Aufgabensammlung

Mathematik II

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart

Campus Horb

Dozent

Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Regeln

Keine Handys, Smartphones, Tablets, Notebooks, MP3-Player, und sonstige elektronischen Geräte.

(Sollten auch nicht auf dem Tisch liegen)

Sollten Sie unbedingt kommunizieren müssen, so gehen Sie freiwillig aus dem Raum oder Sie bekommen von mir eine Pause zugeteilt, in der Sie in Ruhe Ihre Kommunikation durchführen können.

Lösungen zu den Aufgaben

Internet

http://www.cs-geiger.de/wiw.htm

Computerseminare, Mathematik und Statistik

Mathematik 1 + 2 Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart Campus Horb

Skripte	Lösungen
Mathematik 1	
Manuskript	
Aufgabensammlung 1	
Aufgaben	Lösung
Mathematik 2	
Manuskript	
Aufgabensammlung 2	
Aufgaben	Lösung
Formelsammlung	
Formelsammlung	

Klausuren

Alte Klausuren finden Sie in den jeweiligen Wiederholungsaufgaben am Ende des Kapitels in de Aufgabensammlung.

Lösung Stützkurs 1. Semester

1. Stützkurs	Lösung
2. Stützkurs	Lösung
3. Stützkurs	Lösung
4. Stützkurs	Lösung
5. Stützkurs	Lösung

Lösung Stützkurs 2. Semester

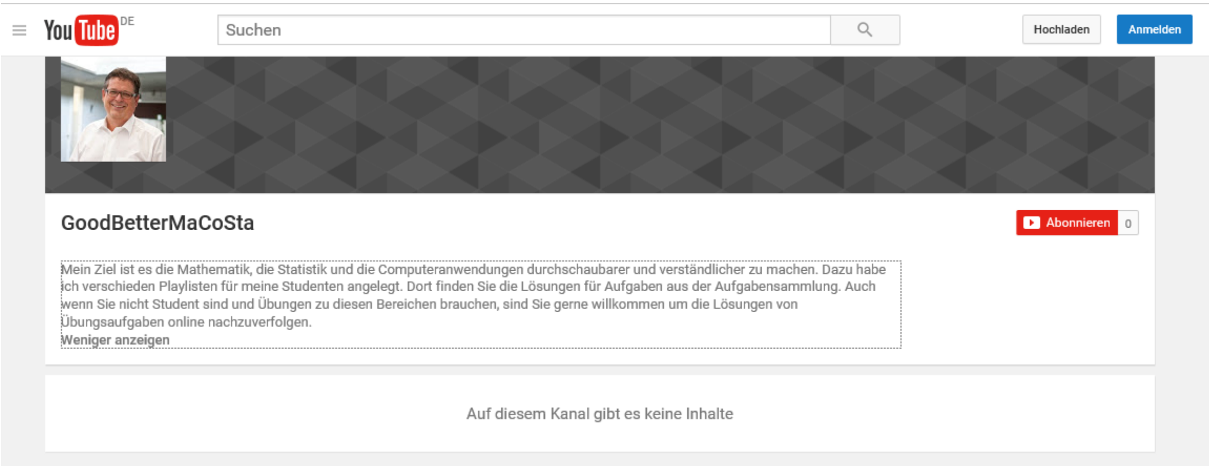
1. Stützkurs	Lösung
2. Stützkurs	Lösung
3. Stützkurs	Lösung
4. Stützkurs	Lösung
5. Stützkurs	Lösung

Roland Geiger - Rosenstr.23 - 72631 Aichtal
Fon 07127-960750 - Fax 07127-960751 - cs.geiger@t-online.de

QR-Code Internet

YouTube

http://www.youtube.com/channel/UCro4ldWf20euH8u1SXU3l-g

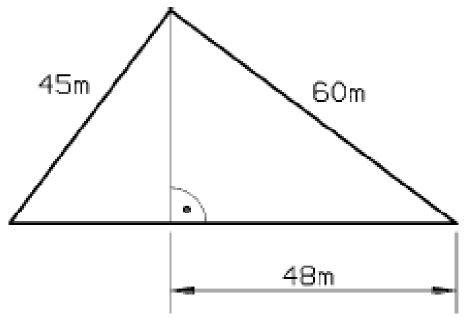


QR-Code YouTube

Trigonometrische Zusammenhänge

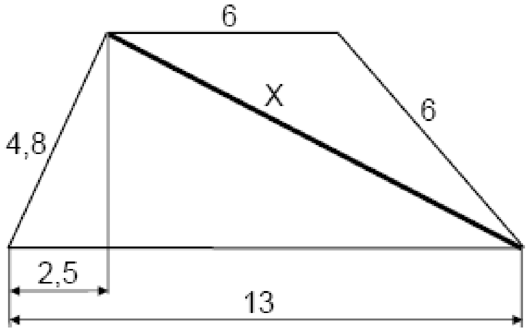
Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des unten aufgeführten Dreiecks. $(A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h)$



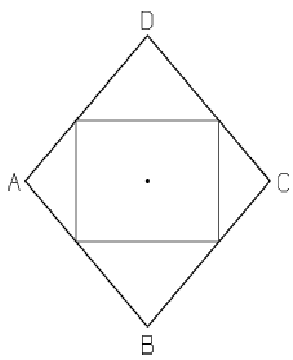
Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Länge der Strecke x.



Aufgabe 3:

Einem Quadrat ABCD ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 10cm und 4cm einbeschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrates.



Aufgabe 4:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit p=4cm und q=3cm. Bestimmen Sie die Höhe h.

Aufgabe 5:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit p=2cm und c= 5cm. Bestimmen Sie die Strecken a und b.

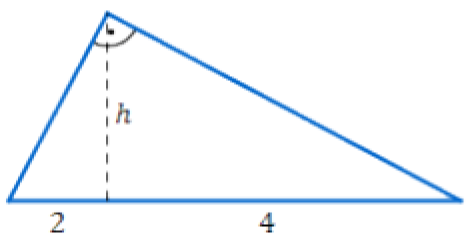
Aufgabe 6:

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist bekannt, dass die Höhe 5cm lang ist und der Hypothenusenabschnitt p=6,1cm lang ist und p um 2cm länger ist als der Hypothenusenabschnitt q. Berechnen Sie alle fehlenden Seitenlängen des Dreiecks ABC und berechnen außerdem den Flächeninhalt des Dreiecks.

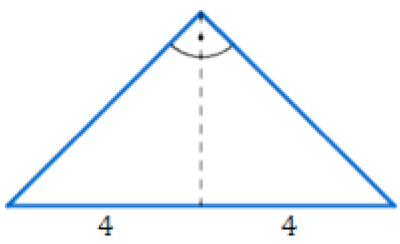
Aufgabe 7:

Welches der folgenden Dreiecke von A bis D hat eine Höhe von $\sqrt{8}$?

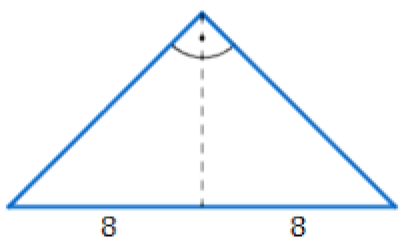
A:



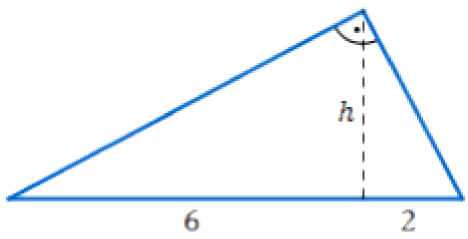
C:



B:



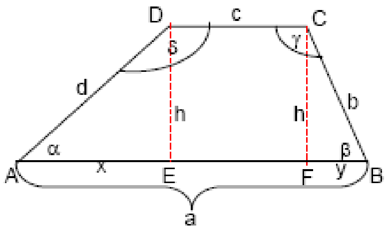
D:



Aufgabe 8:

Gegeben ist ein Trapez durch a=9cm, c=3cm, h=5cm und $\alpha = 42°$

Berechnen Sie alle Strecken und Winkel im Trapez (siehe Zeichnung).



Aufgabe 9:

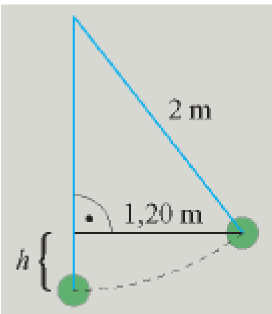
Gegeben sind in einem beliebigen Dreieck die Seite c=18cm und die Winkel $\gamma = 118°$ und $\beta = 35°$. Berechnen Sie die Seiten a und b sowie den Winkel α.

Aufgabe 10:

Gegeben sind die Größen a=7,5cm, c=8,2cm und $\beta = 85°$ in einem beliebigen Dreieck. Berechnen Sie die Seite b und die Winkel α und γ.

Aufgabe 11:

Auf dem Bild sieht man ein Pendel, das 1,20m zur Seite ausgelenkt wurde. Wie viel Zentimeter hat das Pendel an Höhe h gewonnen?



Aufgabe 12:

Für den Bau einer pyramidenförmigen Lautsprecherbox sind vier gleichschenklige Dreiecksflächen aus Spanplatten gesägt worden. Die Höhe der Dreiecke beträgt $h_a = 90\text{cm}$. Welche Höhe hat die fertige Box bei einer quadratischen Grundfläche der Länge a=45cm?

Aufgabe 13:

Ein 90m hoher Funkmast wird bei $\frac{4}{5}$ seiner Höhe durch 4 Spannseile befestigt. Die Befestigungspunkte der Spannseile am Boden sind jeweils 5m vom Fuß des Mastes entfernt und bilden ein Quadrat.

a) Wie lang sind die 4 Seile zusammen?

b) Wenn man sie Fläche um die Befestigungspunkte herum einzäunen würde, wie Lang wäre der Zaun?

Aufgabe 14:

Von einem Turmfenster in 12m Höhe sieht man die Spitze eines Schornsteins unter dem Höhenwinkel (Erhebungswinkel) $\alpha = 42°$ und den Fußpunkt unter dem Tiefenwinkel (Senkungswinkel) $\beta = 32°$

Wie weit ist der Schornstein vom Turm entfernt und wie hoch ist er?

