Aufgabensammlung

Mathematik II

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart

Campus Horb

Dozent

Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Regeln

Keine Handys, Smartphones, Tablets, Notebooks, MP3-Player, und sonstige elektronischen Geräte.

(Sollten auch nicht auf dem Tisch liegen)

Sollten Sie unbedingt kommunizieren müssen, so gehen Sie freiwillig aus dem Raum oder Sie bekommen von mir eine Pause zugeteilt, in der Sie in Ruhe Ihre Kommunikation durchführen können.

Lösungen zu den Aufgaben

Internet

http://www.cs-geiger.de/wiw.htm

Computerseminare, Mathematik und Statistik

Mathematik 1 + 2 Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart Campus Horb

Skripte	**Lösungen**
Mathematik 1	
Manuskript	
Aufgabensammlung 1	
Aufgaben	Lösung
Mathematik 2	
Manuskript	
Aufgabensammlung 2	
Aufgaben	Lösung
Formelsammlung	
Formelsammlung	

Klausuren

Alte Klausuren finden Sie in den jeweiligen Wiederholungsaufgaben am Ende des Kapitels in de Aufgabensammlung.

Lösung Stützkurs 1. Semester

1. Stützkurs	Lösung
2. Stützkurs	Lösung
3. Stützkurs	Lösung
4. Stützkurs	Lösung
5. Stützkurs	Lösung

Lösung Stützkurs 2. Semester

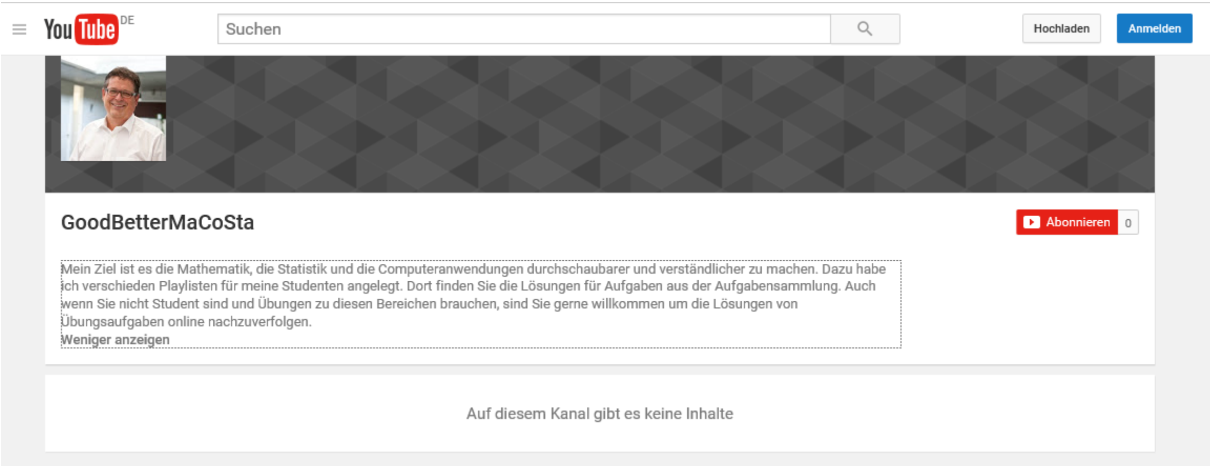
1. Stützkurs	Lösung
2. Stützkurs	Lösung
3. Stützkurs	Lösung
4. Stützkurs	Lösung
5. Stützkurs	Lösung

Roland Geiger - Rosenstr.23 - 72631 Aichtal
Fon 07127-960750 - Fax 07127-960751 - cs.geiger@t-online.de

QR-Code Internet

YouTube

http://www.youtube.com/channel/UCro4ldWf20euH8u1SXU3l-g

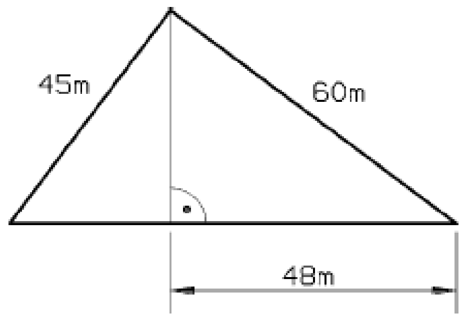


QR-Code YouTube

Trigonometrische Zusammenhänge

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des unten aufgeführten Dreiecks. $(A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h)$



Lösung:

Im rechten Dreieck die fehlende Strecke berechnen (Höhe des Gesamtdreiecks):

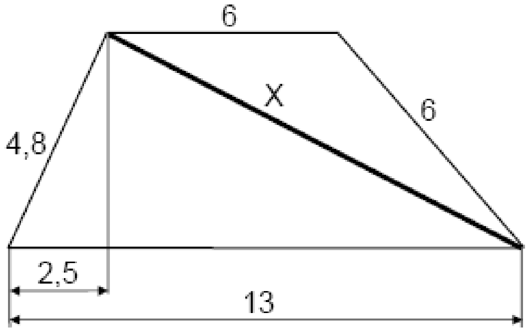
$$60^2 = 48^2 + h^2$$
$$h^2 = 60^2 - 48^2$$
$$h = \sqrt{60^2 - 48^2}$$
$$h = 36$$

Im linken Dreieck die fehlende Strecke berechnen (Teilstück der Grundseite):

$$45^2 = 36^2 + x^2$$
$$x^2 = 45^2 - 36^2$$
$$x = \sqrt{45^2 - 36^2}$$
$$x = 27$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (27 + 48) \cdot 36$$
$$A = 1.350\ m^2$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Länge der Strecke x.

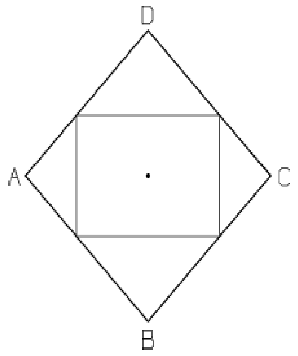


Lösung:

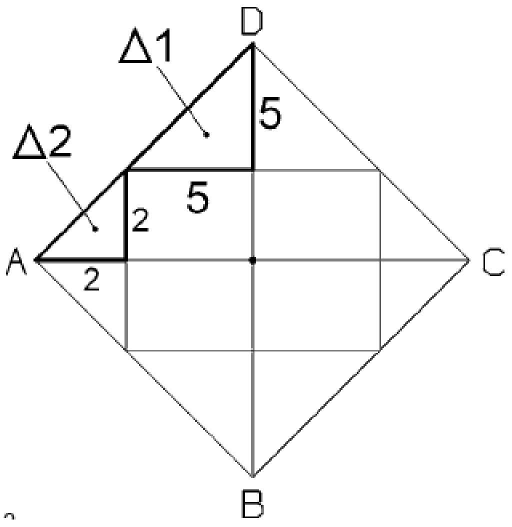
$$4{,}8^2 = 2{,}5^2 + \mathrm{h}^2$$
$$\mathrm{h}^2 = 4{,}8^2 - 2{,}5^2$$
$$\mathrm{h} = \sqrt{4{,}8^2 - 2{,}5^2}$$
$$h = 4{,}1$$
$$x^2 = h^2 + (13 - 2{,}5)^2$$
$$x^2 = 4{,}1^2 + (13 - 2{,}5)^2$$
$$x = \sqrt{4{,}1^2 + (13 - 2{,}5)^2}$$
$$x = 11{,}27$$

Aufgabe 3:

Einem Quadrat ABCD ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 10cm und 4cm einbeschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrates.



Lösung:



$$\mathrm{A}_{\mathrm{Rechteck}} = 10\ \mathrm{cm} \cdot 4\ \mathrm{cm} = 40\ \mathrm{cm}^2$$
$$\mathrm{A}_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot 5\ \mathrm{cm} \cdot 5\ \mathrm{cm} = 12{,}5\ \mathrm{cm}^2$$

$$A_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot 2\ \mathrm{cm} \cdot 2\ \mathrm{cm} = 2\ \mathrm{cm}^2$$

$$A_{\mathrm{Gesamt}} = A_{\mathrm{Rechteck}} + 4 \cdot A_{\Delta 1} + 4 \cdot A_{\Delta 2}$$

$$A_{\mathrm{Gesamt}} = 40\ \mathrm{cm}^2 + 4 \cdot 12{,}5\ \mathrm{cm}^2 + 4 \cdot 2\ \mathrm{cm}^2$$

$$A_{\mathrm{Gesamt}} = 98\ \mathrm{cm}^2$$

Aufgabe 4:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit p=4cm und q=3cm. Bestimmen Sie die Höhe h.

Lösung:

Nach dem Höhensatz gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$

$$h = \sqrt{p \cdot q}$$

$$h = \sqrt{4 \cdot 3}$$

$$h = 3{,}46$$

Aufgabe 5:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit p=2cm und c= 5cm. Bestimmen Sie die Strecken a und b.

Lösung:

Nach dem Kathetensatz gilt:

$$a^2 = p \cdot c$$

$$a = \sqrt{p \cdot c}$$

$$a = \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$a = 3{,}16$$

$$b^2 = q \cdot c$$

$$b = \sqrt{q \cdot c}$$

$$b = \sqrt{(c - p) \cdot c}$$

$$b = \sqrt{(5 - 2) \cdot 5}$$

$$b = 3{,}87$$

Aufgabe 6:

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist bekannt, dass die Höhe 5cm lang ist und der Hypothenusenabschnitt p=6,1cm lang ist und p um 2cm länger ist als der Hypothenusenabschnitt q. Berechnen Sie alle fehlenden Seitenlängen des Dreiecks ABC und berechnen außerdem den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung:

Berechnung der Seite c:

$$c = p + q = 6{,}1 + 4{,}1$$

$$c = 10{,}2$$

Berechnung der Seite b:

$$b^2 = 5^2 + 6{,}1^2$$

$$b = \sqrt{5^2 + 6{,}1^2}$$

$$b = 7{,}89$$

Berechnung der Seite a:

$$a^2 = 5^2 + 4{,}1^2$$

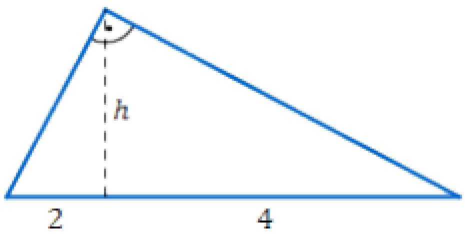
$$b = \sqrt{5^2 + 4{,}1^2}$$

$$a = 6{,}47$$

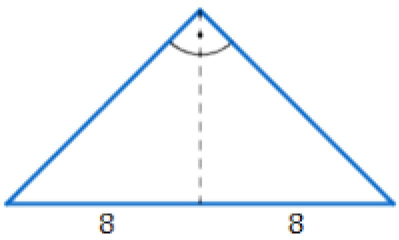
Aufgabe 7:

Welches der folgenden Dreiecke von A bis D hat eine Höhe von $\sqrt{8}$?

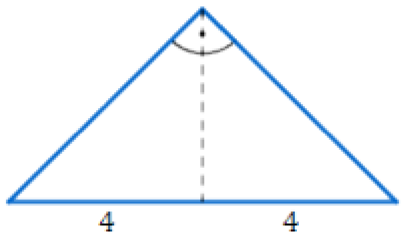
A:



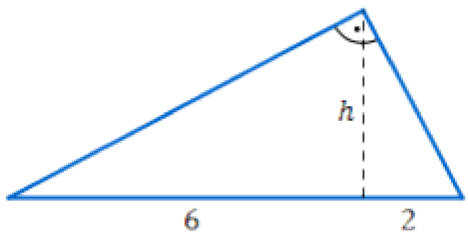
B:



C:



D:



Lösung:

Nach dem Höhensatz gilt:

A:

$$h^2 = p \cdot q$$

$$h = \sqrt{p \cdot q}$$

$$h = \sqrt{2 \cdot 4}$$
$$h = 2{,}83$$

B:

$$h^2 = p \cdot q$$
$$h = \sqrt{p \cdot q}$$
$$h = \sqrt{8 \cdot 8}$$
$$h = 8$$

C:

$$h^2 = p \cdot q$$
$$h = \sqrt{p \cdot q}$$
$$h = \sqrt{4 \cdot 4}$$
$$h = 4$$

D:

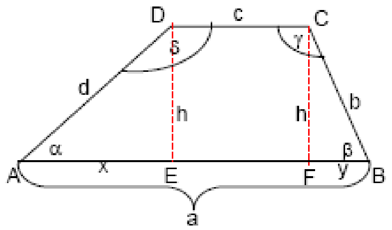
$$h^2 = p \cdot q$$
$$h = \sqrt{p \cdot q}$$
$$h = \sqrt{6 \cdot 2}$$
$$h = 4$$

Lösung: Dreieck A

Aufgabe 8:

Gegeben ist ein Trapez durch a=9cm, c=3cm, h=5cm und $\alpha = 42°$

Berechnen Sie alle Strecken und Winkel im Trapez (siehe Zeichnung).



Lösung:

Im Teildreieck AED folgt:

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$d = \frac{5}{\sin(42°)} = 7{,}47$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\tan\alpha}$$

$$x = \frac{5}{\tan(42°)} = 5{,}55$$

Als weiteres gilt:

$$\alpha + \delta = 180°$$

$$\delta = 180° - \alpha$$

$$\delta = 180° - 42°$$

$$\delta = 138°$$

Für die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ gilt:

$$\overline{\mathrm{AB}} = x + c + y$$

$$y = \overline{\mathrm{AB}} - x - c$$

$$y = 9 - 5{,}55 - 3$$

$$y = 0{,}45$$

Damit können wir im Dreieck FBC folgendes berechnen:

$$\tan\beta = \frac{h}{y}$$

$$\tan \beta = \frac{5}{0,45} = 84,86°$$

$$\sin \beta = \frac{h}{b}$$

$$b = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$b = \frac{5}{\sin\,(84,86°)} = 5,02$$

Daraus folgt:

$$\gamma = 180° - \beta$$

$$\gamma = 180° - 84,86°$$

$$\gamma = 95,14°$$

Aufgabe 9:

Gegeben sind in einem beliebigen Dreieck die Seite c=18cm und die Winkel $\gamma = 118°$ und $\beta = 35°$. Berechnen Sie die Seiten a und b sowie den Winkel α.

Lösung:

Die Summe der Winkel in einem beliebigen Dreieck ist 190°.

Daraus folgt für unsere Aufgabe:

$$\mathrm{\alpha} = 180° - \mathrm{\beta} - \mathrm{\gamma} = 180° - 35° - 118° = 27°$$

$$\mathrm{\alpha} = 27°$$

Mit dem Sinussatz können wir folgendes berechnen:

$$\frac{\mathrm{b}}{\sin\,(\mathrm{\beta})} = \frac{\mathrm{c}}{\sin\,(\mathrm{\gamma})}$$

$$\mathrm{b} = \frac{\mathrm{c}}{\sin\,(\mathrm{\gamma})} \cdot \sin(\mathrm{\beta}) = \frac{18\ \mathrm{cm}}{\sin\,(118°)} \cdot \sin(35°) = 11,69\ \mathrm{cm}$$

$$\frac{\mathrm{c}}{\sin\,(\mathrm{\gamma})} = \frac{\mathrm{a}}{\sin\,(\mathrm{\alpha})}$$

$$a = \frac{\mathrm{c}}{\sin\,(\mathrm{\gamma})} \cdot \sin(\alpha) = \frac{18\ \mathrm{cm}}{\sin(118°)} \cdot \sin(27°) = 9,26\ cm$$

Aufgabe 10:

Gegeben sind die Größen a=7,5cm, c=8,2cm und $\beta = 85°$ in einem beliebigen Dreieck. Berechnen Sie die Seite b und die Winkel α und γ.

Lösung:

Hier lässt sich kein Sinussatz anwenden.

Hier wird der Kosinussatz angewendet:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$

$$b = \sqrt{7{,}5cm^2 + 8{,}2cm^2 - 2 \cdot 7{,}5cm \cdot 8{,}2cm \cdot \cos(85°)} = 10{,}62\ cm$$

Zu der Seite b haben wir auch den Gegenwinkel, also können wir jetzt den Sinussatz verwenden:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(\beta)}{b} \cdot a = \frac{\sin(85°)}{10{,}62cm} \cdot 7{,}5cm = 0{,}7035$$

$$\alpha = 44{,}71°$$

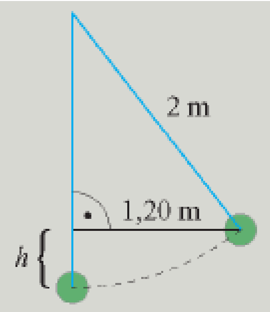
Der Winkel γ lasst sich wieder über die Winkelsumme berechnen:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 44{,}71° - 85° = 50{,}29°$$

$$\gamma = 50{,}29°$$

Aufgabe 11:

Auf dem Bild sieht man ein Pendel, das 1,20m zur Seite ausgelenkt wurde. Wie viel Zentimeter hat das Pendel an Höhe h gewonnen?



Lösung:

$$2^2 = x^2 + 1{,}2^2$$

$$x^2 = 2^2 - 1{,}2^2$$

$$x = \sqrt{2^2 - 1{,}2^2}$$

$$x = 1{,}6$$

$$h = 2 - x = 2\,m - 1{,}6\,m = 0{,}4\,m$$

$$h = 0{,}4\,m$$

Aufgabe 12:

Für den Bau einer pyramidenförmigen Lautsprecherbox sind vier gleichschenklige Dreiecksflächen aus Spanplatten gesägt worden. Die Höhe der Dreiecke beträgt $\mathrm{h_a} = 90\mathrm{cm}$. Welche Höhe hat die fertige Box bei einer quadratischen Grundfläche der Länge a=45cm?

Lösung:

$$\mathrm{h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\mathrm{h^2 = h_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\mathrm{h = \sqrt{h_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{90^2 - 22{,}5^2} = 87{,}14\ cm}$$

Aufgabe 13:

Ein 90m hoher Funkmast wird bei $\frac{4}{5}$ seiner Höhe durch 4 Spannseile befestigt. Die Befestigungspunkte der Spannseile am Boden sind jeweils 5m vom Fuß des Mastes entfernt und bilden ein Quadrat.

a) Wie lang sind die 4 Seile zusammen?

b) Wenn man sie Fläche um die Befestigungspunkte herum einzäunen würde, wie Lang wäre der Zaun?

Lösung:

a)

Die Länge eines Seiles ergibt sich aus:

$$x^2 = 72^2 + 5^2$$

$$\mathrm{x} = \sqrt{72^2 + 5^2} = 72{,}17\ \mathrm{m}$$

Die Länger von vier Seilen:

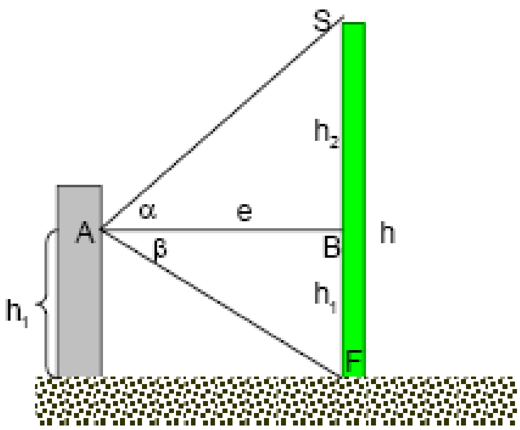
$$\mathrm{L} = 4 \cdot 72{,}17\ \mathrm{m} = 288{,}68\ \mathrm{m}$$

Aufgabe 14:

Von einem Turmfenster in 12m Höhe sieht man die Spitze eines Schornsteins unter dem Höhenwinkel (Erhebungswinkel) $\alpha = 42°$ und den Fußpunkt unter dem Tiefenwinkel (Senkungswinkel) $\beta = 32°$

Wie weit ist der Schornstein vom Turm entfernt und wie hoch ist er?

Lösung:



Im Dreieck ABS gilt folgendes:

$$\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{h}_2}{\mathrm{e}}$$

$$\mathrm{h}_2 = \mathrm{e} \cdot \tan(\alpha)$$

Im Dreieck ABF gilt folgendes:

$$\tan(\beta) = \frac{h_1}{e}$$

$$e = \frac{h_1}{\tan(\beta)}$$

Die Gesamthöhe ergibt sich aus:

$$h = h_1 + h_2 = h_1 + e \cdot \tan(\alpha) = h_1 + \frac{h_1}{\tan(\beta)} \cdot \tan(\alpha)$$

$$= \frac{h_1 \cdot \tan(\beta) + h_1 \cdot \tan(\alpha)}{\tan(\beta)}$$

$$= h_1 \cdot \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{\tan(\beta)}$$

$$h = h_1 \cdot \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{\tan(\beta)} = 12 \cdot \frac{\tan(32°) + \tan(42°)}{\tan(32°)} = 29{,}29\ \mathrm{m}$$

$$h = 29{,}29\ m$$

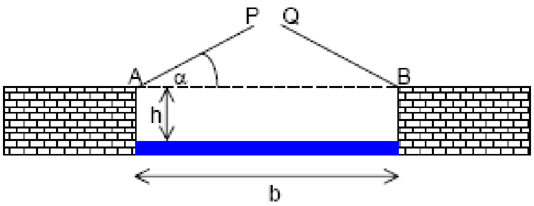
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 15:

Über einen Fluss mit der Breit b=13m führt eine Zugbrücke. Das Gelenk A der Brücke liegt h=3,7m über dem Wasserspiegel. Die Brücke lässt sich höchstens so weit öffnen, dass die beiden Brückenhälften unter dem Winkel $\alpha = 31°$ gegen die horizontale geneigt sind.

a) Wie hoch liegen die Punkte P und Q über dem Wasserspiegel, wenn die Brücke so weit wie möglich geöffnet ist? Wie weit sind sie auseinander?

b) Das Deck eines Schiffes ist 6m breit und ragt 4,5m aus dem Wasser. Das Schiff fährt genau in der Mitte des Flusses. Entscheiden Sie per Rechnung, ob das Schiff durchfahren kann, wenn die Zugbrücke soweit wie möglich geöffnet ist.



Lösung:

a)

Als erstes berechnen wir die Höhe des Punktes P(Q) von der Wasseroberfläche.

In Dreieck AWP gilt folgendes:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{PW}}{\overline{AP}}$$

$$\overline{PW} = \overline{AP} \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin(31°) = \frac{1}{2} \cdot 13m \cdot \sin(31°) = 3{,}35\ m$$

$$\overline{PW} = 3{,}35\ m$$

Die Höhe der Punkte ergibt sich aus:

$$\overline{FP} = h + \overline{PW} = 3{,}7\ m + 3{,}35\ m = 7{,}05\ m$$

$$\overline{FP} = 7{,}05\ m$$

Wie weit sind die beiden Punkte auseinander:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AW}}{\overline{AP}}$$

$$\overline{AW} = \overline{AP} \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 13m \cdot \cos(31°) = 5{,}57\ m$$

$$\overline{AW} = 5{,}57\ m$$

Für den Abstand gilt:

$$\overline{PQ} = b - 2 \cdot \overline{AW} = 13m - 2 \cdot 5{,}57m = 1{,}86 \text{ m}$$

$$\overline{PQ} = 1{,}86 \text{ m}$$

b)

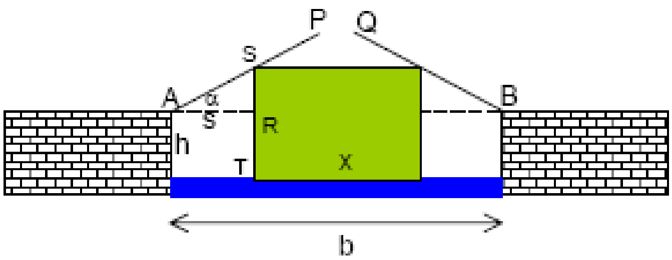
Das Schiff, welches unter der Zugbrücke durchfahren soll hat eine Breite von x=6m.

Wenn das Schiff genau in der Mitte fährt, bleibt rechts und links vom Schiff der gleiche Abstand frei:

$$s = \frac{1}{2}(b - x) = \frac{1}{2}(13m - 6m) = 3{,}5 \text{ m}$$

$$s = 3{,}5 \text{ m}$$

Nun müssen wir ausrechnen, wie hoch das Schiff am linken (oder auch am rechten) Rand sein darf, damit es unter der Brücke durchfahren kann:



Also, wie hoch der Punkt S über der Wasserfläche liegen kann:

$$\overline{AR} = 3{,}5m$$

$$\alpha = 31°$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{SR}}{\overline{AR}}$$

$$\overline{SR} = \overline{AR} \cdot \tan(\alpha) = 3{,}5m \cdot \tan(31°) = 2{,}10 \text{ m}$$

Für die zulässige Höhe des Schiffes ergibt sich folgendes:

$$\overline{ST} = h + \overline{SR} = 3{,}70m + 2{,}10m = 5{,}80 \text{ m}$$

Da das Schiff nur 4,50 m aus dem Wasser ragt, kann das Schiff die Brücke passieren.

Aufgabe 16:

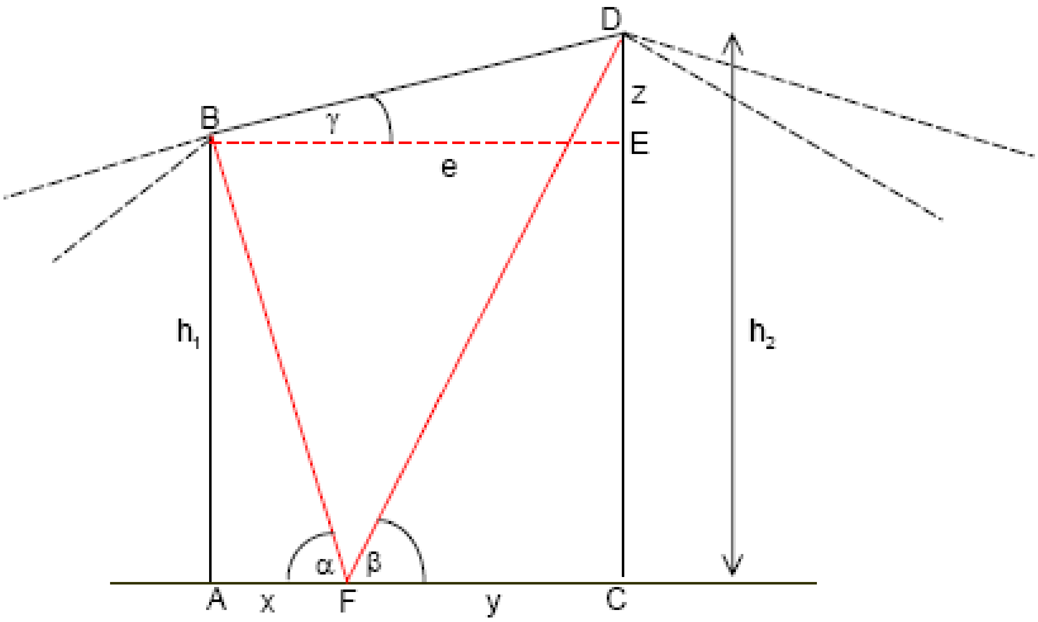
Auf einer horizontalen Ebene stehen zwei senkrechte Sendemasten AB und CD, die 180m voneinander entfernt sind. Auf der Verbindungsstrecke ihrer Fußpunkte A und C befindet sich eine Verankerung F, von der aus Halteseile zu den Mastspitzen führen. Von F aus erscheint der 48m hohe Mast AB unter dem Winkel $\alpha = 36{,}5°$, der Sendemast CD unter $\beta = 29°$.

a) Wie weit ist die Verankerung F von den Fußpunkten A und C der beiden Sendemasten entfernt.

b) Wie hoch ist der Sendemast CD?

c) Zwischen den beiden Mastspitzen ist ein Antennendraht gezogen. Wie lang ist dieser Draht, wenn er wegen seines Durchhangs um 15% länger ist als der Abstand der Mastspitzen?

Lösung:



a)

In dem Dreieck mit dem rechten Winkel AFB gilt folgendes:

$$\tan(\alpha) = \frac{h_1}{x}$$

$$x = \frac{h_1}{\tan(\alpha)} = \frac{48\text{m}}{\tan(36{,}5°)} = 64{,}87\text{ m}$$

Damit ergibt sich für die Strecke y:

$$y = e - x = 180\text{m} - 64{,}87\text{m} = 115{,}13\text{ m}$$

$$y = 115{,}13\text{ m}$$

b)

In dem rechtwinkligen Dreieck FCD gilt folgendes:

$$\tan(\beta) = \frac{h_2}{y}$$

$$h_2 = y \cdot \tan(\beta) = 115{,}13\text{m} \cdot \tan(29°) = 63{,}82\text{m}$$

$$h_2 = 63{,}82\text{m}$$

c)

In dem rechtwinkligen Dreieck BED gilt folgendes:

$$\tan(\gamma) = \frac{z}{e} = \frac{h_2 - h_1}{e} = \frac{63{,}82m - 48m}{180m} = 0{,}088$$

$$\gamma = 5{,}03°$$

Daraus folgt:

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AC}}{\cos(\gamma)} = \frac{180m}{\cos(5{,}03°)} = 180{,}70\text{ m}$$

Das Seil ist um 15% länger:

$$L = \overline{BD} \cdot 1{,}15 = 180{,}70m \cdot 1{,}15 = 207{,}81\text{ m}$$

Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 17:

Rechnen Sie den Winkel 20° in Bogenmaß um.

Lösung:

$$\text{Bogenmaß} = \text{Grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Bogenmaß} = 20° \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Bogenmaß} = \frac{20}{180} \cdot \pi = \frac{1}{9}\pi$$

Aufgabe 18:

Rechnen Sie das Bogenmaß $\frac{13}{8}\pi$ in ein Gradmaß um.

Lösung:

$$\text{Grad} = \text{Bogenmaß} \cdot \frac{180}{\pi}$$

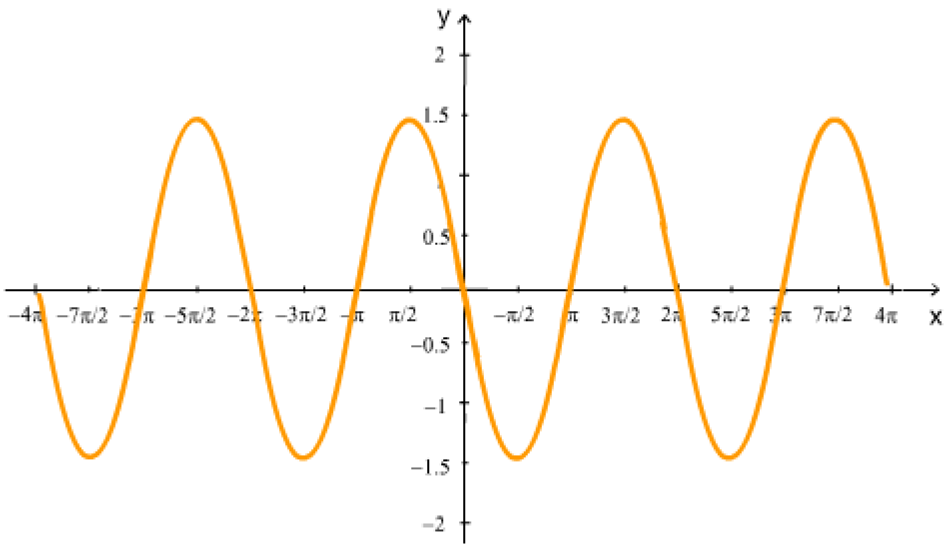
$$\text{Grad} = \frac{13}{8} \cdot \pi \cdot \frac{180}{\pi} = 294{,}5°$$

Aufgabe 19:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = -1{,}5 \cdot \sin(x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Lösung:

A=-1,5

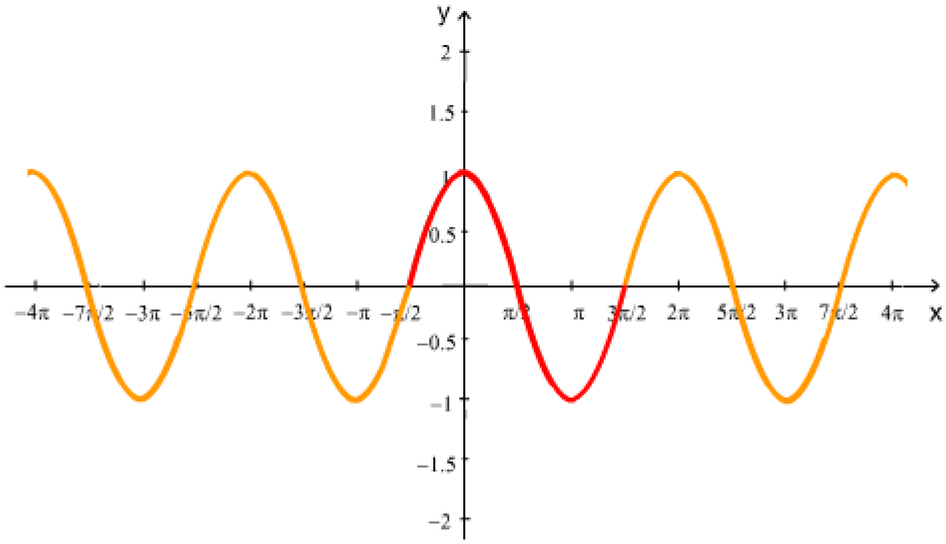


Aufgabe 20:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Lösung:

$$c = \frac{\pi}{2}$$

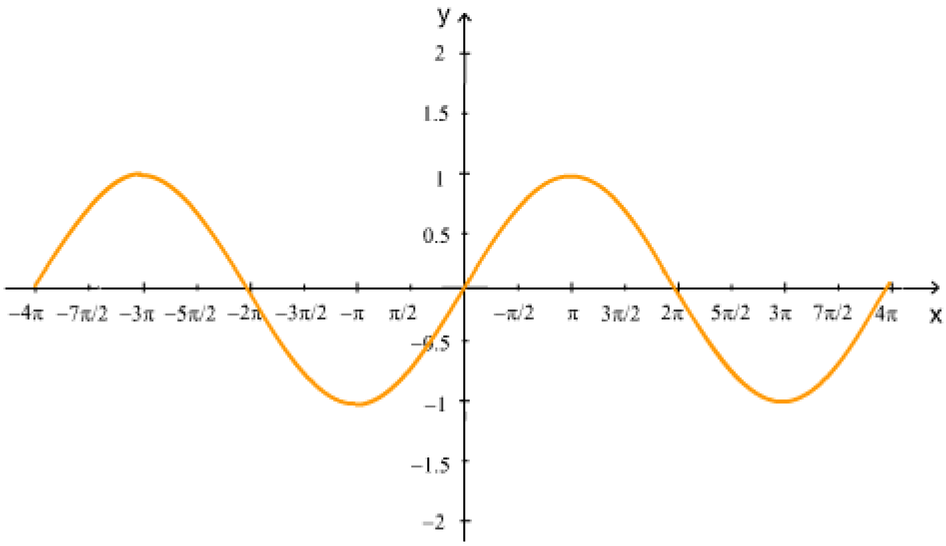


Aufgabe 21:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \sin(0{,}5x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Lösung:

b=0,5

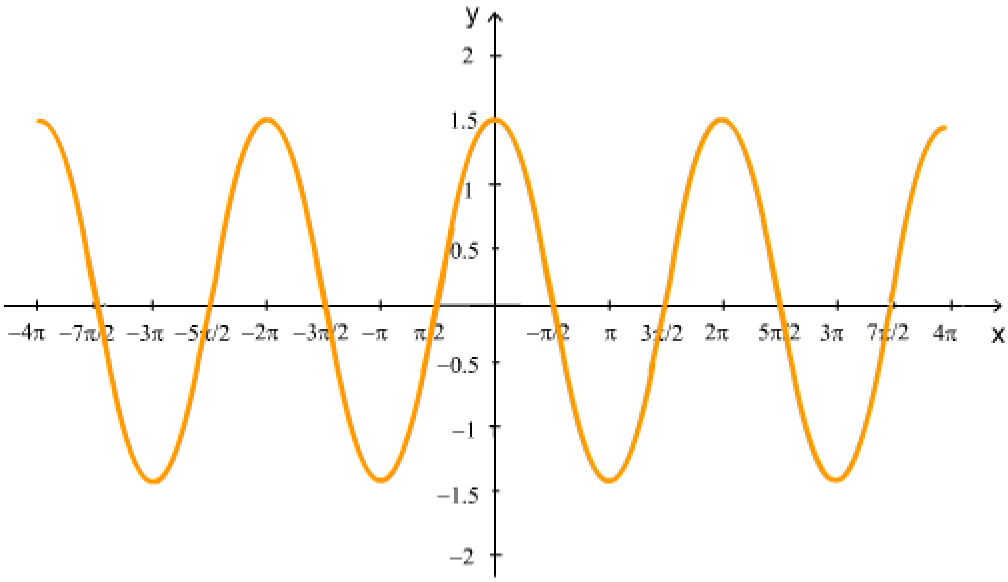


Aufgabe 22:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = 1{,}5 \cdot \cos(x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Lösung:

$$A = 1{,}5$$

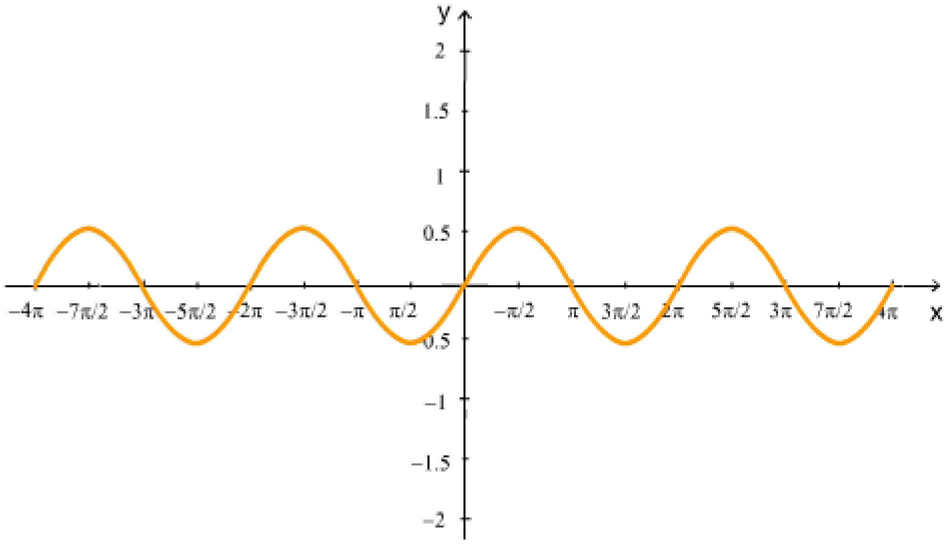


Aufgabe 23:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Lösung:

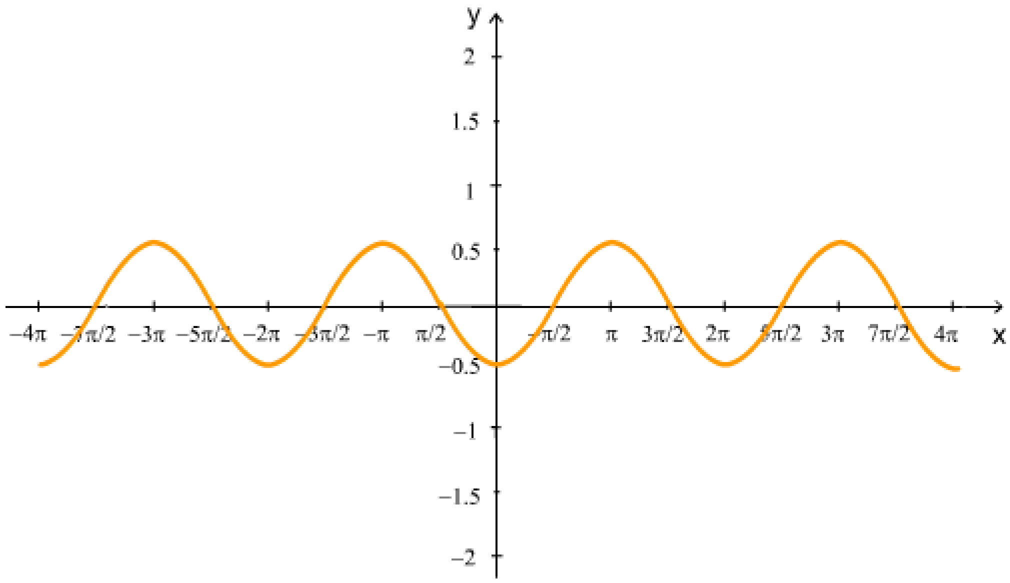
A=0,5


y
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
x
−4π
−7π/2
−3π
−5π/2
−2π
−3π/2
−π
π/2
−π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π

Aufgabe 24:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Amplitude A.

Lösung:

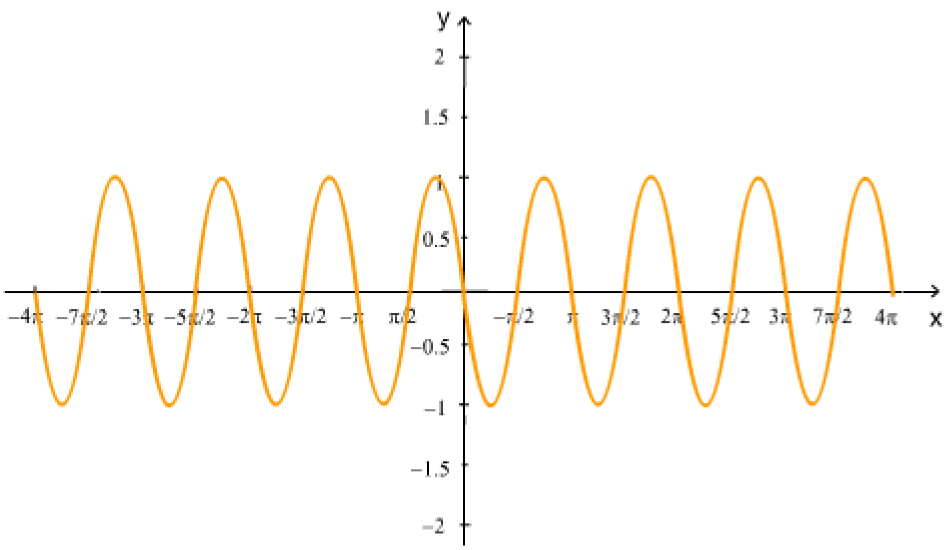


Aufgabe 25:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \sin(-2x)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Lösung:

b=-2

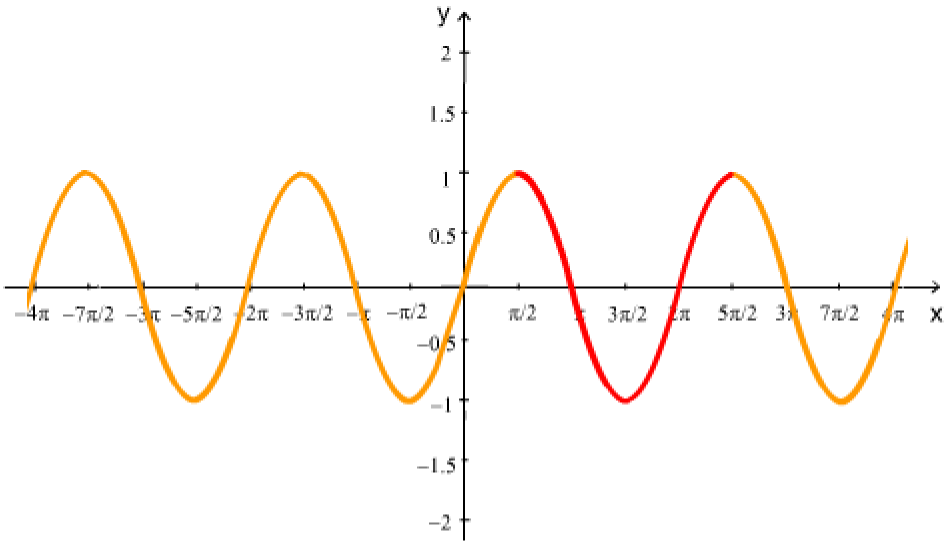


Aufgabe 26:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Lösung:

$$c = -\frac{\pi}{2}$$

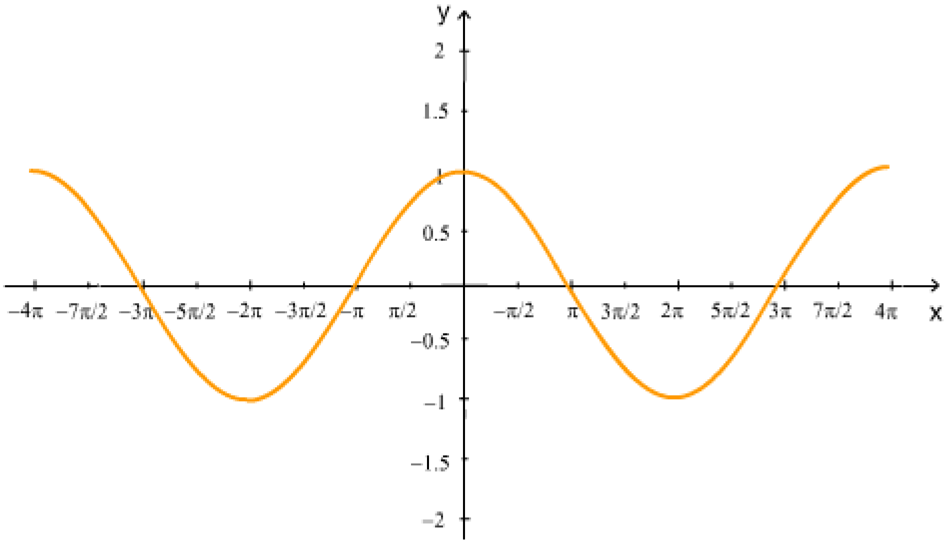


Aufgabe 27:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Lösung:

b=0,5

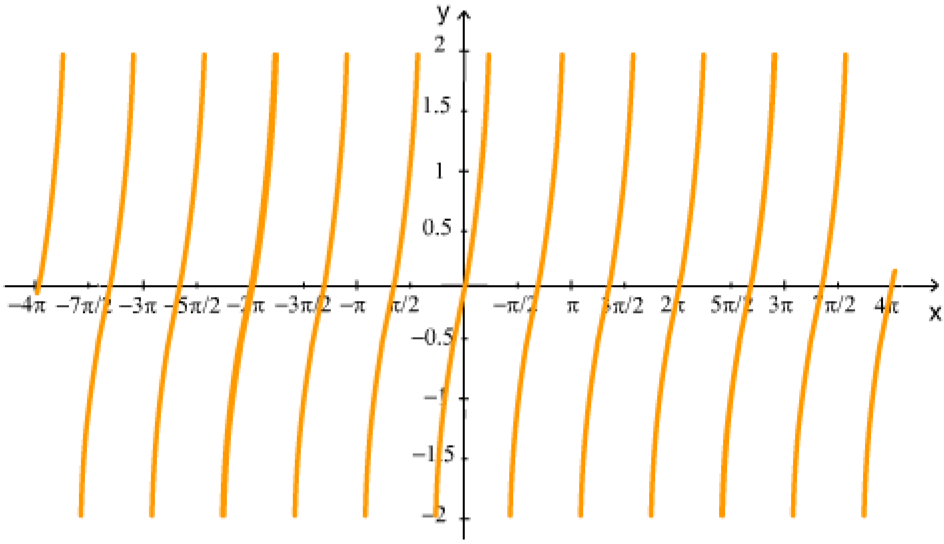


Aufgabe 28:

Zeichen Sie die Funktion $\mathrm{f(x)} = \tan\left(\frac{3}{2}\mathrm{x}\right)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Lösung:

b=1,5

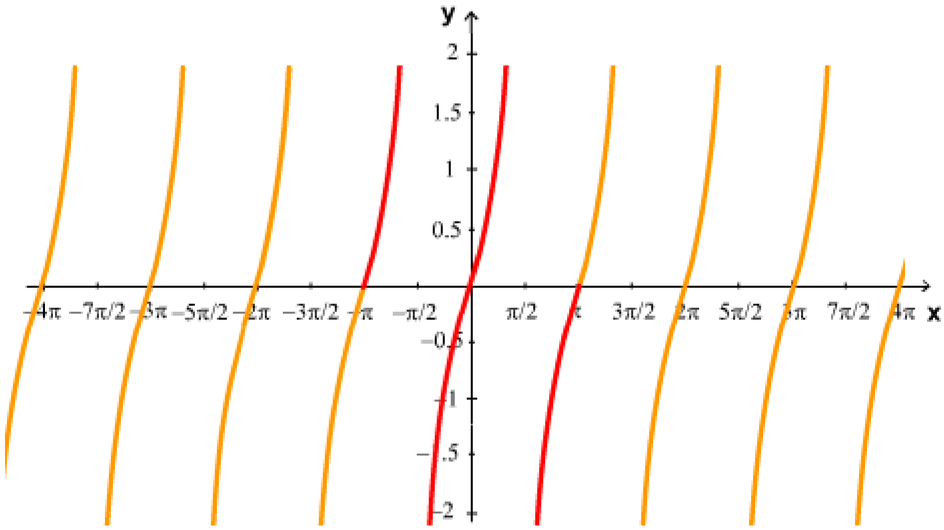


Aufgabe 29:

Zeichen Sie die Funktion $\mathrm{f(x)} = \tan(\mathrm{x} + \pi)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Lösung:

$$c = \pi$$

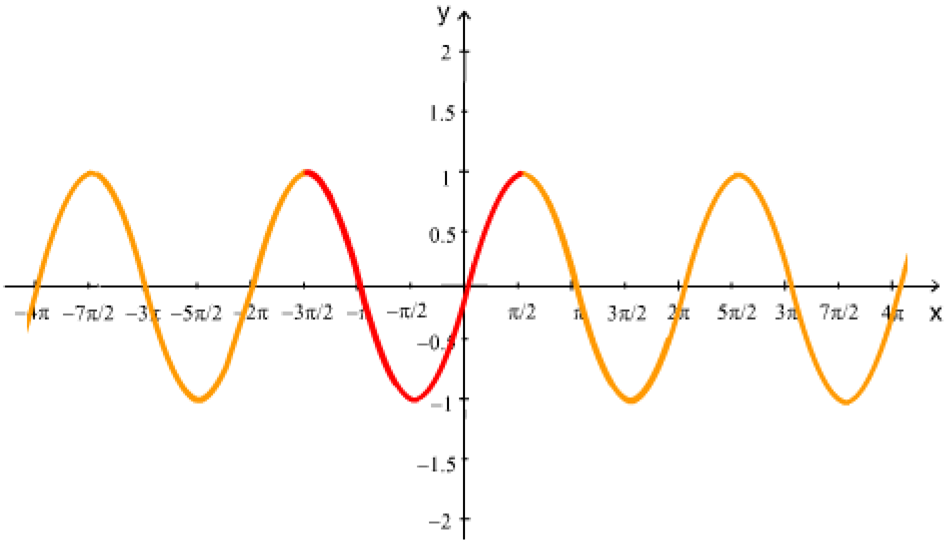


Aufgabe 30:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Lösung:

$$c = \frac{3}{2}\pi$$



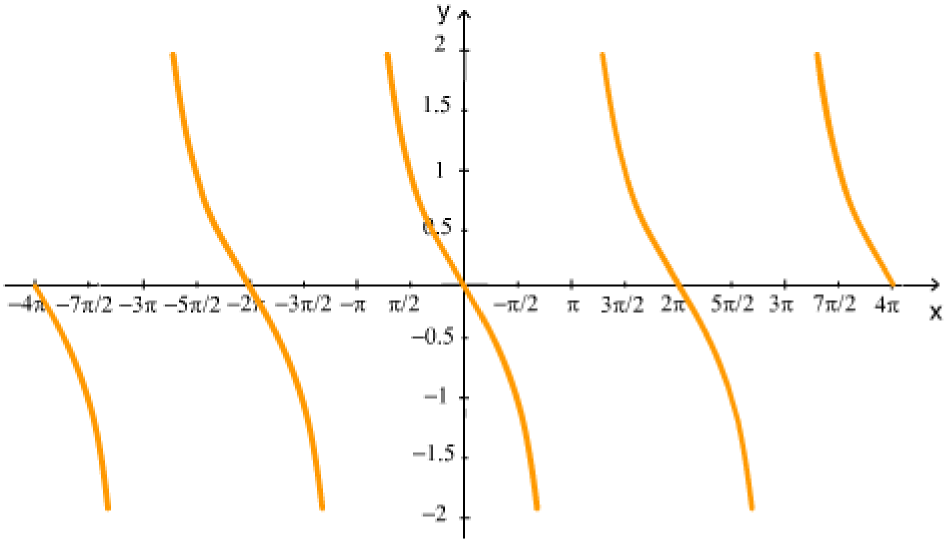
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 31:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \tan\left(-\frac{1}{2}x\right)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Periode b.

