,0336	0,0792	0,1194	0,1194	21
40	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0038	0,0190	0,0554	0,1025	0,1254	20
40	21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0097	0,0352	0,0799	0,1194	19
40	22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0045	0,0203	0,0565	0,1031	18
40	23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0106	0,0362	0,0807	17
40	24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0050	0,0210	0,0572	16
40	25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0110	0,0366	15
40	26	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0052	0,0211	14
40	27	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0022	0,0109	13
40	28	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0051	12
40	29	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	11
40	30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	10
40	31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	9
40	32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	8
40	33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	7
40	34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6
40	35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	5
40	36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4
40	37	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3
40	38	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2
40	39	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
40	40	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
50	0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	50
50	1	0,2025	0,0286	0,0026	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49
50	2	0,2611	0,0779	0,0113	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48
50	3	0,2199	0,1386	0,0319	0,0044	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	47
50	4	0,1360	0,1809	0,0661	0,0128	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	46
50	5	0,0658	0,1849	0,1072	0,0295	0,0049	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	45
50	6	0,0260	0,1541	0,1419	0,0554	0,0123	0,0018	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	44
50	7	0,0086	0,1076	0,1575	0,0870	0,0259	0,0048	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	43
50	8	0,0024	0,0643	0,1493	0,1169	0,0463	0,0110	0,0017	0,0002	0,0000	0,0000	42
50	9	0,0006	0,0333	0,1230	0,1364	0,0721	0,0220	0,0042	0,0005	0,0000	0,0000	41
50	10	0,0001	0,0152	0,0890	0,1398	0,0985	0,0386	0,0093	0,0014	0,0001	0,0000	40
50	11	0,0000	0,0061	0,0571	0,1271	0,1194	0,0602	0,0182	0,0035	0,0004	0,0000	39
50	12	0,0000	0,0022	0,0328	0,1033	0,1294	0,0838	0,0319	0,0076	0,0011	0,0001	38
50	13	0,0000	0,0007	0,0169	0,0755	0,1261	0,1050	0,0502	0,0147	0,0027	0,0003	37
50	14	0,0000	0,0002	0,0079	0,0499	0,1110	0,1189	0,0714	0,0260	0,0059	0,0008	36
50	15	0,0000	0,0001	0,0033	0,0299	0,0888	0,1223	0,0923	0,0415	0,0116	0,0020	35
50	16	0,0000	0,0000	0,0013	0,0164	0,0648	0,1147	0,1088	0,0606	0,0207	0,0044	34
50	17	0,0000	0,0000	0,0005	0,0082	0,0432	0,0983	0,1171	0,0808	0,0339	0,0087	33
50	18	0,0000	0,0000	0,0001	0,0037	0,0264	0,0772	0,1156	0,0987	0,0508	0,0160	32
50	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0016	0,0148	0,0558	0,1048	0,1109	0,0700	0,0270	31
50	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0077	0,0370	0,0875	0,1146	0,0888	0,0419	30
50	21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0036	0,0227	0,0673	0,1091	0,1038	0,0598	29

Tabelle Binomialverteilung

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
50	22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0128	0,0478	0,0959	0,1119	0,0788	28
50	23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0067	0,0313	0,0778	0,1115	0,0960	27
50	24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0032	0,0190	0,0584	0,1026	0,1080	26
50	25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0014	0,0106	0,0405	0,0873	0,1123	25
50	26	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0055	0,0259	0,0687	0,1080	24
50	27	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0026	0,0154	0,0500	0,0960	23
50	28	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0084	0,0336	0,0788	22
50	29	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0043	0,0208	0,0598	21
50	30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0119	0,0419	20
50	31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0063	0,0270	19
50	32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0031	0,0160	18
50	33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0014	0,0087	17
50	34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0044	16
50	35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	15
50	36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	14
50	37	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	13
50	38	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	12
50	39	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	11
50	40	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	10
50	41	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	9
50	42	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	8
50	43	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	7
50	44	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6
50	45	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	5
50	46	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4
50	47	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3
50	48	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2
50	49	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
50	50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
n	k	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	k