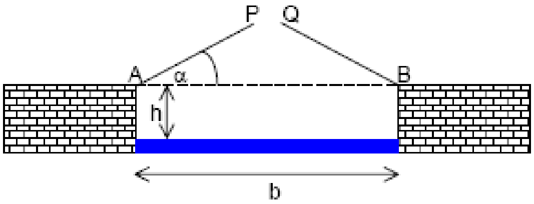
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 15:

Über einen Fluss mit der Breit b=13m führt eine Zugbrücke. Das Gelenk A der Brücke liegt h=3,7m über dem Wasserspiegel. Die Brücke lässt sich höchstens so weit öffnen, dass die beiden Brückenhälften unter dem Winkel $\alpha = 31°$ gegen die horizontale geneigt sind.

a) Wie hoch liegen die Punkte P und Q über dem Wasserspiegel, wenn die Brücke so weit wie möglich geöffnet ist? Wie weit sind sie auseinander?

b) Das Deck eines Schiffes ist 6m breit und ragt 4,5m aus dem Wasser. Das Schiff fährt genau in der Mitte des Flusses. Entscheiden Sie per Rechnung, ob das Schiff durchfahren kann, wenn die Zugbrücke soweit wie möglich geöffnet ist.



Aufgabe 16:

Auf einer horizontalen Ebene stehen zwei senkrechte Sendemasten AB und CD, die 180m voneinander entfernt sind. Auf der Verbindungsstrecke ihrer Fußpunkte A und C befindet sich eine Verankerung F, von der aus Halteseile zu den Mastspitzen führen. Von F aus erscheint der 48m hohe Mast AB unter dem Winkel $\alpha = 36{,}5°$, der Sendemast CD unter $\beta = 29°$.

a) Wie weit ist die Verankerung F von den Fußpunkten A und C der beiden Sendemasten entfernt.

b) Wie hoch ist der Sendemast CD?

c) Zwischen den beiden Mastspitzen ist ein Antennendraht gezogen. Wie lang ist dieser Draht, wenn er wegen seines Durchhangs um 15% länger ist als der Abstand der Mastspitzen?

Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 17:

Rechnen Sie den Winkel 20° in Bogenmaß um.

Aufgabe 18:

Rechnen Sie das Bogenmaß $\frac{13}{8}\pi$ in ein Gradmaß um.

Aufgabe 19:

Zeichen Sie die Funktion $\mathrm{f(x)} = -1{,}5 \cdot \sin(\mathrm{x})$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Aufgabe 20:

Zeichen Sie die Funktion $\mathrm{f(x)} = \sin(\mathrm{x} + \frac{\pi}{2})$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Aufgabe 21:

Zeichen Sie die Funktion $\mathrm{f(x)} = \sin(0{,}5\mathrm{x})$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Aufgabe 22:

Zeichen Sie die Funktion $\mathrm{f(x)} = 1{,}5 \cdot \cos(\mathrm{x})$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Aufgabe 23:

Zeichen Sie die Funktion $\mathrm{f(x)} = 0{,}5 \cdot \sin(\mathrm{x})$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Aufgabe 24:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Aufgabe 25:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \sin(-2x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Aufgabe 26:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Aufgabe 27:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Aufgabe 28:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \tan(\frac{3}{2}x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Aufgabe 29:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \tan(x + \pi)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Aufgabe 30:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 31:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \tan(-\frac{1}{2}x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Aufgabe 32:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \tan(x - \frac{3}{2}\pi)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Trigonometrische Gleichungen

Aufgabe 33:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Aufgabe 34:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq 2\pi$.

Aufgabe 35:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}3$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Aufgabe 36:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -0{,}5$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 37:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Aufgabe 38:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 39:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}8$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 40:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 41:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan(x) = -\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 42:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Aufgabe 43:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +4\pi$.

Aufgabe 44:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(3x) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 46:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +3\pi$.

Aufgabe 47:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x - 1) = \frac{1}{4}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 48:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 49:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$4 \cdot \sin^2(\mathrm{x}) + 3 \cdot \cos(\mathrm{x}) = 3 \quad \text{für} -\pi \leq \mathrm{x} \leq +\pi$

Aufgabe 50:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$3 \cdot \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x) =$

Integralrechnung

Aufgabe 51:

(1) $\int (3x+1)\,dx$

(2) $\int \left(x^2-2x-5\right)dx$

(3) $\int \left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$

(4) $\int \left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\right)dx$

(5) $\int \left(2x^4-x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx$

(6) $\int \left(-\frac{1}{8}x^4+4x^3-5x^2+3x-7\right)dx$

Bestimme C so, dass das Schaubild der Stammfunktion F zu f durch den Punkt P geht:

(7) $f(x)=x^2-1$ $\quad P(3 \mid -1)$

(8) $f(x)=x^3-2x$ $\quad P(1 \mid 0)$

(9) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x-4$ $\quad P(0 \mid 8)$

Aufgabe 52:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int \frac{3}{x^2}dx$ (2) $\int \frac{4}{x}dx$ (3) $\int \frac{1}{2x^3}dx$

(4) $\int \frac{2x^2-1}{x^2}dx$ (5) $\int \frac{x-2}{x^2}dx$ (6) $\int \frac{x^2-9}{x}dx$

(7) $\int \frac{(x-2)^2}{4x}dx$ (8) $\int \frac{x^3-8}{2x^2}dx$ (9) $\int \frac{x^3-8}{4x}dx$

(10) $\int \frac{x^2+3x-2}{4x}dx$ (11) $\int \frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}dx$ (12) $\int \frac{x^2-3}{x^3}dx$

(13) $\int \frac{x^4+x^2-2}{4x^3}dx$ (14) $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x^3}dx$ (15) $\int \frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2}dx$

Aufgabe 53:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(16) $\int \frac{4}{(4x+5)^2}dx$ (17) $\int \frac{2}{(1-x)^3}dx$ (18) $\int \frac{24}{(x+12)^2}dx$

(19) $\int \frac{3}{3-x}dx$ (20) $\int \frac{-3}{(2x-4)^4}dx$ (21) $\int \frac{12}{(x-2)^5}dx$

Aufgabe 54:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(22) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$ (23) $\int \frac{x^2}{(4-x)^2}dx$ (24) $\int \frac{x^2+x-1}{(2x+4)^2}dx$

(25) $\int \frac{x}{x-1}dx$ (26) $\int \frac{2-x}{4x+1}dx$ (27) $\int \frac{(x+2)^2}{2-x}dx$

Aufgabe 55:

Berechnen Sie folgende Integrale:

$\int \frac{16x}{x^2+12}dx$ (29) $\int \frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}dx$ (30) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$

Aufgabe 56:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(13) $\int_4^6 \frac{5}{2x+4}dx$ (14) $\int_2^4 \frac{16}{(1-x)^2}dx$

(15) $\int_{-4}^{-3} \frac{x+3}{2x+1}dx$ (16) $\int_0^3 \frac{x^2}{x+1}dx$

(17) $\int_{-1}^{0} \frac{2-x}{(2x-5)^2}dx$ (18) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2-16}dx$

(19) $\int_0^3 \frac{x^2}{x^3+1}dx$ (20) $\int_0^3 \frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

(21) $\int_0^1 \frac{3x^3}{x^2+4}dx$ (22) $\int_2^3 \frac{2-x}{4x-x^2}dx$

Aufgabe 57:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_1^{25} \frac{3}{x\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\int_1^{4} \frac{4-x}{\sqrt{x}}\,dx$

(3) $\int_1^{9} \frac{2x-\sqrt{x}}{x}\,dx$ (4) $\int_1^{4} \left(\sqrt{x}-2\right)^2\,dx$

(5) $\int_{-6}^{0} \sqrt{4-2x}\,dx$ (6) $\int_0^{2} \frac{8}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

(7) $\int_{-3}^{0} \left(2-\sqrt{1-x}\right)dx$ (8) $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)dx$

(9) $\int_0^{4t} x\sqrt{\frac{x}{t}}\,dx$ (10) $\int_4^{10} \sqrt{\frac{x-2}{2}}\,dx$

Aufgabe 58:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(11) $\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$ (12) $\int_0^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(13) $\int_1^{4} \frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}\,dx$ (14) $\int_0^{4} 2x\cdot\sqrt{4-x}\,dx$

(15) $\int_0^{r} 2x\sqrt{x^2+5}\,dx$ (16) $\int_0^{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

(17) $\int_3^{5} x\sqrt{x^2-4}\,dx$ (18) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

Aufgabe 59:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$ (2) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos\tfrac{x}{3}\,dx$ (3) $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} 3\sin\left(x-\tfrac{1}{3}\pi\right)dx$

(4) $\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} 2\cos(2-x)\,dx$ (5) $\int_0^{\frac{3}{8}\pi} \sin\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)dx$ (6) $\int_0^{2\pi-2} \left(1+\cos\left(\tfrac{x}{2}+1\right)\right)dx$

(7) $\int_0^{2} \left(x+\sin(1-x)\right)dx$ (8) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} \left(2-2\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$

Aufgabe 60:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x\,dx$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$

(11) $\int_{-\pi}^{\pi} \left(1+\sin\tfrac{x}{2}\right)\cdot\cos\tfrac{x}{2}\,dx$

(12) $\int \frac{2\cdot\cos x}{1+\sin x}\,dx$

(13) $\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

Aufgabe 61:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{(\cos x)^2}\,dx$$

Aufgabe 62:

Berechne die Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse.

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9$

(2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

(3) $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$

(4) $f_t(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x$

Aufgabe 63:

Berechne Sie folgende Flächen:

(5) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ Fläche $A(r)$ zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = r. Berechne auch $\lim\limits_{r \to \infty} A(r)$.

(6) $f(x) = \frac{x-2}{x}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

(7) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 5 sowie zwischen K, der x-Achse und x = - 6

(8) $f(x) = \frac{16x}{x^2 + 4}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

Aufgabe 64:

Berechnen Sie folgende Flächen:

(9) $f(x) = \sqrt{4-x}$ Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen.