Lösung:

b=-0,5

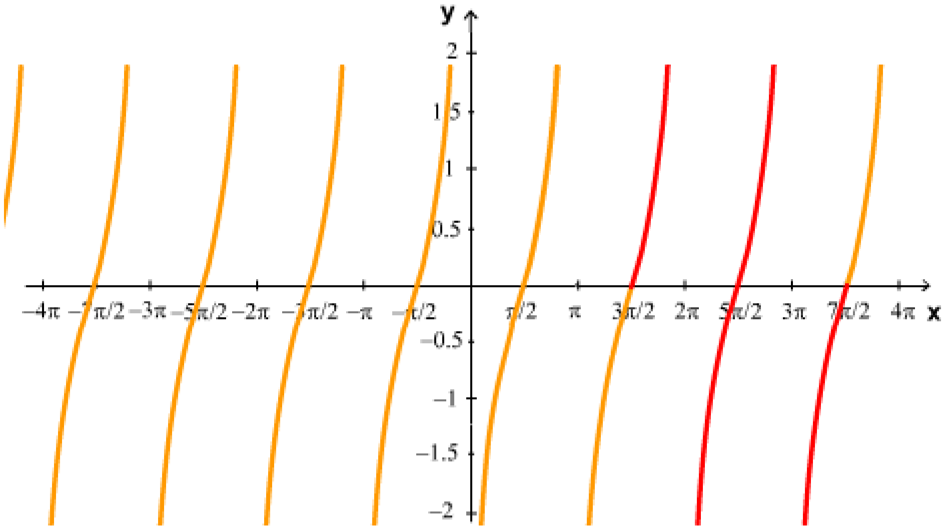


Aufgabe 32:

Zeichen Sie die Funktion $f(x) = \tan\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$ in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Phase c.

Lösung:

$$c = -\frac{3}{2}\pi$$


y
x
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−4π
−7π/2
−3π
−5π/2
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π

Trigonometrische Gleichungen

Aufgabe 33:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Lösung:

$$\sin(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Laut der Formelsammlung:

$$\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Daraus ergibt sich eine erste Lösung:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{1}{4}\pi$$

Im zweiten Feld ergibt sich eine weitere Lösung:

$$x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Im Definitionsbereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ ergeben sich weitere Lösungen:

$$x_3 = x_1 - 2\pi = \frac{1}{4}\pi - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$$

$$x_5 = x_1 + 2\pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$$

$$x_6 = x_2 + 2\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ \frac{1}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Aufgabe 34:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq 2\pi$.

Lösung:

Aus

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

folgt

$$x' = 30° = \frac{1}{6}\pi$$

Da der Sinus nur im 3. und 4. Feld negativ ist, ergeben sich folgende Lösungen:

$$x_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right\}$$

Aufgabe 35:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}3$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Lösung:

Der Taschenrechner liefert für das erste Feld:

$$x_1 = 1.266$$

Der Bereich geht von

$$-\pi \leq x \leq +\pi$$

Daraus ergibt sich die zweite Lösung:

$$x_2 = 0 - 1{,}266 = -1{,}266$$

$$\mathbb{L} = \{\pm 1{,}266\}$$

Aufgabe 36:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -0{,}5$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Laut der Tabelle aus der Formelsammlung ergibt sich für die Gleichung eine erste Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Da der Kosinus im zweiten und im dritten Feld negativ ist:

$$x_2 = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

Da der Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$ geht, existieren auch die entsprechenden negativen Lösungen.

$$\mathbb{L} = \left\{\pm\frac{2}{3}\pi; \pm\frac{4}{3}\pi\right\}$$

Aufgabe 37:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Lösung:

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

$$\sin(x) = \frac{4}{3}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, weil alle Sinuswerte in dem Intervall $[-1; 1]$ liegen.

$$\mathbb{L} = \{\quad\}$$

Aufgabe 38:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Der Kosinus ist laut Formelsammlung bei

$$x_1 = \frac{1}{2}\pi$$

und periodisch wieder bei

$$x_2 = \frac{3}{2}\pi$$

im vorgegebenen Bereich Null.

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right\}$$

Aufgabe 39:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}8$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Erste Lösung mit dem Taschenrechner berechnet:

$$x_1 = 0{,}644$$

Diese Lösung befindet sich im ersten Feld,

und periodisch wieder bei

$$x_2 = 2\pi - 0{,}644 = 5{,}639$$

$$\mathbb{L} = \{0{,}644; 5{,}639\}$$

Aufgabe 40:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Erste Lösung mit dem Taschenrechner berechnet:

$$x_1 = 2{,}186$$

Diese Lösung befindet sich im zweiten Feld,

und periodisch wieder bei

$$x' = \pi - 2{,}186 = 0{,}956$$

$$x_2 = \pi + 0{,}956 = 4{,}096$$

$$\mathbb{L} = \{0{,}956; 4{,}096\}$$

Aufgabe 41:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan(x) = -\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Aus der Formelsammlung der gibt sich die erste Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Geht man eine Periode zurück, so erhält man eine weiter Lösung:

$$x_2 = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi$$

Geht man von der x1-Lösung eine Periode vorwärts, so erhält man eine weitere Lösung:

$$x_3 = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Aufgabe 42:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

damit ergibt sich:

$$\cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus der Formelsammlung ergibt sich eine erste Lösung:

$$u_1 = \frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_1 = 1$$

Der Kosinus ist im vierten Feld positiv, also ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_2 = 11$$

Im positiven Bereich keine weiteren Lösungen mehr.

Im negativen Bereich ergibt sich eine weiter Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$-\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_3 = -1$$

Im negativen Bereich auch keine weiteren Lösungen mehr.

$$\mathbb{L} = \{-1; 1; 11\}$$

Aufgabe 43:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +4\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

damit ergibt sich:

$$\sin(u) = -\frac{1}{2}$$

Aus der Tabelle ergibt sich:

$$u' = \frac{1}{6}\pi$$

Negative Werte nimmt der Sinus im dritten und vierten Feld an. Daraus ergeben sich die ersten Lösungen:

$$u_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{7}{6}\pi = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{14 + 3}{12}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{17}{12}\pi$$

$$x_1 = \frac{17}{6}\pi$$

Die zweite Lösung:

$$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{22+3}{12}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{25}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{25}{6}\pi$$

Keine gültige Lösung, da außerhalb des definierten Bereiches.

Weitere Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi$$

$$u_3 = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{1}{6}\pi = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{-2+3}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{1}{6}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi\right\}$$

Aufgabe 44:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

damit ergibt sich:

$$\tan(u) = 2$$

Mit Hilfe des Taschenrechners ergibt sich eine erste Lösung:

$$u_1 = 1{,}107$$

Rücksubstitution:

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

$$1{,}107 = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x = 1{,}107 + \frac{1}{2}\pi$$

$$x_1 = 2{,}678$$

Eine Periode in den positiven Bereich:

$$u_2 = 1{,}107 + \pi = 4{,}249$$

Rücksubstitution:

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

$$4{,}249 = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x = 4{,}249 + \frac{1}{2}\pi$$

$$x_2 = 5{,}820$$

Eine Periode in den negativen Bereich:

$$u_2 = 1{,}107 - \pi = -2{,}035$$

Rücksubstitution:

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

$$-2{,}035 = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x = -2{,}035 + \frac{1}{2}\pi$$

$$x_3 = -0{,}464$$

$$\mathbb{L} = \{-0{,}464; 2{,}678; 5{,}820\}$$

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(3x) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = 3x$$

$$\sin(u) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

Mit dem Taschenrechner erhalten wir eine erste Lösung:

$$u_1 = 0{,}593$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$

$$0{,}593 = 3x$$

$$x_1 = 0{,}198$$

Im zweiten Feld haben wir eine weitere Lösung:

$$u_2 = \pi - 0{,}593 = 2{,}549$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$

$$2{,}549 = 3x$$

$$x_2 = 0{,}850$$

Da es sich im Original um eine gestauchte Funktion handelt, müssen wir hier unbedingt weitere Werte überprüfen:

$$u_3 = u_1 + 2\pi = 0{,}593 + 2\pi = 6{,}876$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$6{,}876 = 3x$$
$$x_3 = 2{,}292$$

$$u_4 = u_2 + 2\pi = 2{,}549 + 2\pi = 8{,}832$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$8{,}832 = 3x$$
$$x_4 = 2{,}944$$

$$u_5 = u_1 + 4\pi = 0{,}593 + 4\pi = 13{,}159$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$13{,}159 = 3x$$
$$x_4 = 4{,}386$$

$$u_6 = u_2 + 4\pi = 2{,}549 + 4\pi = 15{,}115$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$15{,}115 = 3x$$
$$x_5 = 5{,}038$$

$$u_5 = u_1 + 6\pi = 0{,}593 + 6\pi = 19{,}443$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$19{,}443 = 3x$$
$$x_6 = 6{,}481$$

Liegt nicht mehr im vorgegebenen Bereich, also auch keine Lösung mehr.

$$\mathbb{L} = \{0{,}198; 0{,}850; 2{,}292; 2{,}944; 4{,}386; 5{,}038\}$$

Aufgabe 46:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +3\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{2}{3}x$$

$$\sin(u) = -\frac{1}{2}$$

Aus der Formelsammlung erhält man den positiven Wert:

$$u' = \frac{1}{6}\pi$$

Der Sinus ist im dritten und vierten Feld negativ, also ergeben sich folgende Lösungen:

$$\mathrm{u}_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$\mathrm{u} = \frac{2}{3}\mathrm{x}$$

$$\frac{7}{6}\pi = \frac{2}{3}\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}_1 = \frac{21}{12}\pi$$

$$\mathrm{x}_1 = \frac{7}{4}\pi$$

$$\mathrm{u}_1 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$\mathrm{u} = \frac{2}{3}\mathrm{x}$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{2}{3}\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}_2 = \frac{33}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{11}{4}\pi$$

Im Bereich von 2π bis 3π gibt es keine weiteren Lösungen, da der Sinus dort positiv ist.

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Aufgabe 47:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x-1) = \frac{1}{4}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = x - 1$$

$$\cos(u) = \frac{1}{4}$$

Mit Hilfe des Taschenrechners erhält man:

$$u_1 = 1{,}318$$

Rücksubstitution:

$$u = x - 1$$

$$1{,}318 = x - 1$$

$$x_1 = 1{,}318 + 1 = 2{,}318$$

$$x_1 = 2{,}318$$

Die nächste Lösung in positiver Richtung ergibt sich aus:

$$u_2 = 2\pi - 1{,}318 = 4{,}965$$

Rücksubstitution:

$$u = x - 1$$

$$4{,}965 = x - 1$$

$$x_2 = 4{,}965 + 1 = 5{,}965$$

$$x_2 = 5{,}965$$

Im negativen Bereich ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_3 = 0 - 1{,}318 = -1{,}318$$

Rücksubstitution:

$$\mathrm{u} = \mathrm{x} - 1$$

$$-1{,}318 = \mathrm{x} - 1$$

$$x_3 = -1{,}318 + 1 = -0{,}318$$

$$x_3 = -0{,}318$$

$$\mathbb{L} = \{-0{,}318; 2{,}318; 5{,}965\}$$

Aufgabe 48:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$\mathrm{u} = \mathrm{x} + \frac{5}{6}\pi$$

$$\cos(\mathrm{u}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus der Formelsammlung können wir den positiven Wert ablesen:

$$\mathrm{u}' = \frac{1}{6}\pi$$

Der Kosinus ist im zweiten und dritten Bereich negativ, daraus ergeben sich folgende Lösungen:

$$\mathrm{u}_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$\mathrm{u} = \mathrm{x} + \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi = \mathrm{x} + \frac{5}{6}\pi$$

$$\mathrm{x}_1 = 0$$

$$\mathrm{u}_2 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_2 = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$\frac{7}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\pi$$

Weiter in positiver Richtung:

$$u_3 = u_1 + 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_2 = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$\frac{17}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$x_3 = \frac{12}{6}\pi = 2\pi$$
$$x_3 = 2\pi$$

In positiver Richtung gibt es keine weiteren Lösungen.

In negativer Richtung finden wir eine weitere Lösung:

$$u_4 = -\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi$$
$$u_4 = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_4 = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$-\frac{5}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$x_4 = -\frac{10}{6}\pi$$

Liegt nicht mehr im gültigen Bereich, also keine Lösung.

$$\mathbb{L} = \left\{-\pi; 0; \frac{1}{3}\pi; 2\pi\right\}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 49:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$4 \cdot \sin^2(x) + 3 \cdot \cos(x) = 3 \quad \text{für} -\pi \leq x \leq +\pi$

Lösung:

$$4 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos x = 3 \qquad \text{für} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Wir ersetzen $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$4(1 - \cos^2 x) + 3 \cdot \cos x = 3$$

$$4 - 4\cos^2 x + 3 \cdot \cos x = 3$$

$$1 - 4\cos^2 x + 3 \cdot \cos x = 0$$

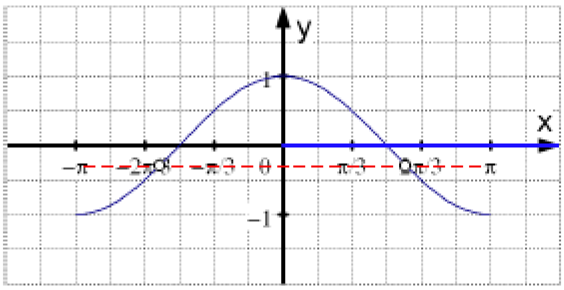
$$4 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x + 1 = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für cos x. Manche lösen dies, indem sie eine Substitution durchführen und u = cos x setzen. Dies ist unnötig. Ich wende einfach die allgemeine Lösungsformel für die quadratische Gleichung an und beachte, daß ich cos x statt x schreiben muß.

> Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat diese Lösung:
>
> $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Also folgt hier:

$$\cos x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4 \cdot 1}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8} = \begin{cases} 1 \\ -0{,}25 \end{cases}$$



Aus $\cos x_1 = 1$ folgt in $-\pi \leq x \leq \pi$
$x_1 = 0$.

Aus cos x' = + 0,25 folgt x' = 1,32, Die Kosinusfunktion hat negative Werte im 2. und 3. Feld. Also folgt: $x_2 = \pi - x' = 1{,}82$ und $x_3 = \pi + x' = 4{,}46$ Doch diese Zahl liegt nicht mehr im Definitionsbereich. Daher gehen wir um eine Periode nach links und subtrahieren 2π: $x_3 = \pi + x' - 2\pi = x' - \pi = -1{,}82$.

Auf diesen Wert kommt man schneller, wenn man weiß, daß die Kosinuskurve symmetrisch zur y-Achse ist, also ist $x_3 = -x_2$!!!

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \{0;\ \pm 1{,}82\}$

Aufgabe 50:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$3 \cdot \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x) =$

Lösung:

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

1. Fall: $\cos x \ne 0$ d.h. $x \ne \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$: Dann kann man durch cos x dividieren:

$$3 \tan x + \sqrt{3} = 0$$
$$3 \tan x = -\sqrt{3}$$
$$\tan x = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

Die Gleichung $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ hat im 1. Feld die Lösung $x' = \frac{1}{6}\pi$
Die Tangensfunktion hat negative Werte

im 2. Feld: $x_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

im 4. Feld: $x_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$

2. Fall $x = \frac{1}{2}\pi$ Dann stimmt die Probe nicht: $3\underbrace{\sin\tfrac{1}{2}\pi}_{1} + \sqrt{3}\underbrace{\cos\tfrac{1}{2}\pi}_{0} = 3 \ne 0$

$x = \frac{3}{2}\pi$ Dann stimmt die Probe nicht: $3\underbrace{\sin\tfrac{3}{2}\pi}_{-1} + \sqrt{3}\underbrace{\cos\tfrac{3}{2}\pi}_{0} = -3 \ne 0$

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{\frac{5}{6}\pi ; \frac{11}{6}\pi\right\}$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1,2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1,4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\t\\0,2\end{pmatrix}$$

Aus 3.Zeile: $2 = 1,4 + 0,2r \Rightarrow r = 3$

Aus 1.Zeile: $3 + 3s = 4 - r \Rightarrow 3 + 3s = 4 - 3 \Rightarrow s = -\dfrac{2}{3}$

Aus 2.Zeile: $4 + 1,2 \cdot (-\dfrac{2}{3}) = 2 + 3t \Rightarrow t = 0,4$

Die beiden Strahlen treffen sich für t = 0,4.

Einsetzen von $s = -\dfrac{2}{3}$ in die Gerade von Jans Pointer ergibt den Schnittpunkt

S(1 / 3,2 / 2)

Integralrechnung

Aufgabe 51:

(1) $\int(3x+1)\,dx$

(2) $\int\left(x^2-2x-5\right)dx$

(3) $\int\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$

(4) $\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\right)dx$

(5) $\int\left(2x^4-x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx$

(6) $\int\left(-\frac{1}{8}x^4+4x^3-5x^2+3x-7\right)dx$

Bestimme C so, dass das Schaubild der Stammfunktion F zu f durch den Punkt P geht:

(7) $f(x)=x^2-1$ $\quad P(3\,|\,-1)$

(8) $f(x)=x^3-2x$ $\quad P(1\,|\,0)$

(9) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x-4$ $\quad P(0\,|\,8)$

Lösung:

(1) $\int(3x+1)dx = 3\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C = \frac{3}{2}x^2+x+C$

(2) $\int(x^2-2x-5)dx = \frac{1}{3}x^3-x^2-5x+C$

(3) $\int\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+C = \frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C$

(4) $\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\right)dx = \frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x+C$

(5) $\int\left(2x^4-x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx = \frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+5x+C$

(6) $\int\left(-\frac{1}{8}x^4+4x^3-5x^2+3x-7\right)dx = -\frac{1}{40}x^5+x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-7x+C$

Bestimme C so, dass das Schaubild der Stammfunktion F zu f durch den Punkt P geht:

(7) $f(x)=x^2-1$ $\quad P(3|-1)$ $\quad F(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

Bed.: $F(3)=-1 \Leftrightarrow 9-3+C=-1 \Leftrightarrow C=-7$

Erg.: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x-7$

(8) $f(x)=x^3-2x$ $\quad P(1|0)$ $\quad F(x)=\int(x^3-2x)dx=\frac{1}{4}x^4-x^2+C$

Bed.: $F(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}-1+C=0 \Leftrightarrow C=\frac{3}{4}$

Erg.: $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{3}{4}$

(9) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x-4$ $\quad P(0|8)$

$F(x)=\int\left(-\frac{1}{4}x^4+2x-4\right)dx=-\frac{1}{20}x^5+x^2-4x+C$

Bed.: $F(0)=8 \Leftrightarrow C=8$

Erg.: $F(x)=-\frac{1}{20}x^5+x^2-4x+8$

Aufgabe 52:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1)	$\int\frac{3}{x^2}dx$	(2)	$\int\frac{4}{x}dx$	(3)	$\int\frac{1}{2x^3}dx$
(4)	$\int\frac{2x^2-1}{x^2}dx$	(5)	$\int\frac{x-2}{x^2}dx$	(6)	$\int\frac{x^2-9}{x}dx$
(7)	$\int\frac{(x-2)^2}{4x}dx$	(8)	$\int\frac{x^3-8}{2x^2}dx$	(9)	$\int\frac{x^3-8}{4x}dx$
(10)	$\int\frac{x^2+3x-2}{4x}dx$	(11)	$\int\frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}dx$	(12)	$\int\frac{x^2-3}{x^3}dx$
(13)	$\int\frac{x^4+x^2-2}{4x^3}dx$	(14)	$\int\frac{(x^2+1)^2}{2x^3}dx$	(15)	$\int\frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2}dx$

Lösung:

(1) $\int \frac{3}{x^2}dx = 3\int x^{-2}dx = 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{3}{x} + C$

(2) $\int \frac{4}{x}dx = 4 \cdot \ln x + C$

(3) $\int \frac{1}{2x^3}dx = \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = \frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4x^2} + C$

(4) $\int \frac{2x^2-1}{x^2}dx = \int\left(2-\frac{1}{x^2}\right)dx = 2x + \frac{1}{x} + C$

(5) $\int \frac{x-2}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \ln x + \frac{2}{x} + C$

(6) $\int \frac{x^2-9}{x}dx = \int\left(x-\frac{9}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 9\cdot\ln x + C$

(7) $\int \frac{(x-2)^2}{4x}dx = \int \frac{x^2-4x+4}{4x}dx = \int\left(\frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{8}x^2 - x + \ln x + C$

(8) $\int \frac{x^3-8}{2x^2}dx = \int\left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x^2}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{x} + C$

(9) $\int \frac{x^3-8}{4x}dx = \int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{12}x^3 - 2\cdot\ln x + C$

(10) $\int \frac{x^2+3x-2}{4x}dx = \int\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\ln x + C$

(11) $\int \frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}dx = \int\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{36}x^3 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2x} + C$

$$(12)\quad \int \frac{x^2-3}{x^3}dx = \int\left(\frac{1}{x}-3x^{-3}\right)dx = \ln x - 3\frac{x^{-2}}{-2}+C = \ln x + \frac{3}{2x^2}+C$$

$$(13)\quad \int \frac{x^4+x^2-2}{4x^3}dx = \int\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^{-3}\right)dx = \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C$$

$$=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{4x^2}+C$$

$$(14)\quad \int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x^3}dx = \int \frac{x^4+2x^2+1}{2x^3}dx = \int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^{-3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\ln x+\frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{-2}+C = \frac{1}{4}x^2+\ln x-\frac{1}{4x^2}+C$$

$$(15)\quad \int \frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2}dx = \int\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}\ln x-\frac{2}{3x}+C$$

Aufgabe 53:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(16) $\int \frac{4}{(4x+5)^2}dx$	(17) $\int \frac{2}{(1-x)^3}dx$	(18) $\int \frac{24}{(x+12)^2}dx$
(19) $\int \frac{3}{3-x}dx$	(20) $\int \frac{-3}{(2x-4)^4}dx$	(21) $\int \frac{12}{(x-2)^5}dx$

Lösung:

(16) $\int \frac{4}{(4x+5)^2}dx$ Substitution: $u = 4x + 5$, $du = 4\,dx$, $dx = \frac{1}{4}du$

$$= \int \frac{4}{u^2} \cdot \frac{1}{4}du = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{4x+5} + C$$

(17) $\int \frac{2}{(1-x)^3}dx$ Substitution: $u = 1 - x$, $du = -\,dx$, $dx = -\,du$

$$= -\int \frac{2}{u^3}du = -2\int u^{-3}du = -2 \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{u^2} + C = \frac{1}{(1-x)^2} + C$$

(18) $\int \frac{24}{(x+12)^2}dx$ Substitution: $u = x + 12$, $du = dx$ also $dx = du$

$$= \int \frac{24}{u^2}du = -\frac{24}{u} + C = -\frac{24}{x+12} + C$$

(19) $\int \frac{3}{3-x}dx$ Substitution: $u = 3 - x$, $du = -\,dx$ also $dx = -\,du$

$$= -\int \frac{3}{u}du = -3 \cdot \ln u + C = -3 \cdot \ln(3-x) + C$$

(20) $\int \frac{-3}{(2x-4)^4}dx$ Substitution: $u = 2x - 4$, $du = 2\,dx$ also $dx = \frac{1}{2}du$

$$= \int \frac{-3}{u^4} \cdot \frac{1}{2}du = -\frac{3}{2}\int u^{-4}du = -\frac{3}{2}\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{2u^3} + C = \frac{1}{2(2x-4)^3} + C$$

(21) $\int \frac{12}{(x-2)^5}dx$ Substitution: $u = x - 2$, $du = dx$ also $dx = du$

$$= \int \frac{12}{u^5}du = 12\int u^{-5}du = 12\frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{3}{u^4} + C = -\frac{3}{(x-2)^4} + C$$

Aufgabe 54:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(22) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$ (23) $\int \frac{x^2}{(4-x)^2}dx$ (24) $\int \frac{x^2+x-1}{(2x+4)^2}dx$

(25) $\int \frac{x}{x-1}dx$ (26) $\int \frac{2-x}{4x+1}dx$ (27) $\int \frac{(x+2)^2}{2-x}dx$

Lösung:

(22) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$ Substitution: $u = x + 1$, also $du = dx$ und $x = u - 1$

$$= 2\int \frac{u-1}{u^2}du = 2\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du = 2\cdot\left[\ln u + \frac{1}{u}\right] + C = 2\cdot\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$$

(23) $\int \frac{x^2}{(4-x)^2}dx$ Substitution: $u = 4 - x$, $du = -dx$, $dx = -du$, $x = 4 - u$

$$= -\int \frac{(4-u)^2}{u^2}du = -\int \frac{16-8u+u^2}{u^2}du = -\int\left(16\cdot\frac{1}{u^2} - 8\cdot\frac{1}{u}+1\right)du =$$

$$= -\left[-\frac{16}{u} - 8\cdot\ln u + u\right] + C = \frac{16}{4-x} + 8\cdot\ln(4-x) - 4 + x + C$$

(24) $\int \frac{x^2+x-1}{(2x+4)^2}dx$ Substitution: $u = 2x + 4$, $du = 2\,dx$, $dx = \frac{1}{2}du$, $x = \frac{1}{2}(u-4)$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}(u-4)^2 + \frac{1}{2}(u-4) - 1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{4}u^2 - 2u + 4 + \frac{1}{2}u - 2 - 1}{u^2}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{4}u^2 - \frac{3}{2}u + 1}{u^2}du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)du = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{4}u - \frac{3}{2}\ln u - \frac{1}{u} + C\right]$$

$$= \frac{1}{8}(2x+4) - \frac{3}{4}\ln(2x+4) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+4} + C = \frac{1}{4}(x+2) - \frac{3}{4}\ln(2x+4) - \frac{1}{4x+8} + C$$

(25) $\int \frac{x}{x-1}dx$ Substitution: $u = x - 1$, $du = dx$, $dx = du$, $x = u + 1$

$$= \int \frac{u+1}{u}du = \int\left(1 + \frac{1}{u}\right)du = u + \ln u + C = x - 1 + \ln(x-1) + C$$

(26) $\int \frac{2-x}{4x+1}dx$ Substitution: $u = 4x + 1$, $du = 4\,dx$, $dx = \frac{1}{4}du$, $x = \frac{1}{4}(u-1)$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{2-\frac{1}{4}(u-1)}{u}du = \frac{1}{4}\int\frac{-\frac{1}{4}u + \frac{9}{4}}{u}du = \frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{u}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}u + \frac{9}{4}\ln u\right] + C = -\frac{1}{16}(4x+1) + \frac{9}{16}\ln(4x+1) + C$$

(27) $\int \frac{(x+2)^2}{2-x}dx$ Substitution: $u = 2 - x$, $du = -dx$, $dx = -du$, $x = 2 - u$

$$= -\int\frac{(2-u+2)^2}{u}du = -\int\frac{(4-u)^2}{u}du = -\int\frac{16-8u+u^2}{u}du = -\int\left(16\cdot\frac{1}{u} - 8 + u\right)du$$

$$= -\left[16\cdot\ln u - 8u + \frac{1}{2}u^2\right] + C = -\frac{1}{2}(2-x)^2 + 8(2-x) - 16\cdot\ln(2-x) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\left(4 - 4x + x^2\right) + 16 - 8x - 16\cdot\ln(2-x) + C = -\frac{1}{2}x^2 - 6x + 14 - 16\cdot\ln(2-x) + C$$

Aufgabe 55:

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{16x}{x^2+12}dx \qquad (29)\quad \int \frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}dx \qquad (30)\quad \int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$$

Lösung:

(28) $\int \frac{16x}{x^2+12}dx$ Substitution: $u = x^2 + 12$, $du = 2x\,dx$, $16x\,dx = 8\,du$

$$= \int \frac{8}{u}du = 8 \cdot \ln u + C = 8 \cdot \ln\left(x^2+12\right) + C$$

(29) $\int \frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}dx$ Substitution: $u = x^2 - 4$, $du = 2x\,dx$, $2x\,dx = du$

$$= \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x^2-4} + C$$

(30) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$ Substitution: $u = x^2 + 2x$, $du = (2x + 2)\,dx$, $(x+1)dx = \frac{1}{2}du$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right) + C$$

Aufgabe 56:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(13) $\int_4^6 \frac{5}{2x+4}dx$ (14) $\int_2^4 \frac{16}{(1-x)^2}dx$

(15) $\int_{-4}^{-3} \frac{x+3}{2x+1}dx$ (16) $\int_0^3 \frac{x^2}{x+1}dx$

(17) $\int_{-1}^{0} \frac{2-x}{(2x-5)^2}dx$ (18) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2-16}dx$

(19) $\int_0^3 \frac{x^2}{x^3+1}dx$ (20) $\int_0^3 \frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

(21) $\int_0^1 \frac{3x^3}{x^2+4}dx$ (22) $\int_2^3 \frac{2-x}{4x-x^2}dx$

Lösung:

(13) $\int_4^6 \frac{5}{2x+4}dx$

Substitution: $u = 2x + 4,\ du = 2\,dx,\ dx = \frac{1}{2}du$

$$= \frac{5}{2}\int_{12}^{16}\frac{1}{u}du = \frac{5}{2}[\ln u]_{12}^{16} = \frac{5}{2}(\ln 16 - \ln 12) = \frac{5}{2}\ln\frac{16}{12} = \frac{5}{2}\ln\frac{4}{3}$$

(14) $\int_2^4 \frac{16}{(1-x)^2}dx$

Substitution: $u = 1 - x,\ du = -dx,\ dx = -du$

$$= -16\int_{-1}^{-3}\frac{1}{u^2}du = -16\left[-\frac{1}{u}\right]_{-1}^{-3} = 16\left[\frac{1}{u}\right]_{-1}^{-3} = 16\left(-\frac{1}{3}+1\right) = 16\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{3}$$

(15) $\int_{-4}^{-3} \frac{x+3}{2x+1}dx$

Substitution: $u = 2x + 1,\ du = 2\,dx,\ dx = \frac{1}{2}du$
$x = \frac{1}{2}(u-1)$

$$= \int_{-7}^{-5}\frac{\frac{1}{2}(u-1)+3}{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_{-7}^{-5}\frac{\frac{1}{2}u+\frac{5}{2}}{u}du = \frac{1}{4}\int_{-7}^{-5}\frac{u+5}{u}du = \frac{1}{4}\int_{-7}^{-5}\left(1+\frac{5}{u}\right)du$$

Achtung hier muß ln |x| verwendet werden !

$$= \frac{1}{4}\left[u + 5\cdot\ln|u|\right]_{-7}^{-5} = \frac{1}{4}[-5+5\ln 5] - \frac{1}{4}[-7+5\ln 7] = \frac{1}{4}[2-5\ln 7+5\ln 5]$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{5}{4}\ln\frac{5}{7} \approx 0{,}08$$

(16) $\int_0^3 \frac{x^2}{x+1}dx$

Substitution: $u = x + 1,\ du = dx,\ dx = du$

$$\int_1^4\frac{(u-1)^2}{u}du = \int_1^4\frac{u^2-2u+1}{u}du = \int_1^4\left(u-2+\frac{1}{u}\right)du = \left[\frac{1}{2}u^2-2u+\ln u\right]_1^4$$

$$= [8-8+\ln 4] - [\tfrac{1}{2}-2+\ln 1] = \ln 4 - \tfrac{1}{2}+2 = \tfrac{3}{2}+\ln 4$$

(17) $\int_{-1}^{0} \frac{2-x}{(2x-5)^2}dx$

Substitution: $u = 2x - 5,\ du = 2\,dx,\ dx = \frac{1}{2}du$
$x = \frac{1}{2}(u+5)$

$$= \int_{-7}^{-5}\frac{2-\frac{1}{2}(u+5)}{u^2}\cdot\tfrac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_{-7}^{-5}\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}u}{u^2}du = -\frac{1}{4}\int_{-7}^{-5}\frac{1+u}{u^2}du = \frac{1}{4}\int_{-5}^{-7}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u}+\ln|u|\right]_{-5}^{-7} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{7}+\ln 7\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}+\ln 5\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\ln 7-\ln 5\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{7}{5} + \frac{5-7}{35}\right) = \frac{1}{4}\ln 1{,}4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{35} = \frac{1}{4}\cdot\ln 1{,}4 - \frac{1}{70}$$

(18) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2-16}\,dx$

$\boxed{\text{Substitution:}\quad u = x^2 - 16,\ du = 2x\,dx,\ 2x\cdot dx = du}$

$$= \int_{-16}^{-7} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]_{-16}^{-7} = \ln 7 - \ln 16 = \ln\frac{7}{16}$$

(19) $\int_0^3 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

$\boxed{\text{Substitution:}\quad u = x^3 + 1,\ du = 3x^2\,dx,\ x^2dx = \tfrac{1}{3}du}$

$$= \tfrac{1}{3}\int_1^{28} \frac{1}{u}\,du = \tfrac{1}{3}\left[\ln u\right]_1^{28} = \tfrac{1}{3}(\ln 28 - \ln 1) = \tfrac{1}{3}\ln 28$$

(20) $\int_0^3 \frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

$\boxed{\text{Substitution:}\quad u = x^2 + 1,\ du = 2x\,dx,\ 5x\cdot dx = \tfrac{5}{2}du}$

$$= \tfrac{5}{2}\int_1^{10} \frac{1}{u^2}\,du = \tfrac{5}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{10} = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{10}+1\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{4}$$

(21) $\int_0^1 \frac{3x^3}{x^2+4}\,dx$

$\boxed{\text{Substitution:}\quad u = x^2 + 4,\ du = 2x\,dx,\ 3x\cdot dx = \tfrac{3}{2}du}$

$$= \int_0^1 \frac{x^2\cdot 3x dx}{x^2+1} = \int_4^5 \frac{(u-4)\cdot\frac{3}{2}}{u}\,du = \frac{3}{2}\int_4^5\left(1-\frac{4}{u}\right)du = \frac{3}{2}\left[u - 4\cdot\ln u\right]_4^5 =$$

$$\frac{3}{2}[5-4\ln 5] - \frac{3}{2}[4-4\ln 4] = \frac{3}{2}(5-4+4\ln 4 - 4\ln 5) = \frac{3}{2}\left(1+4\ln\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{2} + 6\cdot\ln\frac{4}{5}$$

(22) $\int_2^3 \frac{2-x}{4x-x^2}\,dx$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Substitution:}\quad u = 4x - x^2,\ du = (4-2x)\,dx,\\ \qquad (2-x)dx = \tfrac{1}{2}du\end{array}}$

$$= \int_4^3 \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \tfrac{1}{2}\left[\ln u\right]_4^3 = \tfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 4) = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{3}{4}$$

Aufgabe 57:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_1^{25} \frac{3}{x\sqrt{x}}dx$

(2) $\int_1^4 \frac{4-x}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\int_1^9 \frac{2x-\sqrt{x}}{x}dx$

(4) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}-2\right)^2 dx$

(5) $\int_{-6}^0 \sqrt{4-2x}\,dx$

(6) $\int_0^2 \frac{8}{\sqrt{4x+1}}dx$

(7) $\int_{-3}^0 \left(2-\sqrt{1-x}\right)dx$

(8) $\int_{-1}^1 \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)dx$

(9) $\int_0^{4t} x\sqrt{\frac{x}{t}}\,dx$

(10) $\int_4^{10} \sqrt{\frac{x-2}{2}}dx$

Lösung:

(1) $\int_1^{25} \frac{3}{x\sqrt{x}}dx = 3\int_1^{25} x^{-\frac{3}{2}}dx = 3\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^{25} = -6\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^{25} = -6\left[\frac{1}{5}-1\right] = -6\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{5}$

(2) $\int_1^4 \frac{4-x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)dx = \int_1^4 (4x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})dx = \left[4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[8\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 =$

$\left[16-\frac{2}{3}\cdot 8\right]-\left[8-\frac{2}{3}\right] = 16-8+\frac{2}{3}-\frac{16}{3} = 8-\frac{14}{3} = \frac{10}{3}$

(3) $\int_1^9 \frac{2x-\sqrt{x}}{x}dx = \int_1^9\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9\left(2-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left[2x-2\sqrt{x}\right]_1^9 =$

$= [18-6]-[2-2] = 12$

(4) $\int_1^4\left(\sqrt{x}-2\right)^2 dx = \int_1^4\left(x-4\sqrt{x}+4\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2-4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+4x\right]_1^4 = \left[\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+4x\right]_1^4 =$

$=\left[8-\frac{64}{3}+16\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{8}{3}+4\right] = 20-\frac{64}{3}+\frac{8}{3}-\frac{1}{2} = 20-\frac{56}{3}-\frac{1}{2} = \frac{120-112-3}{6} = \frac{5}{6}$

(5) $$\int_{-6}^{0} \sqrt{4-2x}\,dx$$

Substitution: $u = 4 - 2x$, $du = -2\,dx$, $dx = -\frac{1}{2}du$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_{16}^{4} \sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_4^{16} = \tfrac{1}{3}(64-8) = \tfrac{56}{3}$$

Ab jetzt rechnen wir verkürzt: $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]$

und $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] = \left[2\sqrt{x}\right] = \ldots$

(6) $$\int_0^2 \frac{8}{\sqrt{4x+1}}dx$$

Substitution: $u = 4x + 1$, $du = 4\,dx$, $dx = \frac{1}{4}du$

$$= \tfrac{1}{4}\int_1^9 \frac{8}{\sqrt{u}}du = 2\int_1^9 u^{-\frac{1}{2}}du = 2\left[2\sqrt{u}\right]_1^9 = 4(3-1) = 8$$

(7) $$\int_{-3}^{0} \left(2-\sqrt{1-x}\right)dx$$

Substitution: $u = 1 - x$, $du = -dx$, $dx = -du$

$$= [2x]_{-3}^{0} + \int_4^1 \sqrt{u}\,du = 6 + \left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_4^1 = 6 + \tfrac{2}{3} - \tfrac{16}{3} = \tfrac{4}{3}$$

(8) $$\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)dx = \int_{-1}^{2} \sqrt{x+1}\,dx + \int_{-1}^{2} \sqrt{1-x}\,dx$$

Substitutionen: $v = x + 1$ also $dv = dx$
und $u = 1 - x$, $du = -dx$, $dx = -du$

$$= \int_0^2 \sqrt{v}\,dv - \int_2^0 \sqrt{u}\,du = \left[\tfrac{2}{3}v\sqrt{v}\right]_0^2 + \left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^2 = 2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}$$

(9) $$\int_0^{4t} x\sqrt{\frac{x}{t}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{4t} x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^{4t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{2}{5}\left[x^2\sqrt{x}\right]_0^{4t} = \frac{2}{5\sqrt{t}}\cdot 16t^2\cdot 2\sqrt{t} = \frac{64}{5}t^2$$

(10) $$\int_4^{10} \sqrt{\frac{x-2}{2}}dx$$

Substitution: $u = \frac{x-2}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2du$

$$= 2\int_1^4 \sqrt{u}\,du = 2\left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^4 = \tfrac{4}{3}(8-1) = \tfrac{28}{3}$$

Aufgabe 58:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(11) $\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$

(12) $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(13) $\int_{1}^{4} \frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}\,dx$

(14) $\int_{0}^{4} 2x \cdot \sqrt{4-x}\,dx$

(15) $\int_{0}^{r} 2x\sqrt{x^2+5}\,dx$

(16) $\int_{0}^{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

(17) $\int_{3}^{5} x\sqrt{x^2-4}\,dx$

(18) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

Lösung:

(11) $\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$

Bei diesem Integraltyp gibt es 2 verschiedene Lösungswege. Ich substituiere die ganze Wurzel: $u=\sqrt{x+1} \Rightarrow u^2=x+1 \Rightarrow x=u^2-1 \Rightarrow dx=2udu$

$$\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx=\int_{0}^{2}\left(u^2-1\right)\cdot u\cdot 2u\,du=2\int_{0}^{2}\left(u^4-u^2\right)du=2\left[\tfrac{1}{5}u^5-\tfrac{1}{3}u^3\right]_0^2$$
$$=2\left(\tfrac{32}{5}-\tfrac{8}{3}\right)=16\left(\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{3}\right)=16\cdot\left(\tfrac{12-5}{15}\right)=\tfrac{16\cdot 7}{15}=\tfrac{112}{15}$$

(12) $$\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_{1}^{2}\frac{u^2-1}{u}\cdot 2u\,du=2\int_{1}^{2}\left(u^2-1\right)du=2\left[\tfrac{1}{3}u^3-u\right]_1^2$$
$$=2\left[\tfrac{8}{3}-2\right]-2\left[\tfrac{1}{3}-1\right]=2\left(\tfrac{8}{3}-\tfrac{6}{3}-\tfrac{1}{3}+1\right)=2\left(\tfrac{4}{3}\right)=\tfrac{8}{3}$$

(13) $\int_{1}^{4}\frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}dx$

S.: $u=\sqrt{5-x} \Rightarrow u^2=5-x \Rightarrow x=5-u^2 \Rightarrow dx=-2u\,du$

$$=\int_{2}^{1}\frac{2\left(5-u^2\right)+1}{u}\left(-2u\cdot du\right)=-2\int_{2}^{1}\left(11-2u^2\right)du=2\left[11u-\tfrac{2}{3}u^3\right]_1^2$$
$$=2\left[22-\tfrac{16}{3}\right]-2\left[11-\tfrac{2}{3}\right]=2\left(22-11-\tfrac{16}{3}+\tfrac{2}{3}\right)=2\left(11-\tfrac{14}{3}\right)=2\cdot\tfrac{19}{3}=\tfrac{38}{3}$$

(14) $\int_0^4 2x\cdot\sqrt{4-x}\,dx$ $\boxed{\text{S.: } u=\sqrt{4-x} \Rightarrow u^2=4-x \Rightarrow x=4-u^2 \Rightarrow dx=-2u\,du}$

$$=\int_2^0 (4-u^2)\cdot u\cdot(-2u\,du) = -2\int_2^0 (4u^2-u^4)\,du = 2\left[\tfrac{4}{3}u^3-\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^2 =$$
$$=2\left[\tfrac{32}{3}-\tfrac{32}{5}\right]-2\cdot 0 = 64\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right) = 64\cdot\tfrac{2}{15}=\tfrac{128}{15}$$

(15) $\int_0^r 2x\sqrt{x^2+5}\,dx$ $\boxed{\text{Substitution: } u=x^2+5 \quad u = 2x\,dx\text{, also } 2x\,dx=du}$

$$=\int_5^{r^2+5}\sqrt{u}\cdot du = \left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_5^{r^2+5} = \tfrac{2}{3}(r^2+5)\sqrt{r^2+5}-\tfrac{2}{3}\cdot 5\sqrt{5}$$

(16) $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx$ $\boxed{\text{Substitution: } u=x^2+5 \quad u = 2x\,dx\text{, also } 2x\,dx=du}$

$$=\int_5^9 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[2\sqrt{u}\right]_5^9 = 6-2\sqrt{5}$$

(17) $\int_3^5 x\sqrt{x^2-4}\,dx$ $\boxed{\text{Substitution: } u=x^2-4 \quad u = 2x\,dx\text{, also } x\,dx=\tfrac{1}{2}du}$

$$=\tfrac{1}{2}\int_5^{21}\sqrt{u}\,du = \left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_5^{21} = \tfrac{42}{3}\sqrt{21}-\tfrac{10}{3}\sqrt{5}$$

(18) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int_1^4 \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^4 = \sqrt{4}-\sqrt{1} = 2-1=1$

Aufgabe 59:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$ (2) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos\tfrac{x}{3}\,dx$ (3) $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} 3\sin\left(x-\tfrac{1}{3}\pi\right)dx$

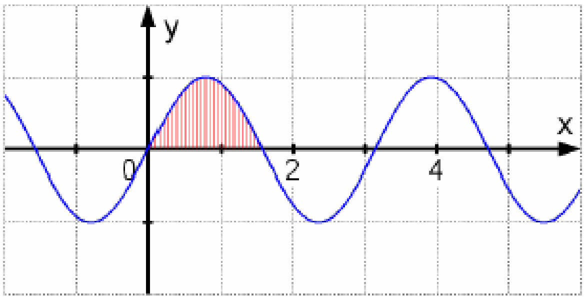
(4) $\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} 2\cos(2-x)\,dx$ (5) $\int_0^{\frac{3}{8}\pi} \sin\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)dx$ (6) $\int_0^{2\pi-2} \left(1+\cos\left(\tfrac{x}{2}+1\right)\right)dx$

(7) $\int_0^2 (x+\sin(1-x))\,dx$ (8) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} \left(2-2\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$

Lösung:

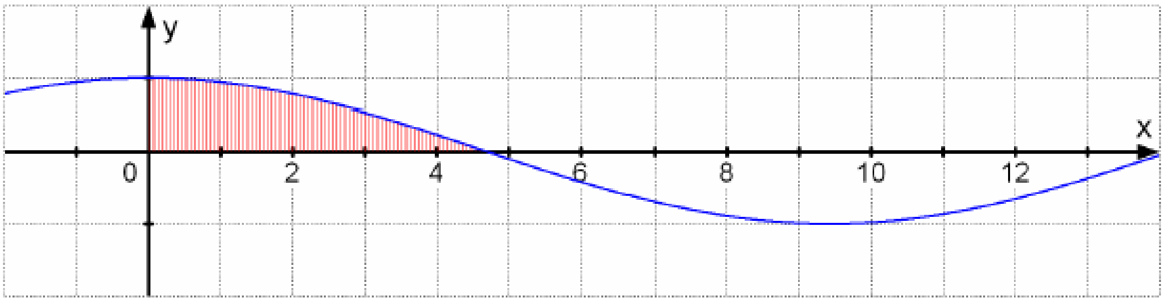
(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$ Substitution: $u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\,du = -\frac{1}{2}[\cos u]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2}(-1-1) = +1$$



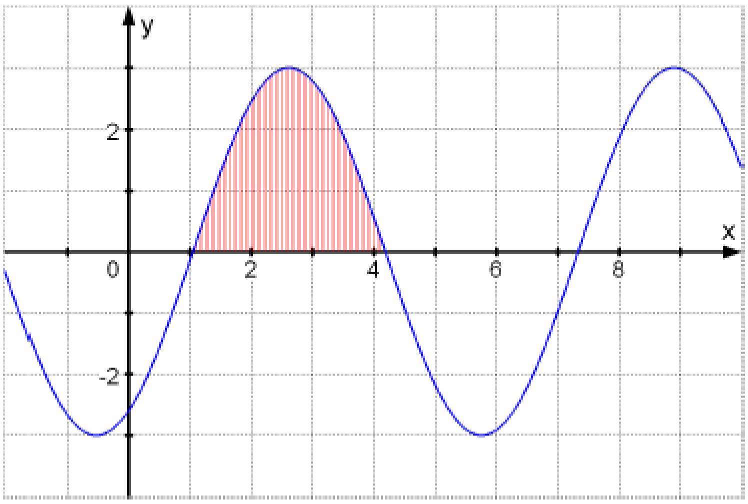
(2) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos\frac{x}{3}\,dx$ Substitution: $u = \frac{x}{3} \Rightarrow du = \frac{1}{3}\cdot dx \Rightarrow dx = 3du$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 3[\sin x]_0^{\pi/2} = 3(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0) = 3\cdot(1-0) = 3$$



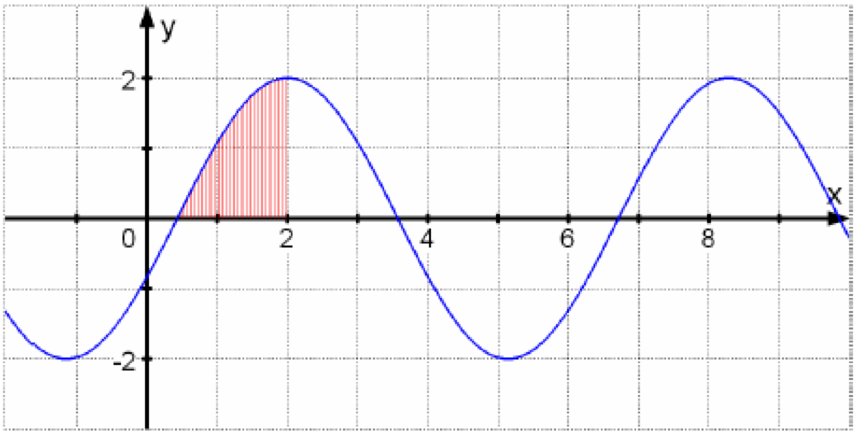
(3) $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} 3\sin(x - \frac{1}{3}\pi)\,dx$ Substitution: $u = x - \frac{1}{3}\pi \Rightarrow du = dx \Rightarrow dx = du$

$$= 3\int_0^{\pi} \sin u\,du = -3[\cos u]_0^{\pi} = -3(\cos\pi - \cos 0) = -3(-1-1) = 6$$



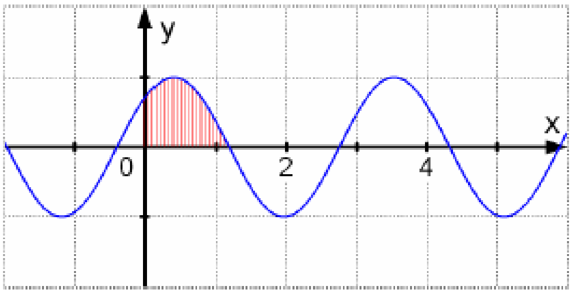
(4) $\int\limits_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} 2\cos(2-x)\,dx$ Substitution: $u = 2-x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$

$= -2\int\limits_{\pi/2}^{0} \cos u\,du = -2[\sin u]_{\pi/2}^{0} = -2(\sin 0 - \sin\tfrac{1}{2}\pi) = -2(0-1) = 2$



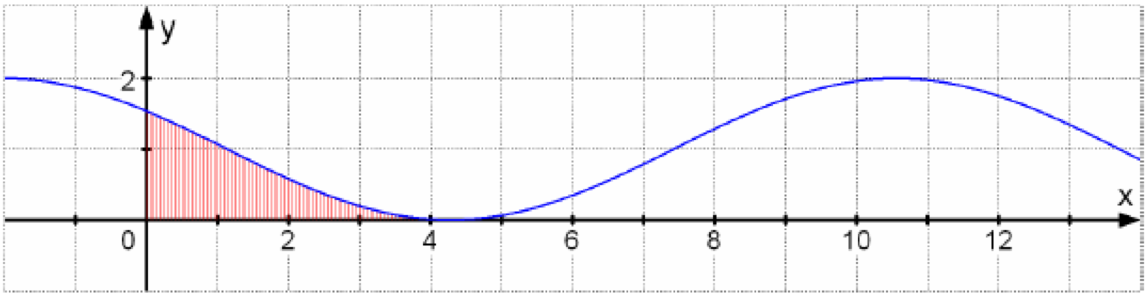
(5) $\int\limits_{0}^{\frac{3}{8}\pi} \sin(2x+\tfrac{\pi}{4})\,dx$ Substitution: $u = 2x+\tfrac{1}{4}\pi \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \tfrac{1}{2}du$

$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin u\,du = -\tfrac{1}{2}[\cos u]_{\pi/4}^{\pi} = -\tfrac{1}{2}[\cos\pi - \cos\tfrac{1}{4}\pi] = -\tfrac{1}{2}\left(-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}$



(6) $\int\limits_{0}^{2\pi-2} \left(1+\cos(\tfrac{x}{2}+1)\right)dx$ Substitution: $u = \tfrac{x}{2}+1 \Rightarrow du = \tfrac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2du$

$= 2\int\limits_{1}^{\pi}(1+\cos u)\,du = 2[u+\sin u]_{1}^{\pi} = 2\cdot\left(\pi + \underbrace{\sin\pi}_{=0} - 1 - \underbrace{\sin 1}_{0,841}\right) \approx 2,6$

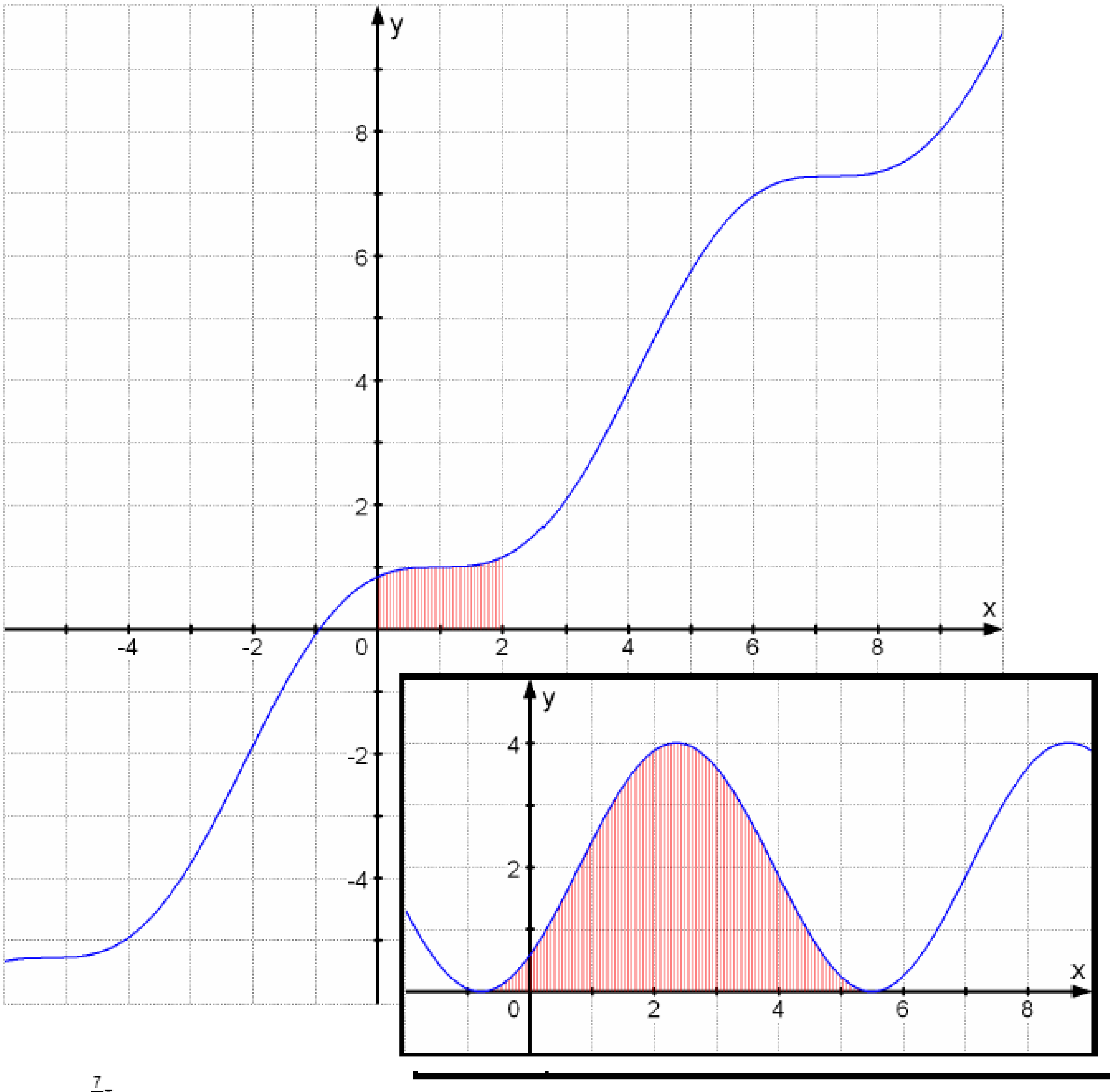


(7) $\int_0^2 (x+\sin(1-x))\,dx$ Substitution: $u = 1-x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$

$= -\int_1^{-1} (1-u+\sin u)\,du = \left[u - \frac{1}{2}u^2 - \cos u\right]_{-1}^{1} = \left[1-\frac{1}{2}-\cos 1\right] - \left[-1-\frac{1}{2}-\cos(-1)\right]$

$= \frac{1}{2} - \cos 1 + \frac{3}{2} + \cos(-1) = 2$

denn da die Kosinuskurve symmetrisch zur y-Achse ist, folgt cos (-1) = cos 1.