BINOMIALVERTEILUNG

Raum für eigene Ergänzungen



STATISTIK

Normal-/Standardnormalverteilung

Dichtefunktion der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2\right)}$$

s: Standardabweichung

\bar{x} : arithmetische Mittel

Verteilungsfunktion der Normalverteilung

$$f(x; \bar{x}; s) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2\right)} dx$$

z-Transformation zur Bildung einer Standardnormalverteilung

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable

$$E(x) = \bar{x}$$

Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariable

$$V(x) = s^2$$

Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable

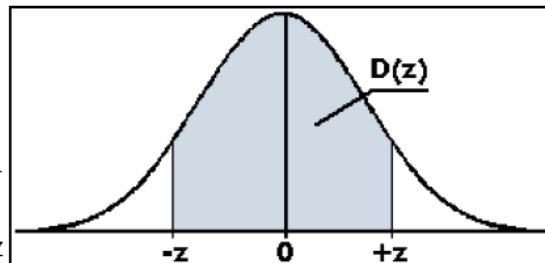
$$S(x) = \sqrt{s^2}$$

Tabellen zur Standardnormalverteilung

Werte für die zentrale Fläche $D(z)$

$$D(z) = \Phi(+z) - \Phi(-z) = p(-z < Z \leq +z)$$

Die Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass Z einen Wert zwischen $-z$ und $+z$ annimmt

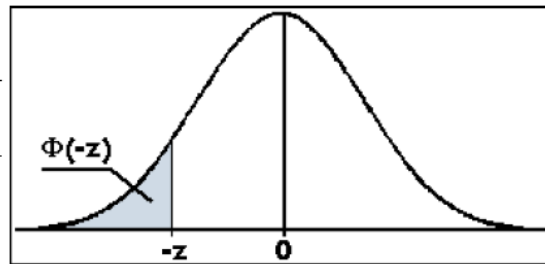


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	0000	0080	0160	0239	0319	0399	0478	0558	0638	0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2961	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1,0	6827	6875	6923	6970	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7995	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534
2,0	9545	9556	9566	9576	9586	9596	9606	9615	9625	9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9929
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	9973	9974	9975	9976	9976	9977	9978	9979	9979	9980
3,1	9980	9982	9982	9982	9984	9984	9984	9984	9986	9986
3,2	9986	9986	9988	9988	9988	9988	9988	9990	9990	9990

Werte der Verteilungsfunktion $F(-z)$

$$\Phi(-z) = p(Z \leq -z)$$

Die Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass Z einen Wert kleiner $-z$ annimmt

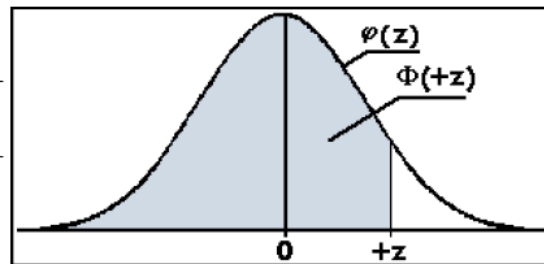


$-z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0,1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0,2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0,3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0,4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0,5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0,6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0,7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0,8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0,9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1,0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1,1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1,2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1,3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1,4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1,5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1,6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1,7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1,8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1,9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2,0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2,1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2,2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2,3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2,4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2,5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2,6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2,7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2,8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2,9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3,0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3,1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3,2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005