(10) $f(x) = x\sqrt{6-x}$ Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

(11) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 5.

(12) $f(x) = (9 - x^2) \cdot \sqrt{x}$ Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse

Aufgabe 65:

Berechnen Sie folgende Flächen:

(13) $f(x) = e^{1-x}$ Fläche A(r) zwischen K, den Koordinatenachsen und der Geraden x = r . Berechne auch $A^* = \lim\limits_{r\to\infty} A(r)$

(14) $f(x) = 3 - e^{\frac{x}{2}}$ Fläche zwischen K und den Koordinatenachsen.

(15) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ Fläche zwischen der x-Achse, der Kurve und x= 4.

Kann man der Fläche auch dann noch einen endlichen Wert zuordnen, wenn man den rechten Rand ins Unendliche verschiebt ?

(16) $f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 2}$

der Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen und der Geraden x=-4. Kann man der Fläche auch dann noch einen endlichen Wert zuordnen, wenn man den linken Rand ins unendliche schiebt.

Aufgabe 66:

(17) $f(x) = \ln(6 - x)$ Fläche zwischen K und den Achsen.

(18) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 - \ln(x+1)$ Fläche zwischen K, den Achsen und x = 3

(19) $f(x) = \ln(x^2)$ Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 3

(20) $f(x) = \dfrac{2 + 4 \cdot \ln x}{x}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und $x = e^2$

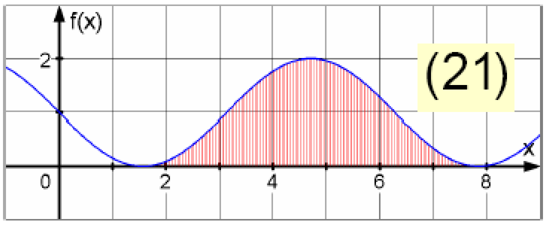
Aufgabe 67:

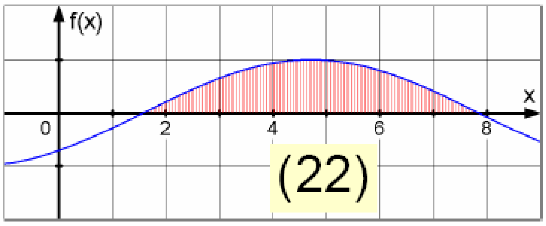
(21) $f(x) = 1 - \sin x$ Fläche siehe Abbildung.

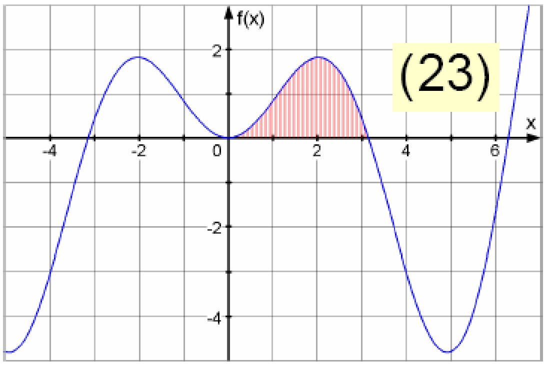
(22) $f(x) = -\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ Fläche siehe Abbildung.

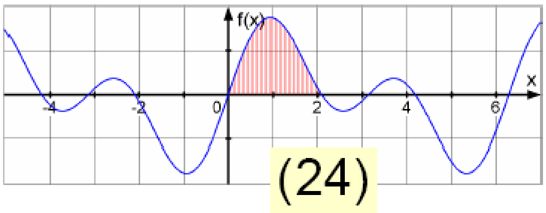
(23) $f(x) = x \cdot \sin x$ Fläche siehe Abbildung.

(24) $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ Fläche siehe Abbildung.









Aufgabe 68:

(11) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$,

Zeige, daß das Schaubild K zusammen mit der x-Achse im 1. Feld eine bis ins Unendliche reichende Fläche mit endlichem Inhalt begrenzt.

Aufgabe 69:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

Aufgabe 70:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx$$

Aufgabe 71:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2 - 3}{x^3 - x} dx$$

Aufgabe 72:

Berechnen Sie folgende Integrale.

(1) $\int_2^4 \frac{4x}{x^2 - 1} dx$ (2) $\int_2^0 \frac{4}{x^2 - 2x - 8} dx$ (3) $\int_{-3}^{-1} \frac{2 - x}{x^2 + 4x} dx$

Aufgabe 73:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{x^3 - 4x}$$

Gesucht: Fläche zwischen Kurve, x-Achse und x = 8.

Aufgabe 74:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} dx$$

Aufgabe 75:

Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) zu f(x).

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 4}$$

Aufgabe 76:

Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}$$

Aufgabe 77:

Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 78:

Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}$$

Aufgabe 79:

Man ermittle jeweils eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen $y=f(x)$:

a) $f(x)=\cos x\cdot\sin 2x$

b) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}-2\cos^2 x$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

Aufgabe 80:

Man berechne folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \left(e^x\right)^2 dx$

b) $\int x\left(\sin\left(x^2\right)+\cos\left(x^2\right)\right)dx$

c) $\int x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx$

d) $\int \sin^3 x\,dx$

e) $\int x^2\sin x\,dx$

f) $\int xe^{3x}dx$

g) $\int e^{b+a\sqrt{t}}dt,\ a\neq 0$

h) $\int\left(x^2-4\right)\cos 2x\,dx$

i) $\int \cos^2 x\,dx$

j) $\int\dfrac{4dx}{\sqrt{1-x}},\ x<1$

k) $\int\dfrac{30dx}{\sqrt[5]{5x-1}}$

Aufgabe 81:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$$

Aufgabe 82:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 1}\, dx$$

Aufgabe 83:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1}\, dx$$

Aufgabe 84:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1}\, dx$$

Aufgabe 85:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{1}{x^3 + 1}\, dx$$

Aufgabe 86:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x}{x^3 + 1}\, dx$$

Aufgabe 87:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_2^5 \frac{x^2-4}{(x+1)^2}dx$ (2) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx$

(3) $\int_0^4 2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ (4) $\int_{-1}^0 4x^2\cdot\ln(x+2)dx$

Aufgabe 88:

Man bestimme die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\int \frac{8x}{x^2+2x-3}\,dx$ b) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$ c) $\int \frac{2x^2+18x-24}{x^2+6x-16}\,dx$

Aufgabe 89:

Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2-33x+22}{(x-2)(x+2)(x-5)(x+3)}$$

Aufgabe 90:

Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$f(x)=\frac{4x^3-18x^2+15x-4}{(x-2)^3(x+5)}$$

Aufgabe 91:

Für k>0 ist die Funktion f_k gegeben durch $f_k(x)=k(-x^3+3x+4)$.

Bestimme k so, dass der Graph von f_k mit der Tangente im Hochpunkt eine Fläche mit dem Inhalt von 45 einschließt.

Aufgabe 92:

Der Graph einer Funktion f mit $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ hat den Punkt P(0; 1) als Sattelpunkt. Der Flächeninhalt der Fläche, die die Tangente durch diesen Punkt und der Graph von f einschließen, beträgt 5000. Wie heißt die Funktion.

Aufgabe 93:

Bestimmen Sie die Fläche die von der y-Achse, der Kurve, ihrer schiefen Asymptote und der Geraden x=r (r>2) eingeschlossen wird.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$$

Aufgabe 94:

(16) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}$

Das Schaubild K, die schiefe Asymptote, die x-Achse und die Gerade $x = r$ ($r > 2$) begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(r) sowie deren Grenzwert für r gegen Unendlich.

Aufgabe 95:

(7) $\int_1^4 \frac{12}{x^2} dx$

(8) $\int_3^6 \frac{3x^2 - 4}{9x^2} dx$

(9) $\int_1^3 \frac{x^2 - 9}{x} dx$

(10) $\int_1^2 \frac{x^2 + 2}{5x} dx$ /

(11) $\int_4^8 \frac{4x^2 - 1}{2x} dx$

(12) $\int_1^2 \frac{x^3 - 4x + 1}{2x^2} dx$

Aufgabe 96:

Gegeben ist folgende Funktion: $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$

a) (10) Die Kurve und die x-Achse und die Geraden x=2 und x=4 begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt A_1.

b) (5) Die Kurve und die x-Achse und die Geraden x=0 und x=-2 begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt A_2.

Aufgabe 97:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischen Weg (ohne Tafelwerk):

$$\int_{-1}^{0} 4x^2 \cdot \ln(x + 2)\, dx$$

Aufgabe 98:

Zeigen Sie durch Rechnung, dass

$$\int f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \ln\left(\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|\right) + \frac{3}{x+2} + C \text{ ist.}$$

Aufgabe 99:

Das folgende Integral soll berechnet werden. (Nicht aus der Formelsammlung ablesen).

$$\int_0^2 \frac{4x - x^3}{(x+1)^2} dx$$

Aufgabe 100:

Das folgende Integral soll berechnet werden. (Nicht aus der Formelsammlung ablesen).

$$A = \int_{-4}^{-1} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2} dx$$

Aufgabe 101:

Bilden Sie durch Rechnung zu folgender Funktion f(x) die Stammfunktion F(x).

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - 26x + 15}{x^2 - 2x - 15}$$

Aufgabe 102:

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

und der Tangente im Maximum umschlossen wird. Die Integrationsgrenzen sollen auch berechnet werden.

Aufgabe 103:

Bilden Sie durch Rechnung zu folgender Funktion f(x) die Stammfunktion F(x).

$$f(x) = \frac{2 \cdot cosx}{1 + sinx}\ dx$$

Aufgabe 104:

Berechnen Sie folgendes Integral. (Der Rechenweg muss erkennbar sein)

$$\int_3^4 ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) dx$$

Aufgabe 105:

Berechnen Sie folgendes Integral. (Der Rechenweg muss erkennbar sein)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

Aufgabe 106:

Berechnen Sie folgendes Integral. (Der Rechenweg muss erkennbar sein)

$$\int \frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2} dx$$

Aufgabe 107:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int \frac{8x^2-2x-43}{x^3-x^2-16x-20} dx$$

Aufgabe 108:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

Aufgabe 109:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 110:

Berechnen Sie folgendes uneigentliche Integral. Gegen welchen Wert strebt die Fläche?