(8) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} \left(2-2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$ Substitution: $u = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$

$= -\int_{\pi/2}^{-3\pi/2} (2-2\cdot\sin u)\,du = [2u + 2\cos u]_{-3\pi/2}^{\pi/2} = \left[\pi + 2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[-3\pi + 2\cdot\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right]$

$= 4\pi$

Aufgabe 60:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \, dx$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$

(11) $\int_{-\pi}^{\pi} (1+\sin\frac{x}{2}) \cdot \cos\frac{x}{2} \, dx$

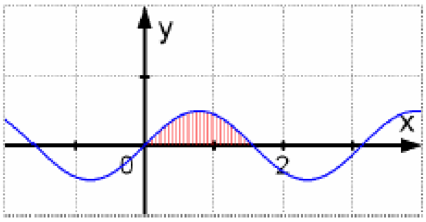
(12) $\int \frac{2 \cdot \cos x}{1+\sin x} dx$

(13) $\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$

Lösung:

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \, dx$ Berechne auf zweierlei Arten:

(a) Substitution: $u = \sin x \Rightarrow du = u' \cdot dx = \cos x \cdot dx$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \, dx = \int_0^1 u \cdot du = \left[\tfrac{1}{2} u^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

(b) nach Umwandlung durch eine trigonometrische Formel.

Es gilt $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ also ist $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx$$

Substitution: $u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$

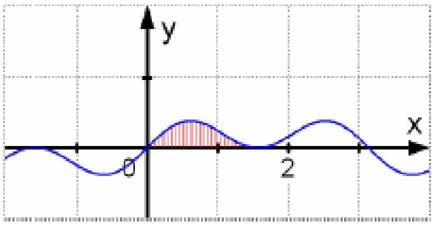
$$= \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin u \, du = \tfrac{1}{4}[-\cos u]_0^{\pi} = \tfrac{1}{4}(-\cos\pi + \cos 0) = \tfrac{1}{4}(1+1) = \tfrac{1}{2}$$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$

Substitution: $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \cdot dx$

Also ist $\sin x \cdot dx = -du$

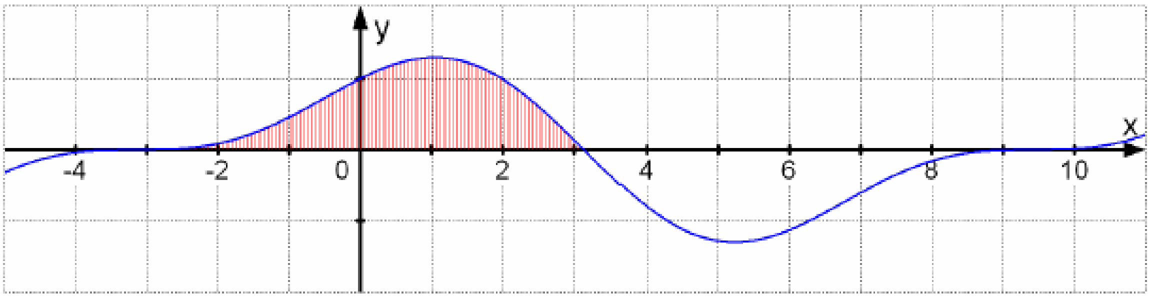
$= -\int_1^0 u^2 du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$



(11) $\int_{-\pi}^{\pi} (1+\sin\frac{x}{2}) \cdot \cos\frac{x}{2} \, dx$

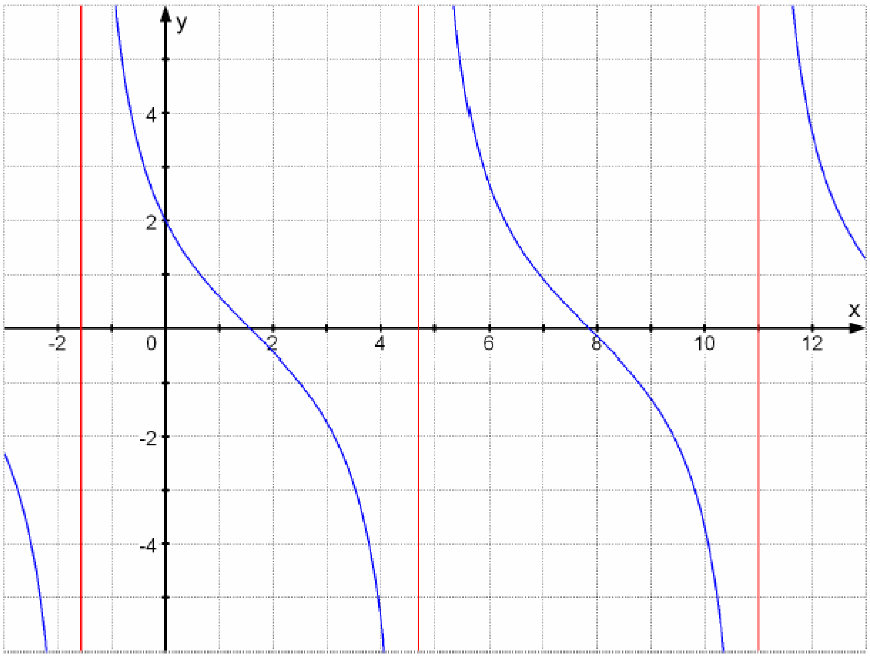
Substitution: $u = 1+\sin\frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 2 \cdot du$

$= 2\int_0^2 u \cdot du = \left[u^2\right]_0^2 = 4$



(12) $\int \frac{2 \cdot \cos x}{1+\sin x} dx$ Substitution: $u = 1+\sin x \Rightarrow du = \cos x \cdot dx$

$= \int \frac{2}{u} du = 2 \cdot \ln u + C = 2 \cdot \ln(1+\sin x) + C$



(13) $\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{2} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

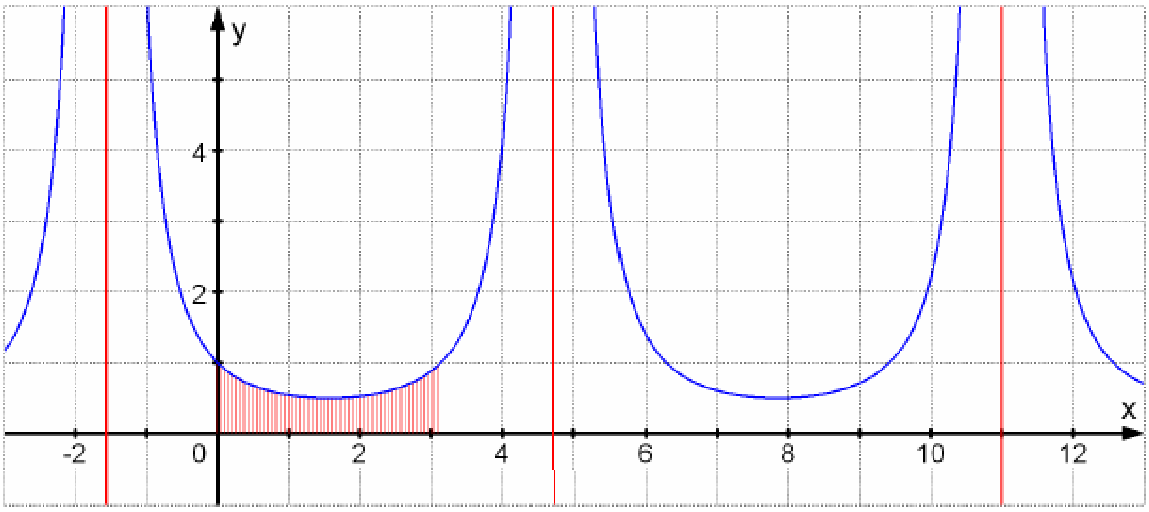
1. Teilintegral: $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\pi} = \tan\pi - \tan 0 = 0$

2. Teilintegral: $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ Substitution: $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \cdot dx$

$= -\int_0^{\pi} \frac{du}{u^2} = \left[\frac{1}{u}\right]_1^{-1} = -1 - 1 = -2$

Zusammengesetzt:

$\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{2} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = 0 - (-2) = 2$



Aufgabe 61:

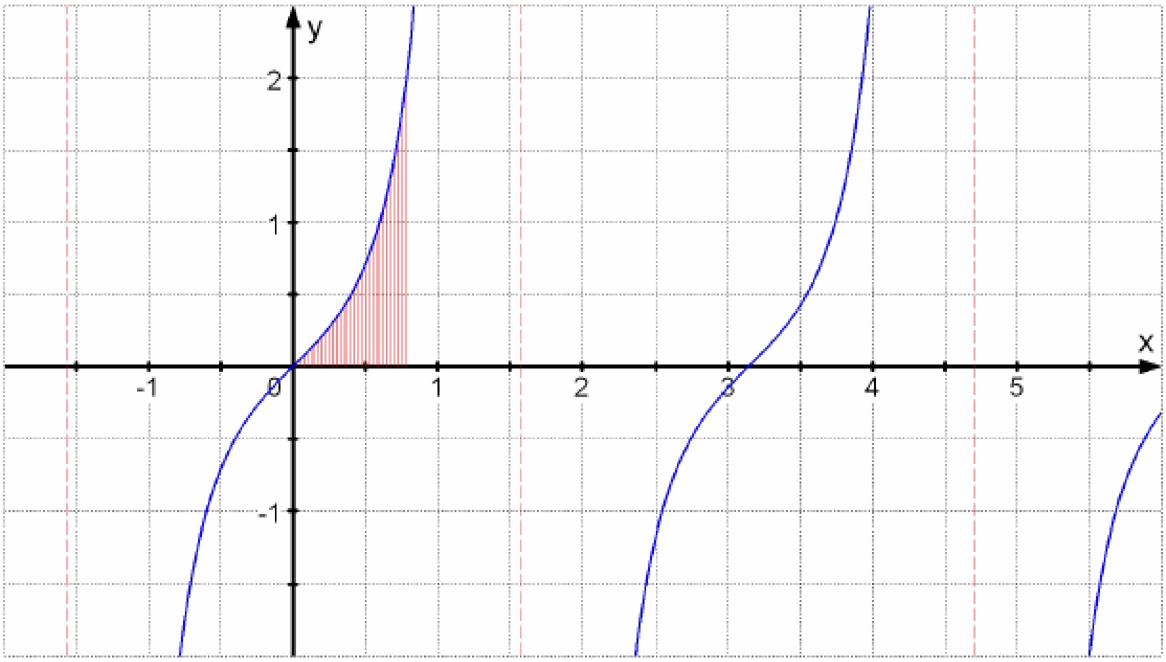
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{(\cos x)^2} dx$$

Lösung:

Wenn man weiß, daß zu $f(x) = \tan x$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ gehört, erkennt man schnell die Substitution: $u = \tan x \Rightarrow du = u' \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{(\cos x)^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} u \cdot du = \left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \tfrac{1}{2} \cdot (1)^2 = \frac{1}{2}$$



Aufgabe 62:

Berechne die Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse.

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9$

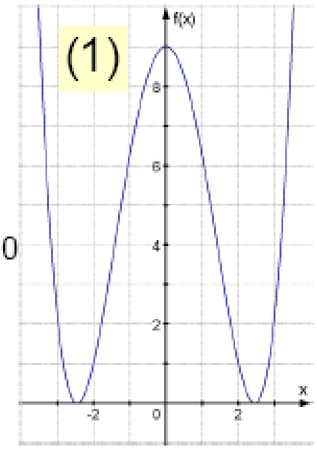
(2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

(3) $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$

(4) $f_t(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x$

Lösung:

2.5 Lösungen



Lösung Nr. 1:

Berechne die Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse.

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9$.

Nullstellenbedingung: $f(x_N) = 0$ d.h. $\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9 = 0$

Hier liegt eine biquadratische Gleichung vor.
Die allgemeine Gleichung $ax^4 + bx^2 + c = 0$

hat die Lösung $x^2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ d.h. hier

$x^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3 \pm 0 = 6$ d.h. es gibt zwei doppelte Nullstellen $x_N = \pm\sqrt{6}$.

Flächenberechnung: $A = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9\right)dx =$ Dieser Ansatz ist umständlich.

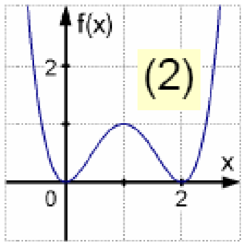
Da die Funktion nur gerade Hochzahlen aufweist, ist das Schaubild K symmetrisch zur y-Achse, die folglich auch die zu berechnende Fläche halbiert. Also berechnen wir nur die Fläche von 0 bis $\sqrt{6}$ und verdoppelt das Ergebnis:

$$A = 2\int\limits_0^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9\right)dx = 2\left[\frac{1}{20}x^5 - x^3 + 9x\right]_0^{\sqrt{6}} = 2\left[\frac{1}{20}36\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 9\sqrt{6}\right] - 2[0]$$

$$A = 2\sqrt{6} \cdot \left[\frac{9}{5} - 6 + 9\right] = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{24}{5} = \frac{48}{5}\sqrt{6} \text{ (FE.)}$$

Nebenrechnung: $\sqrt{6}^5 = \sqrt{6}^2 \cdot \sqrt{6}^2 \cdot \sqrt{6} = 6 \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 36\sqrt{6}$ usw.

Die „künstliche" Maßeinheit FE = Flächeneinheiten bleiben in Zukunft hier weg.



Lösung Nr. 2:

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Nullstellenbedingung: $f(x_N) = 0$

d.h. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0$ (1)

1. (sogar doppelte= Lösung: $x_1 = 0$, weitere Lösungen:

$$(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

d.h. auch die 2. Nullstelle ist doppelt: $x = 2$.

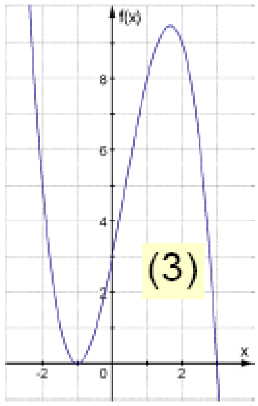
Bemerkung. Den Term $x^2 + 4x + 4$ kann man auch so schreiben kann: $(x+2)^2$,
Dann folgt aus (1) $x^2 \cdot (x-2)^2 = 0$ und man hat sofort die beiden Lösungen.

Flächenberechnung:

$$A = \int\limits_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{5} \cdot 2^5 - 2^4 + \frac{4}{3} \cdot 2^3 = 2^4\left(\frac{2}{5} - 1 + \frac{2}{3}\right)$$

$$A = 16 \cdot \frac{6-15+10}{15} = 16 \cdot \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$$

Hinweis: In vielen Aufgaben lohnt es sich, die Potenzen zuerst aufzuschreiben und dann anschließend zur Vereinfachung auszuklammern.



Lösung Nr. 3: $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$

Nullstellenbedingung: $f(x_N) = 0$ d.h.

$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0$. Probierlösung: etwa $x_1 = 3$,
denn f(3) = -27 + 9 + 15 + 3 = 0 (oder statt 3 auch - 1).
Dann muß man mittels Horner-Schema oder Polynomdivision den Faktor (x – 3) Ausklammern:

Polynomdivision:

$$
\begin{aligned}
&(-x^3 + x^2 + 5x + 3) : (x-3) = -x^2 - 2x - 1 \\
&-(-x^3 - 3x^2) \\
&\quad -2x^2 + 5x \\
&\quad -(-2x^2 + 6x) \\
&\qquad -x + 3 \\
&\qquad -(-x+3) \\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

Horner-Schema:

Kooeffizientenschema von f :

	-1	1	5	3
x = 3	0	-3	-6	-3
	-1	-2	-1	$\boxed{0}$

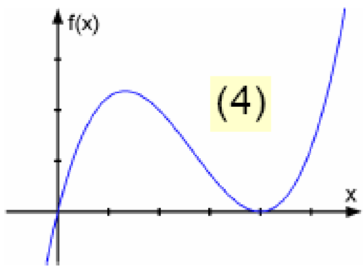
Beide Methoden führen zum Zwischenergebnis $(x - 3)(-x^2 - 2x - 1) = 0$
Die erste Klammer enthält die schon bekannte Lösung $x_1 = 3$. Die weiteren Lösungen folgen aus $-x^2 - 2x - 1 = 0$ d.h.

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Flächenberechnung:

$$A = \int_{-1}^{3} \left(-x^3 + x^2 + 5x + 3\right) dx = \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$A = \left[-\tfrac{81}{4} + 9 + \tfrac{45}{2} + 9\right] - \left[-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{2} - 3\right] = -\tfrac{80}{4} + 21 + \tfrac{40}{2} + \tfrac{1}{3} = -20 + 21 + 20 + \tfrac{1}{3} = 21 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{64}{3}$$



Lösung Nr. 4: $f_t(x) = \tfrac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x$

Nullstellenbedingung: $f(x_N) = 0$ d.h.

$$\tfrac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x = 0 \Leftrightarrow x\left(\tfrac{1}{4}x^2 - 2tx + 4t^2\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_{2,3} = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{4} 4t^2}}{\tfrac{1}{2}} = 2 \cdot 2t = 4t$$

Flächenberechnung:

$$A = \int_{0}^{4t} \left(\tfrac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x\right) dx = \left[\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{2}{3}tx^3 + 2t^2x^2\right]_0^{4t} = \tfrac{1}{16} \cdot 256t^4 - \tfrac{2}{3}t \cdot 64t^3 + 2t^2 \cdot 16t^2$$

$$A = 16t^4 - \tfrac{128}{3}t^4 + 32t^4 = 48t^4 - \tfrac{128}{3}t^4 = \tfrac{144-128}{3}t^4 = \tfrac{16}{3}t^4$$

Aufgabe 63:

Berechne Sie folgende Flächen:

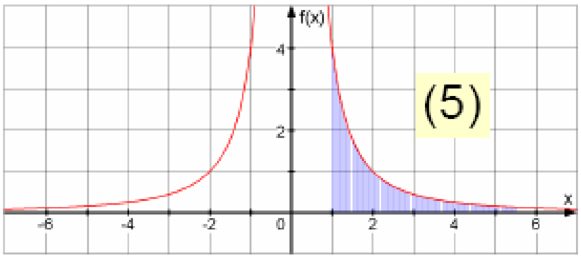
(5) $f(x)=\frac{2}{x^2}$ Fläche $A(r)$ zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = r. Berechne auch $\lim\limits_{r\to\infty} A(r)$.

(6) $f(x)=\frac{x-2}{x}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

(7) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 5 sowie zwischen K, der x-Achse und x = - 6

(8) $f(x)=\frac{16x}{x^2+4}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

Lösung:



Lösung Nr. 5:

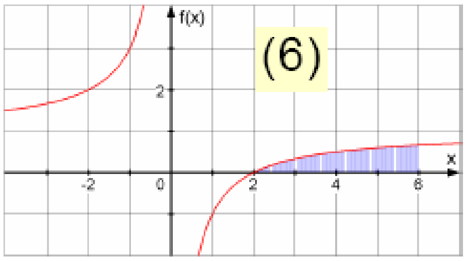
$f(x)=\frac{2}{x^2}$

Fläche $A(r)$ zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = r.

Flächenberechnung:

$$A=\int_1^r 2x^{-2}dx=\left[2\cdot\frac{x^{-1}}{-2}\right]_1^r=\left[-\frac{2}{x}\right]_1^r=\left[-\frac{2}{r}\right]-[-2]=2-\frac{2}{r}$$

$\lim\limits_{r\to\infty} A(r)=2$, denn $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{2}{r}=0$.



Lösung Nr. 6: $f(x)=\frac{x-2}{x}$

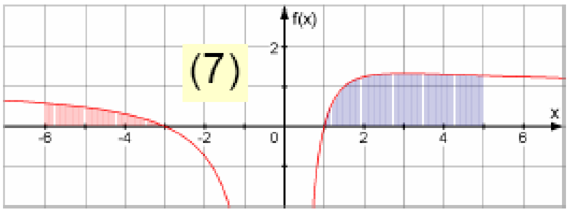
Nullstelle: (Zähler = 0 und Nenner $\neq 0$): x = 2.

Flächenberechnung:

Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6:

$$A=\int_2^6 \frac{x-2}{x}dx=\int_2^6\left(1-\frac{2}{x}\right)=[x-2\cdot\ln x]_2^6=[6-2\cdot\ln 6]-[2-2\cdot\ln 2]$$

$$A=4-2\cdot\ln 6+2\cdot\ln 2=4-2\cdot(\ln 6-\ln 2)=4-2\cdot\ln\frac{6}{2}=4-2\cdot\ln 3=4-\ln 9$$



Lösung Nr. 7: $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2}$

Nullstellenbedingung: $x^2+2x-3=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$

Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 5:

$$A=\int_1^5\frac{x^2+2x-3}{x^2}dx=\int_1^5\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\left[x-2\cdot\ln x+\frac{3}{x}\right]_1^5=$$

$$A=\left[5-2\cdot\ln 5+\tfrac{3}{5}\right]-\left[1-2\cdot\ln 1+3\right]=\tfrac{8}{5}-2\cdot\ln 5 \qquad \text{denn } \ln 1=0.$$

Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = -6:

$$A=\int_{-6}^{-3}\frac{x^2+2x-3}{x^2}dx=\int_{-6}^{-3}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\left[x-2\cdot\ln|x|+\frac{3}{x}\right]_{-6}^{-3}=$$

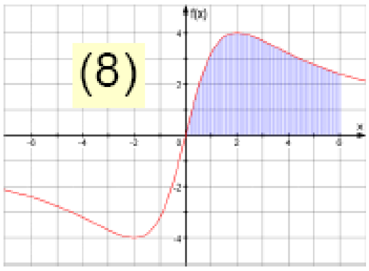
$$A=\left[-3-2\cdot\ln 3-1\right]-\left[-6-2\cdot\ln 6-\tfrac{1}{2}\right]=-4-2\cdot\ln 3+6+2\cdot\ln 6+\tfrac{1}{2}$$

$$A=\tfrac{5}{2}+2\cdot(\ln 6-\ln 3)=\tfrac{5}{2}+2\cdot\ln\frac{6}{3}=\tfrac{5}{2}+2\cdot\ln 2=\tfrac{5}{2}\cdot\ln 2^2=\tfrac{5}{2}\cdot\ln 4$$

Achtung: Man sollte nie vergessen: Nur bei positiven Grenzen a und b kann man den Betrag weglassen!

$$\boxed{\int_a^b\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_a^b}$$

$f(x)=\sqrt{4-x}$ Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen.



Lösung Nr. 8: $f(x)=\frac{16x}{x^2+4}$

Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

$$A=\int_0^6\frac{16x}{x^2+4}dx$$

Substitution: $u=x^2+4$, also
$du=2x\,dx \Rightarrow 16x\cdot dx=8\cdot du$

$$A=\int_4^{40}\frac{8\cdot du}{u}=8\cdot[\ln u]_4^{40}=8\cdot(\ln 40-\ln 4)=8\cdot\ln\frac{40}{4}=8\cdot\ln 10$$

Aufgabe 64:

Berechnen Sie folgende Flächen:

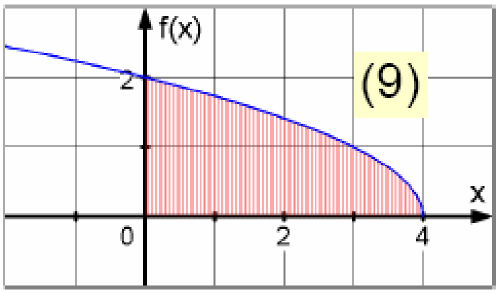
(9) $f(x)=\sqrt{4-x}$ Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen.

(10) $f(x)=x\sqrt{6-x}$ Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

(11) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 5.

(12) $f(x)=\left(9-x^2\right)\cdot\sqrt{x}$ Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse

Lösung:



Lösung Nr. 9: $f(x)=\sqrt{4-x}$

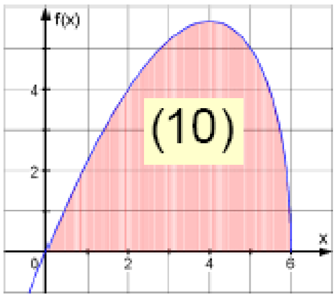
Nullstelle: $x_N = 4$

Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen:

$$A=\int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx$$

Substitution: $u=4-x \Rightarrow du=-dx \Rightarrow dx=-du$

$$A=-\int_4^0 \sqrt{u}du=\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du=\left[\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{3}\left[u\sqrt{u}\right]_0^4=\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$



Lösung Nr. 10: $f(x)=x\sqrt{6-x}$

Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$

Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

$$A=\int_0^6 x\sqrt{6-x}\,dx$$

Hier muß man gelernt haben, daß es zwei Möglichkeiten zur Substitution gibt: 1. Man setzt u = Radikand = 6 – x oder 2. Man setzt $u=\sqrt{6-x}$, was der bessere Weg ist. Beide Wege hier:

(1) Substitution: $u = 6 - x$ folgt $du = - dx$ und $dx = - du$ sowie $x = 6 - u$.

$$A=-\int_6^0 (6-u)\cdot\sqrt{u}\,du=\int_0^6\left(6u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}}\right)du=\left[6\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_0^6=\left[4u\sqrt{u}-\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}\right]_0^6$$

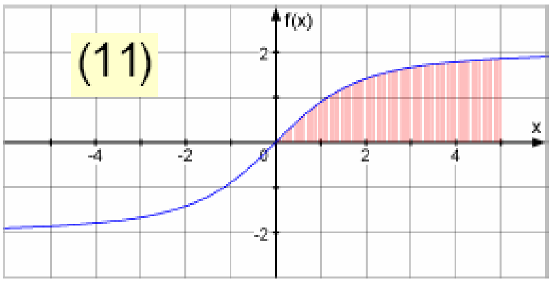
$$A=24\sqrt{6}-\frac{2}{5}\cdot 36\sqrt{6}=\left(24-\frac{72}{5}\right)\sqrt{6}=\frac{48}{5}\sqrt{6}$$

(2) Substitution: $u=\sqrt{6-x} \Rightarrow u^2=6-x \Rightarrow x=6-u^2 \Rightarrow dx=-2u\cdot du$

$$A=\int_{\sqrt{6}}^0 \left(6-u^2\right)\cdot u\cdot(-2u\cdot du)=-2\int_{\sqrt{6}}^0\left(6u^2-u^4\right)du=2\left[2u^3-\frac{1}{5}u^5\right]_0^{\sqrt{6}}$$

$$=2\cdot\left(2\cdot 6\sqrt{6}-\frac{1}{5}\cdot 36\cdot\sqrt{6}\right)=2\cdot\left(12-\frac{36}{5}\right)\sqrt{6}=2\cdot\frac{24}{5}\sqrt{6}=\frac{48}{5}\sqrt{6}\,.$$

Lösung Nr. 11: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$



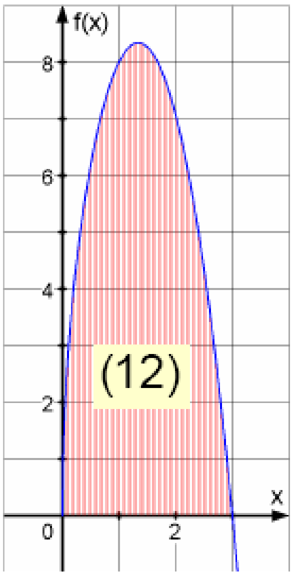
Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 5.

$$A = \int_0^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$ Substitution:

$u = x^2 + 4 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \Rightarrow 2x \cdot dx = du$

$$A = \int_4^{29} \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_4^{29} u^{-\frac{1}{2}} du = \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_4^{29} = \left[2\sqrt{u}\right]_4^{29} = 2\sqrt{29} - 4$$

Lösung Nr. 12: $f(x) = (9 - x^2) \cdot \sqrt{x}$



Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = \pm 3$

Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse

$$A = \int_0^3 (x^2 - 9) \cdot \sqrt{x}\,dx = \int_0^3 \left(x^2\sqrt{x} - 9\sqrt{x}\right)dx = \int_0^3 \left(x^{\frac{5}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$A = \left[9 \cdot \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}\right]_0^3 = \left[6x\sqrt{x} - \tfrac{2}{7} x^3 \sqrt{x}\right]_0^3$$

$$A = 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - \tfrac{2}{7} \cdot 27 \cdot \sqrt{3} = \left(18 - \tfrac{54}{7}\right) \cdot \sqrt{3} = \tfrac{72}{7}\sqrt{3} \approx 17{,}8$$

Aufgabe 65:

Berechnen Sie folgende Flächen:

(13) $f(x) = e^{1-x}$ Fläche A(r) zwischen K, den Koordinatenachsen und der Geraden x = r. Berechne auch $A^* = \lim\limits_{r \to \infty} A(r)$

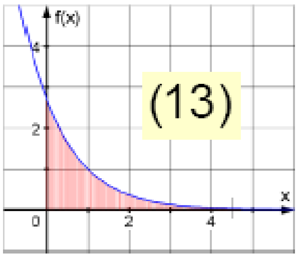
(14) $f(x) = 3 - e^{\frac{x}{2}}$ Fläche zwischen K und den Koordinatenachsen.

(15) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ Fläche zwischen der x-Achse, der Kurve und x= 4.
Kann man der Fläche auch dann noch einen endlichen Wert zuordnen, wenn man den rechten Rand ins Unendliche verschiebt ?

(16) $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 2}$

der Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen und der Geraden x=-4. Kann man der Fläche auch dann noch einen endlichen Wert zuordnen, wenn man den linken Rand ins unendliche schiebt.

Lösung:

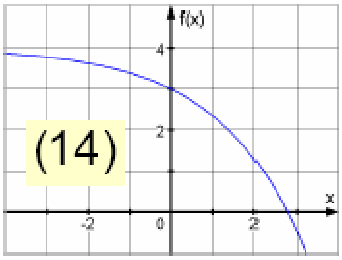


Lösung Nr. 13: $f(x) = e^{1-x}$

Fläche A(r) zwischen K, den Koordinatenachsen und der Geraden x = r .

$$A(r) = \int_0^r e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^r = -e^{1-r} + e^1 = e - e^{1-r} = e - \frac{e}{e^r}$$

Daraus folgt $A^* = \lim\limits_{r\to\infty} A(r) = e$, denn $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{e^r} = \lim\limits_{r\to\infty} e^{-r} = 0$.

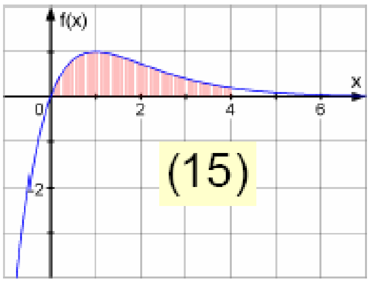


Lösung Nr. 14: $f(x) = 4 - e^{\frac{x}{2}}$

Nullstelle: $e^{\frac{x}{2}} = 4 \iff \frac{x}{2} = \ln 4 \iff x_N = 2 \cdot \ln 4 = \ln 16$

Fläche zwischen K und den Koordinatenachsen.

$$A = \int_0^{2\ln 4} \left(4 - e^{\frac{x}{2}}\right)dx = \left[4x - 2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{2\ln 4} = \left[4 \cdot \ln 16 - 2 \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}2\ln 4}}_{e^{\ln 4}=4}\right] - \left[0 - 2e^0\right] = 4 \cdot \ln 16 - 6$$



Lösung Nr. 15: $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Fläche zwischen der x-Achse, der Kurve und x= 4.

$$A = \int_0^4 x \cdot e^{1-x}dx$$

Partielle Integration: $u' = e^{1-x} \Rightarrow u = -e^{1-x}$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$$A = \int_0^4 x \cdot e^{1-x}dx = \left[-x \cdot e^{1-x}\right]_0^4 + \int_0^4 e^{1-x}dx = \left[-x \cdot e^{1-x}\right]_0^4 - \left[e^{1-x}\right]_0^4 = \left[-e^{1-x}(x+1)\right]_0^4 =$$

$$A = -e^{-3} \cdot 5 + e \cdot 1 = e - 5e^{-3}$$

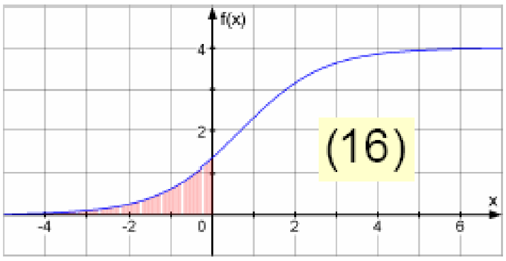
Kann man der Fläche auch dann noch einen endlichen wert zuordnen, wenn man den rechten Rand ins Unendliche verschiebt ?

Dazu nennt man den rechten Rand x = r und berechnet die Flächeninhaltsfunktion

$$A(r) = \int_0^r x \cdot e^{1-x}dx = \ldots = \left[-e^{1-x}(x+1)\right]_0^r = -e^{1-r}(r+1) + e = e - (r+1) \cdot e^{1-r}$$

$\lim\limits_{r\to\infty}(r+1) \cdot e^{1-r} = 0$, denn nach de L'Hospital gilt

$\lim\limits_{r\to\infty}(r+1) \cdot e^{1-r} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{r+1}{e^{r-1}} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{-e^{1-r}} = -\lim\limits_{r\to\infty} e^{1-r} = 0$, also ist $\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = e$.



Lösung Nr. 16: $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 2}$

Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen und der Geraden x = - 4.

$$A = \int_{-4}^{0} \frac{4e^x}{e^x + 2} dx$$

Substitution: $u = e^x + 2 \Rightarrow du = e^x \cdot dx \Rightarrow 4e^x dx = 4 \cdot du$

$$A = \int_{-4}^{0} \frac{4e^x}{e^x + 2} dx = \int_{2-e^{-4}}^{3} \frac{4 \cdot du}{u} = 4 \cdot \left[\ln|x|\right]_{2+e^{-4}}^{3} = 4 \cdot \ln 3 - 4 \cdot \ln\left(2 + e^{-4}\right) = 4 \cdot \ln \frac{3}{2 + e^{-4}}$$

Kann man der Fläche auch dann noch einen endlichen Wert zuordnen, wenn man den linken Rand ins Unendliche verschiebt ?

Dazu nennt man den rechten Rand x = r und berechnet die Flächeninhaltsfunktion

$$A(r) = \int_{r}^{0} \frac{4e^x}{e^x + 2} dx = \int_{2+e^r}^{0} \frac{4 \cdot du}{u} = 4 \cdot \left[\ln|x|\right]_{2+e^r}^{3} = 4 \cdot \ln 3 - 4 \cdot \ln\left(2 + e^r\right) = 4 \cdot \ln \frac{3}{2 + e^r}$$

$$\lim_{r \to -\infty} A(r) = 4 \cdot \lim_{r \to -\infty} \frac{3}{2 + e^r} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

Aufgabe 66:

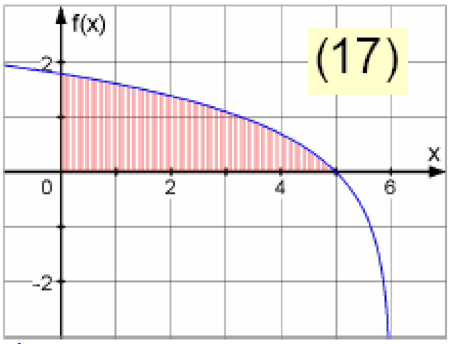
(17) $f(x) = \ln(6 - x)$ Fläche zwischen K und den Achsen.

(18) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 - \ln(x + 1)$ Fläche zwischen K, den Achsen und x = 3

(19) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$ Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 3

(20) $f(x) = \frac{2 + 4 \cdot \ln x}{x}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und $x = e^2$

Lösung:



Lösung Nr. 17: $f(x) = \ln(6-x)$

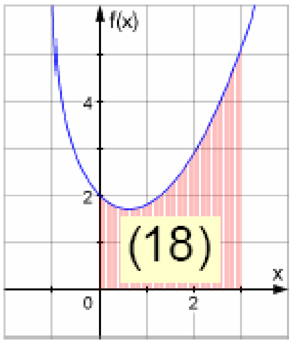
Nullstelle: Bed: Argument = 1: $6 - x = 1$
Also $x_n = 5$

Fläche zwischen K und den Achsen.

$$A = \int_0^5 \ln(6-x)\,dx$$

Substitution: $u = 6 - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$

$$A = \int_0^5 \ln(6-x)\,dx = -\int_6^1 \ln u\,du = [u \cdot \ln u - u]_1^6 = 6 \cdot \ln 6 - 6 - 1 \cdot \ln 1 + 1 = 6 \cdot \ln 6 - 5$$



Lösung Nr. 18: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 - \ln(x+1)$

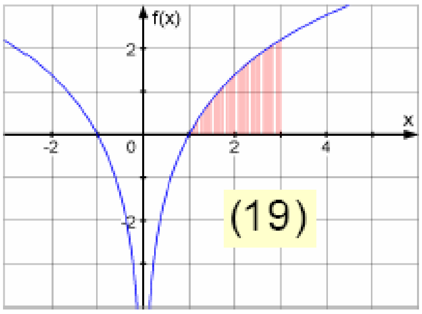
Fläche zwischen K, den Achsen und x = 3

$$A = \int_0^3 \left(\tfrac{1}{2}x^2 + 2 - \ln(x+1)\right)dx = \int_0^3 \left(\tfrac{1}{2}x^2 + 2\right)dx - \int_0^3 \ln(x+1)\,du =$$

Substitution des 2. Teilintegrals: $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$

$$A = \left[\tfrac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^3 - \int_1^4 \ln u\,du = \left[\tfrac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^3 - [u \cdot \ln u - u]_1^4 =$$

$$A = \tfrac{1}{6} \cdot 27 + 6 - [4 \cdot \ln 4 - 4] + [1 \cdot \ln 1 - 1] = \tfrac{9}{2} + 6 - \ln 64 + 4 - 1 = \tfrac{27}{2} - \ln 64 \approx 9{,}34$$



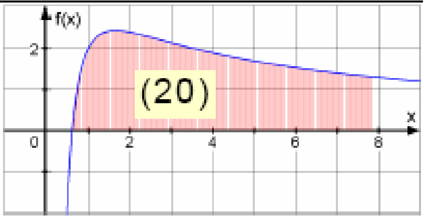
Lösung Nr. 19: $f(x) = \ln(x^2)$

Nullstellen: $x^2 = 1$ d.h. $x_N = \pm 1$

Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 3

$$A = \int_1^3 \ln(x^2)\,dx = \int_1^3 2 \cdot \ln x\,dx = 2[x \cdot \ln x - x]_1^3$$

$$A = 2[3 \cdot \ln 3 - 3] - 2\left[1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - 1\right] = 6 \cdot \ln 3 - 6 + 2 = 6 \cdot \ln 3 - 4$$



Lösung Nr. 20: $f(x) = \dfrac{2 + 4 \cdot \ln x}{x}$

Nullstelle: $4 \cdot \ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_N = e^{-\frac{1}{2}}$

Fläche zwischen K, der x-Achse und $x = e^2$

$$A = \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^{e^2} \frac{2 + 4 \cdot \ln x}{x}\,dx \quad \text{Subst.: } u = 2 + 4 \cdot \ln x \Rightarrow du = \frac{4}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}du$$

$$A = \tfrac{1}{4}\int_0^{10} u \cdot du = \tfrac{1}{8}\left[u^2\right]_0^{10} = \tfrac{1}{8}100 = 12{,}5$$

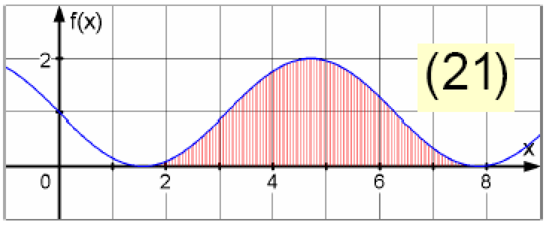
Aufgabe 67:

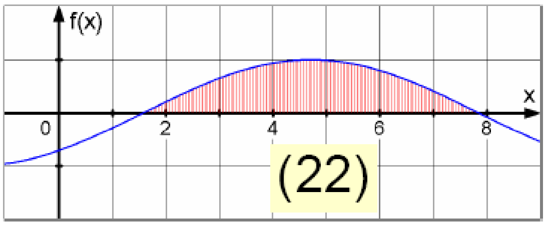
(21) $f(x) = 1 - \sin x$ Fläche siehe Abbildung.

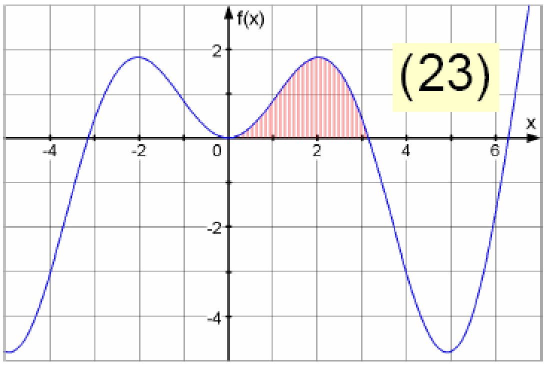
(22) $f(x) = -\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ Fläche siehe Abbildung.

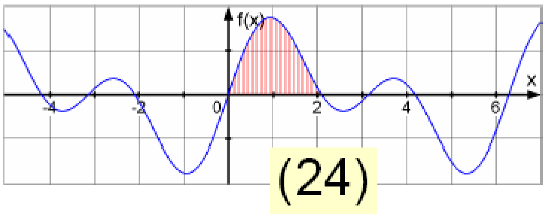
(23) $f(x) = x \cdot \sin x$ Fläche siehe Abbildung.

(24) $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ Fläche siehe Abbildung.



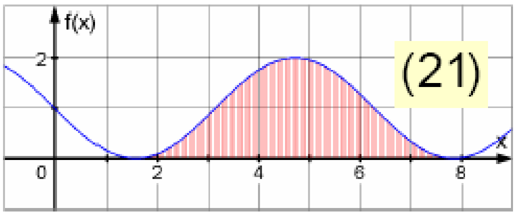






Lösung:

Lösung Nr. 21: $f(x) = 1 - \sin x$

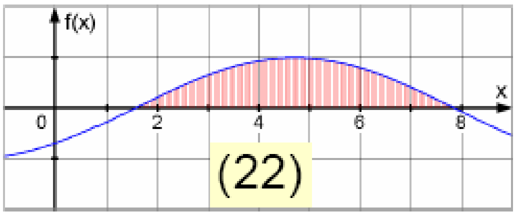


Nullstellen: $\sin x = 1$ d.h. $x_1 = \frac{1}{2}\pi$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$

Fläche siehe Abbildung.

$$A = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} [1 - \sin x]\, dx = [x + \cos x]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \tfrac{3}{2}\pi + \underbrace{\cos\tfrac{3}{2}\pi}_{=0} - \tfrac{1}{2}\pi - \underbrace{\cos\tfrac{1}{2}\pi}_{=0} = \pi$$

Lösung Nr. 22: $f(x) = -\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$



Die Nullstellen der Kosinus-Funktion liegen bei $\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$

d.h. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\pi$

und $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}\pi \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}\pi$

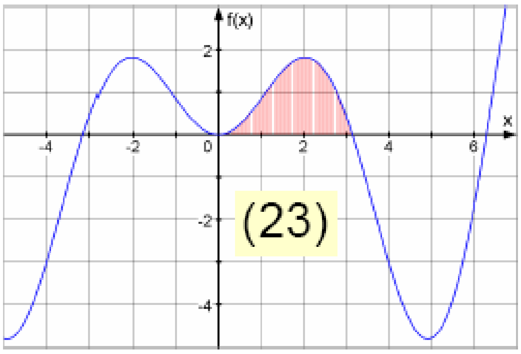
Fläche siehe Abbildung.

$$A = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos(\tfrac{x}{2} + \tfrac{\pi}{4})dx$$

Substitution: $u = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2 \cdot du$

$$A = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos u\, du = [\sin u]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \sin\tfrac{1}{2}\pi - \sin\tfrac{3}{2}\pi = 1 - (-1) = 2$$

Lösung Nr. 23: $f(x) = x \cdot \sin x$



Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ usw.

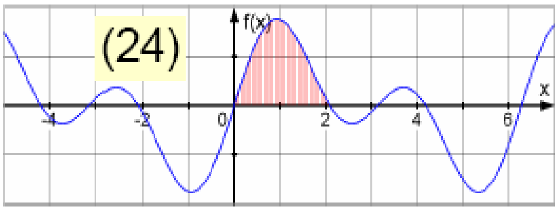
Fläche siehe Abbildung.

$$A = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x\, dx$$

Partielle Integration: $u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$$A = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x\, dx = [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = [-x \cdot \cos x + \sin x]_0^{\pi} = \left[-\pi \cdot \cos\pi + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\right] = \pi$$



Lösung Nr. 24: $f(x) = \sin x + \sin(2x)$

Da $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$ folgt:

$f(x) = \sin x + 2\sin x \cdot \cos x$

Nullstellen: $\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$

$\sin x \cdot (1 + 2\cos x) = 0$ d.h. $\sin x = 0$ oder $\cos x = -\frac{1}{2}$

Daraus folgen die für diese Fläche relevanten Nullstellen:

$x_1 = 0$ und $x_1 = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

Fläche siehe Abbildung.

$$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x + \sin(2x))dx = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin x \, dx + \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin(2x)dx$$

Substitution des 2. Integrals: $u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$A = -[\cos x]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin u \, du = -[\cos x]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \frac{1}{2}[\cos u]_0^{2\pi}$$

$$A = -\cos\frac{2}{3}\pi + cos0) - 12cos2 \cdot \frac{2}{3}\pi + 12\cos(0) = +12 + 1 + 14 + 12 = 94$$

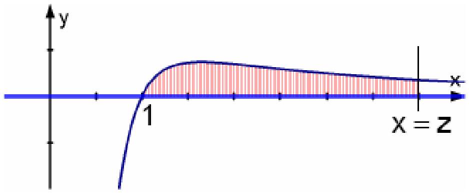
Aufgabe 68: 2

(11) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$,

Zeige, daß das Schaubild K zusammen mit der x-Achse im 1. Feld eine bis ins Unendliche reichende Fläche mit endlichem Inhalt begrenzt.

Lösung:

(11) $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}$,



Zeige, daß das Schaubild K zusammen mit der x-Achse im 1. Feld eine bis ins Unendliche reichende Fläche mit endlichem Inhalt begrenzt.

Lösung: Wir stellen die Flächeninhaltsfunktion auf:

$$A(z)=\int_1^z \frac{\ln x^2}{x^2}\,dx=\int_1^z \frac{2}{x^2}\cdot \ln x\,dx$$

Partielle Integration: $u'=2x^{-2} \Rightarrow u=2\cdot\dfrac{x^{-1}}{-1}=-\dfrac{2}{x}$

$v=\ln x \Rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$A(z)=[u\cdot v]_1^z-\int_1^z u\cdot v'dx=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]_1^z-\int_1^z -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}dx=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]+2\int_1^z x^{-2}\,dx$$

$$A(z)=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]_1^z+2\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^z=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x-\frac{2}{x}\right]_1^z=\left[-\frac{2}{x}\cdot(\ln x+1)\right]_1^z$$

$$A(z)=\left[-\frac{2}{z}(\ln z+1)\right]-\left[-2\cdot\left(\underbrace{\ln 1}_{0}+1\right)\right]=-\frac{2}{z}\cdot(\ln z+1)+2$$

$$\lim_{x\to\infty}A(z)=2-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln z}{z}=2-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{z}}{1}=2-2\cdot 0=2$$

wobei die Regel von de L'Hospital zur Anwendung gekommen ist.

Aufgabe 69:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x\cdot\cos x\,dx$$

Lösung:

Partielle Integration.