Werte der Verteilungsfunktion $F(+z)$

$\Phi(+z) = P(Z \leq +z)$

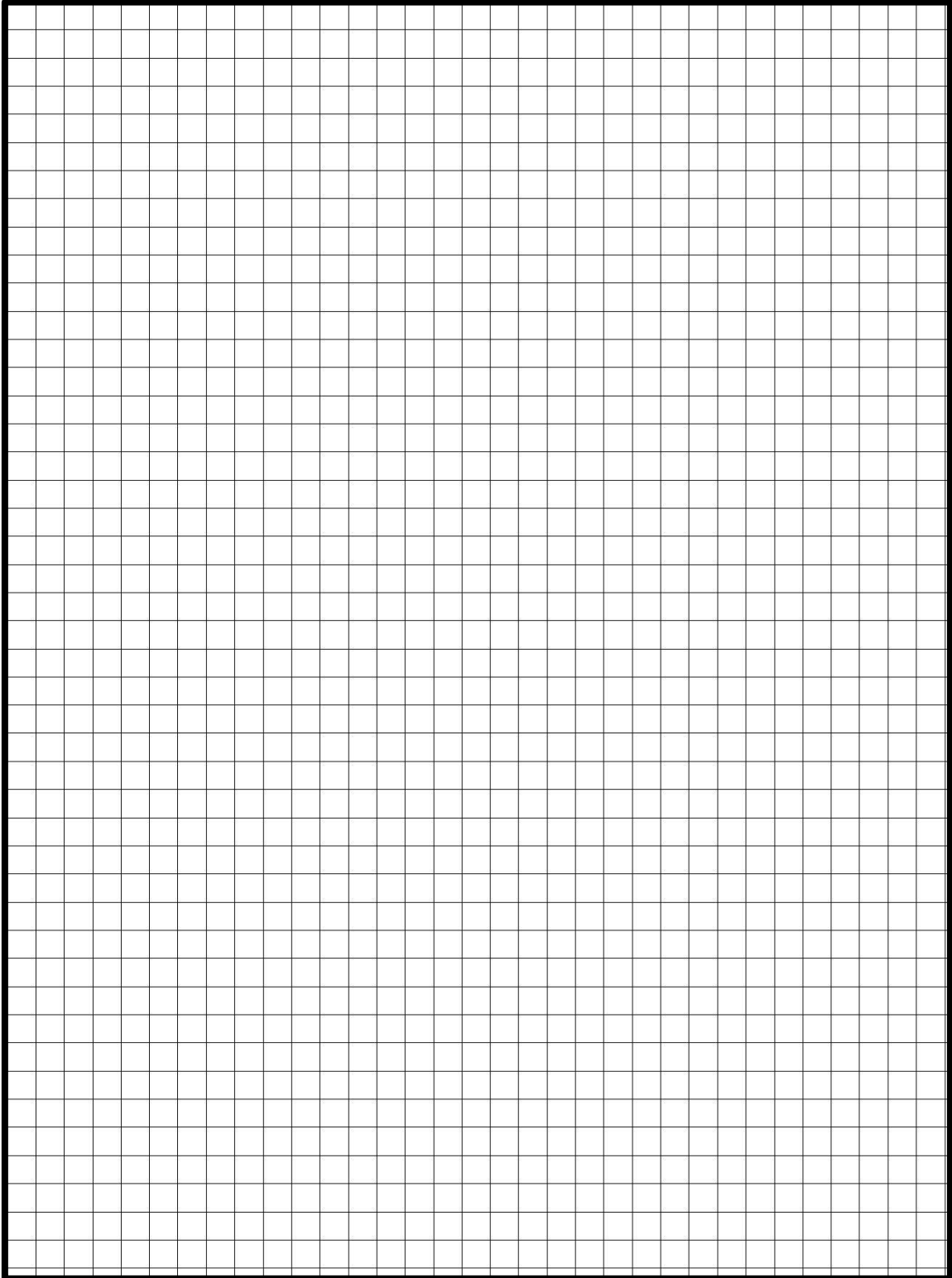
Die Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass Z einen Wert kleiner $+z$ annimmt



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995

NORMAL-/STANDARDNORMALVERTEILUNG

Raum für eigene Ergänzungen



Preisindex nach Laspeyres

$$P_{0,t}^L = \frac{\sum_{i=1}^n p_t^i \cdot m_0^i}{\sum_{i=1}^n p_0^i \cdot m_0^i}$$

m_0^i : Menge das Basisjahres

p_0^i : Preis das Basisjahres

p_t^i : Preis das Berichtsjahres

Preisindex nach Paasche

$$M_{0,t}^L = \frac{\sum_{i=1}^n p_0^i \cdot m_t^i}{\sum_{i=1}^n p_0^i \cdot m_0^i}$$

m_t^i : Menge das Berichtsjahres

p_0^i : Preis das Basisjahres

p_t^i : Preis das Berichtsjahres

Mengenindex nach Laspeyres

$$M_{0,t}^L = \frac{\sum_{i=1}^n p_0^i \cdot m_t^i}{\sum_{i=1}^n p_0^i \cdot m_0^i}$$

m_0^i : Menge das Basisjahres

m_t^i : Menge das Berichtsjahres

p_0^i : Preis das Basisjahres

Mengenindex nach Paasche

$$M_{0,t}^P = \frac{\sum_{i=1}^n p_t^i \cdot m_t^i}{\sum_{i=1}^n p_t^i \cdot m_0^i}$$

p_t^i : Preis das Berichtsjahres

m_0^i : Menge das Basisjahres

m_t^i : Menge das Berichtsjahres

Umsatzindex

$$U_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^n p_t^i \cdot m_t^i}{\sum_{i=1}^n p_0^i \cdot m_0^i}$$