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln^2(x) - 1)} \, dx$$

Aufgabe 111:

Berechnen Sie folgendes Integral.

$$\int_{0}^{2} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx$$

Aufgabe 112:

Berechnen Sie folgendes Integral.

$$\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} 2 \cdot \cos(2 - x) \, dx$$

Aufgabe 113:

Berechne Sie die Fläche die von der Kurve und der x-Achse eingeschlossen wird.

Die Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 6x^3 + 32x)$$

Aufgabe 114:

Ermitteln Sie folgende Stammfunktion rechnerisch.

$$\int \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3 - x} \, dx$$

Aufgabe 115:

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der x-Achse bei $T_1(0|0)$ und $T_2(4|0)$. Der Funktionsgraph verläuft außerdem noch durch den Punkt P(2|240). Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von f(x) und der x-Achse eingeschlossen wird!

Aufgabe 116:

Bilden Sie rechnerisch die Stammfunktion von folgendem Integral:

$$\int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

Aufgabe 117:

Berechnen Sie folgendes Integral.

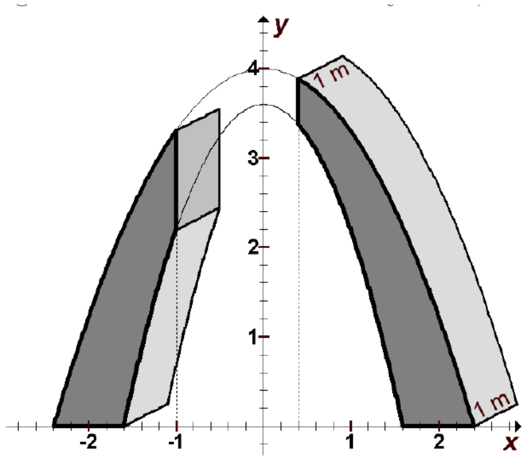
$$\int_{-1}^{0} 2e^x \cdot \sqrt{3e^x + 1}\, dx$$

Aufgabe 118:

Das neue Eingangs-Logo der Fußballweltmeisterschaft in Brasilien soll als Skulptur aus zwei Bogen auf einer Wiese vor dem Haupteingang errichtet werden. Um eine bessere Berechnung zu ermöglichen sind die gekrümmten Linien y-achsensymmetrische Parabeln zweiter Ordnung. Die Längeneinheit des Koordinatensystems, in dem die Vorflächen liegen, beträgt 1m.

a) (5) Ermitteln Sie anhand der Abbildung die Gleichungen der Parabeln.

b) (5) Berechnen Sie die dunkelgrau dargestellte Vorfläche der beiden Bögen. Die Skulptur soll aus Beton gefertigt werden und 1m breit sein. Berechnen Sie die Masse der beiden Bögen (1 dm³ Beton wiegt 2,4 kg)



Aufgabe 119:

Bestimmen Sie auf rechnerischem Weg die folgende Stammfunktion.

$$\int \frac{3x^2 - 19x + 32}{x^3 - 11x^2 + 35x - 25}\,dx$$

Aufgabe 120:

Die Parabel $f(x) = x^2 \ (x \geq 0)$, die Gerade y= 4 und die y-Achse umschließen eine Fläche A. Welche Parallele zur x-Achse halbiert die Fläche A?

Geben Sie die Gleichung dieser Parallelen an.

Aufgabe 121:

Bestimmen Sie das folgende Integral auf rechnerische Weise. (Die Integraltafel in der Formelsammlung kann zur Lösungskontrolle verwendet werden).

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

Aufgabe 122:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int \frac{-x^2 + 16x - 18}{x^3 - x^2 - 8x + 12}\,dx$$

Rotationsvolumen

Aufgabe 123:

Die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ rotiert in den Grenzen x=1 und x=2 um die x-Achse. Berechnen Sie das entstehende Volumen.

Aufgabe 124:

Die Gerade $y = \frac{2}{3}x + 2$ rotiert in den Grenzen x=-3 bis x=2 um die x-Achse. Berechnen Sie das entstehende Volumen.

Aufgabe 125:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{9 - x}$

Aufgabe 126:

Die Parabel $f(x) = x^2 - 5x + 1$ und die Gerade y=1 begrenzen ein Parabelsegment. Dreht man dieses um die Gerade g: y=1, entsteht ein Drehkörper. Berechne Sie dessen Volumen.

Aufgabe 127:

Die Fläche zwischen K, der x-Achse und x=4 rotiere um die x-Achse. $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

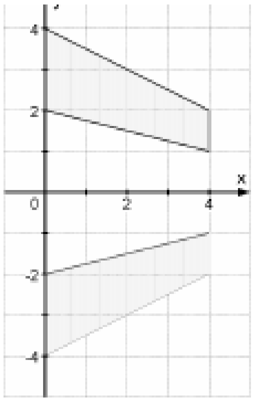
Aufgabe 128:

Welches Volumen V entsteht, wenn die von $f(x) = 2x^2 + 1$ und $g(x) = 7x - 2$ eingeschlossene endliche Fläche um die y-Achse rotiert?

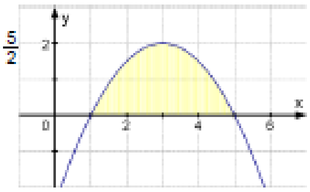
Aufgabe 129:

Berechnen Sie folgende Rotationsvolumen (Rotation um die x-Achse).

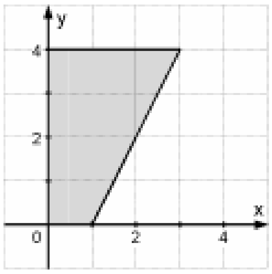
(1) Ein Trapez wird definiert durch die Geraden
g: $y=-\frac{1}{2}x+4$ und h: $y=-\frac{1}{4}x+2$ sowie
$x = 0$ und $x = 4$.
Dreht man dieses Viereck um die y-Achse, entsteht ein Hohlkörper. Berechne dessen massives Volumen.

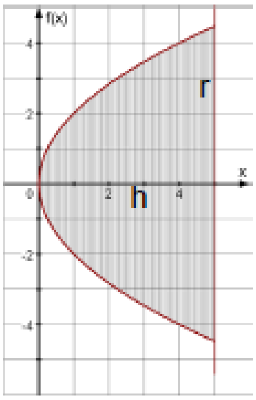


(2) Gegeben: $:f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$
Drehe das von K und der x-Achse begrenzte Parabelsegment um die x-Achse.

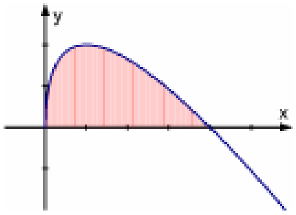


(3) Drehe nebenstehende Trapezfläche rotiere um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.



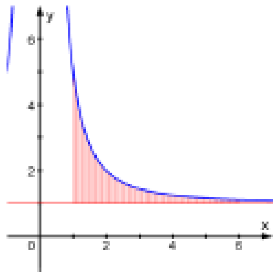


(4) Ein Paraboloid entsteht durch Drehen eines Parabelsegments. Wenn wir den Radius des Grundkreises mit r und die Höhe bis zum Scheitel mit h bezeichnen ergibt sich eine Formel für das Volumen. Berechne diese.

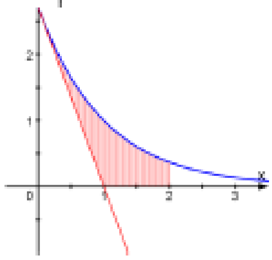


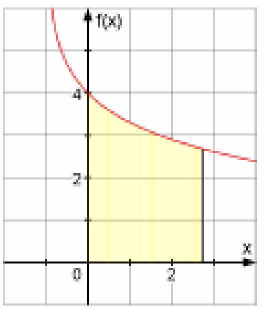
(5) $f(x)=4\sqrt{x}-2x$
Drehe die gefärbte Fläche um die x-Achse.

(6) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2}$. Die Fläche zwischen K, der waagerechten Asymptote und den Geraden $x = 1$ und $x = 6$ wird um die y-Achse gedreht.



(7) $f(x)=e^{1-x}$ K, die Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse und die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche. Diese soll um die x-Achse rotieren.



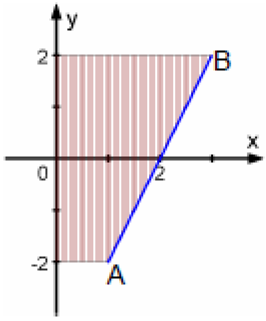
(8) 

$f(x)=4-\ln(x+1)$
K, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = e$ begrenzen eine Fläche. Diese soll um die x-Achse rotieren.

Aufgabe 130:

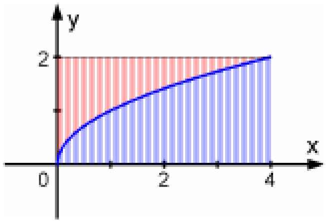
Berechnen Sie das Rotationsvolumen bei der Rotation um die y-Achse.

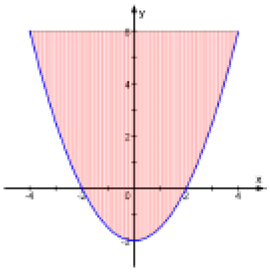
Aufgaben: Rotation um die y-Achse



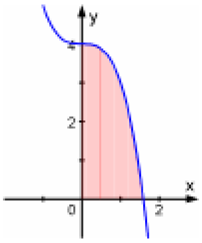
(9) Drehe das rechts dargestellte Trapez um die y-Achse. mit $A(1|-2)$ und $B(3|2)$.

(10) $f(x)=\sqrt{x}$.
Drehe die obere Fläche und dann die untere Fläche um die y-Achse.