$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$

$v = \cos x \quad \Rightarrow \quad v' = -\sin x$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \sin x \, dx$$

Nächste partielle Integration:

$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$

$v = \sin x \quad \Rightarrow \quad v' = \cos x$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \sin x \, dx = \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

Zusammengesetzt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

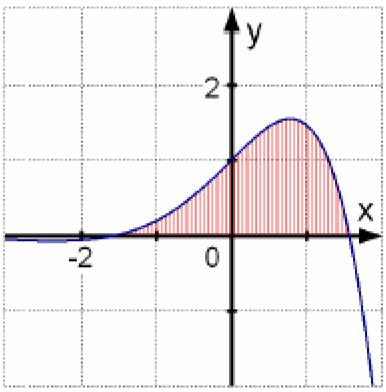
$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

Also folgt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}\left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{\pi/2}\left(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}\right) - e^{-\pi/2}\left(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) \approx 2{,}51$$



Aufgabe 70:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx$$

Lösung:

Partielle Integration:

$$u' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = -e^{-x}$$

$$v = \sin(2x) \quad \Rightarrow \quad v' = 2 \cdot \cos(2x)$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \cos(2x) dx$$

Nächste partielle Integration:

$$u' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = -e^{-x}$$

$$v = \cos(2x) \quad \Rightarrow \quad v' = -2 \cdot \sin(2x)$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \cos(2x) dx = \left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - 2\int e^{-x} \cdot \sin(2x) dx$$

Zusammengesetzt:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2\left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin(2x) dx$$

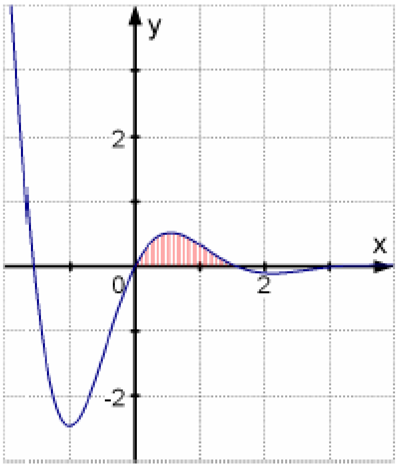
$$5\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2\left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \tfrac{1}{5}\left[-e^{-x} \cdot \sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \tfrac{1}{5}\left[-e^{-x} \cdot \left(\sin(2x) + 2\cos(2x)\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{1}{5}\left[-e^{-\pi/2} \cdot \left(\underbrace{\sin\pi}_{0} + 2 \cdot \underbrace{\cos\pi}_{-1}\right)\right] - \tfrac{1}{5}\left[-e^{0} \cdot \left(\underbrace{\sin 0}_{0} + 2 \cdot \underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{5}\left[2e^{-\pi/2}\right] - \tfrac{1}{5}\left[-1 \cdot (0+2)\right] = \tfrac{2}{5} \cdot e^{-\pi/2} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{5} \cdot \left(1 + e^{-\pi/2}\right) \approx 0{,}48$$



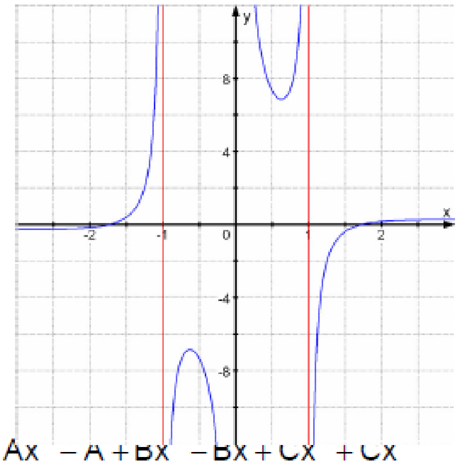
Aufgabe 71:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2 - 3}{x^3 - x} dx$$

Lösung

(3) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}\,dx$



Nullstellen des Nenners: 0, 1 und **– 1** , denn

$x^3-x = x\left(x^2-1\right) = x\left(x+1\right)\left(x-1\right)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Hauptnennerform der rechten Seite:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A\left(x^2-1\right)+Bx\left(x-1\right)+Cx\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx}{x^3-x}$$

Also folgt: $\displaystyle\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{(A+B+C)x^2+(-B+C)x-A}{x^3-x}$

Koeffizientenvergleich der Zähler:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 && (1)\\ -B+C &= 0 && (2)\\ -A &= -3 && (3) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt: A = 3 . Setzt man dies in (1) ein, folgt

$$B+C=-2 \qquad (4)$$

Addition von (2) und (4) liefert $\qquad 2C=-2 \;\Rightarrow\; C=-1$

Aus (2) folgt schließlich $\qquad B=C=-1$

Ergebnis: $\displaystyle f\left(x\right) = \frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

Berechnung des Integrals: $\displaystyle A = \int_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}dx = 3\int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x}dx - \int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x-1}dx - \int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x+1}dx$

Substitution für das 2. Integral: $u = x-1 \;\Rightarrow\; du = dx$

Substitution für das 3. Integral: $v = x+1 \;\Rightarrow\; dv = dx$

$$A = 3\int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x}dx - \int_{\sqrt{3}-1}^{4}\frac{1}{u}du - \int_{\sqrt{3}+1}^{6}\frac{1}{v}dv = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln u\right]_{\sqrt{3}-1}^{4} - \left[\ln v\right]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3\ln 5 - 3\ln\sqrt{3} - \ln 4 + \ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln 6 + \ln\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Wegen $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln\left(3-1\right) = \ln 2$ folgt

$$A = 3\cdot\ln 5 - 3\cdot\ln\sqrt{3} - \ln 24 + \ln 2 = 3\cdot\ln\frac{5}{\sqrt{3}} - \ln 12 \approx 0{,}7$$

Hinweis: Wenn man das Verfahren der Rücksubstitution anwendet, dann verläuft die Rechnung so:

$$A = 3\int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x}dx - \int_{\sqrt{3}-1}^{4}\frac{1}{u}du - \int_{\sqrt{3}+1}^{6}\frac{1}{v}dv = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln u\right]_{\sqrt{3}-1}^{4} - \left[\ln v\right]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln(x-1)\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln(x+1)\right]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}\right]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{x^2-1}\right]_{\sqrt{3}}^{5}$$

$$A = \ln\frac{125}{24} - \ln\frac{3\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{125}{24}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} = \ln\frac{125}{36\sqrt{3}} \approx 0{,}7$$

Dieses Verfahren ist dann anzuwenden, wenn nur die Stammfunktion, also das unbestimmte Integral gesucht ist, bei dem man ja ohne Grenzen arbeitet.

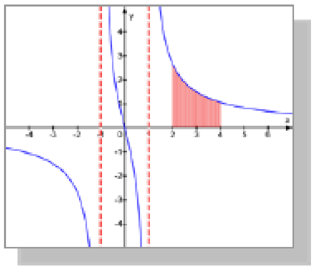
Aufgabe 72:

Berechnen Sie folgende Integrale.

(1) $\int_{2}^{4}\frac{4x}{x^2-1}dx$ (2) $\int_{2}^{0}\frac{4}{x^2-2x-8}dx$ (3) $\int_{-3}^{-1}\frac{2-x}{x^2+4x}dx$

Lösung:

(1) $f(x) = \frac{4x}{x^2-1} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$



Gesucht: $A = \int_{2}^{4}\frac{4x}{x^2-1}dx$

Partialbruchzerlegung:

Ansatz: $\frac{4x}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \quad | \cdot(x-1)(x+1)$

$4x = a\cdot(x+1) + b\cdot(x-1)$

$x = 1$ eingesetzt: $4\cdot\boxed{1} = a\cdot\left(\boxed{1}+1\right) + b\cdot\left(\boxed{1}-1\right) \Leftrightarrow 4 = 2a \Leftrightarrow a = 2$

$x = -1$ eingesetzt: $4\cdot\boxed{-1} = a\cdot\left(\boxed{-1}+1\right) + b\cdot\left(-\boxed{1}-1\right) \Leftrightarrow -4 = -2b \Leftrightarrow b = 2$

Ergebnis: $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$

Fortsetzung der Flächenberechnung:

$$A = \int_{2}^{4}\frac{4x}{x^2-1}dx = \int_{2}^{4}\frac{2}{x-1}dx + \int_{2}^{4}\frac{2}{x+1}dx$$

1. Schnellberechnung:

$$A = 2\cdot\left[\ln|x-1|\right]_{2}^{4} + 2\cdot\left[\ln|x+1|\right]_{2}^{4} = 2\cdot(\ln 3 - \ln 1) + 2\cdot(\ln 5 - \ln 3) = 2\cdot\ln 3 + 2\cdot\ln 5 - 2\cdot\ln 3 = 2\cdot\ln 5$$

2. <u>Ausführliche Berechnung mittels Substitutionen:</u>

$\int_2^4 \frac{2}{x-1}dx$ Substitution: $u = x - 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$

Grenzen umrechnen: $x = 2 \quad \Rightarrow \quad u = 1$ und $x = 4 \quad \Rightarrow \quad u = 3$

$$\int_2^4 \frac{2}{x-1}dx = 2\int_1^3 \frac{1}{u}du = 2 \cdot \left[\ln|u|\right]_1^3 = 2 \cdot (\ln 3 - \ln 1) = 2 \cdot \ln 3$$

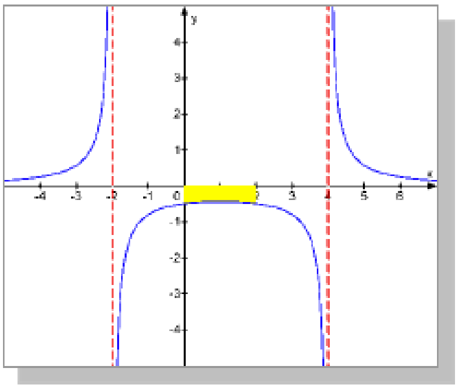
$\int_2^4 \frac{2}{x+1}dx$ Substitution: $v = x + 1 \quad \Rightarrow \quad dv = dx$

Grenzen umrechnen: $x = 2 \quad \Rightarrow \quad v = 3$ und $x = 4 \quad \Rightarrow \quad v = 5$

$$\int_2^4 \frac{2}{x+1}dx = 2\int_3^5 \frac{1}{v}dv = 2 \cdot \left[\ln|v|\right]_3^5 = 2 \cdot (\ln 5 - \ln 3) = 2 \cdot \ln 5 - 2 \cdot \ln 3$$

Zusammenfassen: $A = 2 \cdot \ln 3 + 2 \cdot \ln 5 - 2 \cdot \ln 3 = 2 \cdot \ln 5 \approx 3{,}22$

(2) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x-8}$



Nullstellen des Nenners:

$$x^2-2x-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm6}{2}=\begin{cases}4\\-2\end{cases}$$

Zerlegung des Nenners: $(x+2)(x-4)$

Flächenberechnung:

$$\boxed{A=-\int_0^2\frac{4}{x^2-2x-8}dx=\int_2^0\frac{4}{(x+2)(x-4)}dx}$$

Partialbruchzerlegung:

Ansatz: $\dfrac{4}{(x+2)(x-4)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-4} \quad |\cdot(x-4)(x+2)$

$4=a\cdot(x-4)+b\cdot(x+2)$

$x=-2$ eingesetzt: $4=a\cdot(\boxed{-2}-4)+b\cdot(\boxed{-2}+2) \quad \Leftrightarrow \quad 4=-6a \quad \Leftrightarrow \quad a=-\frac{2}{3}$

$x=4$ eingesetzt: $4=a\cdot(\boxed{4}-4)+b\cdot(4+2) \quad \Leftrightarrow \quad 4=6b \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{2}{3}$

Ergebnis: $f(x)=\dfrac{4}{(x+2)(x-4)}=-\dfrac{\frac{2}{3}}{x+2}+\dfrac{\frac{2}{3}}{x-4}$

Fortsetzung der Flächenberechnung:

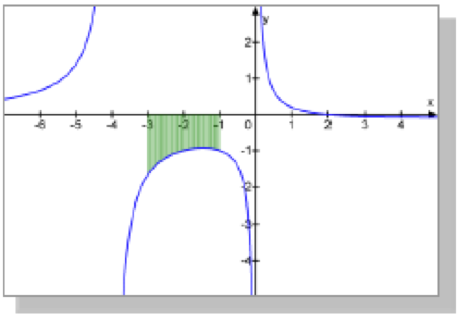
$$A=\int_2^0\frac{4}{(x+2)(x-4)}dx=\int_2^0\left(-\frac{\frac{2}{3}}{x+2}+\frac{\frac{2}{3}}{x-4}\right)dx=-\frac{2}{3}\int_2^0\frac{1}{x+2}dx+\frac{2}{3}\int_2^0\frac{1}{x-4}dx$$

Schnellberechnung ohne Substitution:

$$A=-\tfrac{2}{3}\cdot\left[\ln|x+2|\right]_2^0+\tfrac{2}{3}\left[\ln|x-4|\right]_2^0=-\tfrac{2}{3}\cdot(\ln2-\ln4)+\tfrac{2}{3}(\ln4-\ln2)=\tfrac{2}{3}(-\ln2+\ln4+\ln4-\ln2)$$

$$A=\tfrac{2}{3}(2\cdot\ln4-2\cdot\ln2)=\tfrac{2}{3}(\ln16-\ln4)=\tfrac{2}{3}\cdot\ln\tfrac{16}{4}=\tfrac{2}{3}\cdot\ln4\approx0{,}924$$

(3) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+4x}$



Gesucht: $\boxed{A=-\int\limits_{-3}^{-1}\frac{2-x}{x(x+4)}dx}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{2-x}{x(x+4)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+4}$ (1)

(1) mit $x\cdot x+4$ multiplizieren:

$$2-x=a\cdot(x+4)+b\cdot x$$

$x=0$ eingesetzt: $2-\boxed{0}=a\cdot\left(\boxed{0}+4\right)+b\cdot\boxed{0} \Leftrightarrow 2=4a \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

$x=-4$ eingesetzt: $2-\boxed{-4}=a\cdot\left(\boxed{-4}+4\right)+b\cdot\boxed{-4} \Leftrightarrow 6=-4b \Leftrightarrow b=-\frac{3}{2}$

Ergebnis: $f(x)=\dfrac{2}{x(x+4)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}-\dfrac{\frac{3}{2}}{x+4}$

Berechnung des Integrals:

$$A=-\int\limits_{-3}^{-1}\frac{2-x}{x(x+4)}dx=\int\limits_{-1}^{-3}\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}-\frac{\frac{3}{2}}{x+4}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{-3}\left(\frac{1}{x}\right)dx-\frac{3}{2}\cdot\int\limits_{-1}^{-3}\frac{1}{x+4}dx$$

<u>Schnellberechnung ohne Substitution:</u>

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln|x|\right]_{-1}^{-3}-\frac{3}{2}\cdot\left[\ln|x+4|\right]_{-1}^{-3}$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot(\ln 3-\ln 1)-\frac{3}{2}\cdot(\ln 1-\ln 3)=\frac{1}{2}\cdot\ln 3+\frac{3}{2}\cdot\ln 3=2\cdot\ln 3$$

Denn $\ln 1 = 0$.

Aufgabe 73:

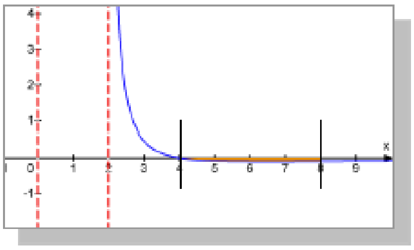
$f(x)=\dfrac{16-x^2}{x^3-4x}$

Gesucht: Fläche zwischen Kurve, x-Achse und x = 8.

Lösung:

(4) $f(x)=\dfrac{16-x^2}{x^3-4x}$

Gesucht: Fläche zwischen Kurve, x-Achse und x = 8.



Lösung

Nullstellen des Zählers: $16-x^2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=16 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=\pm 4$

Nullstellen des Nenners: $x\cdot\left(x^2-4\right)=0 \;\Leftrightarrow\; x_3=0,\; x_{4,5}=\pm 2$

Auswertung:

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2}(\pm 4\,|\,0)$,

Polstellen mit VZW: $x_3=0,\; x_{4,5}=\pm 2$

Senkrechte Asymptoten: $x=0,\; x=2$ und $x=-2$.

Waagrechte Asymptote: $y=0$ (x-Achse), denn Grad Z < Grad N.

Fläche: $\boxed{A=-\int_4^8 \frac{16-x^2}{x\left(x^2-4\right)}dx}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{16-x^2}{x\left(x^2-4\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x+2} \quad \Big|\; \cdot x\cdot(x-2)(x+2)$

$16-x^2=a\cdot\left(x^2-4\right)+b\cdot x\cdot(x+2)+c\cdot x\cdot(x-2)$

$x=0$ eingesetzt: $16-\boxed{0}^2=a\cdot\left(\boxed{0}^2-4\right)+b\cdot\boxed{0}\cdot\left(\boxed{0}+2\right)+c\cdot\boxed{0}\cdot\left(\boxed{0}-2\right)$

ergibt: $16=-4a \;\Leftrightarrow\; a=-4$

$x=2$ eingesetzt: $16-\boxed{2}^2=a\cdot\left(\boxed{2}^2-4\right)+b\cdot\boxed{2}\cdot\left(\boxed{2}+2\right)+c\cdot\boxed{2}\cdot\left(\boxed{2}-2\right)$

ergibt: $12=8b \;\Leftrightarrow\; b=\frac{3}{2}$

$x=-2$ eingesetzt: $16-\boxed{-2}^2=a\cdot\left(\boxed{-2}^2-4\right)+b\cdot\boxed{-2}\cdot\left(\boxed{-2}+2\right)+c\cdot\boxed{-2}\cdot\left(\boxed{-2}-2\right)$

ergibt: $12=8c \;\Leftrightarrow\; c=\frac{3}{2}$

Ergebnis: $f(x)=\dfrac{16-x^2}{x\left(x^2-4\right)}=-\dfrac{4}{x}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x+2}$

Integration:

$$A=-\int_4^8\frac{16-x^2}{x\left(x^2-4\right)}dx=-\int_4^8\left(-\frac{4}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}\right)dx=4\int_4^8\frac{1}{x}dx-\frac{3}{2}\int_4^8\frac{1}{x-2}dx-\frac{3}{2}\int_4^8\frac{1}{x+2}dx$$

$$A=4\cdot\left[\ln|x|\right]_4^8-\tfrac{3}{2}\cdot\left[\ln|x-2|\right]_4^8-\tfrac{3}{2}\cdot\left[\ln|x+2|\right]_4^8$$

$$A=4\cdot(\ln 8-\ln 4)-\tfrac{3}{2}(\ln 6-\ln 2)-\tfrac{3}{2}(\ln 10-\ln 6)=4\cdot\ln 2-\tfrac{3}{2}\cdot\ln 3-\tfrac{3}{2}\cdot\ln\tfrac{5}{3}$$

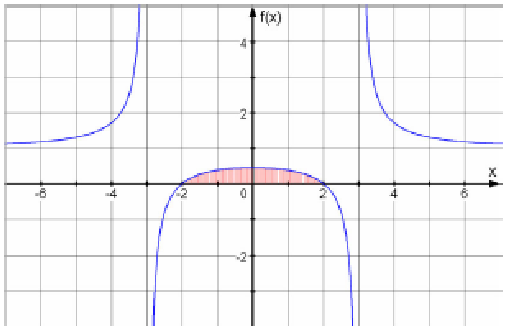
$$A=4\cdot\ln 2-\tfrac{3}{2}\cdot\ln 3-\tfrac{3}{2}\cdot(\ln 5-\ln 3)=4\cdot\ln 2-\cancel{\tfrac{3}{2}\cdot\ln 3}-\tfrac{3}{2}\cdot\ln 5+\cancel{\tfrac{3}{2}\cdot\ln 3}=\ln 16-\tfrac{3}{2}\cdot\ln 5\approx 0{,}358$$

Aufgabe 74:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2-4}{x^2-9}\,dx$$

Lösung:



(4) $$\int_{-2}^{2} \frac{x^2-4}{x^2-9}\,dx$$

Jetzt ist der Funktionsterm nicht mehr "echt" gebrochen. Man muß ihn dann zuerst so zerlegen:

$$\frac{x^2-4}{x^2-9} = \frac{x^2-9+5}{x^2-9} = \frac{x^2-9}{x^2-9} + \frac{5}{x^2-9} = 1 + \frac{5}{x^2-9}$$

Wer dies nicht erkennt, findet die Zerlegung stets über eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2-4):(x^2-9) = 1 \\ \underline{-(x^2-9)} \\ \quad 5 \end{array}$$

Dies ergibt $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9} = 1 + \frac{5}{x^2-9}$

Nun folgt die Partialbruchzerlegung für den Restterm:

$$\frac{5}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-3B)}{x^2-9}$$

Koeffizientenvergleich für den ersten und letzten Zähler:

$$A+B=0 \;\Rightarrow\; B=-A \qquad (1)$$

$$3A-3B=5 \qquad (2)$$

(1) in (2) liefert $6A=5 \;\Rightarrow\; A=\frac{5}{6}$ und damit $B=-\frac{5}{6}$

Ergebnis: $$\frac{5}{x^2-9} = \frac{\frac{5}{6}}{x-3} - \frac{\frac{5}{6}}{x+3}1$$

Berechnung des Integrals (unter Ausnützung der Symmetrie der Fläche):

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{x^2-4}{x^2-9}\,dx = 2\int_0^2 \left(1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{5}{6}\frac{1}{x+3}\right)dx = 2\int_0^2 dx + \frac{5}{3}\int_0^2 \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{5}{3}\int_0^2 \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$A = [2x]_0^2 + \frac{5}{3}\int_{-3}^{-1}\frac{1}{u}\,du - \frac{5}{3}\int_3^5 \frac{1}{v}\,dv = 4 + \frac{5}{3}\left[\ln|u|\right]_{-3}^{-1} - \frac{5}{3}\left[\ln|v|\right]_3^5 = 4 - \frac{5}{3}\ln 5$$

Aufgabe 75:

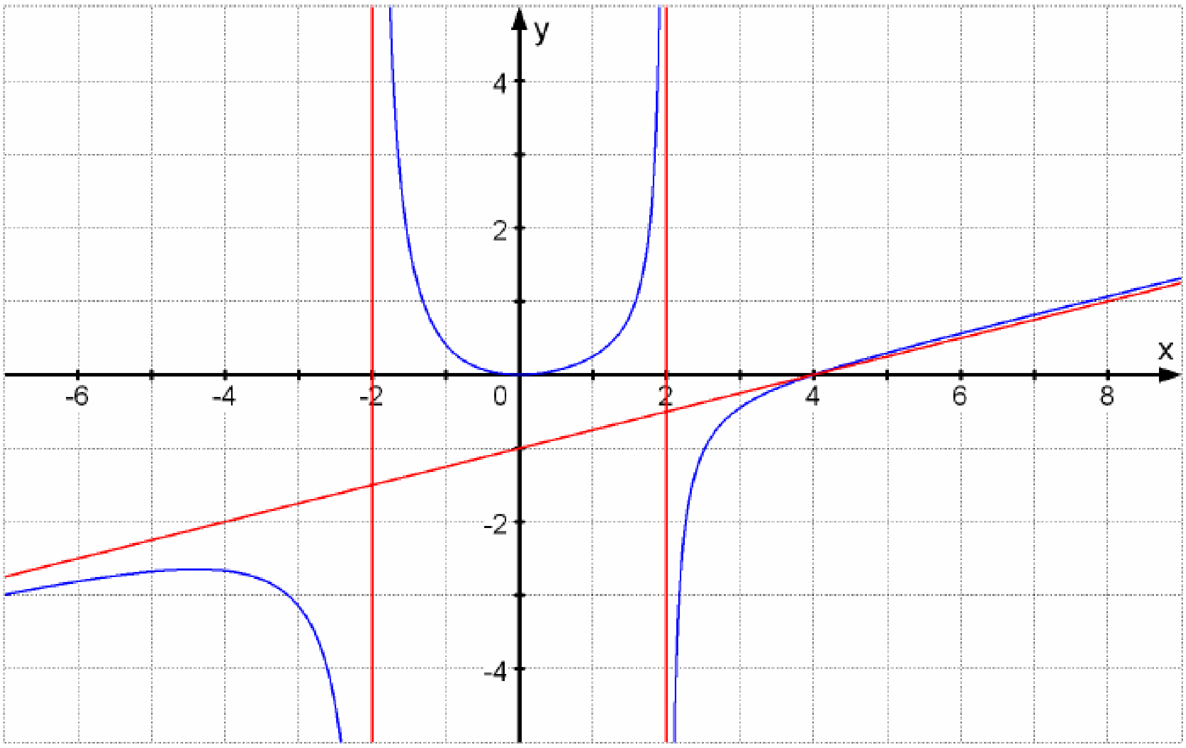
Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) zu f(x).

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}$$

Lösung:

(5) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 4}$ Gesucht ist die Stammfunktion F.

Diese Funktion hat eine doppelte Nullstelle bei 0, eine weitere Nullstelle bei 4, dann zwei Polstellen bei 2 und – 2 (jeweils mit Zeichenwechsel), und dies hat die beiden senkrechten Asymptoten dx = 2 und x = - 2 zur Folge. Da der Grad des Zählers um 1 größer als der Nenner ist, besitzt das Schaubild eine schiefe Asymptote. Ihre Gleichung $y = \frac{1}{4}x - 1$ folgt aus der unten gezeigten Polynomdivision.



Nun müssen wir diese Vorarbeit leisten:
Zunächst lassen wir den Faktor $\frac{1}{4}$ einfach weg. Er wird am Ende der Rechnung wieder ergänzt. Zum zweiten führen wir eine Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 0x + 0) : (x^2 - 4) = x - 4 \\
\underline{-(x^3 + 0x^2 - 4x)} \\
\quad -4x^2 + 4x \\
\quad \underline{-(-4x^2 + 0x + 16)} \\
\qquad +4x - 16
\end{array}
\qquad \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(x - 4 + \frac{4x - 16}{x^2 - 4} \right)
$$

oder so: $f(x) = \frac{1}{4}x - 1 + \frac{x - 4}{x^2 - 4}$

Daraus erkennt man die schiefe Asymptote, da $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{x - 4}{x^2 - 4} = \lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$ ist.

Da der Restterm $\frac{x - 4}{x^2 - 4}$ seine Nullstelle bei x = 4 hat, liegt dort auch der Schnittpunkt zwischen der Kurve und ihrer schiefen Asymptote.

Nun aber zur Berechnung der Stammfunktion.

$$F(x)=\frac{1}{4}\int\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}dx=\int\left(\tfrac{1}{4}x-1+\frac{x-4}{x^2-4}\right)dx=\tfrac{1}{8}x^2-x+\int\frac{x-4}{x^2-4}dx \qquad (*)$$

Partialbruchzerlegung für den Restterm $\frac{x-4}{x^2-4}$:

$$\frac{x-4}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$$

Koeffizientenvergleich für den ersten und letzten Zähler:

$$\begin{aligned} A+B&=1 && (1)\\ 2A-2B&=-4 && (2) \quad \text{I} :2\\ A-B&=-2 && (3)\end{aligned}$$

$(1)+(3)$ liefert $2A=-1 \Rightarrow A=-\tfrac{1}{2}$.

Eingesetzt in (3): $-\tfrac{1}{2}-B=-2 \Rightarrow B=\tfrac{3}{2}$

Damit folgt $\quad \frac{x-4}{x^2-4}=\frac{-\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}$

Das letzte Integral in $(*)$ lautet daher

$$\int\frac{x-4}{x^2-4}dx=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+2}dx$$

Den Bruch $\frac{1}{x-2}$ substituieren wir mit $u=x-2 \Rightarrow du=dx$, den Bruch $\frac{1}{x+2}$ mit $v=x+2 \Rightarrow dv=dx$. Damit folgt:

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du+\frac{3}{2}\int\frac{1}{v}dv=-\frac{1}{2}\cdot\ln|u|+\frac{3}{2}\ln|v|+C$$

Und nach der Rücksubstitution:

$$=-\frac{1}{2}\cdot\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$$

Nun setzten wir dies wieder in die Gleichung $(*)$ ein und erhalten die gesuchte Stammfunktion:

$$F(x)=\tfrac{1}{8}x^2-x-\frac{1}{2}\cdot\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$$

Soll damit eine Fläche berechnet werden, dann hängt die weitere Rechnung von der Lage dieser Fläche ab, da wir entscheiden müssen, was aus den Beträgen wird. Für $x>2$ darf man beispielsweise alle Beträge weglassen. Dann folgt:

$$F(x)=\tfrac{1}{8}x^2-x-\frac{1}{2}\cdot\ln(x-2)+\frac{3}{2}\ln(x+2)+C=\tfrac{1}{8}x^2-x-\ln\sqrt{x-2}+\ln\sqrt{x+2}^{\,3}+C$$

$$F(x)=\tfrac{1}{8}x^2-x+\ln\frac{\sqrt{x+2}^{\,3}}{\sqrt{x-2}}+C$$

Jetzt könnte man z.B. die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und der Geraden x = 6 berechnen. Dazu kann man C = 0 wählen:

$$A=\int_4^6 F(x)dx=\left[\frac{1}{8}x^2-x+\ln\frac{\sqrt{x+2}^{\,3}}{\sqrt{x-2}}\right]_4^6=\ldots$$

Aufgabe 76:

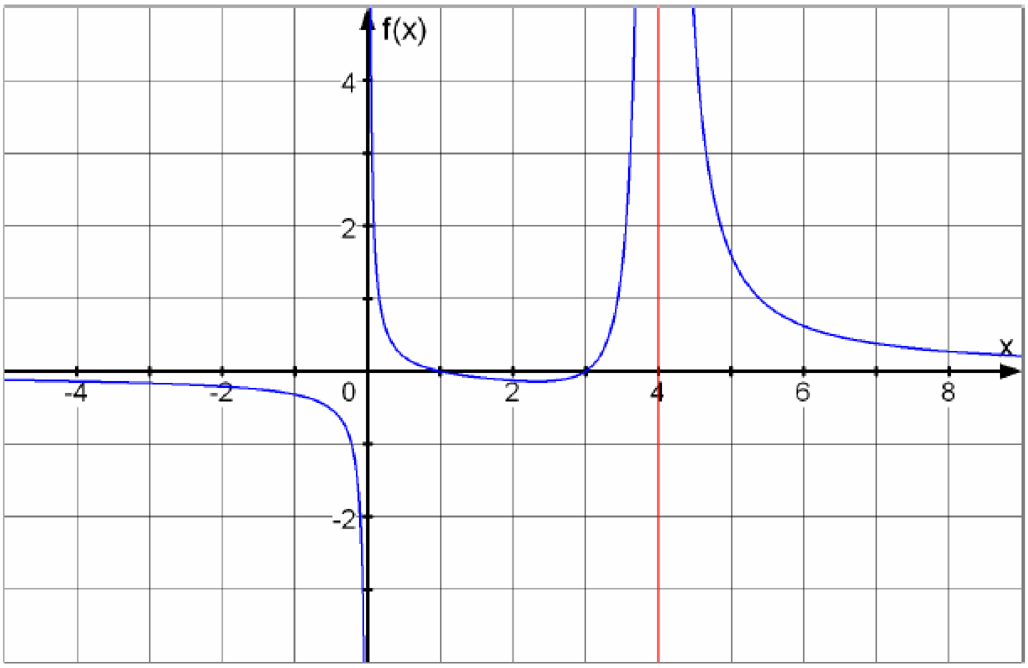
Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}$$

Lösung:

(6) $$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2-8x+16)}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2}$$

Gesucht ist die Fläche, die K und die x-Achse zwischen 1 und 3 begrenzen.



Lösung: $$A=-\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^1\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}\,dx$$

Die jetzt erforderliche Partialbruchzerlegung klappt nur mit diesem Ansatz:

$$\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

Warum ? Sagen wir doch einfach – das Ergebnis rechtfertigt dieses Mittel.
(Da der linke Zähler 3 Summanden hat, benötigen wir rechts 3 Brüche mit den Zählern A, B und C; sonst ist ein Koeffizientenvergleich nicht möglich!)
Man sollte in einem solchen Fall immer einen vergleichbaren Ansatz machen !
Nun bringen wir die rechte Seite auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}=\frac{A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx}{x\cdot(x-4)^2}=\frac{A(x^2-8x+16)+B(x^2-4x)+Cx}{x\cdot(x-4)^2}$$

Daraus folgt $\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-8A-4B+C)x+16A}{x(x-4)^2}$

Koeffizientenvergleich:

$$A+B=1 \qquad (1)$$
$$-8A-4B+C=-4 \qquad (2)$$
$$16A=3 \;\Rightarrow\; A=\tfrac{3}{16}$$
$$A \text{ in } (1):\quad B=1-\tfrac{3}{16}=\tfrac{13}{16}$$
$$A,\,B \text{ in } (2):\quad -8\cdot\tfrac{3}{16}-4\cdot\tfrac{13}{16}+C=-4$$
$$-\tfrac{3}{2}-\tfrac{13}{4}+C=-4 \;\Rightarrow\; C=-4+\tfrac{19}{4}=\tfrac{3}{4}$$

Ergebnis: $\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{\frac{3}{16}}{x}+\frac{\frac{13}{16}}{x-4}+\frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}$

<u>**Berechnung des Flächeninhaltes**</u>:

$$A=-\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^1\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}\,dx=\int_3^1\left(\frac{\frac{3}{16}}{x}+\frac{\frac{13}{16}}{x-4}+\frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}\right)dx=$$

$$A=\tfrac{3}{16}\int_3^1\frac{1}{x}\,dx+\tfrac{13}{16}\int_3^1\frac{1}{x-4}\,dx+\tfrac{3}{4}\int_3^1\frac{1}{(x-4)^2}\,dx$$

Substitution: $u=x-4 \;\Rightarrow\; du=dx$

$$A=\tfrac{3}{16}\int_3^1\frac{1}{x}\,dx+\tfrac{13}{16}\int_{-1}^{-3}\frac{1}{u}\,du+\tfrac{3}{4}\int_{-1}^{-3}\frac{1}{u^2}\,du=\tfrac{3}{16}\big[\ln|x|\big]_3^1+\tfrac{13}{16}\big[\ln|u|\big]_{-1}^{-3}+\tfrac{3}{4}\cdot\big[-\tfrac{1}{u}\big]_{-1}^{-3}$$

$$A=\tfrac{3}{16}(0-\ln 3)+\tfrac{13}{16}(\ln 3-0)+\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{3}-1\right)=-\tfrac{3}{16}\ln 3+\tfrac{13}{16}\ln 3+\tfrac{3}{4}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)$$

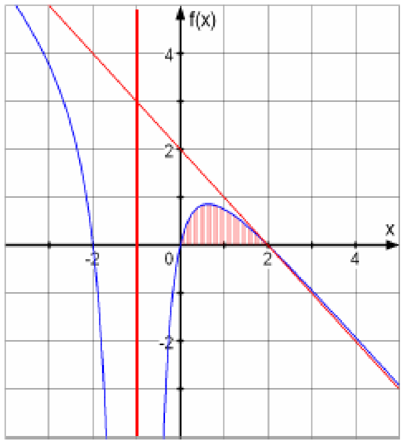
$$A=\tfrac{10}{16}\ln 3-\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{8}\cdot\ln 3-\tfrac{1}{2}\approx 0{,}19$$

Aufgabe 77:

Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{(x+1)^2}$$

Lösung:



(7) $f(x)=\dfrac{4x-x^3}{(x+1)^2}$

Hier hat der Nenner **nur eine** doppelte Nullstelle.
Dann ist **keine Partialbruchzerlegung** erforderlich.
Die Substitution $u=x+1 \Rightarrow x=u-1 \Rightarrow dx=du$
löst das Integral:

$$A=\int_0^2 \frac{4x-x^3}{(x+1)^2}dx=\int_1^3 \frac{4(u-1)-(u-1)^3}{u^2}du$$

$$=\int_1^3 \frac{4u-4-(u^3-3u^2+3u-1)}{u^2}du=\int_1^3 \frac{-u^3+3u^2+u-3}{u^2}du$$

$$=\int_1^3\left(-u+3+\frac{1}{u}-\frac{3}{u^2}\right)dx=\left[-\tfrac{1}{2}u^2+3u+\ln|u|+\tfrac{3}{u}\right]_1^3=-\tfrac{9}{2}+\tfrac{1}{2}+9-3+\ln 3+1-3=\ln 3\approx 1{,}1$$

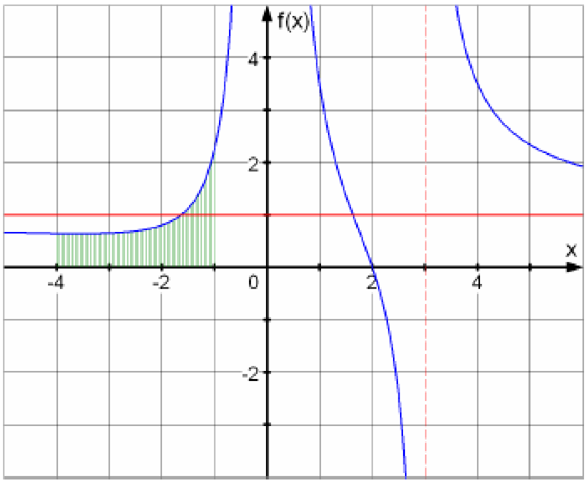
Aufgabe 78:

Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}$$

Lösung:

(8) $f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-8}{x^2(x-3)}$



Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und den Geraden x=-1 und x = - 4:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx$$

Zuerst müssen wir den Funktionsterm so zerlegen, daß der ganzrationale Anteil herausgezogen wird und ein echter Bruch (mit Grad Z < Grad N) übrig bleibt. Dies geht entweder trickreich so:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2}{x^3-3x^2}+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

oder man erreicht dasselbe Ergebnis via Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^3+0x^2-8):(x^3-3x^2)=1\\ \underline{-(x^3-3x^2)}\\ \quad 3x^2-8\end{array} \qquad \Rightarrow\ f(x)=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

Nun muß man für den Restbruch die **besondere Partialbruchzerlegung** an, die dann eingesetzt wird, wenn wie hier eine doppelte und eine einfache Polstelle auftauchen.

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B)-3B}{x^2(x-3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dieses Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A+C&=3 \qquad (1)\\ -3A+B&=0 \qquad (2)\\ -3B&=-8\ \Rightarrow\ B=\tfrac{8}{3}\end{aligned}$$

$$\text{B in (2) ergibt}\quad 3A=B=\tfrac{8}{3}\ \Rightarrow\ A=\tfrac{8}{9}$$

$$\text{A in (1)}:\quad C=3-A=3-\tfrac{8}{9}=\tfrac{19}{9}$$

Ergebnis: $$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

Somit haben wir jetzt $$f(x)=1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

<u>**Berechnung der Fläche**</u>:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx=\int_{-4}^{-1}\left(1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}\right)dx=\left[x+\tfrac{8}{9}\ln|x|-\frac{8}{3x}+\tfrac{19}{9}\ln|x-3|\right]_{-4}^{-1}$$

(Der letzte Term wurde mit Substitution u = x -3 und folgender Rücksubstitution integriert).

$$A=-1+4+\tfrac{8}{9}\underbrace{\ln 1}_{=0}-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{8}{3}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{19}{9}\ln 4-\tfrac{19}{9}\ln 7=5-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{19}{9}\ln\tfrac{4}{7}\approx 2{,}59$$

Aufgabe 79:

Man ermittle jeweils eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen $y = f(x)$:

a) $f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$

b) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} - 2\cos^2 x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

Lösung:

a)

$f(x) = \cos x \cdot \sin 2x = \cos x(2\sin x \cos x) = 2\sin x \cos^2 x$ (Additionstheorem);

$$\int f(x)dx = \int 2\sin x\cos^2 x dx \overset{1}{=} -2\int t^2 dt = -\frac{2}{3}t^3 + c = -\frac{2}{3}\cos^3 x + c$$

[1] Substitution $t = \cos x$; $dt = -\sin x dx$

b)

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} - 2\cos^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} - 2\cos^2 x = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} - 2\cos^2 x$$

$$= 1 - \cos x - 2\cos^2 x$$

$$\int f(x)dx = x - \sin x - x - \sin x\cos x + c = -\sin x(1+\cos x) + c$$

c)

$$\int \frac{dx}{x\ln x} \overset{2}{=} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c$$; [2] Substitution $t = \ln x$, $dt = \dfrac{dx}{x}$

Aufgabe 80:

Man berechne folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int (e^x)^2 dx$

b) $\int x(\sin(x^2) + \cos(x^2))dx$

c) $\int x(\sin^2 x + \cos^2 x)dx$

d) $\int \sin^3 x\, dx$

e) $\int x^2 \sin x\, dx$

f) $\int xe^{3x} dx$

g) $\int e^{b+a\sqrt{t}} dt$, $a \neq 0$

h) $\int (x^2 - 4)\cos 2x\, dx$

i) $\int \cos^2 x\, dx$

j) $\int \dfrac{4dx}{\sqrt{1-x}}$, $x < 1$

k) $\int \dfrac{30dx}{\sqrt[5]{5x-1}}$

Lösung:

a)

partielle Integration: $I = \int \left(e^x\right)^2 dx \overset{1}{=} e^x \cdot e^x - \int \left(e^x\right)^2 dx = e^{2x} - I$

$\curvearrowright \quad 2I = e^{2x} + 2c \quad \curvearrowright$

$I = \frac{e^{2x}}{2} + c$

[1] partielle Integration	$u' = e^x$	$u = e^x$
	$v = e^x$	$v' = e^x$

Substitution: $\int \left(e^x\right)^2 dx \overset{19}{=} \int e^x \left(e^x dx\right) = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{e^{2x}}{2} + c$; [19] Substitution $t = e^x$; $dt = e^x dx$

b)

$$\int x\left(\sin\left(x^2\right) + \cos\left(x^2\right)\right)dx \overset{2}{=} \frac{1}{2}\int (\sin t + \cos t)dt = \frac{1}{2}(-\cos t + \sin t) + c = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + c$$

[2] Substitution $t = x^2$; $dt = 2xdx$

c)

$$\int x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)dx \overset{*}{=} \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$, [*] weil $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

d)

$$\int \sin^3 x\, dx \overset{*}{=} \int \left(1 - \cos^2 x\right)\sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx \overset{3}{=} -\cos x + \int t^2 dt$$

$$= -\cos x + \frac{t^3}{3} + c = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

[3] Substitution $t = \cos x$; $dt = -\sin x dx$

e)

$$\int x^2 \sin x\, dx \overset{4}{=} -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx \overset{5}{=} -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - 2\int \sin x dx\right)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

[4] partielle Integration		
	$u' = \sin x$	$u = -\cos x$
	$v = x^2$	$v' = 2x$

[5] partielle Integration		
	$u' = \cos x$	$u = \sin x$
	$v = x$	$v' = 1$

f)

$$\int x e^{3x} dx \overset{6}{=} \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + c$$

[6] partielle Integration	$u' = e^{3x}$	$u = \frac{1}{3}e^{3x}$
	$v = x$	$v' = 1$

g)

$$\int e^{b+a\sqrt{t}}dt = e^b\int e^{a\sqrt{t}}dt \overset{11}{=} e^b\int e^{ax}2xdx \overset{12}{=} e^b\left(\frac{2x}{a}e^{ax} - \frac{2}{a}\int e^{ax}dx\right) = \frac{2e^b}{a}xe^{ax} - \frac{2e^b}{a}\int e^{ax}dx$$

$$= \frac{2e^b}{a}xe^{ax} - \frac{2e^b}{a^2}e^{ax} + c = \frac{2e^b}{a}e^{ax}\left(x-\frac{1}{a}\right) + c = \frac{2e^{b+a\sqrt{t}}}{a}\left(\sqrt{t}-\frac{1}{a}\right) + c$$

11 Substitution	12 partielle Integration
$x = \sqrt{t} = t^{1/2}$; $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$; also $dt = 2xdx$	$u' = e^{ax}$ $u = \frac{e^{ax}}{a}$ $v = 2x$ $v' = 2$

h)

$$\int (x^2-4)\cos 2x\,dx \overset{13}{=} \frac{1}{2}(x^2-4)\sin 2x - \int x\sin 2x dx \overset{14}{=} \frac{1}{2}(x^2-4)\sin 2x - \left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2xdx\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-4)\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int\cos 2xdx \overset{15}{=} \frac{1}{2}(x^2-4)\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{4}\right)\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x + c$$

13 partielle Integration	14 partielle Integration	15 Substitution
$u' = \cos 2x$ $u = \frac{1}{2}\sin 2x$ $v = x^2-4$ $v' = 2x$	$u' = \sin 2x$ $u = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $v = x$ $v' = 1$	$\int\cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2} + c$

i)

$$\int\cos^2 x\,dx = \int(1-\sin^2 x)dx = \int dx - \int\sin^2 xdx = x - \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x\right) + c$$

$$= \frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x + c$$; vgl. $$\int\sin^2 xdx = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x\right) + c$$ aus der Vorlesung

$$I = \int\cos^2 x\,dx \overset{16}{=} \sin x\cos x + \int\sin^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int(1-\cos^2 x)dx$$

$$= \sin x\cos x + \int dx - \int\cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x - I \curvearrowright 2I = \sin x\cos x + x + 2c \curvearrowright$$

$$I = \frac{x+\sin x\cos x}{2} + c$$

16 partielle Integration	
$u' = \cos x$	$u = \sin x$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

j)

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{1-x}} \overset{17}{=} -4\int t^{-1/2}dt = -8t^{1/2} + c = -8\sqrt{1-x} + c$$; [17] Substitution: $t = 1-x$, $dt = -dx$

k)

$$\int \frac{30dx}{\sqrt[5]{5x-1}} \overset{18}{=} 6\int t^{-1/5}dt = \frac{15}{2}t^{4/5} + c = \frac{15}{2}\sqrt[5]{(5x-1)^4} + c$$

Substitution: $t = 5x-1$, $dt = 5dx$

Aufgabe 81:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$$

Zerlege den Nenner in Linearfaktoren.

$$= \int \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}\,dx$$

Zerlege den Bruch in Partialbrüche.

$$= \int \left(\frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(x+1)} \right) dx$$

Integriere die Summe term-by-term und klammere Konstanten aus.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Für den Integranden $\frac{1}{x+1}$,
substituiere $s = x + 1$,
$ds = 1\ dx$.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,ds$$

Für den Integranden $\frac{1}{x-1}$,
substituiere $t = x - 1$,
$dt = 1\,dx$.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,ds$$

Das Integral von $\frac{1}{t}$ ist $\log(t)$.

$$= \frac{\log(t)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,ds$$

Das Integral von $\frac{1}{s}$ ist $\log(s)$.

$$= \frac{\log(t)}{2} - \frac{\log(s)}{2} + C$$

Substituiere zurück: $t = x - 1$.

$$= \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{\log(s)}{2} + C$$

Substituiere zurück: $s = x + 1$.

$$= \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$

Aufgabe 82:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$$

Dividiere.

$$= \int \left(1 + \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}\right) dx$$

Integriere die Summe term-by-term.

$$= \int 1 \, dx + \int \frac{1}{(x-1)\,(x+1)} \, dx$$

Teile den Bruch $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$ in Partialbrüche.

$$= \int 1 \, dx + \int \left(\frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(x+1)} \right) dx$$

Integriere $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ term-by-term und Klammere Konstanten aus.

$$= \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \, dx$$

Für den Integranden $\frac{1}{x+1}$,
substituiere $s = x + 1$,
$ds = 1\, dx$.

$$= \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \, ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \, dx$$

Für den Integranden $\frac{1}{x-1}$,
substituiere $t = x - 1$,
$dt = 1\, dx$.

$$= \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \, ds + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, dt$$

Das Integral von $\frac{1}{t}$ ist $\log(t)$.

$$= \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \, ds + \frac{\log(t)}{2}$$

Das Integral von $\frac{1}{s}$ ist $\log(s)$.

$$= \int 1 \, dx - \frac{\log(s)}{2} + \frac{\log(t)}{2}$$

Das Integral von 1 ist x.

$$= x - \frac{\log(s)}{2} + \frac{\log(t)}{2} + C$$

Substituiere zurück: t = x − 1.

$$= x - \frac{\log(s)}{2} + \frac{1}{2}\log(x-1) + C$$

Substituiere zurück: s = x + 1.

$$= x + \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$

Aufgabe 83:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$$

Substituiere
$s = x^2$,
$ds = 2\,x\,dx$.

$$= \int \frac{s}{2\,(s-1)}\,ds$$

Klammere Konstanten aus.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{s}{s-1}\,ds$$

Substituiere
$t = s - 1$,
$dt = 1\,ds$.

$$= \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{t}\right)dt$$

Integriere die Summe term-by-term.

$$= \frac{1}{2}\int 1\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$

Das Integral von $\frac{1}{t}$ ist log(t).

$$= \frac{1}{2} \int 1\, dt + \frac{\log(t)}{2}$$

Das Integral von 1 ist t.

$$= \frac{t}{2} + \frac{\log(t)}{2} + C$$

Substituiere zurück: t = s − 1.

$$= \frac{s-1}{2} + \frac{1}{2} \log(s-1) + C$$

Substituiere zurück: $s = x^2$.

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) + \frac{1}{2} \log(x^2 - 1) + C$$

Zerlege in andere Faktoren , um das Ergebnis zu erhalten.

$$= \frac{1}{2} (x^2 + \log(x^2 - 1) - 1) + C$$

Aufgabe 84:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1}\, dx$$

Lösung:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1}\, dx$$

Substituiere
$s = x^2$,
ds = 2 x dx.

$$= \int \frac{s}{2\,(s+1)}\, ds$$

Klammere Konstanten aus.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{s}{s+1}\, ds$$

Substituiere
$t = s + 1$,
$dt = 1\, ds$.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t}\, dt$$

Teile durch t.

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt$$

Integriere die Summe term-by-term und klammere Konstanten aus.

$$= \frac{1}{2} \int 1\, dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t}\, dt$$

Das Integral von $\frac{1}{t}$ ist log(t).

$$= \frac{1}{2} \int 1\, dt - \frac{\log(t)}{2}$$

Das Integral von 1 ist t.

$$= \frac{t}{2} - \frac{\log(t)}{2} + C$$

Substituiere zurück : $t = s + 1$.

$$= \frac{s+1}{2} - \frac{1}{2} \log(s+1) + C$$

Substituiere zurück : $s = x^2$.

$$= \frac{1}{2}(x^2+1) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

Zerlege in andere Faktoren , um das Ergebnis zu erhalten.

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - \log(x^2+1) + 1\right) + C$$

Aufgabe 85:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\, dx$$

Lösung:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

Zerlege den Nenner in Linearfaktoren und irreduzible quadratische Terme.

$$= \int \frac{1}{(x+1)\,(x^2-x+1)}\,dx$$

Zerlege den Bruch in Partialbrüche.

$$= \int \left(\frac{2-x}{3\,(x^2-x+1)} + \frac{1}{3\,(x+1)} \right) dx$$

Integriere die Summe term-by-term und klammere Konstanten aus.

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3} \int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx$$

Vervollständige zum Quadrat in $\frac{2-x}{x^2-x+1}$.

$$= \frac{1}{3} \int \frac{2-x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Für den Integranden $\frac{2-x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$,

substituiere $s = x - \frac{1}{2}$,

$ds = 1\,dx$.

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2}-s}{s^2+\frac{3}{4}}\,ds + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Für den Integranden $\frac{\frac{3}{2}-s}{s^2+\frac{3}{4}}$,

substituiere $t = \frac{2\,s}{\sqrt{3}}$,

$dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\,ds$.

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \int \frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}\,t}{2}}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Integriere die Summe $\frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}\,t}{2}}{t^2+1}$ term-by-term.