p_0^i : Preis das Basisjahres

p_t^i : Preis das Berichtsjahres

m_0^i : Menge das Basisjahres

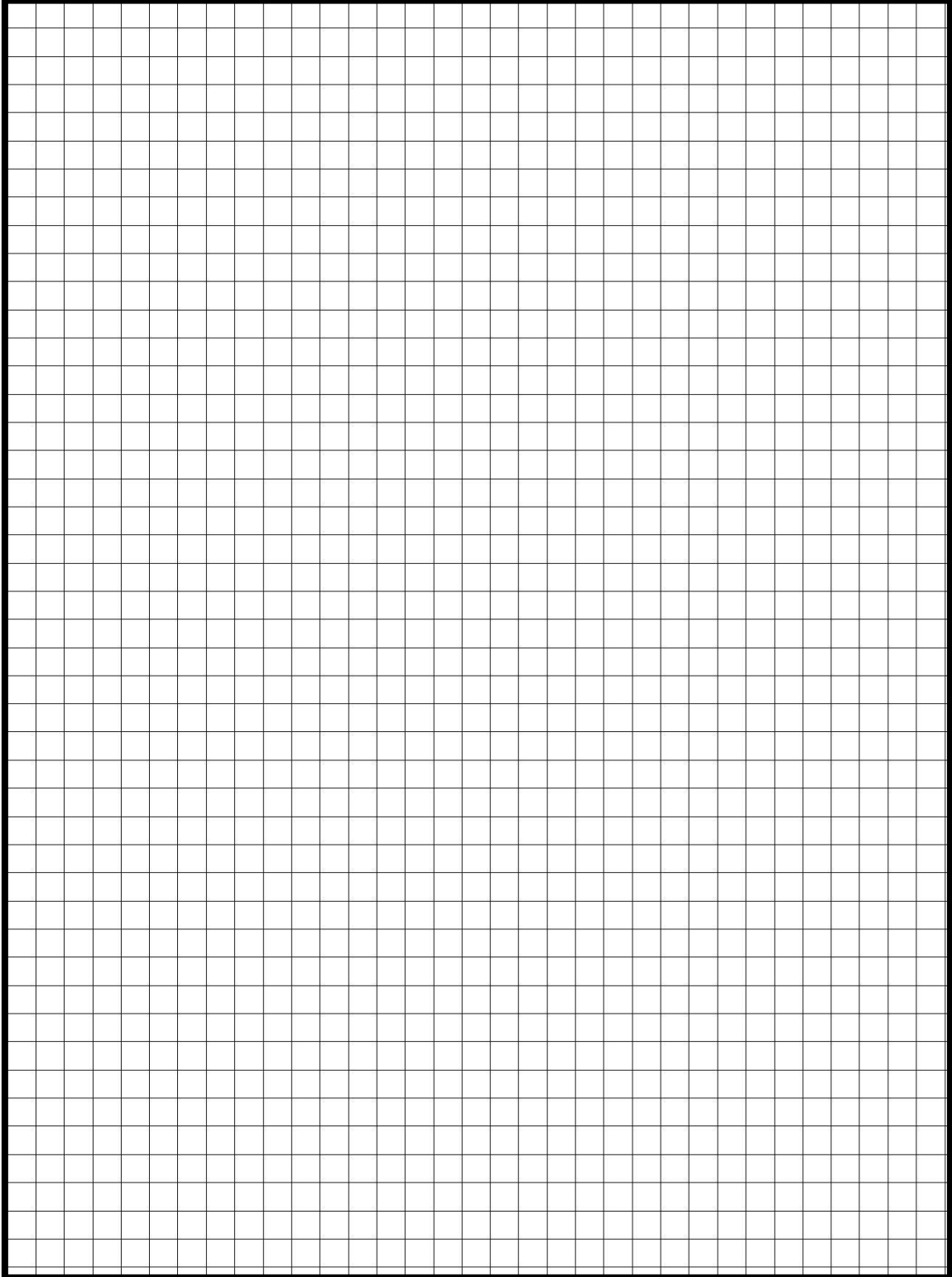
m_t^i : Menge das Berichtsjahres

Fisher-Preisindex

$$P^F(t) = \sqrt{P^L(t) \cdot P^P(t)}$$

INDEXBERECHNUNG

Raum für eigene Ergänzungen



STATISTIK

Regressions- und Korrelationsrechnung

Regressionsgleichung

$$\hat{y}_i = a_i + bx_i$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

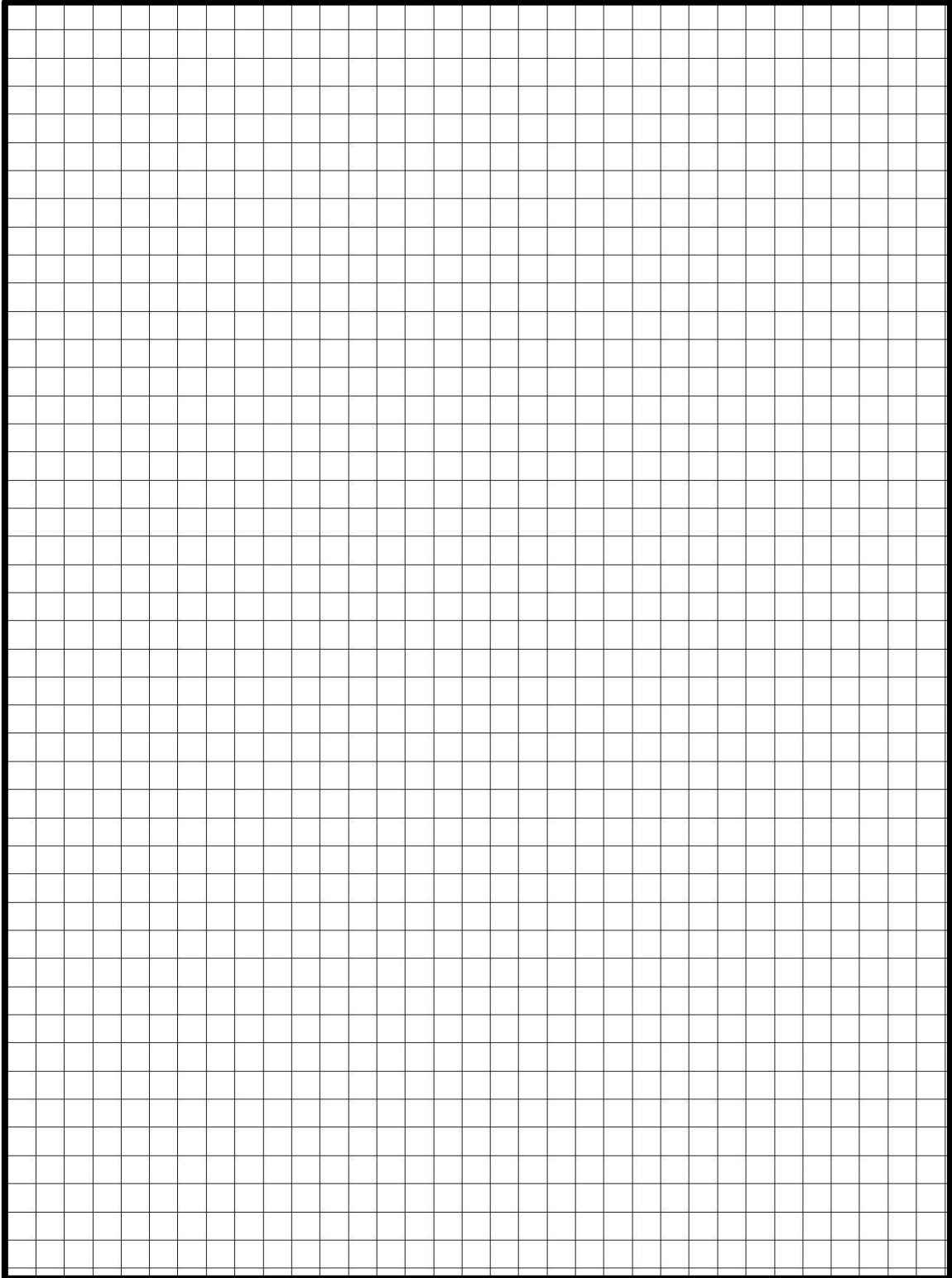
$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad -1 \leq r \leq 1$$

REGRESSIONS-/KORRELATIONSRECHNUNG

Raum für eigene Ergänzungen



IMPRESSUM

Herausgeber

Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart Campus Horb
Florianstraße 15
72160 Horb a. N.

Konzeption

Andrea Rohrer, MBA
Dipl. Mathematiker (FH) Roland Geiger

Inhalt

Dipl. Mathematiker (FH) Roland Geiger

Copyright ©DHBW Stuttgart Campus Horb September 2011

Die Realisierung dieses Lernkonzeptes wurde durch Studiengebühren mitfinanziert