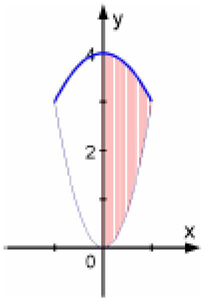




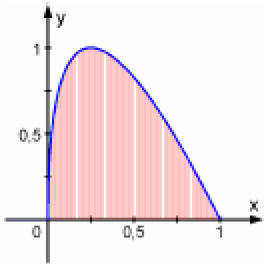
(11) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.
Das dargestellte Parabelsegment soll um die y-Achse rotieren.



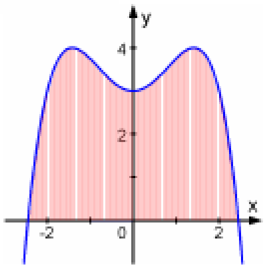
(12) $f(x)=4-x^3$
Fläche um die y-Achse drehen



(13) Die beiden Kurven
$y=4-x^4$ und $y=3x^2$
begrenzen nebenstehende Fläche.
Sie soll um die y-Achse rotieren.



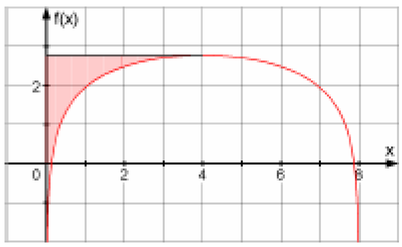
(14) $f(x)=4\sqrt{x}-4x$
Die schraffierte Fläche dreht um die y-Achse. Welche Menge Flüssigkeit, kann man anschließend in den trichterförmigen Hohlraum füllen ?



(15) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^2+3$
Wie Aufgabe (11)

(16) $f(x)=\ln(8x-x^2)$

Die Kurve dazu hat den Hochpunkt $H(4\,|\ln 16)$.



K begrenzt mit den Koordinatenachsen und der Parallelen zur y-Achse durch den Hochpunkt eine Fläche.
Welchen Inhalt hat der Rotationskörper, der bei Drehung dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

Aufgabe 131:

Der Umriss eines Sektkelches gehorcht der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2.$$

Bei welcher Höhe h beträgt das Volumen des Kelches 0,2l?

Aufgabe 132:

Berechnen Sie die folgenden Rotationsvolumina:

Aufgabe 1. Die Form einer Vase entsteht, wenn der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^2+5$ zwischen den Grenzen $x_1 = -8$ und $x_2 = 10$ um die x-Achse rotiert (Maße in cm).

(1) Berechnen Sie das Volumen der Vase.
(2) Bestimmen Sie die Gleichung, die man lösen muss, um auszurechnen, wie hoch der Wasserstand in der Vase ist, wenn diese mit 0.5Liter Wasser gefüllt wird?

Aufgabe 2. (Neu!!) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen, dass von der zwischen $f(x) = x^2+1$ und $g(x) = 1 + 2x$ eingeschlossenen Fläche durch Rotation um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 3. Der Innenraum eines Trinkglases hat die Form eines Paraboloids. Die Randfunktion $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ verläuft durch die Punkte $P(0|0)$ und $Q(12|3)$.

(1) Zeigen Sie, dass die Parabel die Gleichung $f(x) = \frac{3}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{x}$ hat.
(2) Bestimmen Sie, wieviel Flüssigkeit das Glas fasst.
(3) Bestimmen Sie, in welcher Höhe die Markierung für $1/8$ l angebracht werden muss.

Aufgabe 133:

Das zwischen dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$ und der Parabel $y = \frac{1}{6}x^2$ gelegene Flächenstück erzeugt bei Drehung um die y-Achse einen Rotationskörper. Wie groß ist das Rotationsvolumen V_y?

Aufgabe 134:

Bestimmen Sie die beiden Rotationsvolumen des Linienzuges der Funktion im Definitionsbereich in dem angegebenen Intervall, die entstehen, wenn der Linienzug einmal um die x-Achse und einmal um die y-Achse rotiert.

$$f(x) = \frac{4}{x+1};\ \mathbb{D} = [0,10]$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 135:

Berechnen Sie den exakten Inhalt des Flächenstücks zwischen den Geraden

$x = 1$ und $x = 2$

und den Kurven zu

$f(x) = \frac{2}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$

Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers (exakt), der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

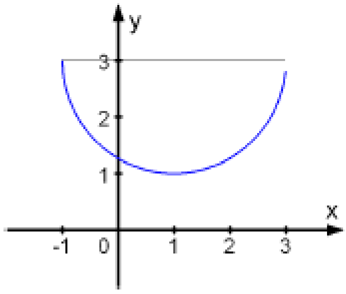
Diverse Berechnungen mit dem Integral

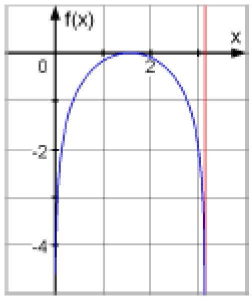
Aufgabe 136:

Berechnen Sie folgende Bogenlängen:

(7) $f(x) = 3 - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ Bogenlänge von – 1 bis 3

(8) Die Funktion $f(x) = \ln(\sin x)$ ist für das Intervall $\mathbf{D} =]0;\pi[$ dargestellt. Gesucht ist die Bogenlänge von $\frac{1}{3}\pi$ bis $\frac{2}{3}\pi$.

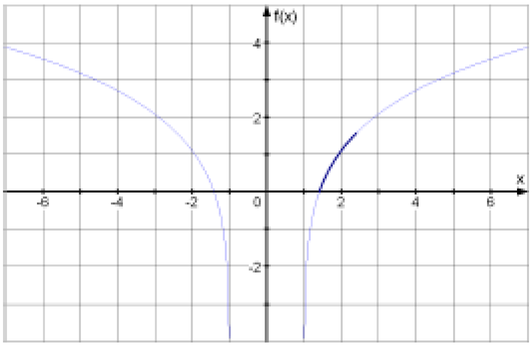


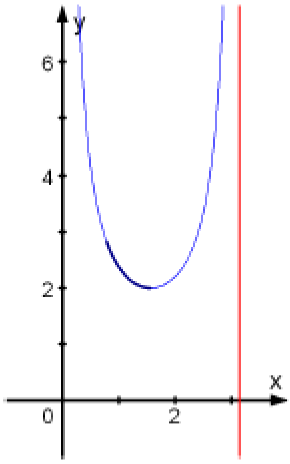


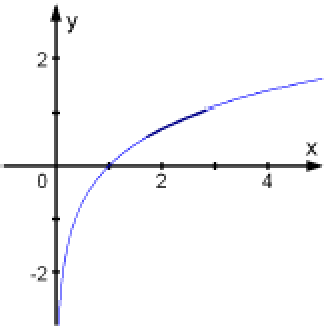
(9) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ Gesucht ist die Länge des Bogens von $\sqrt{2}$ bis $\sqrt{2}+1$.

(10) $f(x) = \dfrac{2}{\sin x}$ Gesucht ist die Länge des Bogens von $\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$.

(11) $f(x) = \ln x$ Gesucht ist die Bogenlänge von $x = \sqrt{3}$ bis $x = 2\sqrt{2}$

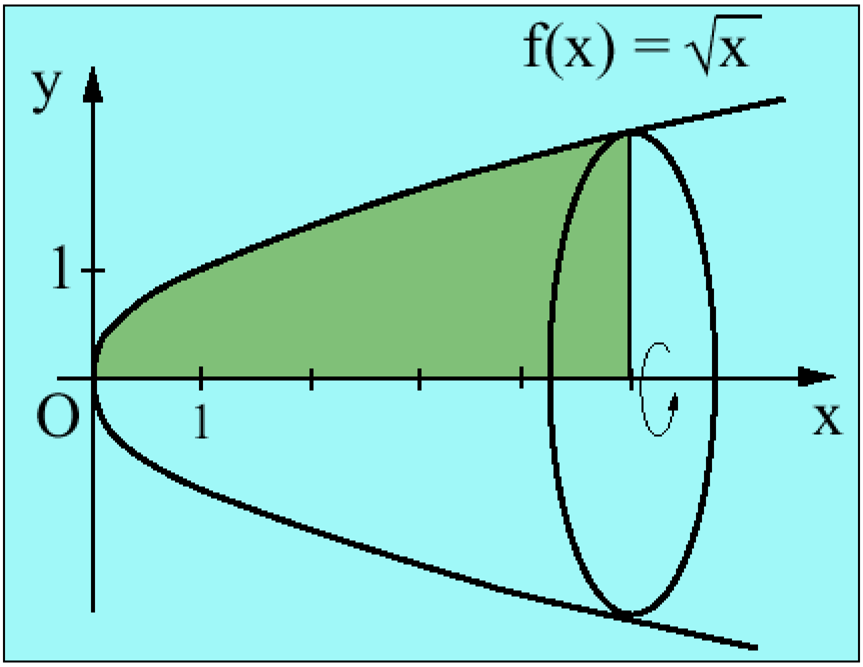






Aufgabe 137:

Mantelfläche des Rotationsparaboloids, der durch Drehung des Graphen der Wurzelfunktion um die x-Achse im Intervall [0 ; 5] entsteht:



Aufgabe 138:

Die Gerade mit der Gleichung f(x)=y=0,5x+2 erzeugt durch Rotation um die x-Achse einen Kegelstumpf.

a) Berechnen Sie das Volumen des Kegelstumpfs!

b) Berechnen Sie die Mantelfläche des Kegelstumpfs!

Aufgabe 139:

a) Berechnen Sie das Volumen des trichterförmigen Körpers, der durch Drehung der Hyperbel zu f(x)=1/x im Intervall [1; 3] entsteht!

b) Berechnen Sie die Mantelfläche des trichterförmigen Körpers.