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{3} \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Das Integral von $\frac{1}{t^2+1}$ ist $\tan^{-1}(t)$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Für den Integranden $\frac{t}{t^2+1}$,
substituiere $w = t^2 + 1$,
$dw = 2\,t\,dt$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \int \frac{1}{w}\,dw + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Für den Integranden $\frac{1}{x+1}$,
substituiere $y = x + 1$,
$dy = 1\,dx$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \int \frac{1}{w}\,dw + \frac{1}{3} \int \frac{1}{y}\,dy$$

Das Integral von $\frac{1}{y}$ ist $\log(y)$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \int \frac{1}{w}\,dw + \frac{\log(y)}{3}$$

Das Integral von $\frac{1}{w}$ ist $\log(w)$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} - \frac{\log(w)}{6} + \frac{\log(y)}{3} + C$$

Substituiere zurück: $y = x + 1$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} - \frac{\log(w)}{6} + \frac{1}{3}\log(x+1) + C$$

Substituiere zurück: $w = t^2 + 1$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\log(t^2+1) + \frac{1}{3}\log(x+1) + c$$

Substituiere zurück: $t = \frac{2s}{\sqrt{3}}$.

$$= \frac{\tan^{-1}\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\log\left(\frac{4s^2}{3}+1\right) + \frac{1}{3}\log(x+1) + c$$

Substituiere zurück: $s = x - \frac{1}{2}$.

$$= \frac{\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\log\left(\frac{1}{3}(2x-1)^2+1\right) + c$$

Aufgabe 86:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$$

Zerlege den Nenner in Linearfaktoren und irreduzible quadratische Terme.

$$= \int \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx$$

Zerlege den Bruch in Partialbrüche.

$$= \int\left(\frac{x+1}{3(x^2-x+1)} - \frac{1}{3(x+1)}\right)dx$$

Integriere die Summe term-by-term und klammere Konstanten aus.

$$= \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Vervollständige zum Quadrat in $\frac{x+1}{x^2-x+1}$.

$$= \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

Für den Integranden $\frac{x+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$,

substituiere $s = x - \frac{1}{2}$,

$ds = 1\ dx$.

$$= \frac{1}{3} \int \frac{s+\frac{3}{2}}{s^2+\frac{3}{4}}\, ds - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

Für den Integranden $\frac{s+\frac{3}{2}}{s^2+\frac{3}{4}}$,

substituiere $t = \frac{2\, s}{\sqrt{3}}$,

$dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\ ds$.

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}\, t}{2}+\frac{3}{2}}{t^2+1}\, dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

Integriere die Summe $\frac{\frac{\sqrt{3}\, t}{2}+\frac{3}{2}}{t^2+1}$ term-by-term.

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt + \frac{1}{3} \int \frac{t}{t^2+1}\, dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

Das Integral von $\frac{1}{t^2+1}$ ist $\tan^{-1}(t)$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \int \frac{t}{t^2+1}\, dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

Für den Integranden $\frac{t}{t^2+1}$,

substituiere $w = t^2 + 1$,

$dw = 2\, t\ dt$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \int \frac{1}{w}\, dw - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1}\, dx$$

Für den Integranden $\frac{1}{x+1}$,
substituiere $y = x + 1$,
$dy = 1\,dx$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{w}\,dw - \frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy$$

Das Integral von $\frac{1}{y}$ ist log(y).

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{w}\,dw - \frac{\log(y)}{3}$$

Das Integral von $\frac{1}{w}$ ist log(w).

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(w)}{6} - \frac{\log(y)}{3} + C$$

Substituiere zurück: $y = x + 1$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(w)}{6} - \frac{1}{3}\log(x+1) + C$$

Substituiere zurück: $w = t^2 + 1$.

$$= \frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\log(t^2+1) - \frac{1}{3}\log(x+1) + C$$

Substituiere zurück: $t = \frac{2s}{\sqrt{3}}$.

$$= \frac{\tan^{-1}\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\log\left(\frac{4s^2}{3} + 1\right) - \frac{1}{3}\log(x+1) + C$$

Substituiere zurück: $s = x - \frac{1}{2}$.

$$= \frac{\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{6}\log\left(\frac{1}{3}(2x-1)^2 + 1\right) + C$$

Aufgabe 87:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_2^5 \frac{x^2-4}{(x+1)^2}dx$ (2) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx$

(3) $\int_0^4 2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ (4) $\int_{-1}^0 4x^2\cdot \ln(x+2)dx$

Lösung:

(1) $\int_2^5 \frac{x^2-4}{(x+1)^2}dx$ Substitution: $u=x+1 \Rightarrow du=dx$ und $x = u - 1$

$$=\int_3^6 \frac{(u-1)^2-4}{u^2}du=\int_3^6 \frac{u^2-2u-3}{u^2}du=\int_3^6\left(1-\frac{2}{u}-\frac{3}{u^2}\right)du=\left[u-2\ln u+\frac{3}{u}\right]_3^6$$

$$=\left[6-2\ln 6+\tfrac{1}{2}\right]-\left[3-2\ln 3+1\right]=\tfrac{5}{2}-2(\ln 6-\ln 3)=\tfrac{5}{2}-2\ln\tfrac{6}{3}=\tfrac{5}{2}-\ln 4$$

---

(2) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx=\int_{\sqrt{6}}^1 \frac{6-u^2}{u}(-2u)\,du=-2\int_{\sqrt{6}}^1\left(6-u^2\right)du=2\left[6u-\tfrac{1}{3}u^3\right]_1^{\sqrt{6}}$

$$=2\left(6\sqrt{6}-\tfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{6}\right)-2\left(6-\tfrac{1}{3}\right)=8\sqrt{6}-12+\tfrac{2}{3}\approx 8.26$$

Substitution: $u=\sqrt{6-x} \Rightarrow u^2=6-x \Rightarrow x=6-u^2 \Rightarrow dx=-2u\,du$

---

2. Möglichkeit: $u=6-x \Rightarrow x=6-u \Rightarrow dx=-dx$ Dann erhält man

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx=-\int_6^1\frac{6-u}{\sqrt{u}}du=\int_1^6\left(\frac{6}{\sqrt{u}}-\frac{u}{\sqrt{u}}\right)du=\int_1^6\left(6u^{-\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$=\left[6\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^6=\left[12\sqrt{u}-\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^6=12\sqrt{6}-4\sqrt{6}-12+\tfrac{2}{3}=8\sqrt{6}-\tfrac{34}{3}$$

(3) $\int_0^4 2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -2\int_0^{-8} e^u du = 2\left[e^u\right]_{-8}^0 = 2-2e^{-8} \approx 2$

Substitution: $u=-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow du=-x\,dx \Rightarrow xdx=-du$ (Schlupf-Integral)

---

(4) $\int_{-1}^0 4x^2\cdot\ln(x+2)dx$

1. Möglichkeit : Zuerst partielle Integration:

Partielle Integration: $u'=4x^2 \Rightarrow u=\frac{4}{3}x^3$

$v=\ln(x+2) \Rightarrow v'=\frac{1}{x+2}$

$=\left[\frac{4}{3}x^3\ln(x+2)\right]_{-1}^0-\frac{4}{3}\int_{-1}^0\frac{x^3}{x+2}dx = 0-\frac{4}{3}\int_{-1}^0\frac{x^3}{x+2}dx$ Dann

Substitution: $w=x+2 \Rightarrow dw=dx \Rightarrow x=w-2$

$=-\frac{4}{3}\int_{-1}^0\frac{x^3}{x+2}dx=-\frac{4}{3}\int_1^2\frac{(w-2)^3}{w}dw=\frac{4}{3}\int_2^1\frac{w^3-6w^2+12w-8}{w}dw$

$=\frac{4}{3}\int_2^1\left(w^2-6w+12-\frac{8}{w}\right)dw=\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}w^3-3w^2+12w-8\ln w\right]_2^1$

$=\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}-3+12\right]-\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{8}{3}-12+24-8\ln 2\right]=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{16}{3}+8\ln 2\right)=\frac{32}{3}\cdot\ln 2-\frac{64}{9}\approx 0{,}28$

Zweite Möglichkeit: Zuerst Substitution: $w = x + 2,\ dw = dx$

$\int_{-1}^0 4x^2\cdot\ln(x+2)dx = 4\int_1^2(w-2)^2\cdot\ln w\cdot dw$

Jetzt erst partielle Integration:

$u'=(w-2)^2=w^2-4w+4 \Rightarrow u=\frac{1}{3}w^3-2w^2+4w$

$v=\ln w \quad\Rightarrow\quad v'=\frac{1}{w}$

ergibt:

$=4\left[\ln w\cdot\left(\frac{1}{3}w^3-2w^2+4w\right)\right]_1^2-4\int_1^2\left(\frac{1}{3}w^2-2w+4\right)dw$

$=4\left[\ln w\cdot\left(\frac{1}{3}w^3-2w^2+4w\right)\right]_1^2-4\left[\frac{1}{9}w^3-w^2+4w\right]_1^2$

$=4\left[\ln 2\cdot\left(\frac{8}{3}-8+8\right)\right]-4\cdot 0-4\cdot\left[\frac{8}{9}-4+8\right]+4\cdot\left[\frac{1}{9}-1+4\right]$

$=4\left[\frac{8}{3}\cdot\ln 2-\frac{7}{9}-1\right]=4\cdot\left[\frac{8}{3}\cdot\ln 2-\frac{16}{9}\right]=\frac{32}{3}\cdot\ln 2-\frac{64}{9}\approx 0{,}28$

Aufgabe 88:

Man bestimme die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\int\frac{8x}{x^2+2x-3}dx$ b) $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$ c) $\int\frac{2x^2+18x-24}{x^2+6x-16}dx$

Lösung:

a)

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3);\ \frac{8x}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1)(x+3)}\ \curvearrowright$$

$$A+B=8;\ 3A-B=0\ \curvearrowright\ A=2;\ B=6$$

$$\int\frac{8x}{x^2+2x-3}\,dx=2\int\frac{dx}{x-1}+6\int\frac{dx}{x+3}=2\ln|x-1|+6\ln|x+3|+c=\ln\left((x-1)^2(x+3)^6\right)+c$$

b)

$$x^3-2x^2+x=x\left(x^2-2x+1\right)=x(x-1)^2;$$

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}\ \curvearrowright\ A+B=0;\ -2A-B+C=1;\ A=2$$

$$\curvearrowright\ A=2;\ B=-2;\ C=3$$

$$\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx=2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}=2\ln|x|-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+c$$

$$=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{3}{x-1}+c$$

c)

$$\frac{2x^2+18x-24}{x^2+6x-16}=2+\frac{6x+8}{x^2+6x-16};\ x^2+6x-16=(x-2)(x+8);$$

$$\frac{6x+8}{x^2+6x-16}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+8}=\frac{(A+B)x+8A-2B}{(x-2)(x+8)}\ \curvearrowright\ A+B=6;\ 8A-2B=8$$

$$\curvearrowright\ A=2;\ B=4$$

$$\int\frac{2x^2+18x-24}{x^2+6x-16}\,dx=2\int dx+2\int\frac{dx}{x-2}+4\int\frac{dx}{x+8}=2x+2\ln|x-2|+4\ln|x+8|+c$$

$$=2x+\ln\left((x-2)^2(x+8)^4\right)+c$$

Aufgabe 89:

Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2-33x+22}{(x-2)(x+2)(x-5)(x+3)}$$

Lösung:

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2-33x+22}{(x-2)(x+2)(x-5)(x+3)}\overset{LGS}{=}\frac{1}{(x-2)}+\frac{2}{(x+2)}-\frac{1}{(x-5)}-\frac{1}{(x+3)}$$

$$\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1}{(x-2)}+\frac{2}{(x+2)}-\frac{1}{(x-5)}-\frac{1}{(x+3)}dx$$

$$=\int\frac{1}{(x-2)}dx+\int\frac{2}{(x+2)}dx-\int\frac{1}{(x-5)}dx-\int\frac{1}{(x+3)}dx$$

$$=\ln(x-2)+2\ln(x+2)-\ln(x-5)-\ln(x+3)+C$$

$$=\ln\frac{(x-2)(x+2)^2}{(x-5)(x+3)}+C=\ln\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-2x+15}+C$$

Aufgabe 90:

Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$f(x)=\frac{4x^3-18x^2+15x-4}{(x-2)^3(x+5)}$$

Lösung:

$$f(x)=\frac{4x^3-18x^2+15x-4}{(x-2)^3(x+5)}\overset{LGS}{=}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{(x-2)^3}+\frac{3}{x+5}$$

$$\Rightarrow\int f(x)dx=\int\frac{1}{x-2}dx-\int\frac{1}{(x-2)^2}dx-\int\frac{2}{(x-2)^3}dx+\int\frac{3}{x+5}dx$$

$$=\ln(x-2)+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}+3\ln(x+5)+C$$

Aufgabe 91:

Für k>0 ist die Funktion f_k gegeben durch $f_k(x)=k(-x^3+3x+4)$.

Bestimme k so, dass der Graph von f_k mit der Tangente im Hochpunkt eine Fläche mit dem Inhalt von 45 einschließt.

Lösung:

Hier benötigt man Kenntnisse aus der Differentialrechnung, im Bereich „Funktionsuntersuchung“. Auch bei solchen Aufgaben kann man Schritt für Schritt vorgehen:

1. Bestimmung des Hochpunktes

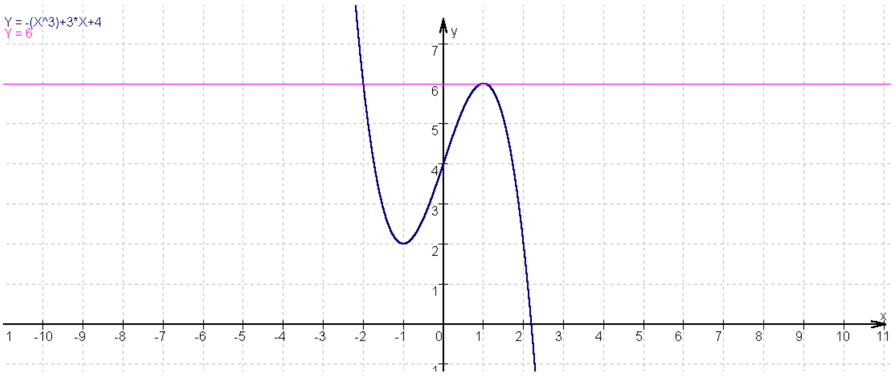
$$f(x) = k(-x^3 + 3x + 4);\ f'(x) = k(-3x^2 + 3);\ f''(x) = -6kx$$
$$NotwendigeBedingung: f'(x) = 0$$
$$0 = k(-3x^2 + 3) \,|: k$$
$$0 = -3x^2 + 3$$
$$x = + - 1$$
$$HinreichendeBedingung: f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0:$$
$$f''(1) = -6k < 0: Hochpunkt$$
$$f''(-1) = 6k > 0: Tiefpunkt$$

An der Stelle x=1 liegt ein Hochpunkt vor.

H(1; 6k)

2. Bestimmung der Tangente im Hochpunkt

Dazu kann man sich erst mal für ein bestimmtes k eine Skizze anfertigen:



Wie man leicht sieht, verläuft die Tangente parallel zur x-Achse durch den Hochpunkt. Also ist die Tangentengleichung t(x)=6k.

3. Bestimmung von k

Nun geht man ganz normal vor, wie ihr es in meinem ersten Artikel unter Abschnitt 5 gelernt habt.

3.1 Gleichsetzen der beiden Gleichungen, um die Schnittpunkte zu bestimmen:

$$6k = k(-x^3 + 3x + 4)$$
$$6k = -x^3k + 3kx + 4k \,| -6k$$
$$0 = -x^3k + 3kx - 2k$$

Nun bestimmt man mit Hilfe der Polynomdivision die Nullstellen dieser Gleichung bzw. die Lösungsmenge dieser Gleichung.

So erhält man x_1=1 und x_2=-2

3.2 Aufstellen des Integrals

$$\int_{-2}^{1} t(x) - f(x)dx = 45$$

$$\int_{-2}^{1} (6k + kx^3 - 3kx - 4k)dx = 45$$

$$\int_{-2}^{1} (kx^3 - 3kx + 2k)dx = 45$$

$$k(\frac{1}{4} + \frac{2^4}{4}) - 3k(\frac{1}{2} - \frac{2^2}{2}) + 2k(1 - (-2)) = 45$$

$$6,75k = 45$$

$$k = 6\frac{2}{3}$$

Für $k = 6\frac{2}{3}$ schließt die Tangente im Hochpunkt von f(x) eine Fläche mit dem Flächeninhalt 45 ein.

Aufgabe 92:

Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat den Punkt P(0; 1) als Sattelpunkt. Der Flächeninhalt der Fläche, die die Tangente durch diesen Punkt und der Graph von f einschließen, beträgt 5000. Wie heißt die Funktion.

Lösung:

Diese Aufgabe erfordert weitere Kenntnisse aus der Sekundarstufe I. Ihr kennt bestimmt eine Aufgabe, bei der man eine Funktion mit bestimmten Eigenschaften bestimmen sollte.

Dieses eventuell vorhandene Wissen müsst ihr bei dieser Aufgabe mit einfließen lassen.

1. Bestimmung der Ableitungen

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d;\ f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c;\ f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b;$$
$$f'''(x) = 24x + 6a$$

2. Bedingungen aufstellen

Aus der Information, dass P(0; 1) ein Sattelpunkt ist, können wir drei Bedingungen aufstellen:

$$1.\ f'(0) = 0$$
$$2.\ f''(0) = 0$$
$$3.\ f(0) = 1$$

Daraus folgt:

$$1.\ f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$$
$$2.\ f''(0) = 0 \rightarrow b = 0$$
$$3.\ f(0) = 1 \rightarrow d = 1$$

Somit bleibt folgende Funktion übrig:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + 1$$

Nun fehlt uns eine 4. Bedingung, um den Parameter a zu bestimmen und diese Bestimmung steht im Aufgabentext *„Der Flächeninhalt der Fläche, die die Tangente durch diesen Punkt und der Graph von f einschließen, beträgt 5000. Wie heißt die Funktion."*

Nun benötigen wir das Wissen aus meinem ersten Artikel über die Einführung in die Integralrechnung.

3. Berechnung der Tangente

f'(0)=m=0

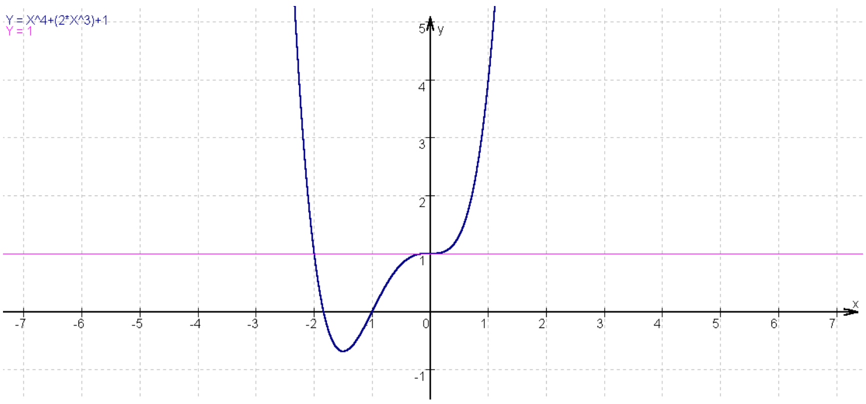
m=0; P(0;1)

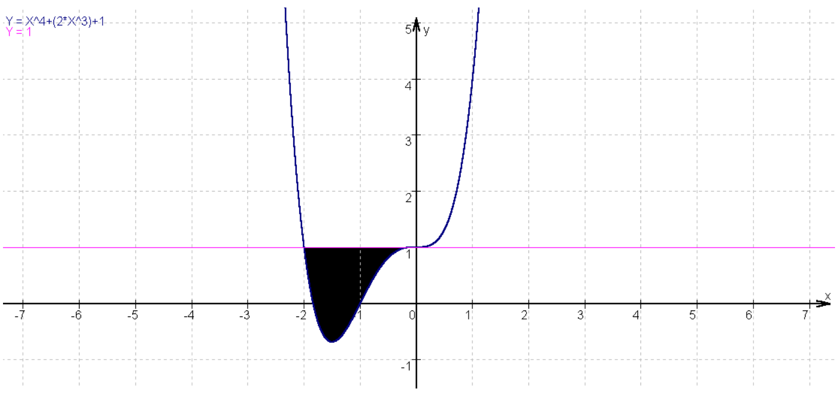
t(x)=1

4. Berechnung der Schnittpunkte von f(x) und t(x): f(x)=t(x)

$$x^4 + ax^3 + 1 = 1$$
$$x^4 + ax^3 = 0$$
$$x^3(x + a) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -a$$

5. Aufstellen einer Skizze





Die schwarze Fläche hat den Flächeninhalt 5000.

6. Aufstellen des entsprechenden Integrals

$$\left|\int_{-a}^{0} t(x) - f(x)dx\right| = 5000$$

$$\left|\int_{-a}^{0} (1 - x^4 - ax^3 - 1)dx\right| = 5000$$

$$\left|\int_{-a}^{0} (-x^4 - ax^3)dx\right| = 5000$$

$$\left|-\left(\frac{0^5}{5} - \frac{(-a)^5}{5}\right) - a\left(0 - \frac{a^4}{4}\right)\right| = 5000$$

$$\left|-\frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{4}a^5\right| = 5000$$

$$|a^5| \bullet 0,05 = 5000 \,|: 0,05$$

$$|a^5| = 10000$$

$$a = -10 \vee a = 10$$

Es gibt zwei Lösungen, da wir nicht wissen, ob a negativ oder positiv ist.

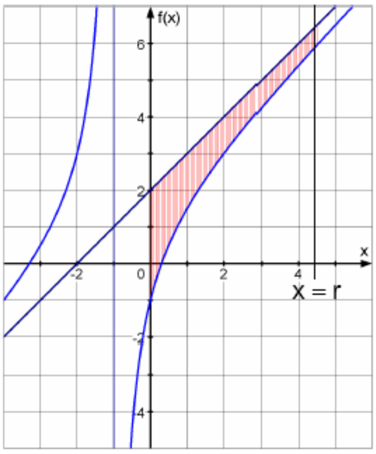
Bei den Funktion $f(x) = x^4 + 10x^3 + 1 und f(x) = x^4 - 10x^3 + 1$ wird mit der Tangente im Punkt P(0; 1) eine Fläche von 5000 FE eingeschlossen.

Aufgabe 93:

Bestimmen Sie die Fläche die von der y-Achse, der Kurve, ihrer schiefen Asymptote und der Geraden x=r (r>2) eingeschlossen wird.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$$

Lösung:



(13) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$

Um die schiefe Asymptote zu bestimmen benötigt man Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2 + 3x - 1) : (x + 1) = x + 2 \\ \underline{-(x^2 + \ x)} \\ \quad (2x - 1) \\ \quad \underline{-(2x + 2)} \\ \qquad -3 \end{array}$$

Daraus folgt, daß man die Funktion so zerlegen kann:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{3}{x + 1}$$

Wegen $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{3}{x + 1} = 0$ ist y = x + 2 die schiefe Asymptote.

Nun kann man die schraffierte Fläche berechnen

$$A(r) = \int_0^r \left(x + 2 - \left(x + 2 - \frac{3}{x + 1} \right) \right) dx = \int_0^r \frac{3}{x + 1} dx$$

Wer nicht mit der Polynomdivision arbeitet, geht so vor:

$$A(r) = \int_0^r \left(x + 2 - \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} \right) dx = \int_0^r \frac{(x + 2)(x + 1) - (x^2 + 3x - 1)}{x + 1} dx = \int_0^r \frac{3}{x + 1} dx$$

Dann folgt Substitution: $u = x + 1$ also $du = dx$.

$$A(r) = \int_1^{r+1} \frac{3}{u} du = [3 \ln u]_1^{r+1} = 3 \cdot \ln(r+1) - 3 \cdot \ln 1 = 3 \cdot \ln(r+1)$$

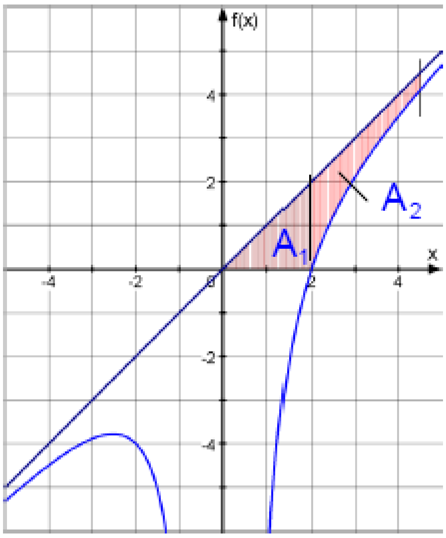
Ist r eine feste endliche Zahl, haben wir einen Flächeninhalt.
Lassen wir aber r gegen Unendlich gehen, dann geht auf die Logarithmusfunktion nach Unendlich, so daß die ins Unendliche reichende Fläche keinen endlichen Inhalt hat.

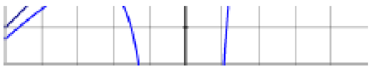
Aufgabe 94:

(16) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$

Das Schaubild K, die schiefe Asymptote, die x-Achse und die Gerade x = r (r > 2) begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(r) sowie deren Grenzwert für r gegen Unendlich.

Lösung:





Jetzt ist es wichtig, zu erkennen, daß die Fläche zwei verschiedene untere Begrenzungen hat, weshalb Man sie auch nicht auf einmal berechnen kann.
Die Teilfläche A_1 ist in diesem Fall ein Dreieck und kann entweder mit der Dreiecksformel $A_1 = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$ oder mittels Integral berechnet werden:

$$A_1 = \int_0^2 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2.$$

Die Teilfläche A_2 wird zunächst als Flächeninhaltsfunktion berechnet:

$$A_2(r) = \int_2^r \left(x - \left(x - \frac{8}{x^2}\right)\right)dx = \int_2^r \frac{8}{x^2}dx = \left[-\frac{8}{x}\right]_2^r = -\frac{8}{r} + 4 = 4 - \frac{8}{r}$$

Gesamtfläche: $A(r) = A_1 + A_2(r) = 2 + 4 - \frac{8}{r} = 6 - \frac{8}{r}$.

Grenzwert für $r \to \infty$: $A^* = \lim\limits_{r\to\infty} A(r) = 6$, denn $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{8}{r} = 0$

Aufgabe 95:

(7) $\displaystyle\int_1^4 \frac{12}{x^2}dx$

(8) $\displaystyle\int_3^6 \frac{3x^2-4}{9x^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2-9}{x}dx$

(10) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2}{5x}dx$ /

(11) $\displaystyle\int_4^8 \frac{4x^2-1}{2x}dx$

(12) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-4x+1}{2x^2}dx$

Lösung:

(7) $$\int_1^4 \frac{12}{x^2}dx = 12\cdot\int_1^4 x^{-2}dx = 12\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4 = \left[-\frac{12}{x}\right]_1^4 = -3+12 = 9$$

(8) $$\int_3^6 \frac{3x^2-4}{9x^2}dx = \int_3^6\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_3^6 = \left[\frac{x}{3} + \frac{4}{9x}\right]_3^6 =$$
$$= \left[2 + \frac{2}{27}\right] - \left[1 + \frac{4}{27}\right] = 1 - \frac{2}{27} = \frac{25}{27}$$

(9) $$\int_1^3 \frac{x^2-9}{x}dx = \int_1^3\left(x - \frac{9}{x}\right)dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 9\cdot\ln x\right]_1^3 = \left[\tfrac{9}{2} - 9\cdot\ln 3\right] - \left[\tfrac{1}{2} - 9\cdot\underbrace{\ln 1}_{0}\right] = 4 - 9\ln 3$$

(10) $$\int_1^2 \frac{x^2+2}{5x}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{5}\ln x\right]_1^2 = \left[\frac{4}{10} + \frac{2}{5}\ln 2\right] - \left[\frac{1}{10} + \frac{2}{5}\ln 1\right]$$
$$\tfrac{3}{10} + \tfrac{2}{5}\ln 2$$

(11) $$\int_4^8 \frac{4x^2-1}{2x}dx = \int_4^8\left(2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left[x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right]_4^8 = \left[64 - \tfrac{1}{2}\ln 8\right] - \left[16 - \tfrac{1}{2}\ln 4\right]$$
$$= 48 - \tfrac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = 48 - \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{8}{4} = 48 - \tfrac{1}{2}\ln 2$$

(12) $\int_1^2 \frac{x^3-4x+1}{2x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - 2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right]_1^2$

$$\left[1-2\ln 2-\frac{1}{4}\right]-\left[\frac{1}{4}-2\cdot\ln 1-\frac{1}{2}\right]=1-2\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1-\ln 4$$

Aufgabe 96:

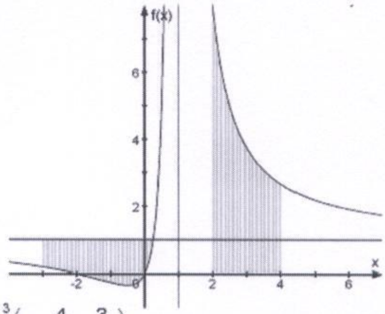
Gegeben ist folgende Funktion: $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$

a) (10) Die Kurve und die x-Achse und die Geraden x=2 und x=4 begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt A_1.

b) (5) Die Kurve und die x-Achse und die Geraden x=0 und x=-2 begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt A_2.

Lösung:

(2) $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$



a) $A_1=\int_2^4 \frac{x^2+2x}{(x-1)^2}dx=$

Substitution:

$u=x-1 \Rightarrow x=u+1 \Rightarrow dx=du$

$$A_1=\int_1^3 \frac{(u+1)^2+2(u+1)}{u^2}du=\int_1^3\frac{u^2+4u+3}{u^2}du=\int_1^3\left(1+\frac{4}{u}+\frac{3}{u^2}\right)dx=$$

$$A_1=\left[u+4\cdot\ln u-\frac{3}{u}\right]_1^3=(3+4\cdot\ln 3-1)-(1-3)=4+4\cdot\ln 3 \quad = 8{,}39$$

b) Nullstellen sind bei 0 und -2. Die Fläche liegt unter der x-Achse:

$$A_2=\int_0^{-2} f(x)dx=\left[u+4\cdot\ln|u|-\frac{3}{u}\right]_{-1}^{-3}=[-3+4\cdot\ln 3+1]-[-1+3]=4\cdot\ln 3-4 \quad 0{,}394$$

c) Polynomdivisdion:

$$\begin{array}{l}(x^2+2x)(x^2-2x+1)=1\\ \underline{-(x^2-2x+1)}\\ \quad 4x-1\end{array} \qquad \Rightarrow f(x)=1+\frac{4x-1}{(x-1)^2}$$

$$A_3=\int_{-3}^{1/4}\left[1-\left(1+\frac{4x-1}{(x-1)^2}\right)\right]dx=-\int_{-3}^{1/4}\frac{4x-1}{(x-1)^2}dx= \quad \text{Substitution siehe oben.}$$

$$A_3=-\int_{-4}^{-3/4}\frac{4(u+1)-1}{u^2}du=-\int_{-4}^{-3/4}\frac{4u+3}{u^2}du=\int_{-3/4}^{-4}\left[\frac{4}{u}+\frac{3}{u^2}\right]dx=\left[4\cdot\ln|u|-\frac{3}{u}\right]_{-\frac{3}{4}}^{-4}=$$

$$A_3=\left[4\cdot\ln 4+\frac{3}{4}\right]-\left[4\cdot\ln\frac{3}{4}+4\right]=4\cdot\ln\frac{4}{\frac{3}{4}}-\frac{13}{4}=4\cdot\ln\frac{16}{3}-\frac{13}{4}$$

Für A_3 ist auch dieser Ansatz möglich:

$$A_3=\int_{-4}^{1/4}\left(1-\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}\right)dx=\int_{-4}^{1/4}\frac{(x-1)^2-(x^2+2x)}{(x-1)^2}dx=\int_{-4}^{1/4}\frac{-4x+1}{(x-1)^2}dx \quad \text{usw.}$$

Aufgabe 97:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischen Weg (ohne Tafelwerk):

$$\int_{-1}^{0} 4x^2\cdot\ln(x+2)\,dx$$

Lösung:

$$\int_{-1}^{0} 4x^2 \cdot \ln(x+2)\,dx$$

1. Möglichkeit : Zuerst partielle Integration:

Partielle Integration:

$$u' = 4x^2 \;\Rightarrow\; u = \tfrac{4}{3}x^3$$

$$v = \ln(x+2) \;\Rightarrow\; v' = \frac{1}{x+2}$$

$$= \left[\tfrac{4}{3}x^3 \ln(x+2)\right]_{-1}^{0} - \tfrac{4}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x+2}dx = 0 - \tfrac{4}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x+2}dx \quad \text{Dann}$$

Substitution: $w = x+2 \;\Rightarrow\; dw = dx \;\Rightarrow\; x = w-2$

$$= -\tfrac{4}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x+2}dx = -\tfrac{4}{3}\int_{1}^{2} \frac{(w-2)^3}{w}dw = \tfrac{4}{3}\int_{2}^{1} \frac{w^3 - 6w^2 + 12w - 8}{w}dw$$

$$= \tfrac{4}{3}\int_{2}^{1}\left(w^2 - 6w + 12 - \frac{8}{w}\right)dw = \tfrac{4}{3}\cdot\left[\tfrac{1}{3}w^3 - 3w^2 + 12w - 8\ln w\right]_2^1$$

$$= \tfrac{4}{3}\cdot\left[\tfrac{1}{3} - 3 + 12\right] - \tfrac{4}{3}\cdot\left[\tfrac{8}{3} - 12 + 24 - 8\ln 2\right] = \tfrac{4}{3}\cdot\left(-\tfrac{16}{3} + 8\ln 2\right) = \tfrac{32}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{64}{9} \approx 0{,}28$$

Zweite Möglichkeit: Zuerst Substitution: $w = x + 2,\ dw = dx$

$$\int_{-1}^{0} 4x^2 \cdot \ln(x+2)\,dx = 4\int_{1}^{2} (w-2)^2 \cdot \ln w \cdot dw$$

Jetzt erst partielle Integration:

$$u' = (w-2)^2 = w^2 - 4w + 4 \;\Rightarrow\; u = \tfrac{1}{3}w^3 - 2w^2 + 4w$$

$$v = \ln w \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{w}$$

ergibt:

$$= 4\left[\ln w \cdot \left(\tfrac{1}{3}w^3 - 2w^2 + 4w\right)\right]_1^2 - 4\int_1^2 \left(\tfrac{1}{3}w^2 - 2w + 4\right)dw$$

$$= 4\left[\ln w \cdot \left(\tfrac{1}{3}w^3 - 2w^2 + 4w\right)\right]_1^2 - 4\left[\tfrac{1}{9}w^3 - w^2 + 4w\right]_1^2$$

$$= 4\left[\ln 2 \cdot \left(\tfrac{8}{3} - 8 + 8\right)\right] - 4\cdot 0 - 4\cdot\left[\tfrac{8}{9} - 4 + 8\right] + 4\cdot\left[\tfrac{1}{9} - 1 + 4\right]$$

$$= 4\left[\tfrac{8}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{7}{9} - 1\right] = 4\cdot\left[\tfrac{8}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{16}{9}\right] = \tfrac{32}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{64}{9} \approx 0{,}28$$

Aufgabe 98:

Zeigen Sie durch Rechnung, dass

$$\int f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \ln\left(\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|\right) + \frac{3}{x+2} + C \text{ ist.}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$

<u>Partialbruchzerlegung</u>

$$f(x) \overset{\substack{\text{Zerlegung}\\\text{des Nenners}}}{=} \frac{x^2 - x - 3}{(x+1)(x+2)(x+2)} \overset{\substack{\text{Ansatz für die}\\\text{Partialbruch–}\\\text{zerlegung}}}{=} \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2}$$

$$\overset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{A_1(x+2)^2 + A_2(x+1)(x+2) + A_3(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+2)}$$

Einsetzen im Zähler: $x = -1: \quad -1 = A_1 \qquad \Rightarrow A_1 = -1$

$x = -2: \quad 3 = -A_3 \qquad \Rightarrow A_3 = -3$

$x = 0: \quad -3 = 4A_1 + 2A_2 + A_3 \qquad \Rightarrow A_2 = 2$

$$f(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

<u>Integration</u>

$$\int f(x)dx = \int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right)dx$$

$$= -\ln(|x+1|) + 2\ln(|x+2|) + \frac{3}{x+2} + C = \ln\left(\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|\right) + \frac{3}{x+2} + C$$

Aufgabe 99:

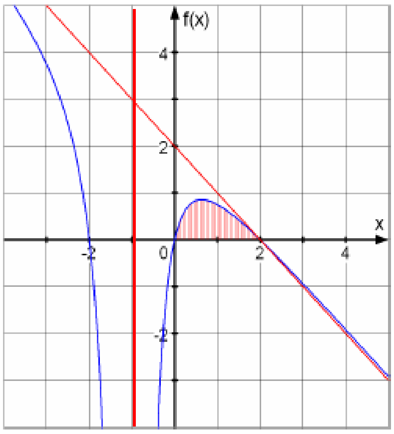
Das folgende Integral soll berechnet werden. (Nicht aus der Formelsammlung ablesen).

$$\int_0^2 \frac{4x - x^3}{(x+1)^2} dx$$

Lösung:

Nenner mit mur einer doppelten Nullstelle, Grad Z > Grad N

(7) $f(x) = \frac{4x - x^3}{(x+1)^2}$



Hier hat der Nenner **nur eine** doppelte Nullstelle.
Dann ist **keine Partialbruchzerlegung** erforderlich.
Die Substitution $u = x+1 \Rightarrow x = u-1 \Rightarrow dx = du$
löst das Integral:

$$A = \int_0^2 \frac{4x - x^3}{(x+1)^2} dx = \int_1^3 \frac{4(u-1) - (u-1)^3}{u^2} du$$

$$= \int_1^3 \frac{4u - 4 - (u^3 - 3u^2 + 3u - 1)}{u^2} du = \int_1^3 \frac{-u^3 + 3u^2 + u - 3}{u^2} du$$

$$= \int_1^3 \left(-u + 3 + \frac{1}{u} - \frac{3}{u^2} \right) dx = \left[-\tfrac{1}{2}u^2 + 3u + \ln|u| + \tfrac{3}{u} \right]_1^3 = -\tfrac{9}{2} + \tfrac{1}{2} + 9 - 3 + \ln 3 + 1 - 3 = \ln 3 \approx 1{,}1$$

Aufgabe 100:

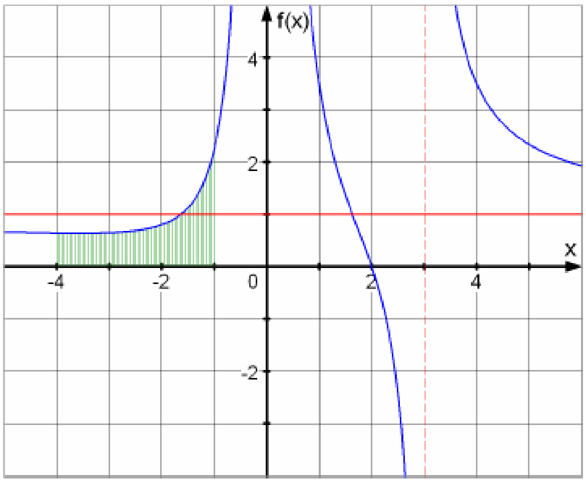
Das folgende Integral soll berechnet werden. (Nicht aus der Formelsammlung ablesen).

$$A = \int_{-4}^{-1} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2} dx$$

Lösung:

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z = Grad N

(8) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\dfrac{x^3-8}{x^2(x-3)}$



Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und den Geraden x=-1 und x = - 4:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx$$

Zuerst müssen wir den Funktionsterm so zerlegen, daß der ganzrationale Anteil herausgezogen wird und ein echter Bruch (mit Grad Z < Grad N) übrig bleibt. Dies geht entweder trickreich so:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2}{x^3-3x^2}+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

oder man erreicht dasselbe Ergebnis via Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^3+0x^2-8):(x^3-3x^2)=1\\ \underline{-(x^3-3x^2)}\\ \quad 3x^2-8\end{array} \qquad \Rightarrow\ f(x)=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

Nun muß man für den Restbruch die **besondere Partialbruchzerlegung** an, die dann eingesetzt wird, wenn wie hier eine doppelte und eine einfache Polstelle auftauchen.

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B)-3B}{x^2(x-3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dieses Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A+C&=3 &&(1)\\ -3A+B&=0 &&(2)\\ -3B&=-8\ \Rightarrow\ B=\tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{B in (2) ergibt}\quad 3A=B=\tfrac{8}{3}\ \Rightarrow\ A=\tfrac{8}{9}$$

$$\text{A in (1)}:\quad C=3-A=3-\tfrac{8}{9}=\tfrac{19}{9}$$

Ergebnis: $\dfrac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\dfrac{\frac{8}{9}}{x}+\dfrac{\frac{8}{3}}{x^2}+\dfrac{\frac{19}{9}}{x-3}$

Somit haben wir jetzt $f(x)=1+\dfrac{\frac{8}{9}}{x}+\dfrac{\frac{8}{3}}{x^2}+\dfrac{\frac{19}{9}}{x-3}$

Berechnung der Fläche:

$$A = \int_{-4}^{-1} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2} dx = \int_{-4}^{-1} \left(1 + \frac{\frac{8}{9}}{x} + \frac{\frac{8}{3}}{x^2} + \frac{\frac{19}{9}}{x-3} \right) dx = \left[x + \tfrac{8}{9}\ln|x| - \frac{8}{3x} + \tfrac{19}{9}\ln|x-3| \right]_{-4}^{-1}$$

(Der letzte Term wurde mit Substitution u = x -3 und folgender Rücksubstitution integriert).

$$A = -1 + 4 + \tfrac{8}{9}\underbrace{\ln 1}_{=0} - \tfrac{8}{9}\ln 4 + \tfrac{8}{3} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{19}{9}\ln 4 - \tfrac{19}{9}\ln 7 = 5 - \tfrac{8}{9}\ln 4 + \tfrac{19}{9}\ln\tfrac{4}{7} \approx 2{,}59$$

Aufgabe 101:

Bilden Sie durch Rechnung zu folgender Funktion f(x) die Stammfunktion F(x).

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - 26x + 15}{x^2 - 2x - 15}$$

Lösung:

$$\boxed{\frac{2x^3 - 5x^2 - 26x + 15}{x^2 - 2x - 15}}$$

① Da der Zählergrad größer als der Nennergrad ist, wird eine Polynomdivision vorgenommen:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 26x + 15}{x^2 - 2x - 15} = 2x - 1 + \frac{2x}{x^2 - 2x - 15}$$

② und③ $x^2 - 2x - 15 = (x - +3)(x - 5)$

④ Ansatz für den echt gebrochen rationalen Anteil:

$$\frac{2x}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$$

⑤ Die Hauptgleichung entsteht durch Multiplikation mit $(x+3)(x-5)$:

$$2x = A(x-5) + B(x+3)$$

Einsetzen von $x = -3$ ergibt $-6 = -8A$, also $A = 3/4$.
Einsetzen von $x = 5$ ergibt $10 = 8A$, also $B = 5/4$.

Damit ist

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 26x + 15}{x^2 - 2x - 15} = 2x - 1 + \frac{3/4}{x+3} - \frac{5/4}{x-5}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{3}{4}\ln(x+3) - \frac{5}{4}\ln(x-5)$$

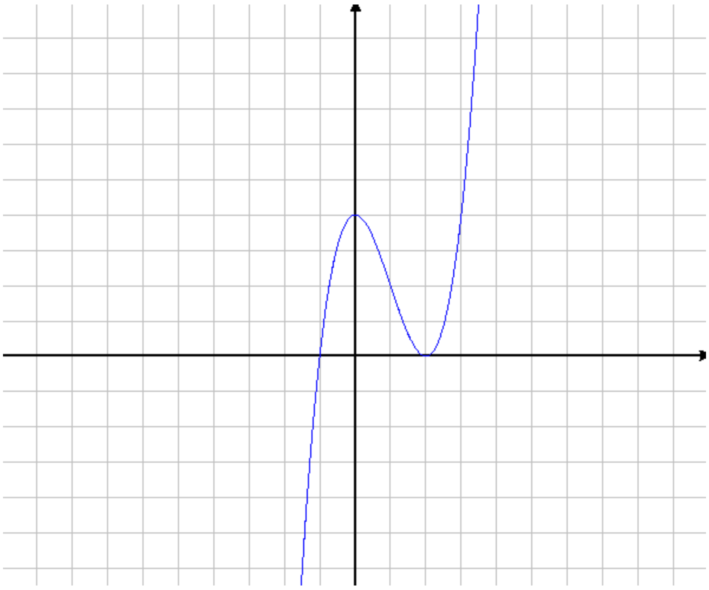
Aufgabe 102:

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion

f(x) = x^3 - $3x^2$ + 4

und der Tangente im Maximum umschlossen wird. Die Integrationsgrenzen sollen auch berechnet werden.

Lösung:



$$Max(0 \mid 4), \quad Min(2 \mid 0)$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

$$\int_0^3 (4 - x^3 + 3x^2 - 4)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

Aufgabe 103:

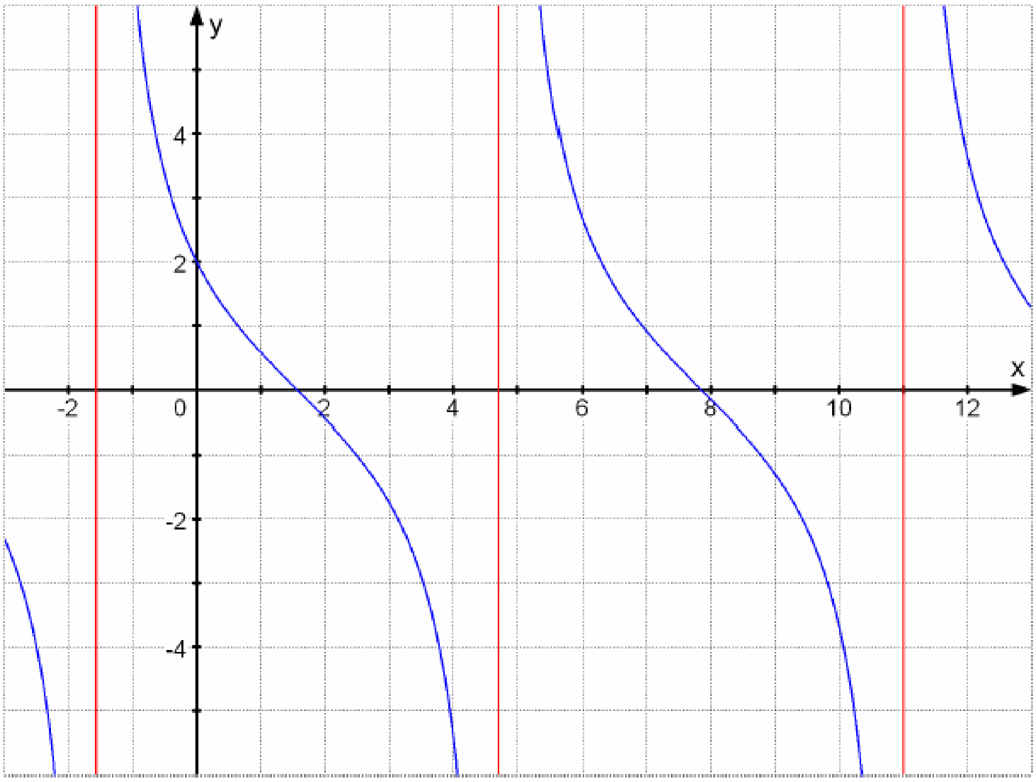
Bilden Sie durch Rechnung zu folgender Funktion f(x) die Stammfunktion F(x).

$$f(x) = \frac{2 \cdot cosx}{1 + sinx}\ dx$$

Lösung:

(12) $\int \frac{2 \cdot \cos x}{1+\sin x} dx$ Substitution: $u = 1+\sin x \Rightarrow du = \cos x \cdot dx$

$= \int \frac{2}{u} du = 2 \cdot \ln u + C = 2 \cdot \ln(1+\sin x) + C$



Aufgabe 104:

Berechnen Sie folgendes Integral. (Der Rechenweg muss erkennbar sein)

$$\int_3^4 ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)dx$$

Lösung:

(7) $$\int_3^4 \ln\frac{x+2}{x-2}dx = \int_3^4 \left[\ln(x+2) - \ln(x-2)\right]dx = \int_3^4 \ln(x+2)dx - \int_3^4 \ln(x-2)dx$$

Die weiterhelfende Grundidee ist die, das Gesetz $\ln\frac{Z}{N} = \ln Z - \ln N$ anzuwenden.

Dies geht nur dann, wenn die neuen Teil-Logarithmen für die Grenzen 3 und 4 definiert sind. Durch Einsetzen dieser Zahlen in die Terme ln (x+2) und ln(x - 2) erkennt, man, dass dabei das Argument nicht negativ wird.
Als nächstes wurde das Intergral in zwei Teilintegrale zerlegt. Beide werden nun getrennt berechnet und substituiert.

1. Teilintegral: $\int_3^4 \ln(x+2)dx$ Substitution: u = x + 2, du = dx

$$= \int_5^6 \ln u\, du = [u \cdot \ln u - u]_5^6$$

2. Teilintegral: $\int_3^4 \ln(x-2)dx$ Substitution: u = x - 2, du = dx

$$= \int_1^2 \ln u\, du = [u \cdot \ln u - u]_1^2$$

Nun setzen wir alles zusammen:

$$\int_3^4 \ln\frac{x+2}{x-2}dx = [u \cdot \ln u - u]_5^6 - [u \cdot \ln u - u]_1^2$$
$$= [6 \cdot \ln 6 - 6] - [5 \cdot \ln 5 - 5] - [2 \cdot \ln 2 - 2] + [1 \cdot \ln 1 - 1]$$
$$= 6 \cdot \ln 6 - 5 \cdot \ln 5 - 2 \cdot \ln 2 \approx 1{,}317$$

Aufgabe 105:

Berechnen Sie folgendes Integral. (Der Rechenweg muss erkennbar sein)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

Lösung:

(17) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$

Partielle Integration.

$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$

$v = \cos x \quad \Rightarrow \quad v' = -\sin x$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

Nächste partielle Integration:

$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$

$v = \sin x \quad \Rightarrow \quad v' = \cos x$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

Zusammengesetzt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

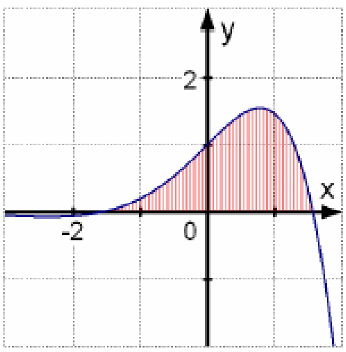
$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

Also folgt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}\left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{\pi/2}\left(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}\right) - e^{-\pi/2}\left(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) \approx 2{,}51$$



Aufgabe 106:

Berechnen Sie folgendes Integral. (Der Rechenweg muss erkennbar sein)

$$\int \frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2}\,dx$$

Lösung:

1. Nennernullstellen:

Die Nennernullstellen von lassen sich direkt ablesen. Es gibt die einfache Nullstelle $x_1=1$ und die doppelte Nullstelle $x_{2/3}=-2$.

also: $x_1=1$ $x_2=-2$ $x_3=-2$

2. Zerlegung in A,B:

Da es hier drei Nullstellen gibt, muß es auch drei Zählervariablen geben:

$$\frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)}$$

$$\frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2}=\frac{A\cdot(x-1)+B\cdot(x-1)+C\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x+2)^2}$$

also: $9=A\cdot(x-1)+B\cdot(x-1)+C\cdot(x-1)\cdot(x+2)$

3. Berechnung A,B,C:

mit $x = 1$:

$$9 = A\cdot(1+2)^2 \ + \ B\cdot(1-1) \ + \ C\cdot(1-1)\cdot(1+2)$$

$$9 = A\cdot 3^2 \ + \ B\cdot 0 \ + \ C\cdot 0\cdot 3$$

$$9 = 9\cdot A$$

$$A = 1$$

mit $x = -2$:

$$9 = A\cdot(-2+2)^2 \ + \ B\cdot(-2-1) \ + \ C\cdot(-2-1)\cdot(-2+2)$$

$$9 = A\cdot 0 \ + \ B\cdot -3 \ + \ C\cdot -3\cdot 0$$

$$9 = -3\cdot B$$

$$B = -3$$

mit $x = -1$:

$$9 = A\cdot(-1+2)^2 \ + \ B\cdot(-1-1) \ + \ C\cdot(-1-1)\cdot(-1+2)$$

$$9 = A\cdot 1^2 \ + \ B\cdot -2 \ + \ C\cdot -2\cdot 1$$

$$9 = 1\cdot 1 \ + \ -3\cdot -2 \ + \ C\cdot -2 \qquad \leftarrow \text{A und B eingesetzt !}$$

$$9 = 1+6+-2\cdot C$$

$$2 = -2\cdot C$$

$$C = -1$$

also ist $A = 1$, $B = -3$ und $C = -1$.