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

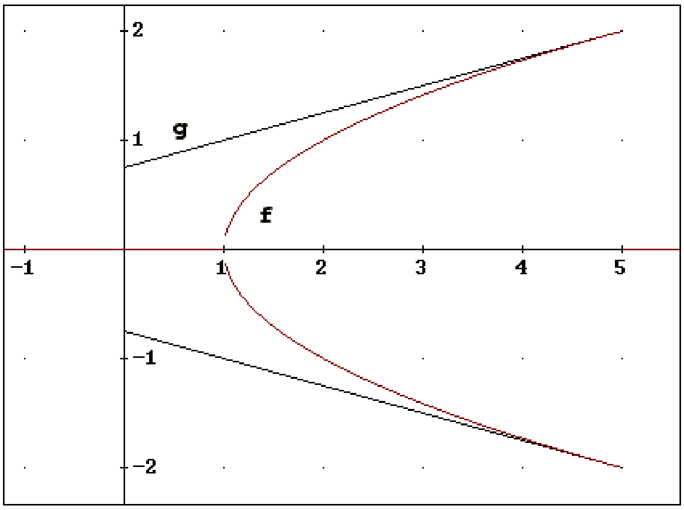
Aufgabe 140:

Volumen einer Designer-Glasschale

Um eine Designer-Glasschale in großen Mengen zu produzieren, soll der Materialverbrauch pro Schale ermittelt werden. Die Glasschale lässt sich als Rotationskörper um die x-Achse mit den Randfunktionen f und g beschreiben:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ im Intervall } [1\,;\,5]$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \text{ im Intervall } [0\,;\,5]$$



Bestimmen Sie das Volumen der Designer-Glasschale!

Anwendungsaufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 141:

$$f_t(x) = \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{für} \quad t \in \mathbf{R}^+$$

Information: Tiefpunkte $T_{1,2}\left(\pm t\sqrt{3} \mid -\frac{9}{2}t^2\right)$.

Die Kurve K_t begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechne deren Inhalt A.
In welchem Verhältnis teilt die Ortskurve C der Tiefpunkte diese Fläche ? (Exaktes Ergebnis).

Aufgabe 142:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$$

Skizziere das Schaubild samt beiden Asymptoten.

a) K und die x-Achse und die Geraden x = 2 und x = 4 begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A_1 .

b) Welche Fläche A_2 schließt K mit der x-Achse ein ?

c) K, die waagerechte Asymptote und die Gerade x = - 3 begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A_3 .

Aufgabe 143:

(3) $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$ Skizziere das Schaubild der Kurve.

a) Die Kurve und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt A.

b) Welchen Inhalt erhält der Köper, der bei Drehung dieser Achse um die x-Achse entsteht ?

Aufgabe 144:

(4) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \cdot e^{2-x}$

K und die x-Achse begrenzen aber auch im 1. Feld eine ins Unendliche reichende Fläche.
Hat diese Fläche einen endlichen Inhalt ?
Wenn ja, berechne ihn.

Aufgabe 145:

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{8-x}$$

K und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A.

Aufgabe 146:

Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in \mathbb{R}^+$ durch

$$f_t(x) = \frac{1}{2t}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}tx$$

Die Gerade g durch den Wendepunkt und den Tiefpunkt der Kurve K_t begrenzt zusammen mit K_t eine Fläche. Berechne diese in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 147:

Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$f_t(x) = tx^3 - 3(t+1)x$$

K_t sei das Schaubild von f_t.
K_1 und die positive x-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.
Berechne für $t > 0$ den Inhalt der Fläche, die von der Kurve K_t und der positiven x-Achse begrenzt wird.

Aufgabe 148:

Zu jedem $k \in \mathbb{R}^+$ und für $x \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{6}{k^2}x^3 - \frac{12}{k}x^2 + 6x$$

C_k sei das Schaubild von f_k .

Information: Folgende Ergebnisse sind bekannt:

$N_1(0 \mid 0)$, $N_2(k \mid 0)$, $T(k \mid 0)$, $H\left(\frac{1}{3}k \mid \frac{8}{9}k\right)$ und $W\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{9}k\right)$

a) C_k und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(k).
Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x$ zerteilt diese Fläche in zwei Teilflächen mit den Inhalten A_1 und A_2 . Berechne das Flächenverhältnis $A_1 : A_2$.
Information: Diese Gerade ist die Ortskurve der Wendepunkte.

b) Der Kurvenbogen von C_k zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt und die Parabel

G_k : $y = -\frac{4}{k}x^2 + 4x$

begrenzen ein Flächenstück.
Berechne ihren Inhalt B(k).
Information: G_k ist die Ortskurve der Extrempunkte.

Mehrfachintegrale

Aufgabe 149:

Integrieren Sie $f(x,y) = x + y^2$ über dem Gebiet,

a) das von der Parabel $4x = y^2$ und von der Gerade $x = 4$ begrenzt wird!
b) das von der Parabel $4x = y^2$ und von der Gerade $y = 2x - 12$ begrenzt wird!

Aufgabe 150:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

$$a)\quad I_1 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (x^2 + y)\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{3} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y+1}\right)dx\,dy, \qquad I_3 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \sqrt{xy}\,dx\,dy$$

$$b)\quad I_1 = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\pi} x\,\sin y\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{\pi} x^2\,\sin y\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\pi/4} x\,\cos(2y)\,dx\,dy$$

$$c)\quad I_1 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \cos(x+y)\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} x\,\cos(x+y)\,dx\,dy$$

Aufgabe 151:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

$$a)\quad I_1 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin x\,\cos(2y)\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin(2x)\,\cos(3y)\,dx\,dy$$

$$b)\quad I_1 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin x\,\cos^2 y\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=0}^{\pi/4}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin(2x)\,\cos^2 y\,dx\,dy$$

$$c)\quad I_1 = \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=1}^{2} y\cdot\cos(xy)\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\pi} x\,\sin(xy)\,dx\,dy$$

$$d)\quad I_1 = \int_{x=1}^{3}\int_{y=1}^{2} x\,\ln(xy)\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=1}^{3}\int_{y=1}^{2} x^2\,\ln(xy)\,dx\,dy$$

$$e)\quad I_1 = \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{\pi/2} \frac{\sin y}{x}\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{\pi/2} \frac{\cos y}{x^2}\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int_{x=1}^{3}\int_{y=0}^{\pi/4} \frac{\cos(2y)}{x^3}\,dx\,dy$$

Aufgabe 152:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

a) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} e^{x-2y}\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} y^2 e^{x+2}\,dx\,dy$

b) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=1}^{2} \frac{x\,e^x}{y}\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=1}^{3} \frac{x\,e^x}{y^2}\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=1}^{2} \frac{x\,e^{2x}}{y^3}\,dx\,dy$

c) $I_1 = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=1}^{2} \left(\frac{2x}{y} - \frac{y}{x}\right) dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=1}^{2} \left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy$

d) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x}{1+xy}\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x}{1+2xy}\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x^2}{1+xy}\,dx\,dy$

e) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+y}\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{(1+y)^2}\,dx\,dy$

Aufgabe 153:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

a) $I_1 = \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=0}^{y} xy\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{y=0}^{2} \int\limits_{x=0}^{\sqrt{y}} xy\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$

b) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{3} \int\limits_{y=0}^{x} x\,y^2\,dy\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{x} x^2 y^2\,dy\,dx, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=1-x}^{1-x^2} xy\,dy\,dx$

c) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} (x^2+y^2)\,dy\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_{y=0}^{3} \int\limits_{x=0}^{\sqrt{y}} (x^3+y^3)\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x^2-1} (x+y)\,dy\,dx$

d) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{x} (1+\sin y)\,dy\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{x} (\cos x + \sin y)\,dy\,dx$

Aufgabe 154:

(a) $\int\limits_{y=0}^{b} \int\limits_{x=0}^{a} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$

(b) $\int\limits_{y=0}^{2} \int\limits_{x=0}^{1} x^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$

(c) $\int\limits_{y=0}^{\pi} \int\limits_{x=0}^{\pi} \sin(x) \cdot \sin(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$

(d) $\int\limits_{n=1}^{2} \int\limits_{v=2}^{4} n(1+v)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}v,$

(e) $\int\limits_{y=-1}^{1} \int\limits_{x=-1/2}^{1/2} \int\limits_{z=0}^{2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$

(f) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=y_0}^{y_1} \int\limits_{z=z_0}^{z_1} e^{az}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$

Aufgabe 155:

Berechnen Sie folgendes Integral.

$$I = \int\limits_{1}^{4} \int\limits_{1}^{3} \int\limits_{0}^{2} \left(x^2 - 2\,y\,z\right) dz\; dy\; dx$$

Aufgabe 156:

Berechnen Sie folgende Integrale.

$$I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} \int\limits_{z=-y^2}^{x^2} \left(1+x\right) dz\; dy\, dx$$

$$I_2 = \int\limits_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{z=y}^{y^2} \sin x \cdot y\,z\; dz\; dy\, dx$$

$$I_3 = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=0}^{x} \int\limits_{z=0}^{x-y} y \cdot e^z\; dz\; dy\, dx$$

$$I_4 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-1}^{4} \int\limits_{z=0}^{\pi} x^2 y \cdot \cos\left(y\,z\right) dz\; dy\, dx$$

Partielle Ableitungen

Aufgabe 157:

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung.

$a)\ f(x,y) = x^2 y, \qquad f(x,y) = x y^2$

$b)\ f(x,y) = e^{x y^3}, \qquad c)\ f(x,y) = 4\,\frac{x}{y^5}$

$d)\ f(x,y) = (2x-y)^2 + \ln(x y)$

$e)\ f(x,y) = x y^2 \cdot (\sin x + \sin y)$

$f)\ f(x,y) = \sin(x^2 - y)$

$g)\ f(x,y) = \ln\left(2x + \frac{4}{y}\right)$

$h)\ f(x,y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$

$i)\ f(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

Aufgabe 158:

Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen

$$a)\ \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{1}{2} m v^2\right); \qquad \frac{\partial}{\partial v_0}(v_0 + a t); \qquad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)$$

$$b)\ \frac{\partial}{\partial t}\sin(c t - 5x); \qquad \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{G M}}\right)$$

$$c)\ \frac{\partial}{\partial \beta}\,\frac{e^{x\beta - 3}}{2 y \beta + 5}; \qquad \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Aufgabe 159:

Bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung folgender Funktionen:

a) $f(x,y) = 2xy + x\ln(3y+1) - \frac{1}{5}y$

b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$

Aufgabe 160:

Ermitteln Sie sämtliche partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung für die folgenden Funktionen.