4. Partialbruch schreiben:

$$\frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2}=\frac{1}{(x-1)} + -\frac{3}{(x+2)^2} + -\frac{1}{(x+2)}$$

also: $$\int\frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2}\,dx=\int\frac{1}{(x-1)}\,dx + \int\frac{-3}{(x+2)^2}\,dx + \int\frac{-1}{(x+2)}\,dx$$

5. Integral ausrechnen:

$$\int\frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2}\,dx=\int\frac{1}{(x-1)}\,dx + \int\frac{-3}{(x+2)^2}\,dx + \int\frac{-1}{(x+2)}\,dx$$

$$\int\frac{9}{(x-1)\cdot(x+2)^2}\,dx=\ln(x-1)+\frac{3}{x+2}-\ln(x+2)\;+C$$

Aufgabe 107:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int\frac{8x^2-2x-43}{x^3-x^2-16x-20}dx$$

Lösung:

$$\int\frac{8x^2-2x-43}{x^3-x^2-16x-20}dx$$

$$\int\frac{8x^2-2x-43}{(x+2)^{2}\cdot(x-5)}dx$$

Der Integrand ist *echt* gebrochenrational und wird in *Partialbrüche* zerlegt. Zunächst benötigen wir die *Nullstellen* des Nenners:

$$(x+2)^2(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -2\,, \quad x_3 = 5$$

Ihnen ordnen wir folgende *Partialbrüche* zu:

$$x_{1/2} = -2 \text{ (doppelte Nullstelle)} \longrightarrow \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$x_3 = 5 \qquad \text{(einfache Nullstelle)} \longrightarrow \frac{C}{x-5}$$

Der Partialbruchansatz lautet damit:

$$\frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-5}$$

Um die unbekannten Konstanten A, B und C bestimmen zu können, müssen die Brüche zunächst *gleichnamig* gemacht werden (Hauptnenner: $(x+2)^2(x-5)$). Die Brüche der rechten Seite müssen daher der Reihe nach mit $(x+2)(x-5)$, $(x-5)$ und $(x+2)^2$ erweitert werden:

$$\frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2(x-5)} = \frac{A(x+2)(x-5) + B(x-5) + C(x+2)^2}{(x+2)^2(x-5)}$$

Da die Brüche der beiden Seiten im Nenner übereinstimmen, müssen sie auch im Zähler übereinstimmen:

$$8x^2 - 2x - 43 = A(x+2)(x-5) + B(x-5) + C(x+2)^2$$

Diese Gleichung gilt für alle reellen x-Werte. Wir setzen jetzt der Reihe nach die Werte $x = -2$, $x = 5$ (d. h. die *Nennernullstellen* unserer gebrochenrationalen Funktion) und zusätzlich den Wert $x = 0$ ein und erhalten ein *gestaffeltes* lineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten A, B und C:

$$\boxed{x = -2} \quad \Rightarrow \quad -7 = -7B \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

$$\boxed{x = 5} \quad \Rightarrow \quad 147 = 49C \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

$$\boxed{x = 0} \quad \Rightarrow \quad -43 = -10A - 5B + 4C = -10A - 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = -10A + 7 \quad \Rightarrow \quad A = 5$$

Somit gilt $A = 5$, $B = 1$ und $C = 3$, die Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$\frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2(x-5)} = \frac{5}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x-5}$$

Die Integration der Partialbrüche führt auf drei einfache Integrale, die mit den angedeuteten Substitutionen gelöst werden:

$$I = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x-5} \right) dx = 5 \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x+2}_{u}} + \int \frac{dx}{\underbrace{(x+2)}_{u}{}^2} + 3 \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x-5}_{v}}$$

$$u = x+2, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad dx = du \quad \text{und} \quad v = x-5, \quad \frac{dv}{dx} = 1, \quad dx = dv$$

$$I = 5 \cdot \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 3 \cdot \int \frac{dx}{x-5} = 5 \cdot \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^2} + 3 \cdot \int \frac{dv}{v} =$$

$$= 5 \cdot \int \frac{du}{u} + \int u^{-2}\, du + 3 \cdot \int \frac{dv}{v} = 5 \cdot \ln|u| + \frac{u^{-1}}{-1} + 3 \cdot \ln|v| + C =$$

$$= 5 \cdot \ln|u| - \frac{1}{u} + 3 \cdot \ln|v| + C$$

Durch Rücksubstitution ($u = x + 2$, $v = x - 5$) erhalten wir schließlich die folgende Lösung:

$$I = \int \frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2 (x-5)}\, dx = 5 \cdot \ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + 3 \cdot \ln|x-5| + C$$

Aufgabe 108:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$$

Lösung:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}\,dx$$

Die Substitution $u = 1 + e^x$ führt zu einer Vereinfachung im Nenner des Integranden. Somit gilt (versuchsweise):

$$u = 1 + e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad dx = \frac{du}{e^x}$$

Durchführung der Integralsubstitution:

$$I = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{u} \cdot \frac{du}{e^x} = \int \frac{e^x \cdot e^x}{u} \cdot \frac{du}{e^x} = \int \frac{e^x}{u}\,du$$

Um die alte Variable x vollständig aus dem Integral zu entfernen, lösen wir die Substitutionsgleichung $u = 1 + e^x$ nach e^x auf und setzen den gefundenen Ausdruck $e^x = u - 1$ ein. Das Integral I lässt sich jetzt leicht lösen:

$$I = \int \frac{e^x}{u}\,du = \int \frac{u-1}{u}\,du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \ln|u| + C$$

Aufgabe 109:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx$$

Wir zerlegen den Integrand $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ wie folgt in ein *Produkt* aus zwei Faktoren u und v':

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'} = u\,v'$$

Begründung: Diese Zerlegung hat Aussicht auf Erfolg, da $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$ bekanntlich die *Ableitung* von $\tan x$ ist. Mit der gewählten Zerlegung

$$u = x, \quad v' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und damit} \quad u' = 1, \quad v = \tan x$$

führt die *partielle Integration* zu folgendem Ergebnis:

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx = x \cdot \tan x - \int 1 \cdot \tan x\,dx =$$

$$= x \cdot \tan x - \underbrace{\int \tan x\,dx}_{I_1} = x \cdot \tan x - I_1$$

Das „Hilfsintegral“ I_1 ist zwar *kein* Grundintegral, lässt sich aber durch eine *Substitution* leicht lösen, wenn man die trigonometrische Beziehung $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ beachtet:

$$I_1 = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

Im Zähler steht – vom Vorzeichen abgesehen – die *Ableitung* des Nenners, das Integral I_1 ist daher durch die *Substitution* $u = \cos x$ wie folgt lösbar (→ FS: Kap. V.3.12, Integraltyp E):

$$u = \cos x , \quad \frac{du}{dx} = -\sin x , \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$I_1 = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C$$

Für das vorgegebene Integral I erhalten wir damit die Lösung

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = x \cdot \tan x - I_1 = x \cdot \tan x - (-\ln |\cos x| + C) = x \cdot \tan x + \ln |\cos x| - C =$$

$$= x \cdot \tan x + \ln |\cos x| + C^* \qquad (C^* = -C)$$

Wir „verifizieren“ das Ergebnis, in dem wir zeigen, dass die 1. Ableitung des unbestimmten Integrals zum Integranden führt. Dabei verwenden wir in der angedeuteten Weise die *Produktregel* (1. Summand) und die *Kettenregel* (2. Summand):

$$I = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\tan x}_{v} + \ln |\underbrace{\cos x}_{t}| + C^* = uv + \ln |t| + C^*$$

$$I' = u'v + v'u + \frac{1}{t} \cdot t' = 1 \cdot \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x = \frac{x}{\cos^2 x}$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin x / \cos x = \tan x$)

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 110:

Berechnen Sie folgendes uneigentliche Integral. Gegen welchen Wert strebt die Fläche?

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln^2(x) - 1)} dx$$

Lösung:

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln^2(x) - 1)} dx = \lim_{r \to \infty} \int_{e^2}^{r} \frac{1}{x \cdot (\ln^2(x) - 1)} dx$$

Subst.:

$$u = \ln(x)$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{x} = du$$

$$x_1 = e^2 \ \rightarrow u_1 = \ln(e^2) = 2$$

$$\lim_{r \to \infty} \int_{2}^{r} \frac{1}{u^2 - 1} du$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{A}{(u+1)} + \frac{B}{(u-1)} = \frac{A(u-1) + B(u+1)}{(u+1)(u-1)} = \frac{x(A+B) + (B-A)}{(u+1)(u-1)}$$

$$A + B = 0$$

$$B - A = 1$$

$$B = \frac{1}{2} \text{ und } A = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{r \to \infty} \int_{2}^{r} \frac{-\frac{1}{2}}{(u+1)} + \int_{2}^{r} \frac{\frac{1}{2}}{(u-1)} du = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2} \int_{2}^{r} \frac{1}{(u-1)} - \frac{1}{(u+1)} du$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2} [\ln(u-1) - \ln(u+1)]_2^r = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2} \left[ln\left(\frac{(u-1)}{(u+1)}\right) \right]_2^r$$

$$= \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2} \left[ln\left(\frac{(r-1)}{(r+1)}\right) - ln\left(\frac{(2-1)}{(2+1)}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[-ln\left(\frac{(2-1)}{(2+1)}\right) \right] = \frac{1}{2} \left\{ -\ln\left(\frac{1}{3}\right) \right\} = \frac{1}{2} \ln(3)$$

Aufgabe 111:

Berechnen Sie folgendes Integral.

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

Lösung:

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

Kennzeichen dieses Intergrals ist der quadratische Radikand $x^2 + 4$, dessen Ableitung bzw. ein Vielfaches davon im Zähler steht.

Substitution: $u = x^2 + 4 \Rightarrow du = u' \cdot dx = 2x\,dx$

Also ist $x\,dx = \frac{1}{2}du$ und $4x\,dx = 2\,du$!!!

Der Faktor x verschwindet also im neuen Differential du.

Grenzen: $x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 4, \quad x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 8$

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int_4^8 \frac{2}{\sqrt{u}}\,du = 2\int_4^8 u^{-\frac{1}{2}}du = 2 \cdot \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] = 4\left[\sqrt{x}\right]_4^8 = 4\sqrt{8} - 4 \cdot 2 = 8\sqrt{2} - 8$$

Aufgabe 112:

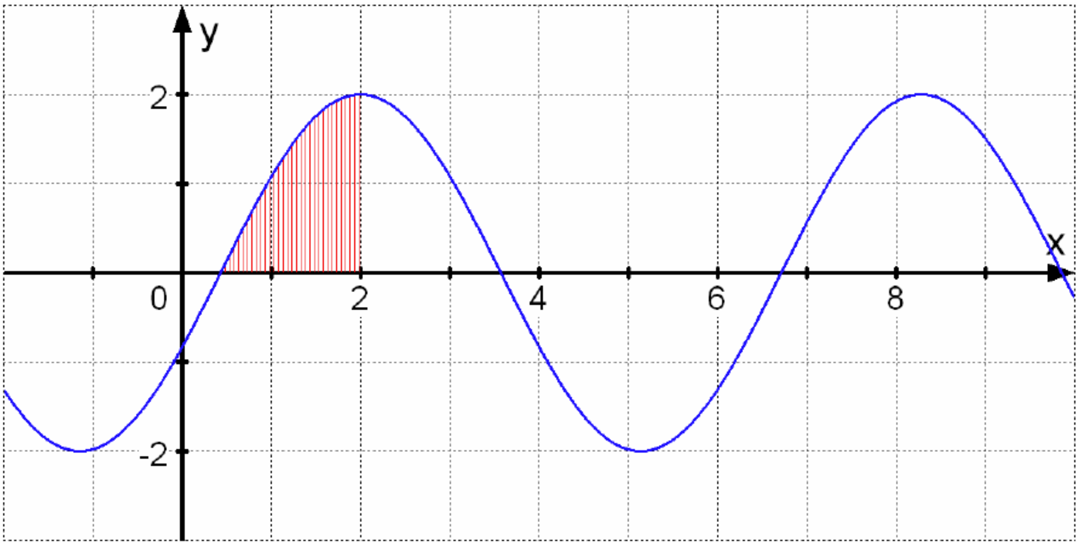
Berechnen Sie folgendes Integral.

$$\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} 2 \cdot \cos(2-x)\,dx$$

Lösung:

$$\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} 2\cos(2-x)\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 2-x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$$

$$= -2\int_{\pi/2}^{0} \cos u\,du = -2\left[\sin u\right]_{\pi/2}^{0} = -2\left(\sin 0 - \sin\tfrac{1}{2}\pi\right) = -2(0-1) = 2$$



Aufgabe 113:

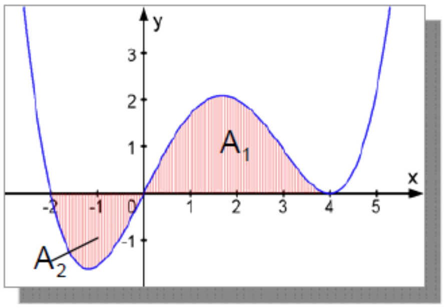
Berechne Sie die Fläche die von der Kurve und der x-Achse eingeschlossen wird.

Die Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 6x^3 + 32x)$$

Lösung:

Beispiel 15 $f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 6x^3 + 32x)$



f hat die Nullstellen -2, 0 und 4. Gesucht ist die Gesamtfläche, die das Schaubild K und die x-Achse begrenzen.

Lösung

Wir müssen die beiden Teil-Flächen getrennt berechnen.

Zuerst die **rechte Fläche**:

$$A_1 = \frac{1}{16}\int_0^4 \left(x^4 - 6x^3 + 32x\right)dx = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 16x^2\right]_0^4 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cdot 4^5 - \frac{3}{2}4^4 + 16\cdot 4^2\right)$$

Den Faktor $\frac{1}{16}$ kann man als konstanten Faktor vor das Integral ziehen.

Achtung: Ausklammern von 4^4 vereinfacht die Rechnung bedeutend $(16\cdot 4^2 = 4^2\cdot 4^2 = 4^4)$:

$$A_1 = \frac{1}{16}\cdot 4^4\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 1\right) = 16\cdot\frac{8-15+10}{10} = 16\cdot\frac{3}{10} = \frac{24}{5}$$

Nun die **zweite Fläche**.

Da diese unterhalb der x-Achse liegt, vertauschen wir die Grenzen, damit sie einen positiven Inhalt erhält:

$$A_2 = \frac{1}{16}\int_0^{-2} \left(x^4 - 6x^3 + 32x\right)dx = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 16x^2\right]_0^{-2} = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5}\cdot 2^5 - \frac{3}{2}2^4 + 16\cdot 2^2\right)$$

Jetzt klammern wir $2^3 = 8$ aus $\left(\frac{3}{2}\cdot 2^4 = 3\cdot 2^3\right)$:

$$A_2 = \frac{1}{16}\cdot 8\left(-\frac{4}{5} - 3 + 8\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5} + 5\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{21}{5} = \frac{21}{10}$$

Gesamtfläche:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{24}{5} + \frac{21}{10} = \frac{48+21}{10} = \frac{69}{10} = 6{,}9$$

Aufgabe 114:

Ermitteln Sie folgende Stammfunktion rechnerisch.

$$\int \frac{-x^2 + 5x - 2}{x^3 - x}\,dx$$

Lösung:

$$\frac{-x^2+5x-2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$\begin{aligned}
-x^2+5x-2 &= A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1) \\
-x^2+5x-2 &= Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx \\
-x^2+5x-2 &= (A+C)x^2 + (A+B+4C)x + (-2A-B+4C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-1 &= A+B+C \\
5 &= -B+C \\
-2 &= -A
\end{aligned}$$

$$A=2, \quad B=-4, \quad C=1$$

$$\frac{-x^2+5x-2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\ln(x) - 4\,\ln(x+1) + \ln(x-1) + K$$

Aufgabe 115:

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der x-Achse bei $T_1(0|0)$ und $T_2(4|0)$. Der Funktionsgraph verläuft außerdem noch durch den Punkt $P(2|240)$. Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von f(x) und der x-Achse eingeschlossen wird!

Lösung:

Aufstellen der Funktionsgleichung: Ich stelle das Polynom in allgemeiner Form sowie die erste Ableitung dar, bevor die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllllll} \text{Punkt } (0|0) & \Rightarrow & f(0)=0 & \Rightarrow & (1) & 0a+0b+0c+0d+e & = & 0 \\ \text{Punkt } (4|0) & \Rightarrow & f(4)=0 & \Rightarrow & (2) & 256a+64b+16c+4d+e & = & 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_1=0 & \Rightarrow & f'(0)=0 & \Rightarrow & (3) & 0a+0b+0c+d & = & 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_2=4 & \Rightarrow & f'(4)=0 & \Rightarrow & (4) & 256a+48b+8c+d & = & 0 \\ \text{Punkt } (2|240) & \Rightarrow & f(2)=240 & \Rightarrow & (5) & 16a+8b+4c+2d+e & = & 240 \end{array}$$

Aus Gleichung (1) und (3) folgt sofort:

$$\begin{array}{llll} (1) & e & = & 0 \\ (3) & d & = & 0 \end{array}$$

Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung:

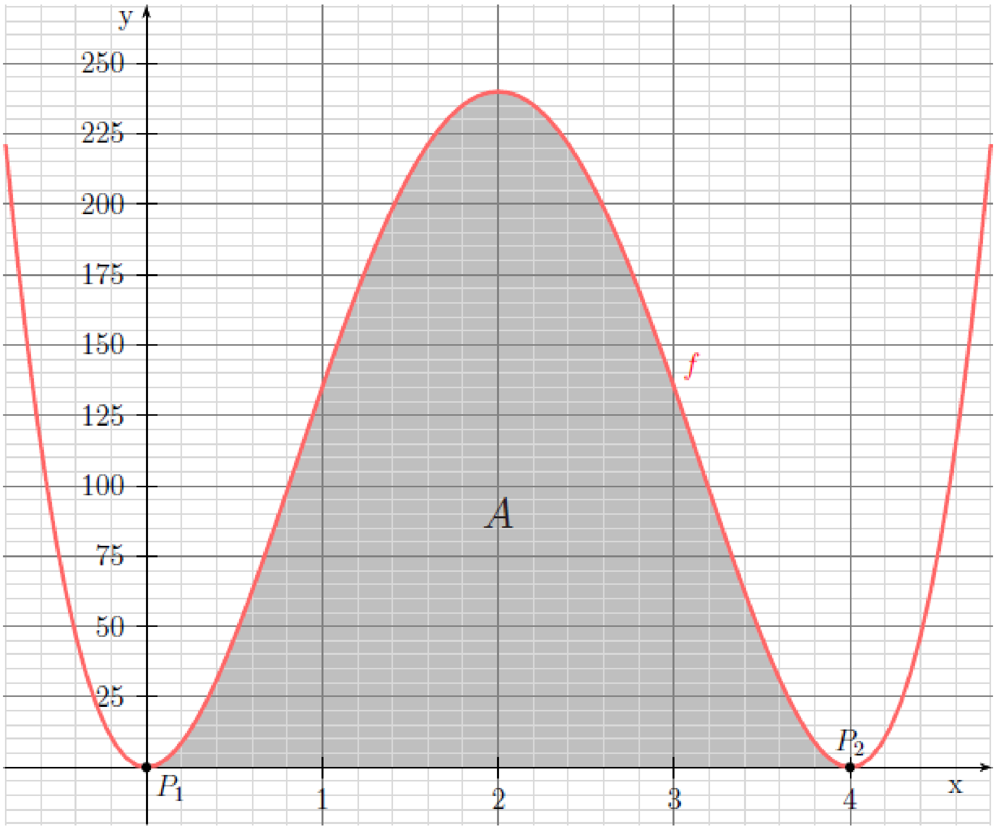
$$\begin{array}{llll} (2) & 256a+64b+16c & = & 0 \\ (4) & 256a+48b+8c & = & 0 \\ (5) & 16a+8b+4c & = & 240 \end{array}$$

Mit einem beliebigen Lösungsverfahren erhält man:

$$\begin{aligned} a &= 15 \\ b &= -120 \\ c &= 240 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 15x^4 - 120x^3 + 240x^2}$

Lösung:



Flächenberechnung: Die Integrationsgrenzen 0 und 4 sind bereits durch die x-Koordinaten der Tiefpunkte bekannt. Daher kann die Fläche direkt angesetzt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \\
&= \int_0^4 15x^4 - 120x^3 + 240x^2 dx \\
&= \left[3x^5 - 30x^4 + 80x^3\right]_0^4 \\
&= \left(3 \cdot 4^5 - 30 \cdot 4^4 + 80 \cdot 4^3\right) - \left(3 \cdot 0^5 - 30 \cdot 0^4 + 80 \cdot 0^3\right) \\
&= (3072 - 7680 + 5120) - 0 \\
A &= 512
\end{aligned}$$

$\boxed{A\text{=512 Flächeneinheiten}}$

Aufgabe 116:

Bilden Sie rechnerisch die Stammfunktion von folgendem Integral:

$$\int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

Lösung:

$$\text{(m.)}\ I_{13} = \int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{-dz}{z} = -\ln(|z|)+C_1 = -\ln(|\cos(x)+\sin(x)|)+C_2$$

$$\text{Substitution: } z := \cos(x)+\sin(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\sin(x)+\cos(x) \Rightarrow (\sin(x)-\cos(x))\cdot dx = -dz$$

Aufgabe 117:

Berechnen Sie folgendes Integral.

$$\int_{-1}^{0} 2e^x \cdot \sqrt{3e^x+1}\,dx$$

Lösung:

$$\int_{-1}^{0} 2e^x \cdot \sqrt{3e^x+1}\,dx = \int_{-1}^{0} 2e^x \cdot \sqrt{z}\,\frac{dz}{3e^x} = \int_{-1}^{0} \tfrac{2}{3} z^{\frac{1}{2}}\,dz = \left[\tfrac{2}{3}\cdot \tfrac{1}{\frac{3}{2}} z^{1,5}\right] = \left[\tfrac{4}{9}(3e^x+1)^{1,5}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \tfrac{4}{9}(3\cdot 1+1)^{1,5} - \tfrac{4}{9}(3e^{-1}+1)^{1,5} = \tfrac{4}{9}\cdot 8 - \tfrac{4}{9}(\tfrac{3}{e}+1)^{1,5} \approx 2,2$$

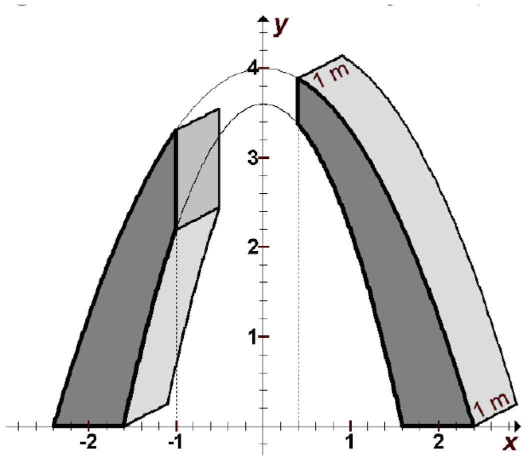
$$\boxed{z(x) = 3e^x+1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dz}{dx} = 3e^x \quad\Longrightarrow\quad dx = \frac{dz}{3e^x}}$$

Aufgabe 118:

Das neue Eingangs-Logo der Fußballweltmeisterschaft in Brasilien soll als Skulptur aus zwei Bogen auf einer Wiese vor dem Haupteingang errichtet werden. Um eine bessere Berechnung zu ermöglichen sind die gekrümmten Linien y-achsensymmetrische Parabeln zweiter Ordnung. Die Längeneinheit des Koordinatensystems, in dem die Vorflächen liegen, beträgt 1m.

a) (5) Ermitteln Sie anhand der Abbildung die Gleichungen der Parabeln.

b) (5) Berechnen Sie die dunkelgrau dargestellte Vorfläche der beiden Bögen. Die Skulptur soll aus Beton gefertigt werden und 1m breit sein. Berechnen Sie die Masse der beiden Bögen (1 dm³ Beton wiegt 2,4 kg)



Lösung:

Aufgabe 2:

a) $f(x) = ax^2 + c \quad f(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 4 \quad f(2,4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5,76a + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{25}{36}$

$g(x) = bx^2 + d \quad g(0) = 3,6 \quad \Longrightarrow \quad d = 3,6 \quad g(1,6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2,56b + 3,6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{45}{32}$

Also gilt $f(x) = -\frac{25}{36}x^2 + 4$ (äußere Parabel) und $g(x) = -\frac{45}{32}x^2 + \frac{18}{5}$ (innere Parabel).

b) Linker Bogen: $A = \int\limits_{-2,4}^{-1,6} f(x)\,dx + \int\limits_{-1,6}^{-1} (f(x) - g(x))\ dx \overset{\text{GTR}}{\approx} 0,948 + 0,975 = 1,923$

Die Vorderfläche des linken Bogens hat einen Flächeninhalt von 1,923 m^2.

$V = A \cdot h = 1,923\ \text{m}^2 \cdot 1\ \text{m} = 1,923\ \text{m}^3 = 1923\ \text{dm}^3 \qquad m = 1923\ \text{dm}^3 \cdot 2,4\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 4614,6\ \text{kg}.$

Der linke Bogen wiegt also ca. 4,615 t.

Rechter Bogen: $A = \int\limits_{0,4}^{1,6} (f(x) - g(x))\ dx + \int\limits_{1,6}^{2,4} f(x)\,dx \overset{\text{GTR}}{\approx} 1,437 + 0,948 = 2,385$

Die Vorderfläche des rechten Bogens hat einen Flächeninhalt von 2,385 m^2.

$V = A \cdot h = 2,385\ \text{m}^2 \cdot 1\ \text{m} = 2,385\ \text{m}^3 = 2385\ \text{dm}^3 \qquad m = 2385\ \text{dm}^3 \cdot 2,4\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 5723,6\ \text{kg}.$

Der rechte Bogen wiegt also ca. 5,724 t.

Aufgabe 119:

Bestimmen Sie auf rechnerischem Weg die folgende Stammfunktion.

$$\int \frac{3x^2 - 19x + 32}{x^3 - 11x^2 + 35x - 25} dx$$

Lösung:

Wir ermitteln eine reelle Nullstelle durch ausprobieren der Teiler von 25, und erhalten z.B. $x_1 = 1$. Polynomdivision liefert

$$(x^3 - 11x^2 + 35x - 25) : (x - 1) = x^2 - 10x + 25,$$

so dass

$$x^3 - 11x^2 + 35x - 25 = (x - 1) \cdot (x^2 - 10x + 25)$$

gilt. Die (einzige und damit doppelte) Nullstelle von $x^2 - 10x + 25$ ist $x_2 = x_3 = 5$. Also ist

$$x^3 - 11x^2 + 35x - 25 = (x - 1) \cdot (x - 5)^2.$$

Der Ansatz lautet nun

$$\frac{3x^2 - 19x + 32}{x^3 - 11x^2 + 35x - 25} = \frac{3x^2 - 19x + 32}{(x - 1)(x - 5)^2} = \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x - 5} + \frac{a_3}{(x - 5)^2}$$

Die Methode des Koeffizientenvergleiches ist möglich, führt aber zu einem 3x3-Gleichungssystem. Daher ermitteln wir a_1 mit durch Multiplikation mit $(x-)^2$ und den Rest durch den Vergleich:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 19x + 32}{(x - 1)(x - 5)^2} &= \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x - 5} + \frac{a_3}{(x - 5)^2} \qquad | \cdot (x - 1) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{3x^2 - 19x + 32}{(x - 5)^2} &= a_1 + \frac{a_2(x - 1)}{x - 5} + \frac{a_3(x - 1)}{(x - 5)^2} \\ \overset{x=1}{\Rightarrow} \quad \frac{16}{16} &= a_1 \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-19x+32}{(x-1)(x-5)^2} &= \frac{1}{x-1}+\frac{a_2}{x-5}+\frac{a_3}{(x-5)^2}\\ &= \frac{(x-5)^2+a_2(x-1)(x-5)+a_3(x-1)}{(x-1)(x-5)^2}\\ &= \frac{x^2(1+a_2)+x(-10-6a_2+a_3)+(25+5a_2-a_3)}{(x-1)(x-5)^2}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$1+a_2=3 \qquad -10-6a_2+a_3=-19 \qquad 25+5a_2-a_3=32$$

Aus der ersten Gleichung folgt $a_2=2$ und damit aus der zweiten (oder auch dritten) $a_3=3$. Also

$$\frac{3x^2-19x+32}{x^3-11x^2+35x-25}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-5}+\frac{3}{(x-5)^2}$$

Aufgabe 120:

Die Parabel $f(x)=x^2 \;\; (x\geq 0)$, die Gerade y= 4 und die y-Achse umschließen eine Fläche A. Welche Parallele zur x-Achse halbiert die Fläche A?

Geben Sie die Gleichung dieser Parallelen an.

Lösung:

$$\int_0^2 x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

Die eingeschlossene Fläche:

$$A=2\cdot 4-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

Die Hälfte davon ist: $\frac{8}{3}$

Folgende Bedingung gilt:

$$c\cdot\sqrt{c}-\int_0^{\sqrt{c}} x^2 dx=\frac{8}{3}$$

$$c\cdot\sqrt{c}-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{c}}=\frac{8}{3}$$

$$c\cdot\sqrt{c}-\frac{1}{3}c\cdot\sqrt{c}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{3}c \cdot \sqrt{c} = \frac{8}{3}$$

$$c \cdot \sqrt{c} = 4$$

$$c = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = 2{,}52$$

Aufgabe 121:

Bestimmen Sie das folgende Integral auf rechnerische Weise. (Die Integraltafel in der Formelsammlung kann zur Lösungskontrolle verwendet werden).

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

Lösung:

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

1. Partielle Integration:

$$\int x \cdot e^x dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \ dx$$

$u = x^2$ $\qquad$ $u' = 2x$

$v' = e^x$ $\qquad$ $v = e^x$

$$\int x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \ dx$$

1. Partielle Integration:

$$\int 2x \cdot e^x \ dx$$

$u = 2x$ $\qquad$ $u' = 2$

$v' = e^x$ $\qquad$ $v = e^x$

$$\int 2x \cdot e^x \ dx = 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x \ \ dx$$

Gesamt ergibt sich:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = 2x \cdot e^x - \left(2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x \ dx\right) = 2x \cdot e^x - 2x \cdot e^x + \int 2 \cdot e^x \ dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

Aufgabe 122:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischem Weg, dabei sollen die einzelnen Rechenschritte erkennbar sein.

$$\int \frac{-\mathrm{x}^2 + 16x - 18}{\mathrm{x}^3 - x^2 - 8x + 12} dx$$

Lösung:

$$\frac{-x^2+16x-18}{x^3-x^2-8x+12}$$

Als erstes müssen wir den Nenner faktorisieren. Dafür raten wir die erste Nullstelle, gehen also 1, -1, 2, -2 etc durch, bis wir eine Zahl gefunden haben, für die der Term 0 ergibt. In diesem Fall ist das die 2:

$$(2)^3-(2)^2-8(2)+12=0$$

Nachdem wir also die erste Nullstelle gefunden haben suchen wir jetzt die nächsten mithilfe der Polynomdivision:

$$(x^3-x^2-8x+12):(x-2)=x^2+x-6$$

Und wenn man die Nullstellen von diesem Term nicht sofort sieht kann man wieder eine Nullstelle raten und wieder Polynomdivision anwenden.

Als Tipp an dieser Stelle, um sich die mühsame Arbeit mit dem Raten zu sparen: Die Zahl am Ende des Terms muss natürlich das Produkt der dritten und vierten Werte sein, also kommen in diesem Fall nur die Paare 1, -6 oder 2, -3 (bzw diese mal -1) in Frage!

Unser Nenner sieht jetzt also so aus:

$$(x^3-x^2-8x+12)=(x-2)(x^2+x-6)=(x-2)^2(x+3)$$

Jetzt müssen wir unsere Gleichung mit den Variablen setzen:

$$\frac{-x^2+16x-18}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{\alpha}{x+3}+\frac{\beta}{x-2}+\frac{\gamma}{(x-2)^2}$$

Das Ganze dann multipliziert mit dem Nenner der linken Seite:

$$-x^2+16x-18=\frac{\alpha(x-2)^2(x+3)}{x+3}+\frac{\beta(x-2)^2(x+3)}{x-2}+\frac{\gamma(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ -x^2+16x-18=\alpha(x-2)^2+\beta(x-2)(x+3)+\gamma(x+3)$$

Das müssen wir jetzt noch ausmultiplizieren und nach den Potenzen sortieren:

$$-x^2 + 16x - 18 = x^2(\alpha + \beta) + x(-4\alpha + \beta + \gamma) + (4\alpha - 6\beta + 3\gamma)$$

Daraus können wir unser Lineares Gleichungssystem formen, indem wir einfach die Vorfaktoren der verschiedenen Potenzen vergleichen.

$$\left| \begin{array}{c} -1 = \alpha + \beta \\ 16 = -4\alpha + \beta + \gamma \\ -18 = 4\alpha - 6\beta + 3\gamma \end{array} \right|$$

Und als Lösung erhalten wir:

$$\left| \begin{array}{c} \alpha = -3 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{array} \right|$$

Also lautet unser Ergebnis für die Aufgabe:

$$\frac{-3}{x+3} + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{-x^2 + 16x - 18}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx = \int \frac{-3}{x+3} + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} dx$$

$$= -3 \cdot ln|x+3| + 2 \cdot ln|x-2| + 2 \cdot ln|(x-2)^2| + c$$

Rotationsvolumen

Aufgabe 123:

Die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ rotiert in den Grenzen x=1 und x=2 um die x-Achse. Berechnen Sie das entstehende Volumen.

Lösung:

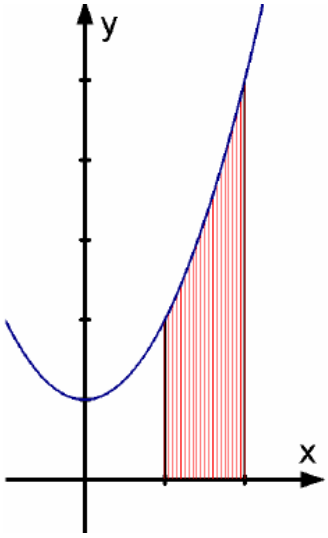
Randfunktion: $f(x) = x^2 + 1$

Krummliniges Trapez von x = 1 bis x = 2.
Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi\int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi\int_1^2 (x^4+2x^2+1)\,dx =$$

$$V = \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \pi\left[\tfrac{32}{5} + \tfrac{16}{3} + 2\right] - \pi\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3} + 1\right]$$

$$V = \pi\cdot\left(\tfrac{31}{5} + \tfrac{14}{3} + 1\right) = \pi\cdot\tfrac{93+70+15}{15} = \tfrac{178}{15}\pi$$



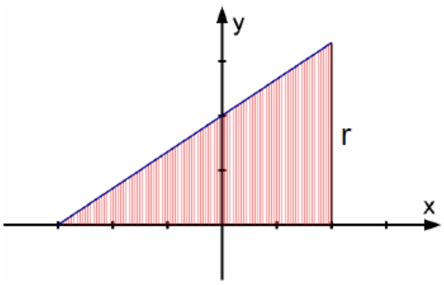
Aufgabe 124:

Die Gerade $y = \frac{2}{3}x + 2$ rotiert in den Grenzen x=-3 bis x=2 um die x-Achse. Berechnen Sie das entstehende Volumen.

Lösung:

(2) Gerade $y = \frac{2}{3}x + 2$ für x= - 3 bis x = 2 begrenzt zusammen mit der x-Achse und der Geraden x = 2 ein Dreieck, das bei Drehung um die x-Achse zu einem Kegel wird.

Berechne dessen Volumen.



1. Lösung: $V = \pi\int_{-3}^{2}\left(\tfrac{2}{3}x+2\right)^2 dx = \pi\int_{-3}^{2}\left(\tfrac{4}{9}x^2 + \tfrac{8}{3}x + 4\right)dx = \pi\left[\tfrac{4}{27}x^3 + \tfrac{4}{3}x^2 + 4x\right]_{-3}^{2}$

$$V = \pi\left[\tfrac{32}{27} + \tfrac{16}{3} + 8\right] - \pi\left[-\tfrac{4}{27}\cdot 27 + \underbrace{\tfrac{4}{3}\cdot 9 - 12}_{=0}\right] = \pi\cdot\frac{32+144+324}{27} = \pi\cdot\frac{500}{27} \approx 58{,}2$$

2. Lösung: Die Formel für das Kegelvolumen lautet: $V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$

wobei der Radius $r = f(2) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$ ist und h = 2 – (-3) = 5

Es folgt: $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{100}{9}\cdot 5 = \frac{500}{27}\pi$.

Aufgabe 125:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{9-x}$

Lösung:

(7) $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{9-x}$

Das Schaubild und die x-Achse begrenzen eine Fläche, diese dreht man um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

$$V = \pi\int_0^9 \left(\tfrac{1}{3}x\cdot\sqrt{9-x}\right)^2 dx = \tfrac{1}{9}\pi\int_0^9 x^2(9-x)\,dx = \tfrac{1}{9}\pi\int_0^9 \left(9x^2-x^3\right)dx = \tfrac{1}{9}\pi\left[3x^3-\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^9$$

$$= \tfrac{1}{9}\pi\left[3\cdot 9^3-\tfrac{1}{4}\cdot 9^4\right] = \tfrac{1}{9}\pi\cdot 9^3\cdot\left(3-\tfrac{9}{4}\right) = 81\pi\cdot\tfrac{3}{4} = \tfrac{243}{4}\pi \approx 191 \text{ (VE).}$$

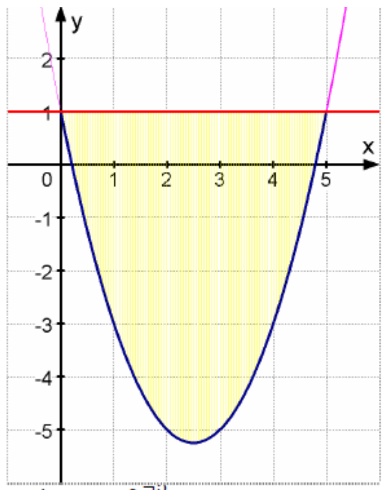
Aufgabe 126:

Die Parabel $f(x) = x^2 - 5x + 1$ und die Gerade y=1 begrenzen ein Parabelsegment. Dreht man dieses um die Gerade g: y=1, entsteht ein Drehkörper. Berechne Sie dessen Volumen.

Lösung:

(8) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

Die Parabel und die Gerade $y = 1$ begrenzen ein Parabelsegment. Dreht man dieses um die Gerade g: $y = 1$, entsteht ein Drehkörper. Berechne dessen Volumen.



Da wir nur um die x-Achse drehen können, verschieben wir dieses Segment um 1 nach unten. Damit erhält die Parabel diese Gleichung:

$$g(x) = x^2 - 5x.$$

Nun drehen wir um die x-Achse:

$$V = \pi\int_0^5 \left(x^2-5x\right)^2 dx = \pi\int_0^5 \left(x^4-10x^3+25x^2\right)dx = \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{5}{2}x^4+\tfrac{25}{3}x^3\right]_0^5$$

$$V = \pi\left(5^4-\tfrac{1}{2}\cdot 5^4+\tfrac{25}{3}\cdot 5^3\right) = \pi\cdot 5^4\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{3}\right) = 625\pi\cdot\tfrac{6-3+10}{6} = 625\cdot\pi\cdot\tfrac{13}{6} = \tfrac{8125}{6}\pi \approx 4254$$

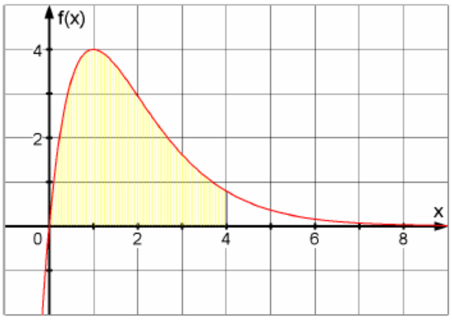
Aufgabe 127:

Die Fläche zwischen K, der x-Achse und x=4 rotiere um die x-Achse. $f(x) = x\cdot e^{1-x}$

Lösung:

(9) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Die Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 4 rotiere um die x-Achse.



$$V = \pi \int_0^4 \left(x \cdot e^{1-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x^2 \cdot e^{2-2x} dx$$

1. Partielle Integration: $u' = e^{2-2x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{2-2x}$; $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

$$V = \pi\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi \int_0^4 x \cdot e^{2-2x} dx$$

2. Partielle Integration: $u' = e^{2-2x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{2-2x}$; $w = x \Rightarrow w' = 1$

$$\int_0^4 x \cdot e^{2-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \frac{1}{2}\int e^{2-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{2-2x}\right]_0^4$$

Zusammengesetzt:

$$V = \pi\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi\left[-\frac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \frac{1}{2}\pi \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{2-2x}\right]_0^4$$

$$V = \pi\left[-\frac{1}{2}e^{2-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)\right]_0^4$$

$$V = \pi\left[-\frac{1}{2}e^{-6}\left(16 + 4 + \frac{1}{2}\right)\right] - \pi\left[-\frac{1}{2}e^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{41}{4}e^{-6}\right) \cdot \pi$$

Aufgabe 128:

Welches Volumen V entsteht, wenn die von $f(x) = 2x^2 + 1$ und $g(x) = 7x - 2$ eingeschlossene endliche Fläche um die y-Achse rotiert?

Lösung:

Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x)$$
$$2x^2 + 1 = 7x - 2$$
$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 3$$

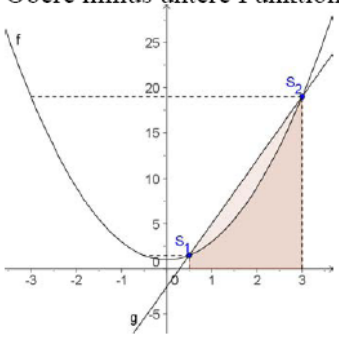
$$\underline{S_1(\tfrac{1}{2}|\tfrac{3}{2})} \qquad \underline{S_2(3|19)}$$

$f(x)$ und $g(x)$ jeweils nach x^2 umformen:

$$f(x) = 2x^2 + 1$$
$$y - 1 = 2x^2$$
$$x^2 = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 7x - 2$$
$$y + 2 = 7x$$
$$x = \frac{y}{7} + \frac{2}{7}$$
$$x^2 = \left(\frac{y}{7} + \frac{2}{7}\right)^2$$
$$x^2 = \frac{y^2}{49} + \frac{4}{49}y + \frac{4}{49}$$
$$x^2 = \frac{1}{49} \cdot (y^2 + 4y + 4)$$

Obere minus untere Funktion:



$$x_f^2 - x_g^2 =$$
$$= \frac{y}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{49} \cdot (y^2 + 4y + 4) =$$
$$= -\frac{y^2}{49} + \frac{41}{98}y - \frac{57}{98}$$

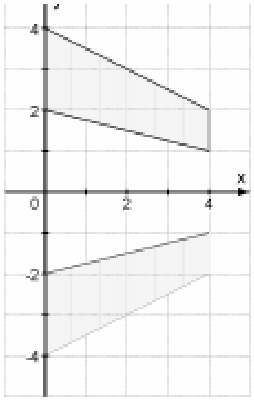
Volumen:

$$V_y = \pi \cdot \int_{\frac{3}{2}}^{19} x^2 \, \mathrm{dy} =$$
$$= \pi \cdot \int_{\frac{3}{2}}^{19} \left(-\frac{y^2}{49} + \frac{41}{98}y - \frac{57}{98}\right) \mathrm{dy} =$$
$$= \pi \cdot \left[-\frac{y^3}{147} + \frac{41}{196}y^2 - \frac{57}{98}y\right]_{\frac{3}{2}}^{19} =$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{10469}{588} + \frac{333}{784}\right] =$$
$$= \underline{\underline{\frac{875}{48}\pi \, \mathrm{E}^3}}$$

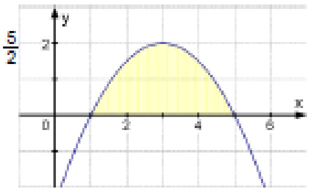
Aufgabe 129:

Berechnen Sie folgende Rotationsvolumen (Rotation um die x-Achse).

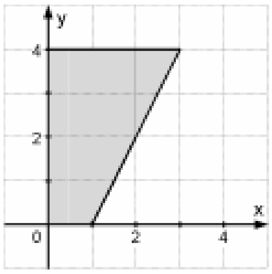
(1) Ein Trapez wird definiert durch die Geraden
g: $y = -\frac{1}{2}x + 4$ und h: $y = -\frac{1}{4}x + 2$ sowie
$x = 0$ und $x = 4$.
Dreht man dieses Viereck um die y-Achse, entsteht ein Hohlkörper. Berechne dessen massives Volumen.

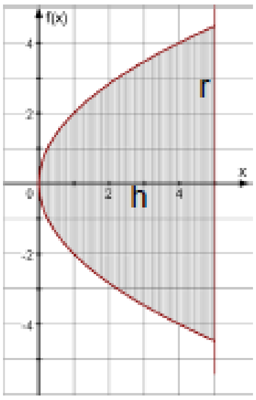


(2) Gegeben: : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$
Drehe das von K und der x-Achse begrenzte Parabelsegment um die x-Achse.

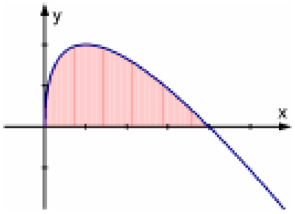


(3) Drehe nebenstehende Trapezfläche rotiere um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.



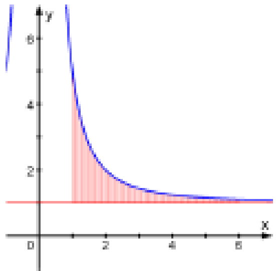


(4) Ein Paraboloid entsteht durch Drehen eines Parabelsegments.
Wenn wir den Radius des Grundkreises mit r und die Höhe bis zum Scheitel mit h bezeichnen ergibt sich eine Formel für das Volumen.
Berechne diese.

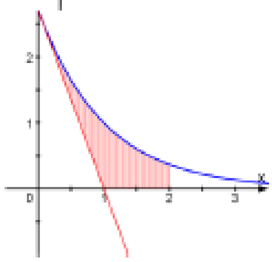


(5) $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$
Drehe die gefärbte Fläche um die x-Achse.

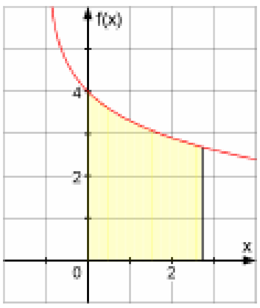
(6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$. Die Fläche zwischen K, der waagerechten Asymptote und den Geraden x = 1 und x = 6 wird um die y-Achse gedreht.



(7) $f(x) = e^{1-x}$ K, die Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse und die Gerade x = 2 begrenzen eine Fläche.
Diese soll um die x-Achse rotieren.



(8)

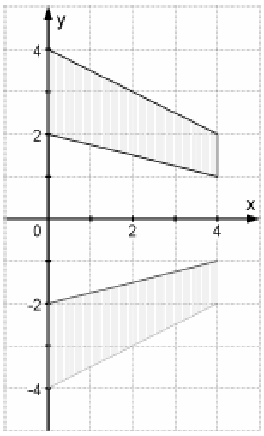


$f(x) = 4 - \ln(x+1)$
K, die Koordinatenachsen und die Gerade x = e begrenzen eine Fläche.
Diese soll um die x-Achse rotieren.

Lösung:

(1) Ein Trapez wird definiert durch die Geraden g: $y=-\frac{1}{2}x+4$ und h: $y=-\frac{1}{4}x+2$ sowie $x=0$ und $x=4$.

Dreht man dieses Viereck um die y-Achse, entsteht ein Hohlkörper. Berechne dessen massives Volumen.



Lösung:

$$V=\pi\int_0^4\left(-\tfrac{1}{2}x+4\right)^2dx-\pi\int_0^4\left(-\tfrac{1}{4}x+2\right)^2dx$$

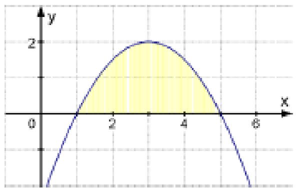
$$V=\pi\int_0^4\left[\left(\tfrac{1}{4}x^2-4x+16\right)-\left(\tfrac{1}{16}x^2-x+4\right)\right]dx$$

$$V=\pi\int_0^4\left(\tfrac{3}{16}x^2-3x+12\right)dx=\pi\left[\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+12x\right]_0^4=$$

$$V=\pi(4-24+48)=28\pi\approx 88 \quad (\text{VE})$$

(2) Gegeben: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$

Drehe das von K und der x-Achse begrenzte Parabelsegment um die x-Achse.



Lösung:

$$V=\pi\int_1^5 y^2dx=\pi\int_1^5\left(-\tfrac{1}{2}x^2+3x-\tfrac{5}{2}\right)^2dx$$

$$V=\pi\int_1^5\left(\tfrac{1}{4}x^4+9x^2+\tfrac{25}{4}-3x^3+\tfrac{5}{2}x^2-15x\right)dx=$$

$$V=\pi\left[\tfrac{1}{20}x^5+3x^3+\tfrac{25}{4}x-\tfrac{3}{4}x^4+\tfrac{5}{6}x^3-\tfrac{15}{2}x^2\right]_1^5$$

$$V=\pi\left[\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{3}{4}x^4+\tfrac{23}{6}x^3-\tfrac{15}{2}x^2+\tfrac{25}{4}x\right]_1^5$$

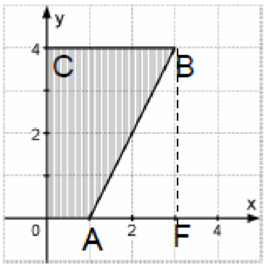
$$V=\pi\left[\tfrac{1}{20}5^5-\tfrac{3}{4}\cdot 5^4+\tfrac{23}{6}\cdot 5^3-\tfrac{15}{2}\cdot 5^2+\tfrac{25}{4}\cdot 5\right]-\pi\left[\tfrac{1}{20}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{23}{6}-\tfrac{15}{2}+\tfrac{25}{4}\right]$$

$$V=125\cdot\pi\cdot\left(\tfrac{5}{4}-\tfrac{15}{4}+\tfrac{23}{6}-\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{4}\right)-\pi\left(\tfrac{1}{20}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{23}{6}-\tfrac{15}{2}+\tfrac{25}{4}\right)$$

$$V=125\cdot\pi\cdot\left(-\tfrac{9}{4}+\tfrac{23}{6}-\tfrac{3}{2}\right)-\pi\left(\tfrac{1}{20}+\tfrac{23}{6}-\tfrac{15}{2}+\tfrac{22}{4}\right)$$

$$V=125\cdot\pi\cdot\tfrac{-27+46-18}{12}-\pi\cdot\tfrac{3+230-450+330}{60}=125\pi\cdot\tfrac{1}{12}-\pi\cdot\tfrac{113}{60}\approx 26{,}8 \quad (\text{VE}).$$

(3) Drehe nebenstehende Trapezfläche um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.



Lösung:

Es ist $A(1|0)$ und $B(3|4)$.

Die Strecke AB hat daher die Steigung $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$.

Die Gerade g = (AB) hat daher diese Gleichung: $y - 0 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$

Fällt man von B das Lot auf die x-Achse bis F, erhält man das Rechteck OFBC.
Dieses wird bei Drehung um die x-Achse zu einem Zylinder mit dem Volumen:

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 16 \cdot 3 = 48\pi\,.$$

Nun drehen wir das Dreieck ABF :

$$V_2 = \pi \int_1^3 (2x-2)^2\,dx = \pi \int_1^3 \left(4x^2 - 8x + 4\right)dx = \pi\left[\tfrac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 4x\right]_1^3$$

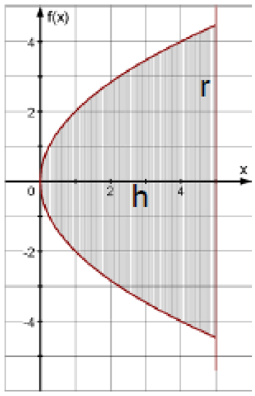
$$V_2 = \pi(36 - 36 + 12) - \pi\left(\tfrac{4}{3} - 4 + 4\right) = 12\pi - \tfrac{4}{3}\pi = \tfrac{32}{3}\pi$$

Oder man verwendet die Kegelformel (was deutlich schneller geht):

$$V_2 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 2 = \tfrac{32}{3}\pi$$

Gesamtvolumen: $V = V_1 - V_2 = 48\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{112}{3}\pi \approx 117{,}3$ (VE)

(4) Ein Paraboloid entsteht durch Drehen eines Parabelsegments.
Wenn wir den Radius des Grundkreises mit r und die Höhe bis zum Scheitel mit h bezeichnen, ergibt sich eine Formel für das Volumen.
Berechne diese.



Lösung:

Der obere rechte Eckpunkt des Segmentes hat diese Koordinaten: $P(h|r)$

Aus dem Ansatz $y = f(x) = k\sqrt{x}$ folgt durch Einsetzen: $r = k \cdot \sqrt{h} \Rightarrow k = \frac{r}{\sqrt{h}}$

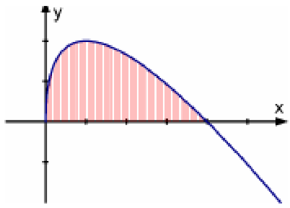
Die Parabel hat daher die Gleichung: $y = f(x) = \frac{r}{\sqrt{h}}\sqrt{x} = r\sqrt{\frac{x}{h}}$

Volumen des Paraboloids:

$$V = \pi\int_0^h y^2 dx = \pi\int_0^h r^2 \cdot \frac{x}{h}\,dx = \pi\left[\frac{r^2}{h}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{\pi}{2}\cdot r^2 h = \tfrac{1}{2}\pi r^2 h$$

(5) $f(x)=4\sqrt{x}-2x$

Drehe die gefärbte Fläche um die x-Achse.



Lösung:

Nullstelle: $4\sqrt{x}-2x=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x}=2x$

Quadrieren: $16x=4x^2 \Leftrightarrow 4x=x^2 \Leftrightarrow x^2-4x=x(x-4)=0$

$N_1(0\,|\,0)$, $N_2(4\,|\,0)$.

Volumen:

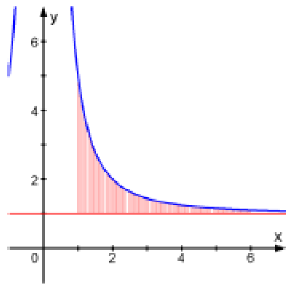
$$V=\pi\int_0^4\left(4\sqrt{x}-2x\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(16x-16x^{\frac{3}{2}}+4x^2\right)dx$$

$$V=\pi\left[8x^2-16\cdot\tfrac{2}{5}\cdot x^2\sqrt{x}+\tfrac{4}{3}x^3\right]_0^4,$$

$$\text{denn}\quad \int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\tfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}$$

$$V=\pi\left(128-\tfrac{1024}{5}+\tfrac{256}{3}\right)\approx 26{,}8 \quad \text{(VE)}$$

(6) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2}$. Die Fläche zwischen K, der waagerechten Asymptote und den Geraden x = 1 und x = 6 wird um die y-Achse gedreht.



Lösung:

$$V_1=\pi\int_1^6\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)^2dx=\pi\int_1^6\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^2dx=\pi\int_1^6\left(1+\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)dx$$

$$V_1=\pi\left[x-\frac{8}{x}-\frac{16}{3x^3}\right]_1^6=\pi\left[6-\frac{4}{3}-\frac{16}{3\cdot 6^3}\right]-\pi\left[1-8-\frac{16}{3}\right]\approx 53{,}3$$

Nebenrechnungen: $\displaystyle\int_a^b\frac{8}{x^2}=\int_a^b 8x^{-2}dx=\left[8\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_a^b=\left[-\frac{8}{x}\right]_a^b$

$$\int_a^b\frac{16}{x^4}=\int_a^b 16x^{-4}dx=\left[16\cdot\frac{x^{-3}}{-3}\right]_a^b=\left[-\frac{16}{3x^3}\right]_a^b$$

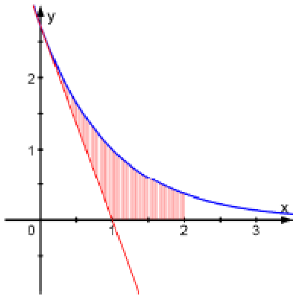
Die waagerechte Asymptote, die x-Achse und die Geraden x = 1 und x = 6 begrenzen ein Rechteck, das bei Drehung um die x-Achse den Hohlzylinder erzeugt, der sich im Körper befindet.

Zylindervolumen: $V_2=\pi\cdot r^2h=\pi\cdot 1\cdot 5=5\pi\approx 15{,}7$

Gesamtvolumen: $V=V_1-V_2=37{,}6$

(7) $f(x) = e^{1-x}$ K, die Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse und die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche. Diese soll um die x-Achse rotieren.

Lösung:



Tangente in Q (0 I e):

$f'(x) = -e^{1-x}$, $m_T = f'(0) = -e$

T: $y = -e \cdot x + e$

Der Körper enthält eine kegelförmige Aushöhlung.

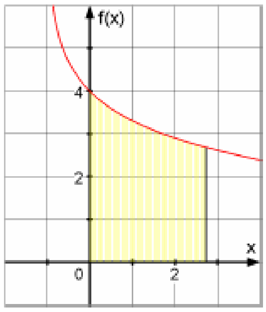
$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(e^{1-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 e^{2-2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2-2x}}{-2}\right]_0^2 = -\tfrac{1}{2}\pi \cdot \left[e^{2-2x}\right]_0^2$$

$$V_1 = -\tfrac{1}{2}\pi\left[e^{-2} - e^2\right] = \tfrac{1}{2}\pi\left(e^2 - e^{-2}\right) \approx 11{,}4$$

Kegelvolumen: Radius r = e, Höhe h = 1.

$$V_2 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi e^2 \approx 7{,}7$$

Gesamtvolumen: $V = V_1 - V_2 \approx 3{,}7$ (VE)



(8) $f(x) = 4 - \ln(x+1)$ K, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = e$ begrenzen eine Fläche. Diese soll um die x-Achse rotieren.

Lösung:

$$V = \pi\int_0^e \left[4 - \ln(x+1)\right]^2 dx = \pi\int_0^e \left[16 - 8\cdot\ln(x+1) + \left(\ln(x+1)\right)^2\right] dx$$

Zerlegung in 3 Teilintegrale:

$$V_1 = \int_0^e 16\, dx = \left[16x\right]_0^e = 16e$$

$$V_2 = 8\int_0^e \ln(x+1)dx \qquad \text{Substitution:} \quad z = x+1 \;\Rightarrow\; dz = dx$$

$$V_2 = 8\int_1^{e+1} \ln z\, dz = 8\left[z\cdot\ln z - z\right]_1^{e+1} = 8\left((e+1)\cdot\ln(e+1) - (e+1) - 1\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} + 1\right)$$

$$V_2 = 8(e+1)\cdot\ln(e+1) - 8e$$

$$V_3 = \int_0^e \left(\ln(x+1)\right)^2 dx \qquad \text{Substitution:} \quad z = x+1 \;\Rightarrow\; dz = dx$$

$$V_3 = \int_0^{e+1} (\ln z)^2 dz \qquad \text{Partielle Integration:} \quad \begin{array}{l} u' = 1 \;\Rightarrow\; u = z \\ v = (\ln z)^2 \;\Rightarrow\; v' = 2\cdot\ln z\cdot\frac{1}{z} \end{array}$$

$$V_3 = \left[z\cdot(\ln z)^2\right]_1^{e+1} - 2\int_1^{e+1} \ln z\, dz = \left[z(\ln z)^2 - 2(z\cdot\ln z - z)\right]_1^{e+1}$$

$$V_3 = \left[(e+1)\cdot\left(\ln(e+1)\right)^2 - 2(e+1)\cdot\ln(e+1) + 2(e+1)\right] - \left[(\ln 1)^2 - 2\cdot\ln 1 + 2\right]$$

$$V_3 = (e+1)\cdot\left(\ln(e+1)\right)^2 - 2(e+1)\cdot\ln(e+1) + 2e$$

Gesamtintegral:

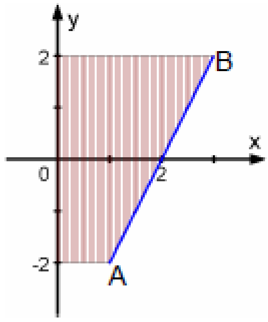
$$V = \pi\cdot\left[16e - \left(8(e+1)\cdot\ln(e+1) - 8e\right) + \left((e+1)\cdot\left(\ln(e+1)\right)^2 - 2(e+1)\cdot\ln(e+1) + 2e\right)\right]$$

$$V = \pi\cdot\left[26e + 10(e+1)\cdot\ln(e+1) + (e+1)\cdot\left(\ln(e+1)\right)^2\right]$$

Aufgabe 130:

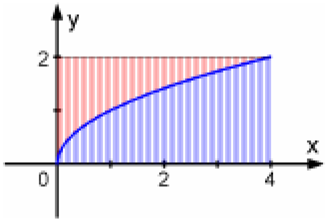
Berechnen Sie das Rotationsvolumen bei der Rotation um die y-Achse.

Aufgaben: Rotation um die y-Achse

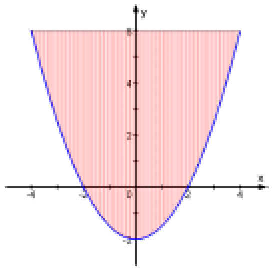


(9) Drehe das rechts dargestellte Trapez um die y-Achse. mit $A(1|-2)$ und $B(3|2)$.

(10) $f(x)=\sqrt{x}$.

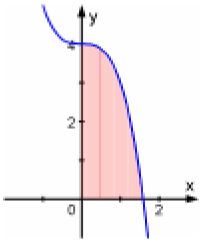


Drehe die obere Fläche und dann die untere Fläche um die y-Achse.



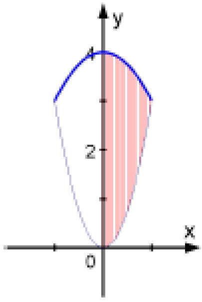
(11) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.

Das dargestellte Parabelsegment soll um die y-Achse rotieren.

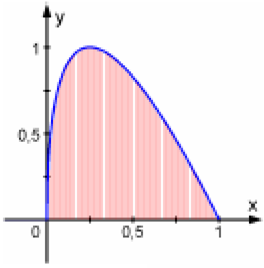


(12) $f(x)=4-x^3$

Fläche um die y-Achse drehen

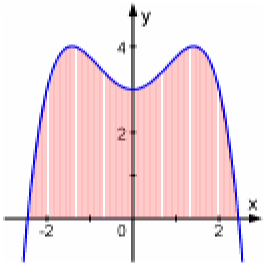


(13) Die beiden Kurven
$y=4-x^4$ und $y=3x^2$
begrenzen nebenstehende Fläche. Sie soll um die y-Achse rotieren.



(14) $f(x)=4\sqrt{x}-4x$

Die schraffierte Fläche dreht um die y-Achse. Welche Menge Flüssigkeit, kann man anschließend in den trichterförmigen Hohlraum füllen ?

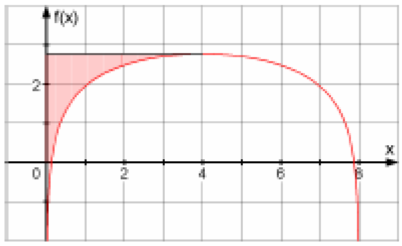


(15) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^2+3$

Wie Aufgabe (11)

(16) $f(x)=\ln(8x-x^2)$

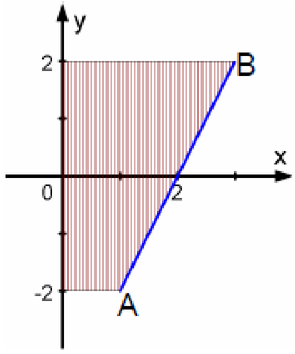
Die Kurve dazu hat den Hochpunkt $H(4\,|\ln 16)$.



K begrenzt mit den Koordinatenachsen und der Parallelen zur y-Achse durch den Hochpunkt eine Fläche.
Welchen Inhalt hat der Rotationskörper, der bei Drehung dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

Lösung:

Lösungen



(9) Drehe das rechts dargestellte Trapez um die y-Achse. mit $A(1|-2)$ und $B(3|2)$.

Lösung:

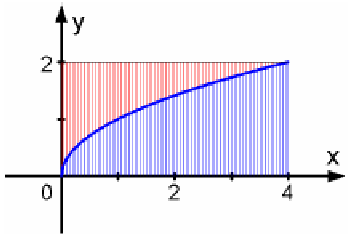
Steigung der Strecke AB: $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$

Gleichung der Geraden g = (AB): $y - 2 = 2(x-3) \Leftrightarrow y = 2x - 4$

Volumen des Rotationskörpers:

Dazu muß man die Kurvengleichung nach x auflösen : $x = \frac{y-4}{2} = \frac{1}{2}y - 2$

$$V = \pi\int_{-2}^{2} x^2 dy = \pi\int_{-2}^{2} \left(\tfrac{1}{2}y + 2\right)^2 dy = \pi\left[\tfrac{1}{4}y^2 + 4y\right]_{-2}^{2} = \pi[1+8] - \pi[1-8] = 16\pi$$



(10) $f(x) = \sqrt{x}$.

Drehe erst die obere Fläche und dann die untere Fläche um die y-Achse.

Der Eckpunkt ist P (4 I 2).

Aus $y = \sqrt{x}$ folgt $x = y^2$.

Volumen des oberen (roten) Rotationskörpers:

$$V_1 = \pi\int_0^2 x^2 dy = \pi\int_0^2 y^4 dy = \pi\left[\tfrac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \tfrac{32}{5}\pi$$

Volumen des unteren (blauen) Rotationskörpers. Dazu erzeugt man einen Zylinder durch Drehung des Rechtecks, dann subtrahiert man V_1 :

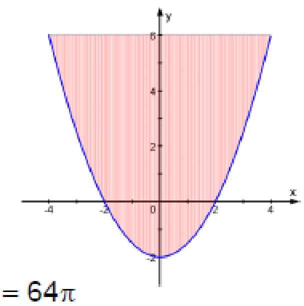
$$V_{zyl} = \pi r^2 h = \pi \cdot 16 \cdot 2 = 32\pi$$

$$V_2 = V_{zyl} - V_1 = 32\pi - \tfrac{32}{5}\pi = \tfrac{128}{5}\pi$$

---

(11) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Das dargestellte Parabelsegment soll um die y-Achse rotieren.



Lösung:

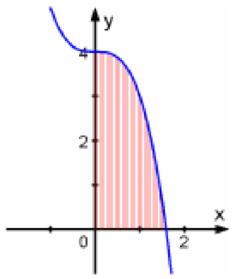
Achtung: Zur Erzeugung des Paraboloids reicht die Rotation der rechten Hälfte !!!

Aus $y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = y + 2 \Rightarrow x^2 = 2y + 4$

$$V = \pi\int_{-2}^{6} x^2 dy = \pi\int_{-2}^{6} (2y+4) dy = \pi\left[y^2 + 4y\right]_{-2}^{6} = \pi[36+24] - \pi[4-8] = 64\pi$$

(12) $f(x) = 4 - x^3$ (Schwere Aufgabe !!!)

Fläche um die y-Achse drehen



1. Lösung:

Aus $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$

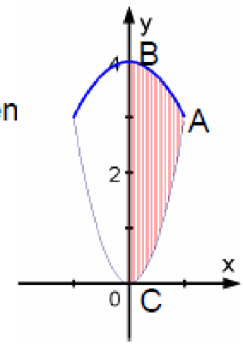
$$V = \pi \int_{y_1=0}^{y_2=4} x^2 \cdot dy = \pi \int_0^4 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_0^4 = \tfrac{3}{5}\pi \left[y \cdot \sqrt[3]{y^2} \right]_0^4 = \tfrac{3}{5}\pi \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{16} = \tfrac{3}{5}\pi \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{2} = \tfrac{24}{5}\sqrt[3]{2} \cdot \pi$$

2. Lösung: Die Nullstelle ist bei $x_N = \sqrt[3]{4}$

$$V = \pi \int_{y_1=0}^{y_2=4} x^2 \cdot dy = \pi \int_{x_1=\sqrt[3]{4}}^{x_2=0} x^2 \cdot y' dx = \pi \int_{x_1=\sqrt[3]{4}}^{x_2=0} x^2 \cdot \left(-3x^2\right) dx = -\pi \int_{\sqrt[3]{4}}^{0} 3x^4 \, dx = \pi \left[\tfrac{3}{5} x^5 \right]_0^{\sqrt[3]{4}}$$

$$V = \pi \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^5 = \pi \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^5 = \pi \cdot \tfrac{3}{5} \cdot 2^{\frac{10}{3}} = \pi \cdot \tfrac{3}{5} \cdot 2^{3+\frac{1}{3}} = \pi \cdot \tfrac{3}{5} \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{2} = \tfrac{24}{5}\sqrt[3]{2} \cdot \pi$$

(13) Die beiden Kurven $y = 4 - x^4$ und $y = 3x^2$ begrenzen nebenstehende Fläche. Sie soll um die y-Achse rotieren



Lösung:

Zuerst berechnet man die Schnittstellen 1 und – 1.

Nun werden der obere und der untere Drehkörper getrennt berechnet:

Für die obere Funktion gilt: $y = 4 - x^4 \Rightarrow y' = -4x^3$

$$V_1 = \pi \int_{y_A=3}^{y_B=4} x^2 dy = \pi \int_{x_A=1}^{x_B=0} x^2 y' dx = \pi \int_1^0 x^2 \cdot \left(-4x^3\right) dx = -4\pi \int_1^0 x^5 dx = 4\pi \left[\tfrac{1}{6} x^6 \right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\pi$$

Für die obere Funktion kann man den Drehkörperinhalt auf zwei Arten berechnen:

Aus $y = 3x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}y$ also

$$V_2 = \pi \int_{y_C=0}^{y_A=3} x^2 dy = \tfrac{1}{3}\pi \int_{y_C=0}^{y_A=3} y \, dy = \tfrac{1}{3}\pi \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_0^3 = \tfrac{1}{6}\pi \cdot 9 = \tfrac{3}{2}\pi$$

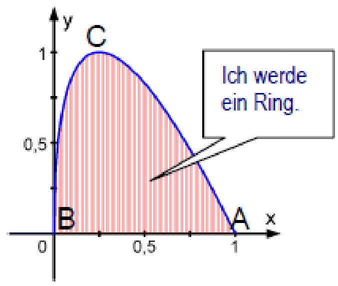
oder so:

$$V_2 = \pi \int_{y_C=0}^{y_A=3} x^2 dy = \pi \int_{x_C=0}^{x_A=1} x^2 \cdot y' \, dx = \pi \int_{x_C=0}^{x_A=1} x^2 \cdot 6x \cdot dx = 6\pi \int_{x_C=0}^{x_A=1} x^3 dx = 6\pi \left[\tfrac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \tfrac{6}{4}\pi = \tfrac{3}{2}\pi$$

Gesamtvolumen: $V = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{13}{6}\pi$

14) $f(x) = 4\sqrt{x} - 4x \quad \text{mit} \quad f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4 = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$

Die schraffierte Fläche dreht sich um die y-Achse.
Welche Menge Flüssigkeit, kann man anschließend in den trichterförmigen Hohlraum füllen ?



Hier wird also ein Ring erzeugt. Dafür haben wir eine Spezialformel entwickelt, mit der das ganz einfach geht:

Volumen des Ringes:

$$V_W = \pi \int_{x_A}^{x_B} x^2 \cdot f'(x)\,dx = \pi \int_1^0 x^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\right) dx = \pi \int_1^0 \left(2x^{\frac{3}{2}} - 4x^2\right) dx = \pi \left[2 \cdot \tfrac{2}{5} \cdot x^2\sqrt{x} - \tfrac{4}{3}x^3\right]_1^0$$

$$= 0 - \pi\left[\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{3}\right] = \pi \cdot \tfrac{20-12}{15} = \tfrac{8}{15}\pi$$

Dabei entsteht ein runder Körper, der eine trichterförmige Öffnung hat. Man kann diese bis hinauf zum Randpunkt C mit einer Flüssigkeit füllen. Um deren Volumen zu bekommen, muß man den Bogen BC um die y-Achse drehen:
Dazu benötigt man den Hochpunkt C.

Aus $f'(x_H) = 0$ folgt $\frac{2}{\sqrt{x}} - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{\sqrt{x}} = 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{4} = \sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; x_H = \frac{1}{4}$

Volumen des Trichters:

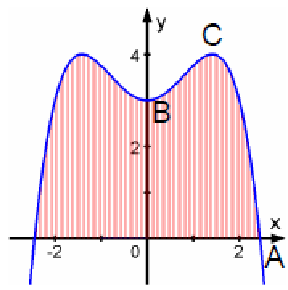
$$V_{Tr} = \pi \int_{y_B=0}^{y_C=1} x^2 dy = \pi \int_{x_B=0}^{x_C=1/4} x^2 \cdot y'\,dx = \ldots = \pi\left[2 \cdot \tfrac{2}{5} \cdot x^2\sqrt{x} - \tfrac{4}{3}x^3\right]_0^{1/4}$$

Die Zwischenrechnung muß man nicht noch einmal machen, sie wurde schon bei der Mulde durchgeführt, handelt es sich doch um dasselbe Integral.

$$V_{Tr} = \pi\left[\tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{64}\right] = \pi\left[\tfrac{1}{5 \cdot 8} - \tfrac{1}{3 \cdot 16}\right] = \pi \cdot \tfrac{6-5}{5 \cdot 3 \cdot 16} = \tfrac{1}{240}\pi$$

(15) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3 \qquad f'(x) = -x^3 + 2x$

Die schraffierte Fläche dreht sich um die y-Achse.
Welche Menge Flüssigkeit, kann man anschließend in den trichterförmigen Hohlraum füllen ?



Volumen des Ringes:

Dazu benötigt man die Nullstellen von f:

$$-\tfrac{1}{4}x^4 + x^2 + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{-\frac{1}{2}} = -2 \cdot (-1 \pm 2) = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$$

Aus $x^2 = 6$ folgt daher $x_N = \pm\sqrt{6}$. ($x^2 = -2$ hat keine Lösungen.)

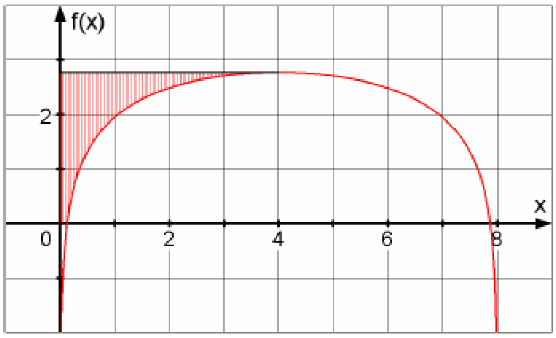
$$V_W = \pi \int_{x_A}^{x_B} x^2 \cdot f'(x)\,dx = \pi \int_{\sqrt{6}}^0 x^2 \cdot \left(-x^3 + 2x\right) dx = \pi \int_{\sqrt{6}}^0 \left(-x^5 + 2x^3\right) dx = \pi\left[-\tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^4\right]_{\sqrt{6}}^0$$

$$= 0 - \pi\left[-\tfrac{1}{6} \cdot 6^3 + \tfrac{1}{2} \cdot 6^2\right] = \pi(36 - 18) = 18\pi$$

Volumen des Trichters: (Info: Der Hochpunkt ist $C\left(\sqrt{2}\,|\,4\right)$)

$$V_{Tr} = \pi \int_{y_B}^{y_C} x^2 dy = \pi \int_{x_B}^{x_C} x^2 y'\,dy = ..so.. = \pi\left[-\tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^4\right]_0^{\sqrt{2}} = \pi\left[-\tfrac{1}{6} \cdot 8 + \tfrac{1}{2} \cdot 4\right] = \pi\left(2 - \tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{2}{3}\pi$$

(16) $f(x)=\ln(8x-x^2)$



K begrenzt mit den Koordinatenachsen und der Parallelen zur y-Achse durch den Hochpunkt eine Fläche.
Welchen Inhalt hat der Rotationskörper, der bei Drehung dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

Berechnung der Nullstellen:

Bed.: Argument = 2 d.h. $8x-x^2=1 \Leftrightarrow x^2-8x+1=0$

$$x_N=\frac{8\pm\sqrt{64-4}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{60}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{15}}{2}=4\pm\sqrt{15}\approx\begin{cases}0{,}127\\7{,}873\end{cases}$$

Berechnung des Hochpunktes:

$$f(x)=\ln(8x-x^2)\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{8-2x}{8x-x^2}.$$

Aus $f'(x_E)=0$ folgt $x_E=4$ mit $y_E=f(4)=\ln(32-16)=\ln 16$ also $H(4\,|\ln 16)$

Volumen des Rotationskörpers:

$$V=\pi\int_{y_N}^{y_H}x^2dy=\pi\int_{x_{N,1}}^{x_H}x^2y'dx=\pi\int_{0{,}127}^{4}x^2\cdot\frac{8-2x}{8x-x^2}dx=$$

So kommt man nicht weiter. Der Trick besteht darin, die Logarithmusfunktion so zu zerlegen:

$$f(x)=\ln(8x-x^2)=\ln x(8-x)=\ln x+\ln(8-x)$$

Dann erhält man eine günstigere Ableitung: $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{-1}{8-x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}$

Damit verläuft die Berechnung günstiger:

$$V=\pi\int_{y_N}^{y_H}x^2dy=\pi\int_{x_{N,1}}^{x_H}x^2y'dx=\pi\int_{0{,}127}^{4}x^2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}\right)dx=\pi\int_{0{,}127}^{4}\left(x+\frac{x^2}{x-8}\right)dx$$

Aufspaltung in zwei Integrale :

$$\int_{0{,}127}^{4}x\,dx=\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{0{,}127}^{4}\approx 8$$

$$\int_{0{,}127}^{4}\frac{x^2}{x-8}dx \qquad \text{Substitution:}\quad u=x-8\ \Rightarrow\ x=u+8\ \Rightarrow\ dx=du$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}u^2+16u+64\cdot\ln u\right]_{0{,}127}^{4}=\int_{0{,}127}^{4}\frac{(u+8)^2}{u}du=\int_{0{,}127}^{4}\frac{(u^2+16u+64)}{u}du=\int_{0{,}127}^{4}\left(u+16+\frac{64}{u}\right)du$$

$$=8+128+64\cdot\ln 4-\tfrac{1}{2}\cdot0{,}127^2-16\cdot0{,}127-64\cdot\ln 0{,}127\approx 354{,}75$$

Zusammengesetzt:

$$V\approx\pi\cdot(8+354{,}75)\approx 1140$$

Aufgabe 131:

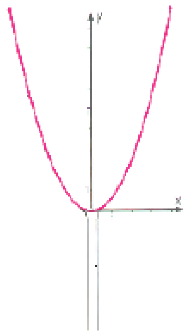
Der Umriss eines Sektkelches gehorcht der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2.$$

Bei welcher Höhe h beträgt das Volumen des Kelches 0,2l?

Lösung:

Das Volumen eines Glases



Der Umriss eines Sektkelches gehorcht der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2.$$

Bei welcher Höhe h beträgt das Volumen des Kelches 0,2l?

Lösung

Angelehnt an das Prinzip des Cavalieri ergibt sich:

$$\text{V} = \int_0^h A(y)dy$$

$$= \int_0^h \pi x^2 dy$$

(1) mit $y = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{\sqrt{6}}y$ folgt

$$= \int_0^h \pi \frac{4}{\sqrt{6}} y dy$$

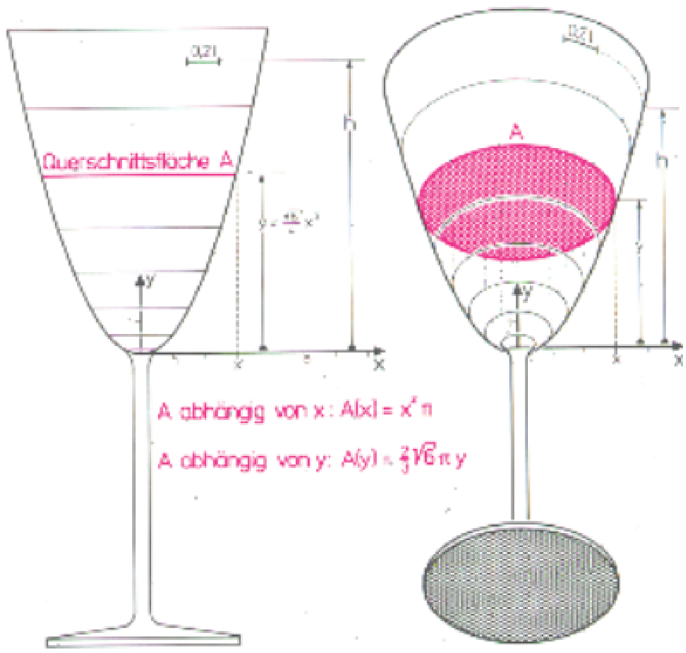
$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \int_0^h y dy$$

$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h$$

$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \left[\frac{1}{2}h^2 - 0\right]$$

$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{1}{2} h^2 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot h^2$$

Also: $\boxed{V(h) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot h^2}$



Da V=0,2l=200ml=200cm³ sein soll, ergibt sich:

$$200 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot h^2 \Leftrightarrow \mathbf{h} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 200} \approx \mathbf{7{,}2cm}$$

Zusammenfassung: Sei eine Funktion f(x) $x \in [a,b]$ gegeben.

y-Achsen-Rotation	x-Achsen-Rotation
$V(y) = \pi \int_{y_a = f(a)}^{y_b = f(b)} x^2 dy$	$V(x) = \pi \int_a^b y^2 dx$

Beachte: f(x) muss streng monoton sein, damit der Rotationskörper um die y-Achse berechnet werden kann (Umkehrfunktion bei (1)).

Aufgabe 132:

Berechnen Sie die folgenden Rotationsvolumina:

Aufgabe 1. Die Form einer Vase entsteht, wenn der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^2 + 5$ zwischen den Grenzen $x_1 = -8$ und $x_2 = 10$ um die x-Achse rotiert (Maße in cm).

(1) Berechnen Sie das Volumen der Vase.

(2) Bestimmen Sie die Gleichung, die man lösen muss, um auszurechnen, wie hoch der Wasserstand in der Vase ist, wenn diese mit 0.5Liter Wasser gefüllt wird?

Aufgabe 2. (Neu!!) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen, dass von der zwischen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 1 + 2x$ eingeschlossenen Fläche durch Rotation um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 3. Der Innenraum eines Trinkglases hat die Form eines Paraboloids. Die Randfunktion $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ verläuft durch die Punkte $P(0|0)$ und $Q(12|3)$.

(1) Zeigen Sie, dass die Parabel die Gleichung $f(x) = \frac{3}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{x}$ hat.

(2) Bestimmen Sie, wieviel Flüssigkeit das Glas fasst.

(3) Bestimmen Sie, in welcher Höhe die Markierung für 1/8 l angebracht werden muss.

Lösung:

Aufgabe 1. Die Form einer Vase entsteht, wenn der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^2+5$ zwischen den Grenzen $x_1 = -8$ und $x_2 = 10$ um die x-Achse rotiert (Maße in cm).

(1) Berechnen Sie das Volumen der Vase.

(2) Bestimmen Sie die Gleichung, die man lösen muss, um auszurechnen, wie hoch der Wasserstand in der Vase ist, wenn diese mit 0.5Liter Wasser gefüllt wird?

Lösung: Es gilt: $(f(x))^2 = \frac{1}{400}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 25$ und $\int(\frac{1}{400}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 25)dx = \frac{1}{2000}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + 25x$

(1) $\int_{-8}^{10}(\frac{1}{400} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + 25)dx = \frac{96048}{125} = 768.384$ also ca. 768ml

(2) $\int_{-8}^{h}(\frac{1}{400} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + 25)dx = \frac{3\,h^5+1000\,h^3+150000\,h}{6000} + \frac{113144}{375} = 500$

Aufgabe 2. (Neu!!) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen, dass von der zwischen $f(x) = x^2+1$ und $g(x) = 1 + 2x$ eingeschlossenen Fläche durch Rotation um die x-Achse entsteht.

Lösung: Schnittpunkte: $x^2 = 2x$ also $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

$\int (1+2\cdot x)^2\,dx - \int \left(x^2+1\right)^2 dx = -\frac{x^5}{5} + \frac{2\,x^3}{3} + 2\,x^2$

$\int_0^2 (1+2\cdot x)^2\,dx - \int_0^2 \left(x^2+1\right)^2 dx = \frac{104}{15}$

Aufgabe 3. Der Innenraum eines Trinkglases hat die Form eines Paraboloids. Die Randfunktion $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ verläuft durch die Punkte $P(0|0)$ und $Q(12|3)$.

(1) Zeigen Sie, dass die Parabel die Gleichung $f(x) = \frac{3}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{x}$ hat.

(2) Bestimmen Sie, wieviel Flüssigkeit das Glas fasst.

(3) Bestimmen Sie, in welcher Höhe die Markierung für 1/8 l angebracht werden muss.

Lösung: zu

(1) Einsetzen von Q in die Gleichung $f(x) = a\sqrt{x}$ führt zu $3 = a \cdot \sqrt{12}$ und damit $a = \frac{3}{\sqrt{12}}$.

(2) $\pi \cdot \int_0^{12} \left(\frac{3}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{x}\right)^2 dx = 54\,\pi \approx 169,6$ (ml)

(3) Das Volumen bis zur Höhe h ist $V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{3}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{3\,\pi\,h^2}{8}$ (ml) und damit $\frac{3\,\pi\,h^2}{8} = 125 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1000}{3\pi}} \approx 10,0$ (cm)

Aufgabe 133:

Das zwischen dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$ und der Parabel $y = \frac{1}{6}x^2$ gelegene Flächenstück erzeugt bei Drehung um die y-Achse einen Rotationskörper. Wie groß ist das Rotationsvolumen V_y?

Lösung:

Wir berechnen zunächst die benötigten Kurvenschnittpunkte P_1 und P_2:

$$y = \frac{1}{6}x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 6y \quad \text{(in Kreisgleichung einsetzen)} \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 6y + y^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 6y - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 + 16} = -3 \pm 5 \quad \Rightarrow$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -8 \quad \text{(der zweite Wert ist eine Scheinlösung und scheidet somit aus)}$$

Zugehörige x-Werte: $x^2 = 6y = 6 \cdot 2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad P_{1/2} = (\pm 2\sqrt{3};\, 2)$

Aus Bild C-11 entnehmen wir, dass der Rotationskörper aus zwei Teilen besteht. Diese Teilkörper entstehen durch Drehung der *hell-* bzw. *dunkelgrau* unterlegten Flächenstücke um die y-Achse:

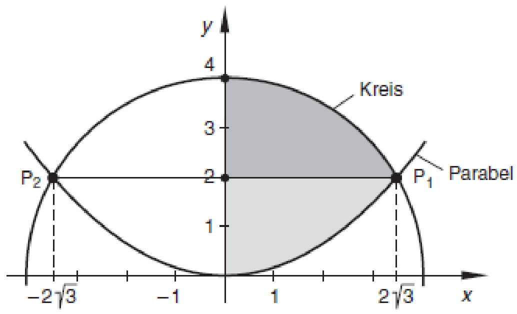


Bild C-11

V_1: Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung der Parabel $x^2 = 6y$, $0 \le y \le 2$ um die y-Achse entsteht (*hellgraue* Unterlegung im Bild)

$$V_1 = \pi \cdot \int_c^d x^2\, dy = \pi \cdot \int_0^2 6y\, dy = \pi \left[3y^2\right]_0^2 = \pi(12 - 0) = 12\pi$$

V_2: Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Kreises $x^2 + y^2 = 16$, $2 \le y \le 4$ um die y-Achse entsteht (*dunkelgraue* Unterlegung im Bild)

$$V_2 = \pi \cdot \int_c^d x^2\, dy = \pi \cdot \int_2^4 (16 - y^2)\, dy = \pi\left[16y - \frac{1}{3}y^3\right]_2^4 = \pi\left(64 - \frac{64}{3} - 32 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(32 - \frac{56}{3}\right) = \pi\,\frac{96 - 56}{3} = \frac{40}{3}\pi$$

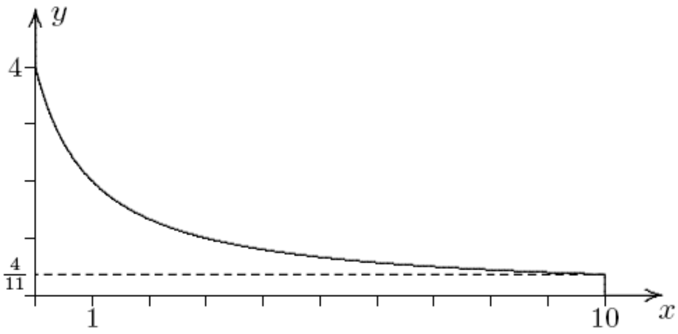
Gesamtvolumen V_y: $V_y = V_1 + V_2 = 12\pi + \frac{40}{3}\pi = \frac{36\pi + 40\pi}{3} = \frac{76}{3}\pi$

Aufgabe 134:

Bestimmen Sie die beiden Rotationsvolumen des Linienzuges der Funktion im Definitionsbereich in dem angegebenen Intervall, die entstehen, wenn der Linienzug einmal um die x-Achse und einmal um die y-Achse rotiert.

$$f(x) = \frac{4}{x+1}; \; \mathbb{D} = [0{,}10]$$

Lösung:



$$V_x = \pi \cdot \int_0^{10} f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{10} \left(\frac{4}{x+1}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{10} \frac{16}{(x+1)^2} dx$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{16}{(x+1)}\right]_0^{10} = \pi \cdot \left(-\frac{16}{11} + 16\right) = 45{,}70$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{\frac{4}{11}}^{4} x^2 dy + v_{zyl} = \pi \cdot \int_{\frac{4}{11}}^{4} \left(\frac{4}{y} - 1\right)^2 dy + \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$= \pi \cdot \int_{\frac{4}{11}}^{4} \left(\frac{16}{y^2} - \frac{8}{y} + 1\right) \; dy + \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{16}{y} - 8 \cdot \ln{(y)} + y\right]_{\frac{4}{11}}^{4} + \pi \cdot (10)^2 \cdot \frac{4}{11}$$

$$= \pi \cdot \left(-\frac{16}{4} - 8 \cdot \ln(4) + 4 + \frac{16}{\frac{4}{11}} + 8 \cdot \ln\left(\frac{4}{11}\right) - \frac{4}{11}\right) + \frac{400}{11}\pi = 76{,}82 + 114{,}24$$

$$V_y = 191{,}06$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 135:

Berechnen Sie den exakten Inhalt des Flächenstücks zwischen den Geraden

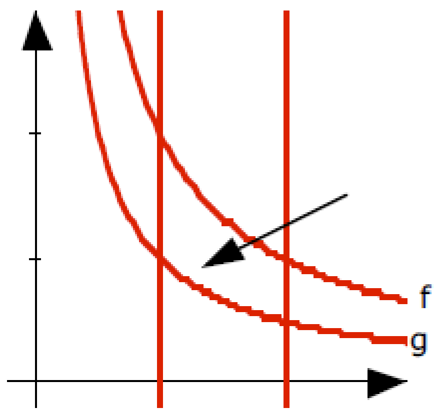
$x = 1$ und $x = 2$

und den Kurven zu

$f(x) = \frac{2}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$

Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers (exakt), der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

Lösung:



$$A = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[\ln x\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \mathbf{\ln 2}$$

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}\right) dx = \pi \int_1^2 \left(3x^{-2}\right) dx = \pi \left[-3x^{-1}\right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{-3}{x}\right]_1^2 = \pi\left(-\frac{3}{2} + 3\right) = \mathbf{\frac{3\pi}{2}}$$

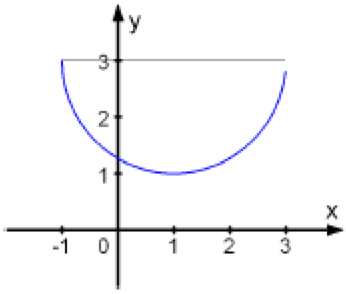
Diverse Berechnungen mit dem Integral

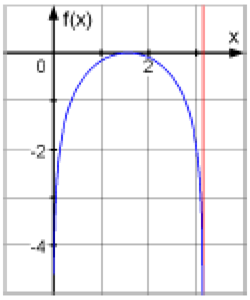
Aufgabe 136:

Berechnen Sie folgende Bogenlängen:

(7) $f(x) = 3 - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ Bogenlänge von – 1 bis 3

(8) Die Funktion $f(x) = \ln(\sin x)$ ist für das Intervall $\mathbf{D} =]0;\pi[$ dargestellt.
Gesucht ist die Bogenlänge von $\frac{1}{3}\pi$ bis $\frac{2}{3}\pi$.

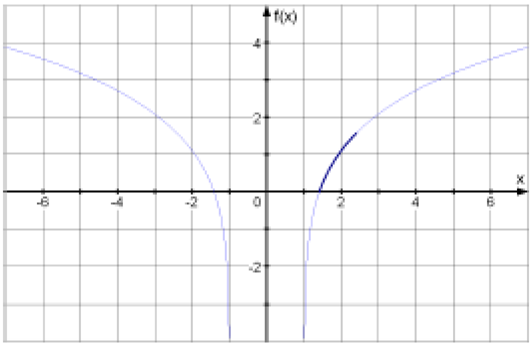


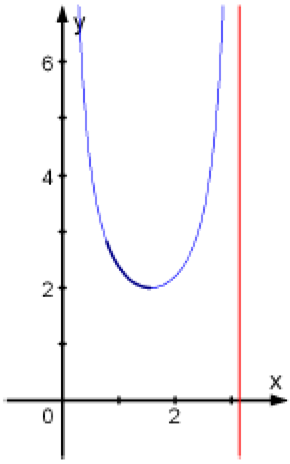


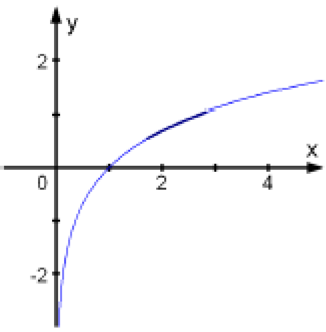
(9) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ Gesucht ist die Länge des Bogens von $\sqrt{2}$ bis $\sqrt{2} + 1$.

(10) $f(x) = \dfrac{2}{\sin x}$ Gesucht ist die Länge des Bogens von $\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$.

(11) $f(x) = \ln x$ Gesucht ist die Bogenlänge von $x = \sqrt{3}$ bis $x = 2\sqrt{2}$

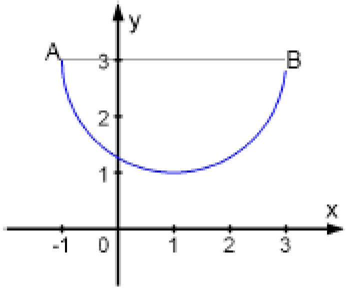






Lösung:

(7) $f(x)=3-\sqrt{-x^2+2x+3}$



---

1. Hätten Sie erkannt, daß hier eine Halbkreis-Funktion vorliegt ?
Das Kennzeichen ist übrigens folgende Form
$y=f(x)=a\pm\sqrt{-x^2+bx+c}$!
Da vor der Wurzel ein Minuszeichen steht, ist das Schaubild der untere Halbkreis.

So findet man zur üblichen Kreisgleichung:

1. $y-3=-\sqrt{-x^2+2x+3}$
2. $(y-3)^2=-x^2+2x+3$
3. $(x^2-2x+\ ?\ )+(y-3)^2=3+?$ Hier wird quadratische Ergänzung vorgenommen!
4. $(x^2-1)^2+(y-3)^2=3+1$

also $(x^2-1)^2+(y-3)^2=4$ Mittelpunkt $M(1|3)$, $r=2$

allgemein: $(x-x_M)^2+(y-y_m)^2=r^2$

Nun könnten wir die Bogenlänge als halben Kreisumfang berechnen:
$b=\pi r=\pi\cdot 2=2\pi\approx 6{,}28$

---

2. Wir wollen jedoch diese Bogenlänge mittels Integral berechnen:

Dazu benötigen wir $f'(x)=-\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

$$\widehat{AB}=L_{-1}(3)=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{-x^2+2x+3}}dx=\int_{-1}^{3}\sqrt{\frac{-x^2+2x+3+x^2-2x+1}{-x^2+2x+3}}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}\sqrt{\frac{4}{-x^2+2x+3}}dx=\int_{-1}^{3}\frac{2}{\sqrt{-(x^2-2x)+3}}dx=\int_{-1}^{3}\frac{2}{\sqrt{-(x^2-2x+1)+3+1}}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}\frac{2}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx=\int_{-1}^{3}\frac{2}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}dx=\int_{-1}^{3}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}dx$$

Substitution: $u=\frac{x-1}{2}\Rightarrow du=\frac{1}{2}dx\Rightarrow dx=2\cdot du$

$$\widehat{AB}=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}du=2\cdot\left[\arcsin u\right]_{-1}^{1}=2\cdot\left[\arcsin 1-\arcsin(-1)\right]=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\cdot\pi$$

Erklärungen dazu:

Zunächst einmal kann man das Integral nur berechnen, wenn man die Umkehrfunktion der Sinusfunktion kennt:

$$f(x) = \arcsin x \quad \text{hat die Ableitung} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Daher gilt} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Um das Integral $\int \frac{4}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$ auf diese Form zubringen, muß im Nenner eine quadratische Ergänzung durchgeführt werden:

$$-x^2+2x+3 = -\left(x^2-2x\right)+3 = -\left(x^2-2x+1\right)+3+1.$$

Das Quadrat +1 wird in der Klammer ergänzt, zusammen mit dem Faktor – 1 davor wird daraus – 1. Zum Ausgleich wird am Ende + 1 angefügt.

Nun sieht der Radikand so aus:

$$-(x-1)^2+4 \quad \text{bzw.} \quad 4-(x-1)^2.$$

Da anstelle der Zahl 4 die 1 stehen muß, klammert man 4 aus:

$$\text{Radikand} = 4\left(1-\frac{(x-1)^2}{4}\right) = 4\left(1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)$$

Der Rest ist oben zu sehen: Der Bruch wird durch u substituiert, und dann endlich hat man das Integral, das zur Arcus-Sinus-Funktion führt.

Schließlich gilt:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{denn} \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

und

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{denn} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Damit erhält man das Ergebnis.

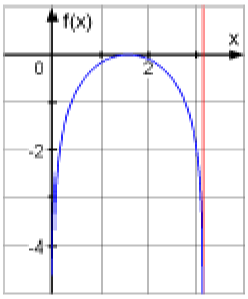
$$\overset{\frown}{AB} = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\cdot\left[\arcsin u\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right] = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\cdot\pi$$

Merke: Die Bogenlänge jeder Kreisfunktion ist auf diese Weise berechenbar!

Weitere Übung: $y = f(x) = 1+\sqrt{32-x^2-4x}$ ist eine Funktion, die als Graphen den oberen Halbkreis um M (- 2 I 1) mit $r = 6$ hat. Die Bogenlänge des Viertelskreises von – 2 bis 4 ist $b = \frac{1}{4}\cdot 2\pi r = \frac{1}{2}\pi r = 3\pi$.

Dasselbe sollten Sie mit einer Integralrechnung erhalten.

(8) Die Funktion $f(x)=\ln(\sin x)$ ist für das Intervall $\mathbf{D}=]0;\pi[$ dargestellt.
Gesucht ist die Bogenlänge von $\frac{1}{3}\pi$ bis $\frac{2}{3}\pi$.



Hier ist ein ganzes Stück **Vorarbeit** zu leisten.

1. Wir benötigen die Ableitung der Funktion:

$$f'(x)=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

2. Dasselbe für diese Funktion: $g(x)=\ln(\tan x)$

$$g'(x)=\frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'=\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Umformungsregel $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$

d.h. $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ wird daraus: $g'(x)=\frac{2}{\sin 2x}$.

Damit kennen wir eine neue Stammfunktion:

$$\int\frac{2}{\sin 2x}dx=\ln(\tan x)+C$$

Nun führen wir noch eine Substitution durch: $z=2x \Rightarrow dz=2\cdot dx$
Damit folgt:

$$\int\frac{1}{\sin z}dz=\ln\left(\tan\frac{z}{2}\right)+C$$

Wir nennen nun einfach z in x um und erhalten diese fundamentale Integral:

$$\boxed{\int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C} \quad (*)$$

Nun können wir die gesuchte Bogenlänge berechnen.

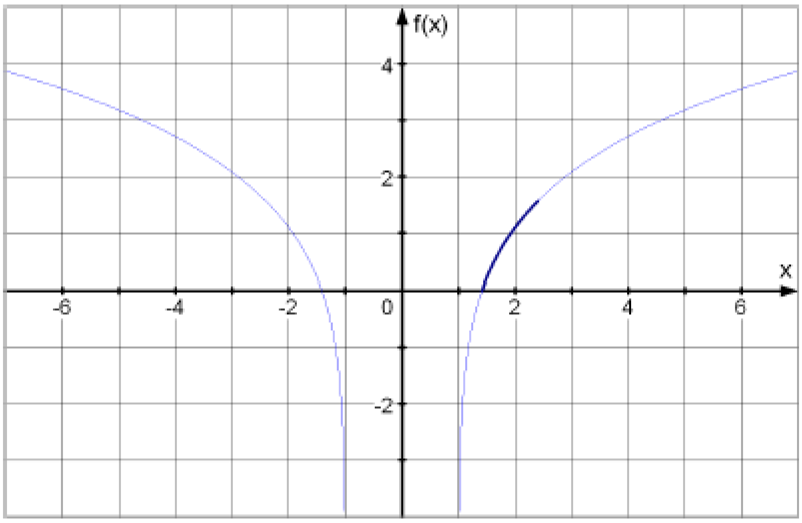
$$\overset{\frown}{AB}=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}dx=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}dx$$

$$=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}dx=\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{1}{\sin x}dx=\left[\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]_{\pi/3}^{2\pi/3}$$

$$=\ln\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)-\ln\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)=\ln\sqrt{3}-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=\ln\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\ln 3$$

An diesem Beispiel kann man erkennen, wie man wohl vorgehen sollte: Man berechnet das Bogenlängen-Integral bis man auf $\int\frac{1}{\sin x}dx$ kommt. Da dieses Integral normalerweise niemand kennt und auch die Integrationsmethode zunächst nicht klar ist, schaut man in einem Tabellenbuch nach und entnimmt dort die Formel (*). Dann kann man zu Ende rechnen. Hier wurde eben zusätzlich die Herleitung dieser Formel gezeigt.

(9) $f(x)=\ln(x^2-1)$ Gesucht ist die Länge des Bogens von $\sqrt{2}$ bis $\sqrt{2}+1$.



Wir benötigen die Ableitung: $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ und erhalten damit

$$\overset{\frown}{AB}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\sqrt{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1+4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^2}}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$$

Jetzt wird es richtig schwierig, denn wir müssen jetzt eine trickreiche Umformung dieses Bruches vornehmen.

1. Schritt: Zuerst ist Grad Zähler = Grad Nenner, daher zerlegen wir durch Polynomdivision

$$\begin{array}{l}(x^2+1):(x^2-1)=1\\ \underline{-(x^2-1)}\\ \quad 2\end{array}\qquad\Rightarrow\quad \frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}.$$

Dies geht trickreich auch so:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+2}{x^2-1}=\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$$

2. Schritt: Weil der Nenner x^2-1 in dieses Produkt zerlegbar ist: $(x+1)(x-1)$, kann man den Bruch $\frac{2}{x^2-1}$ in eine Summe dieser Form $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$ zerlegen.

Man nennt diese Methode **Partialbruchzerlegung**. Dazu formt man so um:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(B-A)}{(x+1)(x-1)}$$

Dieser Bruch soll gleich $\frac{2}{x^2-1}$ sein. Also vergleichen wir die Zähler und folgern:

$$A+B=0 \quad \text{und} \quad B-A=2$$

Aus der ersten Gleichung folgt A = - B. Dies setzen wir in die zweite ein, dann folgt

$$B+B=2 \quad \text{also} \quad 2B=2 \quad \text{d.h.} \quad B=1.$$

Also wird A = - 1.

Zwischenergebnis: $$\frac{2}{x^2-1}=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

(Wer dieser Methode – die man Partialbruchzerlegung nennt – nicht traut, bringe die rechte Seite auf den Hauptnenner und erhält damit die Bestätigung.