(a) $f(x,y) = x^2y^3 + xy^4 - x^2 + 2\sqrt{y}$ (b) $f(x,y) = e^{xy}$

(c) $f(x,y) = e^{2y}\sin x + \frac{y}{x}$ (d) $f(x,y) = x\ln(x^2 - y)$

(e) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ (f) $f(x,y,z) = x^2ye^z + \sin(x-y) - xz^3$

Aufgabe 161:

Bestimmen Sie sämtliche partielle Ableitungen bis zur 3. Ordnung von

$f(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$ für x∈R, y∈R, z∈R.

Folgen und Reihen

Aufgabe 162:

Berechnen Sie bis a_5.

(a)	$a_1 = 12\ ;\ a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$	(b)	$a_1 = 1\ ;\ a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$
(c)	$a_1 = 4\ ;\ a_n = \frac{3}{2} \cdot a_{n-1}$	(d)	$a_1 = -1\ ;\ a_n = 4 - a_{n-1}$
(e)	$a_1 = 1\ ;\ a_n = a_{n-1}^{\ 2}$	(f)	$a_1 = -2\ ;\ a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}^{\ 2}$
(g)	$a_1 = 2\ ;\ a_n = \frac{1 - a_{n-1}}{a_{n-1}}$	(h)	$a_1 = 2 ; a_2 = 1\ ;\ a_n = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$
(i)	$a_1 = 4\ ;\ a_n = a_{n-1} + \frac{n-1}{n}$	(k)	$a_1 = 0\ ;\ a_n = 2^{a_{n-1}}$

Aufgabe 163:

(1) Beweise, daß eine arithmetische Folge vorliegt. Stelle eine Berechnungsvorschrift auf.

a) $a_3 = -28$; $a_5 = 26$; $a_8 = 107$

b) $a_2 = 249$; $a_6 = 405$; $a_{10} = 561$

c) $a_{11} = 296$; $a_{16} = 216$; $a_{25} = 72$

d) $a_3 = 20181$; $a_{10} = 17311$; $a_{20} = 13211$; $a_{131} = -32299$

(2) Zeige, daß keine arithmetische Folge vorliegt.
Wie müßte a_{12} lauten, wenn eine arithmetische Folge vorliegen sollte ?

a) $a_5 = 450$; $a_7 = 506$; $a_{12} = 674$

b) $a_6 = 630$; $a_8 = 560$; $a_{12} = 455$

(3) Gegeben sind 3 Glieder eine Folge. Setze so wenig wie nötig Zahlen dazwischen, damit eine arithmetische Folge entsteht.
Berechne dann a_1 und a_n .

a) $a_6 = 122$; $b = 156$; $c = 207$

b) $b = 388$; $a_{15} = 340$; $c = 280$

c) $b = -84$; $c = -39$; $a_{20} = 24$

(4) Ist b ein Glied der gegebenen Folge ?

a) $a_n = 14n + 16$; $b = 1808$

b) $a_n = 240 - 28n$; $b = -290$

c) $a_3 = 64$; $a_6 = 256$; $b = 640$

d) $a_{10} = 25$; $a_{14} = -25$; $b = 175$

(5) Gegeben sind die arithmetischen Folgen a_n und b_n .
Prüfe nach, ob $c_n = a_n + b_n$; $d_n = a_n - b_n$; $e_n = 3a_n$ und $f_n = a_n \cdot b_n$ arithmetische Folge sind.

z.B. für $a_n = 6n - 12$ und $b_n = 2n + 15$

(6) Beweise allgemein, daß eine Folge der Form $f_n = an^2 + bn + c$ keine arithmetische Folge ist.

Aufgabe 164:

(1) Berechne 5 Glieder dieser Folgen und zeige daß die 2. bzw. 3. Differenzenfolge konstant ist.

(a) $a_n = n^2 - 8n + 12$ (b) $a_n = -n^2 + 3n$

(c) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n + 1$ (d) $a_n = \frac{1}{3}n^3$

(e) $a_n = -n^3 + 2n + 20$ (f) $a_n = 4n^3 - 10n^2 + 3n - 300$

(2) Zeige, daß eine Differenzenfolge konstant ist und berechne darauf hin den Funktionsterm für die Folge.

(a) 21 ; 44 ; 69 ; 96 ; ...

(b) 19 ; 12 ; -1 ; -20 ; -45 ; ...

(c) 30 ; 29 ; 16 ; -15 ; -70 ; ...

(d) 2 ; 0 ; 26 ; 104 ; 258 ; ...

(3) Zeige durch Berechnung von 7 Gliedern, daß die 4. Differenzenfolge bei

$a_n = n^4 - n^2$ konstant ist.

Aufgabe 165:

Von einer geometrischen Folge kennt man $a_3 = 4$ und $a_6 = 8\sqrt{2}$.
Berechne a_9 und a_n.

Aufgabe 166:

Von einer geometrischen Folge kennt man $a_4 = 3$ und $a_8 = 27$
Berechne alle Glieder von a_1 bis a_7 und a_n.

Aufgabe 167:

Untersuche, ob eine geometrische Folge vorliegt. Wenn ja, erstelle den Funktionsterm für a_n.

(a) $a_3 = 15$; $a_5 = 375$; $a_8 = 46875$
(b) $a_3 = 18$; $a_6 = \frac{9}{4}$; $a_8 = \frac{9}{32}$
(c) $a_2 = 36$; $a_4 = 81$; $a_7 = \frac{2187}{8}$
(d) $a_1 = -27$; $a_3 = -3$; $a_4 = 1$

Aufgabe 168:

Gegeben ist eine geometrische Folge durch 2 Glieder. Berechne die angegebenen Glieder der Folge sowie den Funktionsterm für a_n .

(a) $a_2 = \frac{4}{5}$; $a_3 = \frac{2}{25}$; $a_1 = ?$; $a_4 = ?$

(b) $a_3 = 1$; $a_6 = \frac{1}{8}$; $a_{10} = ?$; $a_1 = ?$

(c) $a_4 = 24$; $a_6 = \frac{32}{3}$; $a_8 = ?$; $a_{11} = ?$

(d) $a_3 = 144$; $a_7 = \frac{729}{16}$; $a_2 = ?$; $a_5 = ?$

(e) $a_3 = 4$; $a_6 = 8\sqrt{2}$; $a_4 = ?$; $a_5 = ?$

(f) $a_5 = 3\sqrt{3}$; $a_8 = 27$; $a_2 = ?$; $a_6 = ?$

Aufgabe 169:

Berechne die ersten 5 Glieder dieser Folgen:

(a) $a_n = 2^{3n}$ (b) $a_n = 3 \cdot 2^{n+1}$ (c) $a_n = 3^{-2n+2}$

(d) $a_n = 3 \cdot 2^{4-n}$ (e) $a_n = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (f) $a_n = \dfrac{3}{2^{n-1}}$

(g) $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-n}$ (h) $a_n = \sqrt{\dfrac{2}{3^n}}$ (i) $a_n = 48 \cdot \dfrac{2^{n-2}}{3^{n+1}}$

Aufgabe 170:

Schalte zwischen die beiden gegebenen Zahlen die passenden Zahlen, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_1 = 8$; $a_5 = 64$ (b) $a_1 = 5$; $a_4 = 6$

Aufgabe 171:

Schalte zwischen diese Zahlen so wenig wie möglich neue, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_3 = \sqrt{2}$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = 8$

(b) $b = 12$; $a_5 = \frac{4}{3}$; $c = \frac{4}{81}$

(c) $b = \frac{1}{2}$; $c = 4$; $a_7 = 128\sqrt{2}$

Aufgabe 172:

Gegeben ist die Folge $a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Ist $b = 0{,}156281$ ein Glied dieser Folge ?

Aufgabe 173:

Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 120 \cdot 6^n$ und $b_n = 2 \cdot 7^n$.

Aufgabe 174:

Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2 \cdot 3^n$ und $b_n = 25200 \cdot 2^{-n}$.

Aufgabe 175:

Die Folge $a_n = 5^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt.
Wird die Folge kleiner als 10^{-15} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

Aufgabe 176:

Die Folge $a_n = 5 \cdot 4^n$ besteht aus lauter positiven Gliedern und wächst, denn wegen $q = 4$ ist $a_{n+1} = 4 \cdot a_n$. Wir vermuten schnell, daß diese Folge unendlich groß wird. Doch wie kann man das beweisen ?

Hierzu haben sich die Mathematiker einen kleinen Trick überlegt. Sie sagen:
Wenn wir beweisen können, daß jede noch so große Zahl ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird, dann ist die Folge nach oben u beschränkt.

Aufgabe 177:

(a) Ist $z = 17.294.403$ ein Glied der Folge $a_n = 3 \cdot 7^n$?

(b) Ist $z = \dfrac{1}{531441}$ ein Glied der Folge $a_n = 3^{-n}$

(c) Ist $z = 358\,271\,148$ ein Glied der Folge $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$?

Aufgabe 178:

(a) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 758 \cdot 4^n$ und $b_n = 5 \cdot 6^n$.

(b) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2{,}5^n$ und $b_n = 890 \cdot 2^n$.

(c) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 4^{12-n}$ und $b_n = 2 \cdot 3^{-n}$.

Aufgabe 179:

(a) Die Folge $a_n = 3^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt. Wird die Folge kleiner als 10^{-12} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

(b) Ab welchem n ist $a_n = 2^{5-3n}$ kleiner als 10^{-20} ?

(c) Ab welchem n ist $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ kleiner als 10^{-10} ?

(d) Ab welchem n ist $a_n = \frac{240}{4^n}$ kleiner als 10^{-12} ?

Aufgabe 180:

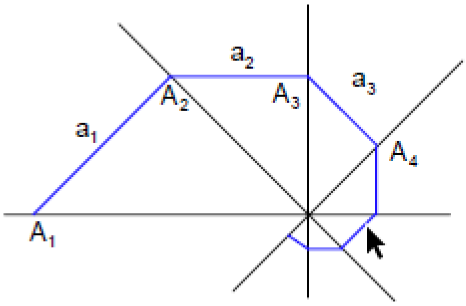
(a) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 8^n$ größer als 10 Milliarden ?

(b) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 34 \cdot 2^n$ größer als 10^{15} ?

(c) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

(d) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \frac{5^{n+1}}{2^{n-2}}$.

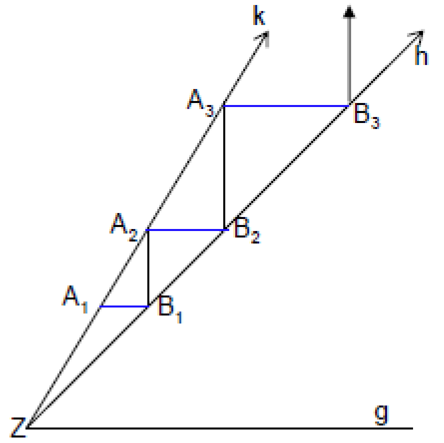
Aufgabe 181:



Nebenstehende Streckenschnecke entsteht, indem man von 4 Geraden ausgeht, die miteinander jeweils 45° bilden. Dann beginnt man mit einem Punkt A_1, der vom Mittelpunkt M die Entfernung (z.B. z = 8) hat. Von A_1 aus fällt man das Lot im Uhrzeigersinn auf die nächste Gerade bis A_2. Von dort aus fällt man wieder das Lot bis A_3 usw. So entsteht eine Folge von Strecken a_1 , a_2 , ...

Berechne a_1 bis a_5 sowie a_n . Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt. Berechne a_{20}. Was läßt sich vermuten ?

Aufgabe 182:



Die Gerade g bildet mit h einen 45° Winkel, g und k dagegen 60°.
Wir wählen einen beliebigen Punkt A_1 auf k und konstruieren der Reihe nach die Punkte B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 usw.

Es sei $a_1 = \overline{A_1B_1}$, $a_n = \overline{A_nB_n}$.
Stelle eine Berechnungsformel für a_n auf, wenn a beliebige groß sein kann.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

Aufgabe 183:

Beweise, daß diese Folgen geometrisch sind:

(a) $a_n = c\,b^{kn}$ (b) $a, = bk^{-n}$.

(c) $a_n = c\,b^{-kn}$ (d) $a_n = c\,b^{kn+s}$.

Aufgabe 184:

Von einer arithmetischen Folge ist die Summe aus dem 5. und 11. Glied 58, die Summe aus dem 6. und 14. Glied 80. Berechne a_1 a_n und a_{12}.

Aufgabe 185:

Die Summe der ersten drei Glieder einer arithmetischen Folge beträgt 15, die Summe ihrer Kehrwerte $^{59}/_{45}$. Bestimme die Glieder der Folge.

Aufgabe 186:

Berechne die Summe der ersten 20 Glieder dieser arithmetischen Folge:
$a_1 = 215$; $a_2 = 205$; $a_3 = 195$; ...

Aufgabe 187:

Es ist $a_n = 100 - 7n$ Berechne $s_n = ?$

Aufgabe 188:

Es ist $a_4 = 64$ und $a_9 = 99$ Berechne s_{25} .

Aufgabe 189:

5) Berechne die Summe der ganzen Zahlen von 37 bis 95.

6) Berechne die Summe der geraden Zahlen von 100 bis 500

7) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 1357 bis 2739

8) $528 + 540 + 552 + \ldots + 2544 = ?$

9) $264 + 421 + \ldots + 1677 = ?$

10) $412 + 360 + 308 + \ldots.$ Berechne s_{10} und s_n

11) $20 + 17 + 14 + \ldots. - 64 = ?$

12) $-218 - 200 - 182 - \ldots$
Berechne s_{20} und s_{500} . Ab welcher Nummer n ist s_n positiv ?

13) Gegeben ist die Folge a_n durch $a_1 = 4$ und $d = 3$. Berechne s_{20}

14) Gegeben ist $a_n = 105 - 5n$. Berechne s_{21} und s_n .

15) Gegeben ist $a_n = 12n - 30$. Berechne s_{30} und s_n.

16) Gegeben ist $a_n = \frac{3}{4}n + \frac{2}{3}$ Berechne s_5 ; s_{12} ; s_n

Aufgabe 190:

Berechne folgende geometrische Reihen:

	Gegeben		Gesucht
(a)	$a_1 = {}^3/_2$	$q = 4$	s_{10}
(b)	$a_1 = 5$	$q = {}^1/_2$	s_{15}
(c)	$a_1 = -2$	$q = -4$	s_8
(d)	$a_1 = -9$	$q = {}^1/_3$	s_{12}
(e)	$a_1 = 2187$	$q = {}^1/_4$	s_{12}
(f)	$a_1 = 6$	$q = -3$	s_n

Aufgabe 191:

Welche arithmetische Folge liegt dieser Reihenformel zugrunde?
(Mache zur Bestätigung die Probe indem du erneut s_n zu a_n berechnest.)

(a) $s_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$ (b) $s_n = 10\,n - 2\,n^2$ (c) $s_n = 0{,}5\,n^2 + 7{,}5\,n$

(d) $s_2 = 42,\ s_3 = 68$ (e) $s_3 = -6,\ s_5 = 10$ (d) $s_2 = -7;\ s_5 = 5$

(e) $s_4 = 184,\ s_{10} = 820$

Potenzreihen

Aufgabe 192:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

Aufgabe 193:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$$

Aufgabe 194:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$$

Aufgabe 195:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$$

Aufgabe 196:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + (-1)^n)^n}{n} x^n$$

Taylorreihen

Aufgabe 197:

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - xy = 0, \quad y(0) = 1$$

mit einem Potenzreihenansatz!

Aufgabe 198:

1. Entwickeln Sie die logarithmische Funktion $f(x) = ln\, x$ um die Stelle $x = 1$ in eine Taylorreihe.
2. Stellen Sie $ln\, 2$ in Form einer Zahlenreihe dar.

Aufgabe 199:

Entwickeln Sie die logarithmische Funktion $f(x) = ln\, x$ um die Stelle *a)* $x = 2$, *b)* $x = 3$ in eine Taylorreihe. Vergleichen Sie die Ergebnisse dieser Aufgabe mit den Ergebnissen der Aufgabe 1.

Aufgabe 200:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von $x - 2$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

Aufgabe 201:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um das Entwicklungszentrum x_0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -2$

Aufgabe 202:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x_0 = 2$

Aufgabe 203:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$f(x) = \frac{1}{x+2}, \qquad x_0 = 0$

Aufgabe 204:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x_0 = 4$

Aufgabe 205:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2), \qquad x_0 = 0$$

Fourierreihen

Aufgabe 206:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{R}$:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$!

Aufgabe 207:

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe!
b) Untersuchen Sie die absolute Konvergenz der Taylorreihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums!
c) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe in jedem Intervall $[a,b]$ mit $-1 < a < b < 1$ gleichmäßig konvergiert!
d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe!

Aufgabe 208:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x,\ 0 \leq x \leq \pi$

a) in eine reine Kosinusreihe,
b) in eine reine Sinusreihe!
c) Bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$!

Aufgabe 209:

Sei $a \neq 0$. Die Funktion $f(x) = e^{ax},\ -\pi < x \leq \pi$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion für $a = 1/2$!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Differentialgleichungen

Aufgabe 210:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = a \cdot y$

Aufgabe 211:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = y^2$

Aufgabe 212:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = \frac{x}{y}$

Aufgabe 213:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = -x \cdot y$

Aufgabe 214:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = \frac{y}{x}$

Aufgabe 215:

Es ist die Differentialgleichung $(1+e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$ unter Beachtung der Forderung zu lösen, dass die Lösungskurve durch den Punkt $P_1(1,1)$ gehen soll.

Aufgabe 216:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$(1+y^2)dx + xydy = 0$

Aufgabe 217:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = -\frac{y}{x}$ für x>0, y>0

Aufgabe 218:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' + x \cdot y^2 = 0$

Aufgabe 219:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = 1 + x - y$

Aufgabe 220:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$2x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y$

Aufgabe 221:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$(1 + x^2) \cdot xy \cdot y' = 1 + y^2$

Aufgabe 222:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' + x \cdot y^2 = 0$

Aufgabe 223:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2}$

Aufgabe 224:

Lösen Sie bitte folgende DGL:

$y' \cdot y + x = 0$

Aufgabe 225:

Ermitteln Sie die partikuläre Lösung, die die gegebene Anfangsbedingung erfüllen:

$y' \cdot y^2 + x^2 - 1 = 0$

$mit\ x_0 = 2; y(x_0) = y_0 = 1$

Aufgabe 226:

Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichung:

$$y' + \frac{2x^2 - 1}{x} \cdot y = e^{-x^2} \cdot \ln(x), \quad x > 0$$

Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung an.

Wie lautet die Lösung der inhomogenen Gleichung, für die gilt y(1)=1?

Aufgabe 227:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y' + x \cdot y^2 = 0$$

Aufgabe 228: (5)

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$y' = y^2 + 1, \qquad y(0) = \sqrt{3}.$$

Aufgabe 229:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 2 \cdot y - 5$ und bestimmen Sie mit dem gebenden Anfangswert $y(0) = \frac{3}{2}$ die dazugehörige Differentialgleichung.

Aufgabe 230:

Geben Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu dem gegebenen Anfangswert an.

$y'(x) \cdot y(x) = x^2 + 3$ mit $y(0) = 0$

Aufgabe 231:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen.

$$y' = 1 + 2\,\frac{y}{x}$$

$$x - y + x\,y' = 0$$

$$x\,y' = y + x\,\tan\frac{y}{x}$$

$$x\,y' = y\,(\ln y - \ln x), \qquad y(1) = 1$$

$$x\,y' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad y(1) = 0$$

Aufgabe 232:

Lösen Sie folgende linearen Differentialgleichungen.

$$y' + 2\,y = e^{-x}, \qquad y(0) = 4$$

$$y' + \frac{y}{x} = \cos x\,, \qquad y(\pi) = 1$$

$$x\,y' + y = 6\,x^2, \qquad y(1) = 3, \qquad y(1) = -1$$

$$x\,y' + y = 4\,x^3 - 2\,x^2$$

$$y(1) = -3, \qquad y(1) = 3$$