Nun haben wir insgesamt unseren Term so zerlegt:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

Damit läßt sich unser schwieriges Integral nun zerlegen und wir können mit der Integration fortfahren:

$$\widehat{AB}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\frac{x^2+1}{x^2-1}dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\left(1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}1\,dx-\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{x+1}dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{x-1}dx$$

Berechnung der Teilintegrale:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}1\,dx=[x]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{x+1}dx \qquad \text{Substitution: } u=x+1 \Rightarrow du=dx \Rightarrow dx=du$$

$$=\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}+2}\frac{1}{u}du=[\ln u]_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}+2}=\ln\left(\sqrt{2}+2\right)-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{x-1}dx \qquad \text{Substitution: } v=x-1 \Rightarrow dv=dx \Rightarrow dx=dv$$

$$=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}du=[\ln u]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}}=\ln\left(\sqrt{2}\right)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

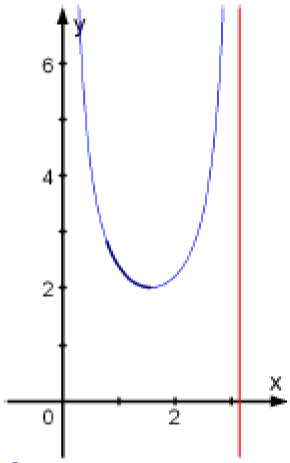
Zusammengesetzt:

$$\widehat{AB}=1-\ln\left(\sqrt{2}+2\right)+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\ln\left(\sqrt{2}\right)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\widehat{AB}=1+\ln\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 1{,}53$$

Die Umformung des großes Bruches geschieht durch Erweitern mit $\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(10) $f(x)=\dfrac{2}{\sin x}$ Bogen von $\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$.



Ableitung:

$$f(x)=2\cdot\sin^{-1}x \;\Rightarrow\; f'(x)=-2\sin^{-2}x\cdot\cos x=-2\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Bogenlänge:

$$\overset{\frown}{AB}=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1+4\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}}\,dx$$

$$\overset{\frown}{AB}=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\frac{\sin^4 x+4\cos^2 x}{\sin^4 x}}\,dx$$

Jetzt kommt der erste Trick: Wir ersetzen $\cos^2 x=1-\sin^2 x$:

$$=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\frac{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x}}\,dx=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\frac{\sin^4 x-4\sin^2 x+4}{\sin^4 x}}\,dx$$

Zweiter Trick:

Im Zähler des Bruches steht $\sin^4 x-4\sin^2 x+4=\left(\sin^2 x-2\right)^2$

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\frac{\left(\sin^2 x-2\right)^2}{\sin^4 x}}\,dx=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\left|\sin^2 x-2\right|}{\sin^2 x}\,dx=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

denn $\sin^2 x<2$ also ist $\sin^2 x-2<0$.

3. Trick: Jetzt können wir in einer Integrationstabelle nachsehen und finden dort:

$$\boxed{\int\frac{1}{\sin^2 x}=-\cot x+C=-\frac{\cos x}{\sin x}+C}$$

denn die Funktion **Cotangens** ist so definiert: (ctg x ist die alte Schreibweise)

$$g(x)=\cot x=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$$

also folgt: $$g'(x)=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Damit kommen wir zum Ende der Bogenlängenberechnung:

$$\overset{\frown}{AB}==2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2 x}dx-[x]_{\pi/4}^{\pi/2}=\left[2\frac{\cos x}{\sin x}-x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=2\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}-2\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

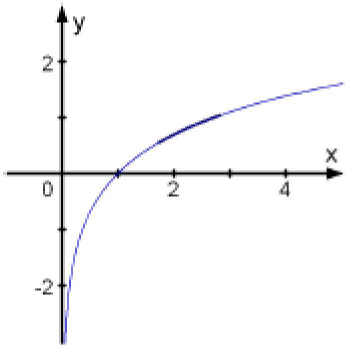
$$=2\cdot\frac{0}{1}-2\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{4}\approx 1{,}2$$

(11) $f(x) = \ln x$ von $x = \sqrt{3}$ bis $x = 2\sqrt{2}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

Bogenlänge:

$$\widehat{AB} = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx$$



Substitution $z = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow z^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = z^2-1$

$\Rightarrow 2x\,dx = 2z\,dz \Rightarrow x \cdot dx = z \cdot dz$

und $dx = \frac{z}{x}dz = \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}dz$

$$\widehat{AB} = \int_2^3 \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\,dz = \int_2^3 \frac{z^2}{z^2-1}\,dz = \int_2^3 \frac{z^2-1+1}{z^2-1}\,dz = \int_2^3 \left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \Leftrightarrow \frac{1}{z^2-1} = \frac{A(z-1)+B(z+1)}{(z+1)(z-1)} = \frac{(A+B)z+(B-A)}{(z+1)(z-1)}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$A + B = 0$ d.h $A = -B$

und $B - A = 1$ d.h. $2B = 1$ also $B = \frac{1}{2}$; $A = -\frac{1}{2}$.

Folglich ist $\frac{1}{z^2-1} = -\frac{\frac{1}{2}}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1}$.

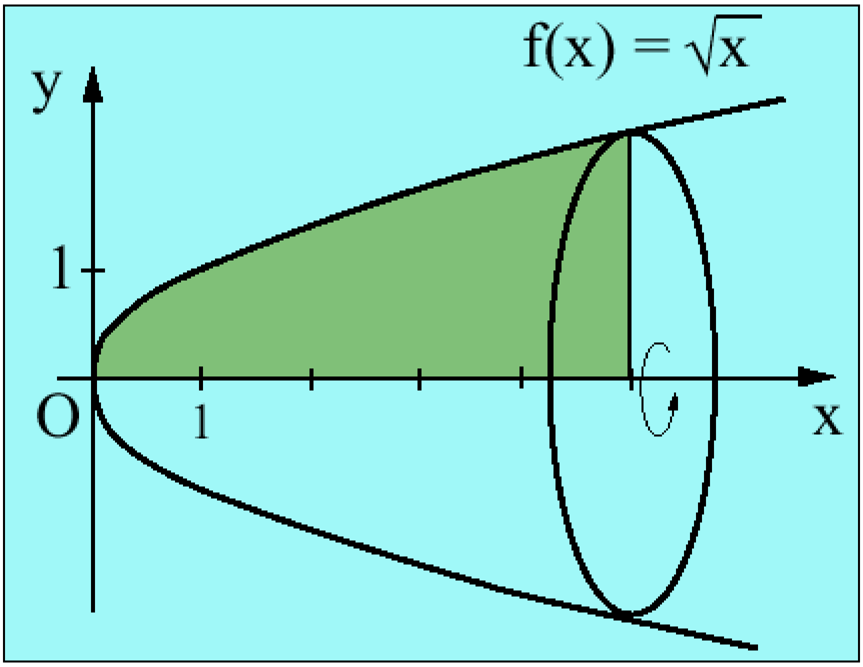
$$\int_2^3 \left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz = \int_2^3 \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{z+1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right)dz = \int_2^3 1\,dz - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{z+1}dz + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{z-1}dz$$

Substitution: $u = z+1 \Rightarrow du = dz$, $v = z-1 \Rightarrow dv = dz$

$$\widehat{AB} = [x]_2^3 - \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{1}{u}du + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{v}dv = 1 - \frac{1}{2}[\ln u]_3^4 + \frac{1}{2}[\ln v]_1^2 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3}{2} \approx 1{,}2$$

Aufgabe 137:

Mantelfläche des Rotationsparaboloids, der durch Drehung des Graphen der Wurzelfunktion um die x-Achse im Intervall [0 ; 5] entsteht:



Lösung:

Es gilt:

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow [f'(x)]^2=\frac{1}{4x}$$

Durch Einsetzen in die Formel für den Mantelflächeninhalt ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}A_{Mantel}&=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\\&=2\pi\int_0^5\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx\\&=2\pi\int_0^5\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx\end{aligned}$$

Da nun folgende Beziehung gilt:

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt sich in der Berechnungsformel für den Mantelflächeninhalt A_{Mantel} für den Rotationskörper:

$$\begin{aligned}A_{Mantel}&=2\pi\int_0^5\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}dx\\&=2\pi\cdot\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5\\&=\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\left(5+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(0+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\\&=\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\left(\frac{21}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}\right)\approx 49{,}85\,FE\end{aligned}$$

Also ist die Mantelfläche des Rotationsparaboloids etwa 49,85 Flächeneinheiten groß.

Aufgabe 138:

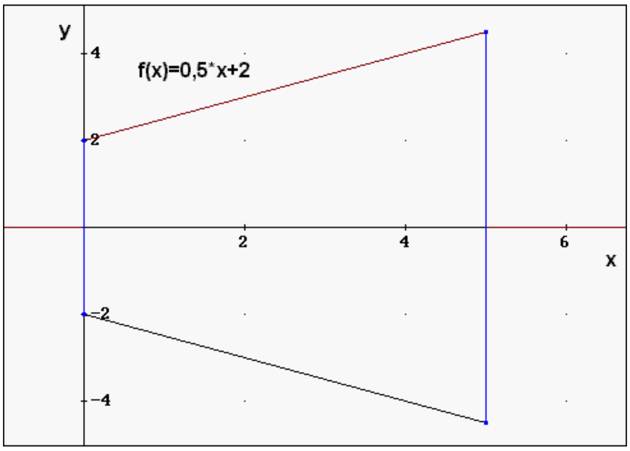
Die Gerade mit der Gleichung f(x)=y=0,5x+2 erzeugt durch Rotation um die x-Achse einen Kegelstumpf.

a) Berechnen Sie das Volumen des Kegelstumpfs!

b) Berechnen Sie die Mantelfläche des Kegelstumpfs!

Lösung:

a)



$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + x^2 + 4x\right]_0^5 = \pi \cdot \left[\frac{125}{12} + 25 + 20 - 0\right]$$

$$= \frac{665}{12} \cdot \pi \approx 55{,}42 \cdot \pi \approx 174{,}1 \text{ VE}$$

b)

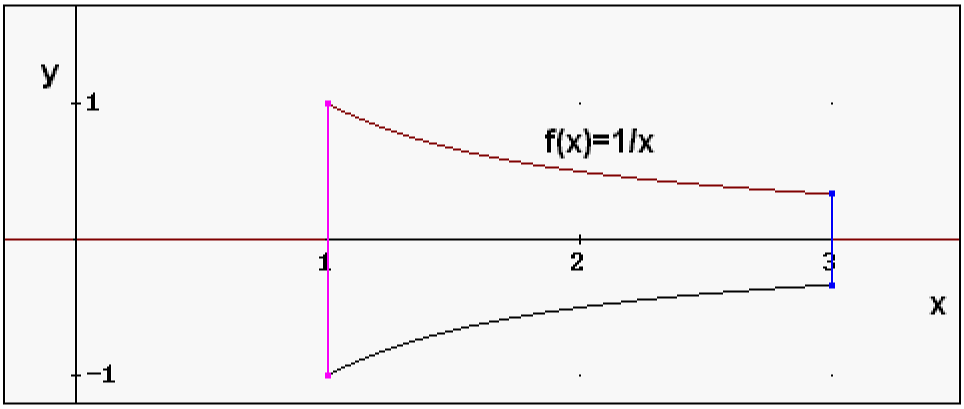
$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{2}x+2\right) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$
$$= 2\pi \int_0^5 \left(\frac{1}{2}x+2\right) \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}\,dx = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$$
$$= \sqrt{5} \cdot \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{2}x+2\right)dx = \sqrt{5} \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{4}x^2+2x\right]_0^5$$
$$= \sqrt{5} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 25+10-0\right) = \sqrt{5} \cdot \pi \cdot \frac{65}{4} \approx 114{,}15\,\text{FE}$$

Aufgabe 139:

a) Berechnen Sie das Volumen des trichterförmigen Körpers, der durch Drehung der Hyperbel zu f(x)=1/x im Intervall [1; 3] entsteht!

b) Berechnen Sie die Mantelfläche des trichterförmigen Körpers.

Lösung:



a)

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \cdot \int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \pi \cdot \left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \frac{2}{3}\pi\ \text{VE}$$

b)

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\, dx = 2\pi \cdot \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^3 \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx$$

Das vorkommende Integral

$$\int \frac{\sqrt{(x^4+1)}}{x^3}\, dx$$

Das vorliegende Integral lässt sich aus einer Tafel herauslesen.

$$\int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx = \frac{\ln\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)}{2} - \frac{\sqrt{x^4+1}}{2 \cdot x^2} + C$$

Daher ergibt sich für die gesuchte Mantelfläche M:

$$M = 2\pi \cdot \int_1^3 \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{\ln\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)}{2} - \frac{\sqrt{x^4+1}}{2 \cdot x^2}\right]_1^3$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{\ln\left(\sqrt{82}+9\right)}{2} - \frac{\sqrt{82}}{18} - \left(\frac{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \approx 6{,}2\ \text{FE}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

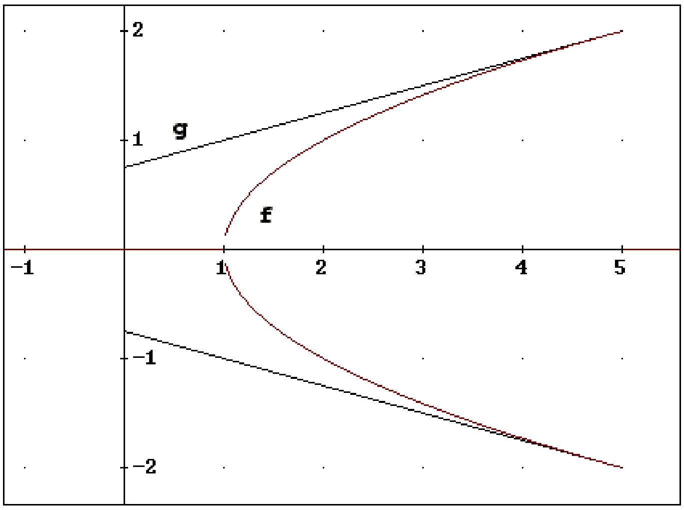
Aufgabe 140:

Volumen einer Designer-Glasschale

Um eine Designer-Glasschale in großen Mengen zu produzieren, soll der Materialverbrauch pro Schale ermittelt werden. Die Glasschale lässt sich als Rotationskörper um die x-Achse mit den Randfunktionen f und g beschreiben:

$f(x) = \sqrt{x-1}$ im Intervall $[1\,;\,5]$

$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ im Intervall $[0\,;\,5]$



Bestimmen Sie das Volumen der Designer-Glasschale!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{Gerade}} - V_{\text{Wurzel}} \\
&= \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)^2 dx - \pi \cdot \int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx \\
&= \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{9}{16}\right) dx - \pi \cdot \int_1^5 (x-1)\, dx \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{48}x^3 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{9}{16}x\right]_0^5 - \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^5 \\
&= \pi \cdot \left(\frac{125}{48} + \frac{75}{16} + \frac{45}{16} - 0\right) - \pi \cdot \left(\frac{25}{2} - 5 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{125}{48} + \frac{225}{48} + \frac{135}{48}\right) - \pi \cdot \left(\frac{25}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 1\right) \\
&= \pi \cdot \frac{485}{48} - \pi \cdot 8 = \pi \cdot \left(\frac{485}{48} - \frac{384}{48}\right) = \frac{101}{48} \cdot \pi \approx 6{,}61
\end{aligned}
$$

Anwendungsaufgaben zur Integralrechnung

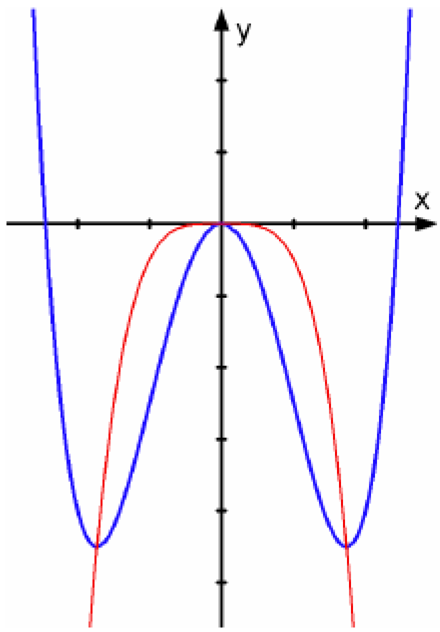
Aufgabe 141:

$$f_t(x) = \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{für} \quad t \in \mathbf{R}^+$$

Information: Tiefpunkte $T_{1,2}\left(\pm t\sqrt{3} \mid -\frac{9}{2}t^2 \right)$.

Die Kurve K_t begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechne deren Inhalt A.
In welchem Verhältnis teilt die Ortskurve C der Tiefpunkte diese Fläche ? (Exaktes Ergebnis).

Lösung:



(1) $f_t(x) = \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

a) <u>Nullstellen</u>: $f(x_N) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \quad | \cdot 4t^2 \Leftrightarrow x^4 - 6t^2x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 6t^2) = 0 \qquad N_1(0|0),\ N_{2,3} = (\pm t\sqrt{6}\,|\,0)$

<u>Ortskurve der Tiefpunkte:</u>

Es gilt $x_T = \pm t\sqrt{3}$ also ist $t = \pm\frac{x_T}{\sqrt{3}}$

In $y_T = -\frac{9}{4}t^2$ eingesetzt: $y_T = -\frac{9}{4}\left(\pm\frac{x_T}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{9}{4}\cdot\frac{x_T{}^2}{3} = -\frac{3}{4}x_T{}^2$

Ergebnis: Die Tiefpunkte liegen auf der Kurve C: $y = -\frac{3}{4}x^2$

Einschränkung: Für t werden nur die Werte $t \in \mathbb{R}^+$ eingesetzt. Daher Haben die Tiefpunkte nur positive oder negative Koordinaten. 0 kommt nicht vor. Für die Ortskurve gilt also: C: $y = -\frac{3}{4}x^2$ für $x \neq 0$.

<u>Fläche zwischen K_t und der x-Achse</u>:

$$A = 2\int_{t\sqrt{6}}^{0}\left(\frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)dx = 2\left[\frac{1}{20t^2}x^5 - \frac{1}{2}x^3\right]_{t\sqrt{6}}^{0} = -2\left(\frac{36\sqrt{6}\cdot t^5}{20t^2} - \frac{6\sqrt{6}t^3}{2}\right)$$

$$= -2t^3\sqrt{6}\left(\frac{9}{5} - 3\right) = 2t^3\sqrt{6}\cdot\frac{15-9}{5} = \frac{12}{5}\sqrt{6}t^3$$

<u>Teilflächen:</u>

$$A_1 = \int_0^{t\sqrt{3}}\left[\left(-\frac{3}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)\right]dx = \int_0^{t\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{4t^2}x^4 + \frac{3}{4}x^2\right]dx$$

$$= \left[-\frac{x^5}{20t^2} + \frac{x^3}{4}\right]_0^{t\sqrt{3}} = -\frac{t^5 9\sqrt{3}}{20t^2} + \frac{t^3 3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}t^2 - \frac{9}{20}\sqrt{3}t^3 = \frac{3}{10}\sqrt{3}t^3$$

$$A_2 = A - A_1 = \frac{6}{5}\sqrt{6}t^3 - \frac{3}{10}\sqrt{3}t^3 = \frac{3}{10}\sqrt{3}t^3\left(4\sqrt{2} - 1\right)$$

Teilverhältnis dieser Flächen:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3\sqrt{3}t^3}{10}\cdot\frac{10}{3\sqrt{3}t^3\left(4\sqrt{2}-1\right)} = \frac{1}{4\sqrt{2}-1}$$

Dieses Teilverhältnis ist unabhängig von t !

Aufgabe 142:

$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$

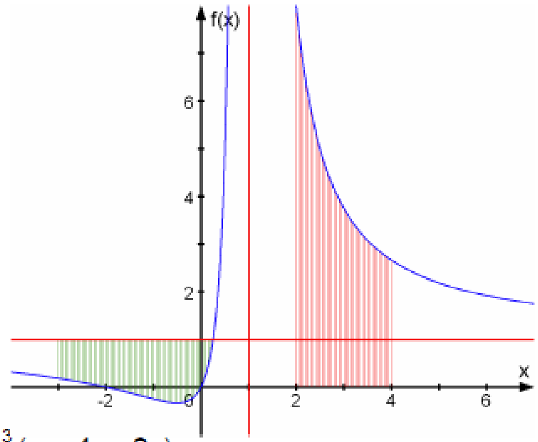
Skizziere das Schaubild samt beiden Asymptoten.

a) K und die x-Achse und die Geraden x = 2 und x = 4 begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A_1 .

b) Welche Fläche A_2 schließt K mit der x-Achse ein ?

c) K, die waagerechte Asymptote und die Gerade x = - 3 begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A_3 .

Lösung:



(2) $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$

a) $A_1 = \int_2^4 \frac{x^2+2x}{(x-1)^2} dx =$

Substitution:

$u = x-1 \Rightarrow x = u+1 \Rightarrow dx = du$

$$A_1 = \int_1^3 \frac{(u+1)^2+2(u+1)}{u^2} du = \int_1^3 \frac{u^2+4u+3}{u^2} du = \int_1^3 \left(1+\frac{4}{u}+\frac{3}{u^2}\right) dx =$$

$$A_1 = \left[u + 4 \cdot \ln u - \frac{3}{u}\right]_1^3 = (3+4\cdot\ln 3 - 1) - (1-3) = 4 + 4\cdot\ln 3$$

b) Nullstellen sind bei 0 und -2. Die Fläche liegt unter der x-Achse:

$$A_2 = \int_0^{-2} f(x)dx = \left[u + 4\cdot\ln|u| - \frac{3}{u}\right]_{-1}^{-3} = [-3+4\cdot\ln 3+1] - [-1+3] = 4\cdot\ln 3 - 4$$

c) Polynomdivisdion:

$$\begin{array}{l} \left(x^2+2x\right)\left(x^2-2x+1\right)=1 \\ \underline{-\left(x^2-2x+1\right)} \\ \quad 4x-1 \end{array} \qquad \Rightarrow\ f(x)=1+\frac{4x-1}{(x-1)^2}$$

$$A_3=\int_{-3}^{1/4}\left[1-\left(1+\frac{4x-1}{(x-1)^2}\right)\right]dx=-\int_{-3}^{1/4}\frac{4x-1}{(x-1)^2}dx= \quad \text{Substitution siehe oben.}$$

$$A_3=-\int_{-4}^{-3/4}\frac{4(u+1)-1}{u^2}du=-\int_{-4}^{-3/4}\frac{4u+3}{u^2}du=\int_{-3/4}^{-4}\left[\frac{4}{u}+\frac{3}{u^2}\right]dx=\left[4\cdot\ln|u|-\frac{3}{u}\right]_{-\frac{3}{4}}^{-4}=$$

$$A_3=\left[4\cdot\ln 4+\frac{3}{4}\right]-\left[4\cdot\ln\frac{3}{4}+4\right]=4\cdot\ln\frac{4}{\frac{3}{4}}-\frac{13}{4}=4\cdot\ln\frac{16}{3}-\frac{13}{4}$$

Für A_3 ist auch dieser Ansatz möglich:

$$A_3=\int_{-4}^{1/4}\left(1-\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}\right)dx=\int_{-4}^{1/4}\frac{(x-1)^2-\left(x^2+2x\right)}{(x-1)^2}dx=\int_{-4}^{1/4}\frac{-4x+1}{(x-1)^2}dx \quad \text{usw.}$$

Aufgabe 143:

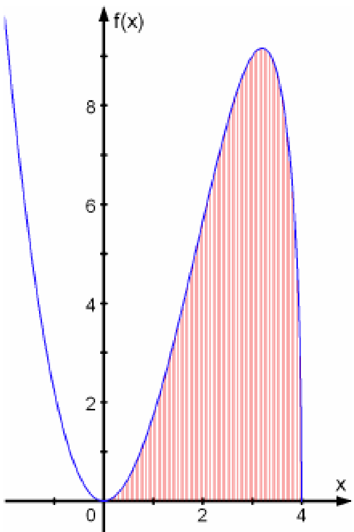
(3) $f(x)=x^2\sqrt{4-x}$ Skizziere das Schaubild der Kurve.

a) Die Kurve und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt A.

b) Welchen Inhalt erhält der Köper, der bei Drehung dieser Achse um die x-Achse entsteht ?

Lösung:

(3) $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$



Definitionsbereich: $4 - x \geq 0$ also:

$x \leq 4 \Rightarrow \mathbf{D} =]-\infty; 4]$

a) $A = \int_0^4 x^2 \cdot \sqrt{4-x}\,dx$

Substitution:

$u = \sqrt{4-x} \Rightarrow u^2 = 4-x \Rightarrow x = 4-u^2 \Rightarrow dx = -2u \cdot du$

$$A = -\int_2^0 (4-u^2)^2 \cdot 2u^2\,du = \int_0^2 (16-8u^2+u^4) \cdot 2u^2\,du$$

$$= \int_0^4 (32u^2 - 16u^4 + 2u^6)\,du = \left[\frac{32}{3}u^3 - \frac{16}{5}u^5 + \frac{2}{7}u^7\right]_0^2 = \frac{2^8}{3} - \frac{2^9}{5} + \frac{2^8}{7} = 2^8\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)$$

$$= 256 \cdot \frac{35-42+15}{105} = 256 \cdot \frac{8}{105} = \frac{2048}{105} \approx 19.5$$

b) $V = \pi\int_0^4 y^2 dx = \pi\int_0^4 x^4(4-x)\,dx = \pi\int_0^4 (4x^4 - x^5)\,dx = \pi\left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^4$

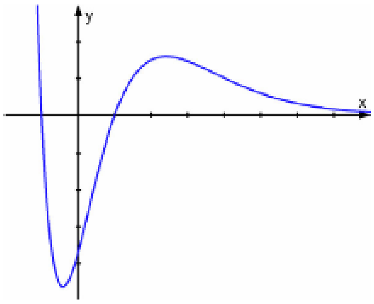
$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 4^6 - \frac{1}{6} \cdot 4^6\right) \cdot \pi = 4^6 \cdot \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 4096\pi \cdot \frac{1}{30} = \frac{2048}{15}\pi \approx 428{,}9$$

Aufgabe 144:

(4) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \cdot e^{2-x}$

K und die x-Achse begrenzen aber auch im 1. Feld eine ins Unendliche reichende Fläche.
Hat diese Fläche einen endlichen Inhalt ?
Wenn ja, berechne ihn.

Lösung:



(4) $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)\cdot e^{2-x}$

$A(r)=\frac{1}{2}\int_1^r (x^2-1)\cdot e^{2-x}dx=$

Doppelte partielle Integration.

1.) $u'=e^{2-x} \Rightarrow u=-e^{2-x}$
$v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x$

$$A(r)=\frac{1}{2}\int_1^r (x^2-1)\cdot e^{2-x}dx=\frac{1}{2}\left[-e^{2-x}(x^2-1)\right]_1^r+\int_1^r x\cdot e^{2-x}dx$$

2.) $u'=e^{2-x} \Rightarrow u=-e^{2-x}$
$w=x \Rightarrow w'=1$

$$\int_1^r x\cdot e^{2-x}dx=\left[-x\cdot e^{2-x}\right]_1^r+\int_1^{r} e^{2-x}dx=\left[-x\cdot e^{2-x}\right]_1^r+\left[-e^{2-x}\right]_1^r$$

Zusammengesetzt:

$$A(r)=\frac{1}{2}\int_1^r (x^2-1)\cdot e^{2-x}dx=\frac{1}{2}\left[-e^{2-x}(x^2-1)\right]_1^r+\left[-x\cdot e^{2-x}\right]_1^r+\left[-e^{2-x}\right]_1^r$$

$$A(r)=\left[-e^{2-x}\left(\frac{1}{2}(x^2-1)+x+1\right)\right]_1^r=\left[-e^{2-x}\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right]_1^r$$

$$A(r)=-e^{2-r}\left(\frac{1}{2}r^2+r+\frac{1}{2}\right)+e\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=2e-e^{2-r}\left(\frac{1}{2}r^2+r+\frac{1}{2}\right)$$

$A^*=\lim\limits_{r\to\infty}A(r)=2e$, denn nach L'Hospital folgt

$$\lim_{r\to\infty}e^{2-r}\left(\frac{1}{2}r^2+r+\frac{1}{2}\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{1}{2}r^2+r+\frac{1}{2}}{e^{r-2}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r+1}{-e^{r-2}}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{e^{r-2}}=0$$

Aufgabe 145:

$$f(x)=\ln\frac{x+2}{8-x}$$

K und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A.

Lösung:

(5) $f(x) = \ln\frac{x+2}{8-x}$

$$A = \int_3^0 \ln\frac{x+2}{8-x}dx = \int_3^0 \ln(x+2)\,dx - \int_3^0 \ln(8-x)\,dx$$

1. Integral: Substitution: u = x + 2 du = dx
2. Integral: Substitution: v = 8 - x dv = - dx

$$A = \int_3^0 \ln u\,du + \int_5^8 \ln v\,dv = [u\cdot\ln u - u]_5^2 + [v\cdot\ln v - v]_5^8$$

$$= (2\cdot\ln 2 - 2 - 5\cdot\ln 5 + 5) + (8\cdot\ln 8 - 8 - 5\cdot\ln 5 + 5) = 2\ln 2 + 8\cdot\ln 8 - 10\cdot\ln 5 \approx 1.9274$$

Aufgabe 146:

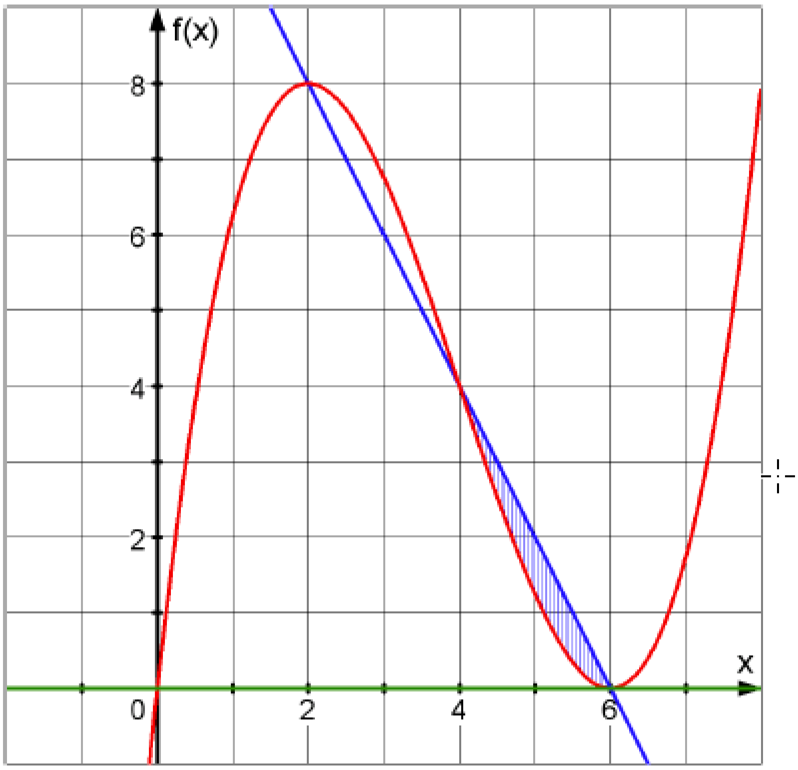
Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in \mathbf{R}^+$ durch

$$f_t(x) = \frac{1}{2t}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}tx$$

Die Gerade g durch den Wendepunkt und den Tiefpunkt der Kurve K_t begrenzt zusammen mit K_t eine Fläche. Berechne diese in Abhängigkeit von t.

Lösung:

Die Abbildung zeigt K_2 .



Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in \mathbb{R}^*$ durch

$$f_t(x) = \frac{1}{2t}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}tx$$

Die Gerade g durch den Wendepunkt und den Tiefpunkt der Kurve K_t begrenzt zusammen mit K_t eine Fläche. Berechne diese in Abhängigkeit von t.

Information (Ergebnisse hier nicht berechnet):

Die Kurve K_t hat daher den Tiefpunkt $T\left(3t \mid 0\right)$, den Hochpunkt $H\left(t \mid 2t^2\right)$ und den Wendepunkt $W\left(2t \mid t^2\right)$

Lösung

Aufstellung der Gleichung der Geraden g durch $W\left(2t \mid t^2\right)$ und $T\left(3t \mid 0\right)$

Steigung: $m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t^2 - 0}{2t - 3t} = \frac{t^2}{-t} = -t$

Punkt-Steigungsform: g: $y - 2t^2 = -t \cdot (x - t) \Leftrightarrow y = -tx + 3t^2$

Fläche zwischen g und K_t von W bis T:

$$A = \int_{2t}^{3t}\left[\left(-tx + 3t^2\right) - \left(\tfrac{1}{2t}x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{2}tx\right)\right]dx = \int_{2t}^{3t}\left(-\tfrac{1}{2t}x^3 + 3x^2 - \tfrac{11}{2}tx + 3t^2\right)dx$$

$$A = \left[-\frac{x^4}{8t} + x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 3t^2x\right]_{2t}^{3t} = \left[-\frac{81}{8}t^3 - 27t^3 - \frac{99}{4}t^3 + 9t^3\right] - \left[2t^3 + 8t^3 - 11t^3 + 6t^3\right]$$

$$A = \ldots = \frac{179}{8}t^3$$

Da die Gesamtfläche zwischen Gerade und Kurve jedoch doppelt so groß ist, folgt als Ergebnis: $A = \frac{179}{4}t^3$

Aufgabe 147:

Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$f_t(x) = tx^3 - 3(t+1)x$$

K_t sei das Schaubild von f_t .
K_1 und die positive x-Achse begrenzen eine Fläche.
Berechne deren Inhalt.
Berechne für t > 0 den Inhalt der Fläche, die von der Kurve K_t und der positiven x-Achse begrenzt wird.

Lösung:

Information: Die Nullstellen von f_1 sind 0 und $\pm\sqrt{6}$.

Lösung

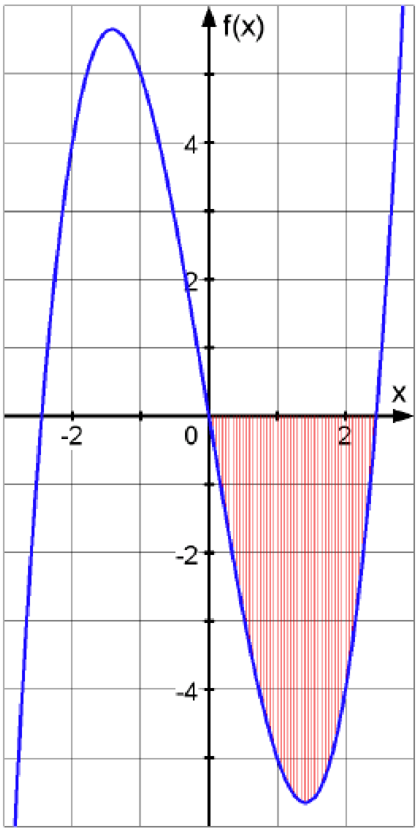


Schaubild von K_1 : $f_1(x) = x^3 - 6x$ Nullstellen: $\pm\sqrt{6}$

Berechnung des Flächeninhaltes:

$$A = -\int_0^{\sqrt{6}} f_1(x)dx = -\int_0^{\sqrt{6}} \left(x^3 - 6x\right)dx = -\left[\tfrac{1}{4}x^4 - 3x^2\right]_0^{\sqrt{6}} =$$

$$A = -\left[\tfrac{1}{4}\cdot 36 - 3\cdot 6\right] = -\left[9 - 18\right] = 9$$

Berechnung des allgemeinen Flächeninhaltes:

Die rechte Nullstelle liegt bei $x_N = 3\frac{t+1}{t}$

$$A(t) = -\int_0^{x_N} f_t(x)dx = -\int_0^{\sqrt{\frac{3(t+1)}{t}}} \left(tx^3 - 3(t+1)x\right)dx =$$

$$= -\left[\tfrac{1}{4}tx^4 - \tfrac{3}{2}(t+1)x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{3(t+1)}{t}}}$$

$$= -\left[\frac{1}{4}t\cdot 9\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 - \frac{3}{2}(t+1)\cdot\frac{3(t+1)}{t}\right]$$

$$= -\frac{9}{4}\cdot\frac{(t+1)^2}{t} + \frac{9}{2}\frac{(t+1)^2}{t} =$$

$$= -\frac{9}{4}\cdot\frac{(t+1)^2}{t} + \frac{18}{4}\frac{(t+1)^2}{t} = \frac{9}{4}\frac{(t+1)^2}{t}$$

Aufgabe 148:

Zu jedem $k \in \mathbb{R}^+$ und für $x \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{6}{k^2}x^3 - \frac{12}{k}x^2 + 6x$$

C_k sei das Schaubild von f_k .

Information: Folgende Ergebnisse sind bekannt:

$N_1(0 \mid 0)$, $N_2(k \mid 0)$, $T(k \mid 0)$, $H\left(\frac{1}{3}k \mid \frac{8}{9}k\right)$ und $W\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{9}k\right)$

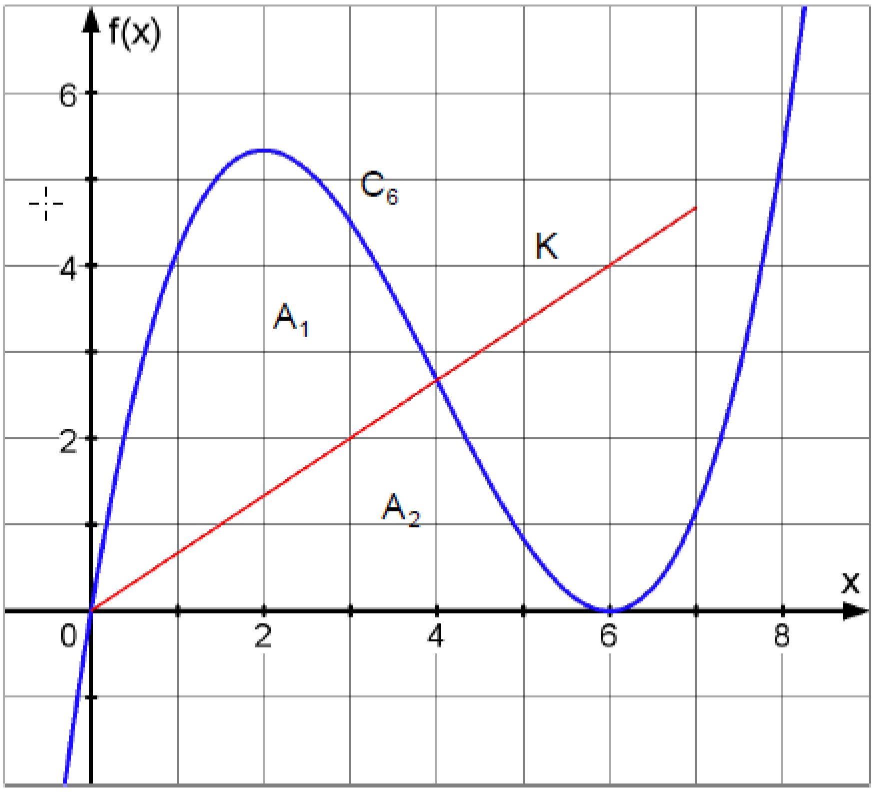
a) C_k und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(k).
Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x$ zerteilt diese Fläche in zwei Teilflächen mit den Inhalten A_1 und A_2 . Berechne das Flächenverhältnis $A_1 : A_2$.
Information: Diese Gerade ist die Ortskurve der Wendepunkte.

b) Der Kurvenbogen von C_k zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt und die Parabel

G_k : $y = -\frac{4}{k}x^2 + 4x$

begrenzen ein Flächenstück.
Berechne ihren Inhalt B(k).
Information: G_k ist die Ortskurve der Extrempunkte.

Lösung:



a) Fläche zwischen C_k und der x-Achse:

$$A(k) = \int_0^k \left(\frac{6}{k^2}x^3 - \frac{12}{k}x^2 + 6x \right) dx = \left[\frac{3}{2k^2}x^4 - \frac{4}{k}x^3 + 3x^2 \right]_0^k = \frac{3}{2}k^2 - 4k^2 + 3k^2 = \frac{1}{2}k^2$$

Teilfläche zwischen C_k und der Geraden K: Die rechte Grenze ist die Wendestelle´:

$$A_1 = \int_0^{\frac{2}{3}k} \left(\frac{6}{k^2}x^3 - \frac{12}{k}x^2 + 6x - \frac{2}{3}x \right) dx = \int_0^{\frac{2}{3}k} \left(\frac{6}{k^2}x^3 - \frac{12}{k}x^2 + \frac{16}{3}x \right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{2k^2}x^4 - \frac{4}{k}x^3 + \frac{8}{3}x^2 \right]_0^{\frac{2}{3}k} = \frac{3}{2k^2}\left(\frac{2k}{3}\right)^4 - \frac{4}{k}\left(\frac{2k}{3}\right)^3 + \frac{8}{3}\left(\frac{2k}{3}\right)^2 =$$

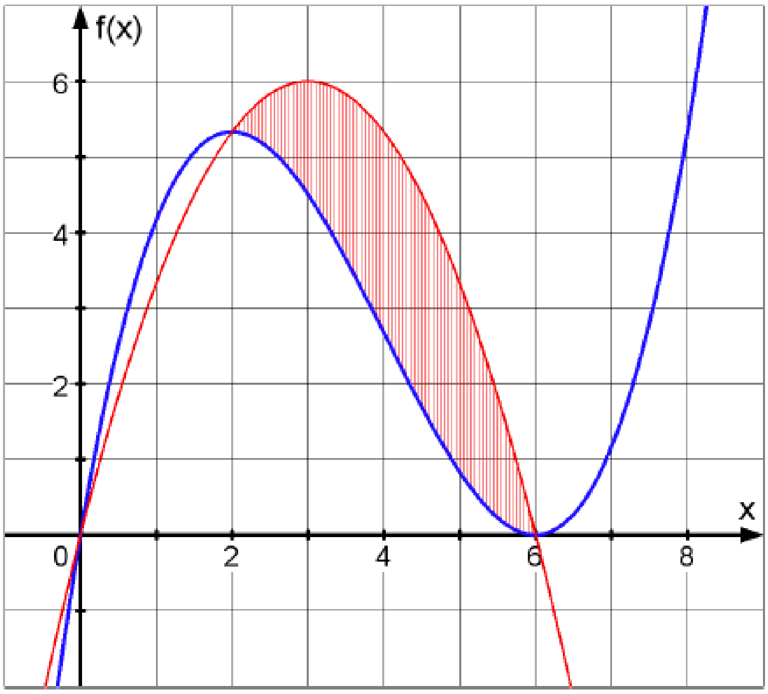
$$\frac{3 \cdot 16 \cdot k^4}{2 \cdot 81 \cdot k^2} - \frac{4 \cdot 8 \cdot k^3}{k \cdot 27} + \frac{8 \cdot 4 \cdot k^2}{3 \cdot 9} = \left(\frac{8}{27} - \frac{32}{27} + \frac{32}{27} \right) k^2 = \frac{8}{27}k^2$$

Teilfläche zwischen K, C_k und der x-Achse:

$$A_2 = A(k) - A_1 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{8}{27}k^2 = \frac{27 - 16}{54}k^2 = \frac{11}{54}k^2$$

Flächenverhältnis: $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{8k^2}{27} \cdot \frac{54}{11k^2} = \frac{16}{11}$$

b) Fläche zwischen der Parabel G_k : $y = -\frac{4}{k}x^2 + 4x$ und K_t



Da die Parabel die Ortskurve der Extrempunkte ist, sind die Schnittpunkte genau Hoch- und Tiefpunkt. Damit stehen die Grenzen der Integration fest:

$$A = \int_{\frac{k}{3}}^{k} \left[\left(-\frac{4}{k}x^2 + 4x \right) - \left(\frac{6}{k^2}x^3 - \frac{12}{k}x^2 + 6x \right) \right] dx$$

$$A = \int_{\frac{k}{3}}^{k} \left[-\frac{6}{k^2}x^3 + \frac{8}{k}x^2 - 2x \right] dx = \left[-\frac{6}{k^2}\frac{x^4}{4} + \frac{8}{k}\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{\frac{k}{3}}^{k}$$

$$A = \left[-\frac{6k^4}{4k^2} + \frac{8k^3}{3k} - k^2 \right] - \left[-\frac{6k^4}{4k^2 \cdot 81} + \frac{8k^3}{3k \cdot 27} - \frac{k^2}{9} \right]$$

$$A = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{8}{3}k^2 - k^2 + \frac{1}{54}k^2 - \frac{8}{81}k^2 + \frac{1}{9}k^2$$

$$A = \left[-\frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{54} - \frac{8}{81} + \frac{1}{9} \right] k^2 = \frac{-243 + 432 - 162 + 3 - 16 + 18}{2 \cdot 81} k^2$$

$$A = \frac{32}{2 \cdot 81}k^2 = \frac{16}{81}k^2$$

Mehrfachintegrale

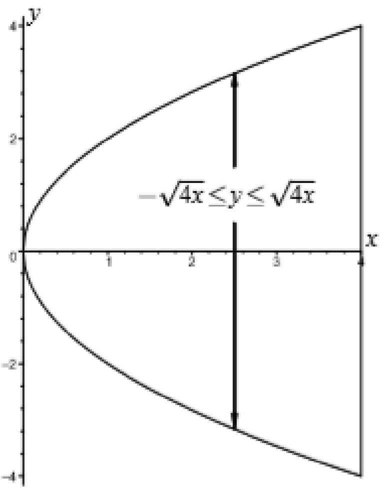
Aufgabe 149:

Integrieren Sie $f(x,y)=x+y^2$ über dem Gebiet,

a) das von der Parabel $4x=y^2$ und von der Gerade $x=4$ begrenzt wird!
b) das von der Parabel $4x=y^2$ und von der Gerade $y=2x-12$ begrenzt wird!

Lösung:

a)



$$\int_0^4\int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}}(x+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^4 xy+\frac{y^3}{3}\Big|_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4(2x\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4\frac{28}{3}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{56}{15}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\frac{56}{15}2^5=\frac{1792}{15}\approx 119.46$$

b) Die Parabel und die Gerade schneiden sich für $x=\frac{y^2}{4}=\frac{y+12}{2}$, d.h. für $(x,y)=(4,-4)$ und $(9,6)$.

$$\int_{-4}^{6}\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+12}{2}}(x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-4}^{6}\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+12}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{32}\int_{-4}^{6}(-9y^4+16y^3+196y^2+96y+576)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{32}\left[(-\frac{9}{5}y^5+4y^4+\frac{196}{3}y^3+48y^2+576y)\right]_{-4}^{6}$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{52416}{5}-\left(-\frac{42752}{15}\right)\right)=\frac{200000}{15\cdot 32}=\frac{1250}{3}$$

Aufgabe 150:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

$$a)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}(x^2+y)\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}\sqrt{xy}\,dx\,dy$$

$$b)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{2}\int\limits_{y=0}^{\pi}x\,\sin y\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{\pi}x^2\,\sin y\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{\pi/4}x\,\cos(2y)\,dx\,dy$$

$$c)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{\pi/2}\sin(x+y)\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{\pi/2}\cos(x+y)\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{\pi/2}x\,\cos(x+y)\,dx\,dy$$

Lösung:

$$a)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}(x^2+y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}+y\right)dy = \frac{5}{6}$$

$$I_2 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)dx\,dy = \int\limits_{0}^{3}\left(\frac{2}{3}+\sqrt{y+1}\right)dy = \frac{20}{3}$$

$$I_3 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}\sqrt{xy}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{y}\,dy = \frac{4}{9}$$

$$b)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{2}\int\limits_{y=0}^{\pi}x\,\sin y\,dx\,dy = 2\int\limits_{0}^{\pi}\sin y\,dy = 4$$

$$I_2 = \int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{\pi}x^2\,\sin y\,dx\,dy = 9\int\limits_{0}^{\pi}\sin y\,dy = 18$$

$$I_3 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{\pi/4}x\,\cos(2y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos(2y)\,dy = \frac{1}{4}$$

$$c)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{\pi/2}\sin(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\pi/2}(\sin y+\cos y)\,dy = 2$$

$$I_2 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{\pi/2}\cos(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\pi/2}(-\sin y+\cos y)\,dy = 0$$

$$I_3 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{\pi/2}x\,\cos(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\pi/2}(-x\,\sin x+x\,\cos x)\,dx = -2+\frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 151:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

a) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \sin x \cos(2y)\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \sin(2x) \cos(3y)\, dx\, dy$

b) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 y\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{\pi/4} \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \sin(2x) \cos^2 y\, dx\, dy$

c) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi} \int\limits_{y=1}^{2} y \cdot \cos(xy)\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{\pi} x \sin(xy)\, dx\, dy$

d) $I_1 = \int\limits_{x=1}^{3} \int\limits_{y=1}^{2} x \ln(xy)\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=1}^{3} \int\limits_{y=1}^{2} x^2 \ln(xy)\, dx\, dy$

e) $I_1 = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \frac{\sin y}{x}\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=0}^{\pi/2} \frac{\cos y}{x^2}\, dx\, dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=1}^{3} \int\limits_{y=0}^{\pi/4} \frac{\cos(2y)}{x^3}\, dx\, dy$

Lösung:

$$a)\quad I_1 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin x\,\cos(2y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos(2y)\,dy = 0$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin(2x)\,\cos(3y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos(3y)\,dy = -\frac{1}{3}$$

$$b)\quad I_1 = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin x\,\cos^2 y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,dy = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{\pi/4}\int_{y=0}^{\pi/2} \sin(2x)\,\cos^2 y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,dy = \frac{\pi}{8}$$

$$c)\quad I_1 = \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=1}^{2} y\cdot\cos(xy)\,dx\,dy = \int_1^{2} \sin(\pi y)\,dy = -\frac{2}{\pi}$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\pi} x\,\sin(xy)\,dx\,dy = \int_0^{2} (1-\cos(\pi x))\,dx = 2$$

$$d)\quad I_1 = \int_{x=1}^{3}\int_{y=1}^{2} x\,\ln(xy)\,dx\,dy = \int_1^{3} (x\ln x - x + 2x\ln 2)\,dx = -6 + 8\ln 2 + \frac{9}{2}\ln 3 \simeq 4.49$$

$$I_2 = \int_{x=1}^{3}\int_{y=1}^{2} x^2\,\ln(xy)\,dx\,dy = \int_1^{3} \left(x^2\ln x - x^2 + 2x^2\ln 2\right)dx =$$

$$= -\frac{104}{9} + \frac{52}{3}\ln 2 + 9\ln 3 \simeq 10.37$$

$$e)\quad I_1 = \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{\pi/2} \frac{\sin y}{x}\,dx\,dy = \int_1^{2} \frac{dx}{x} = \ln 2 \simeq 0.69$$

$$I_2 = \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{\pi/2} \frac{\cos y}{x^2}\,dx\,dy = \int_1^{2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \int_{x=1}^{3}\int_{y=0}^{\pi/4} \frac{\cos(2y)}{x^3}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^{3} \frac{dx}{x^3} = \frac{2}{9}$$

Aufgabe 152:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

a) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} e^{x-2y}\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} y^2\, e^{x+2}\, dx\, dy$

b) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=1}^{2} \frac{x\, e^x}{y}\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=1}^{3} \frac{x\, e^x}{y^2}\, dx\, dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=1}^{2} \frac{x\, e^{2x}}{y^3}\, dx\, dy$

c) $I_1 = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=1}^{2} \left(\frac{2x}{y} - \frac{y}{x}\right) dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=1}^{2} \left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{x^2}\right) dx\, dy$

d) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x}{1+xy}\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x}{1+2xy}\, dx\, dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x^2}{1+xy}\, dx\, dy$

e) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+y}\, dx\, dy, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{(1+y)^2}\, dx\, dy$

Lösung:

$$a)\quad I_1 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} e^{x-2y}\,dx\,dy \;=\; \int_0^1 \left(e^{1-2y} - e^{-2y}\right) dy \;=\; \frac{1}{2}\left(-1 + e + e^{-2} - e^{-1}\right) \simeq 0.74$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} y^2 e^{x+2}\,dy\,dx \;=\; \frac{1}{3}\int_0^2 e^{x+2}\,dx = \frac{1}{3}\left(e^4 - e^2\right) \simeq 15.75$$

$$b)\quad I_1 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{2} \frac{x e^x}{y}\,dy\,dx = \ln 2 \int_0^1 x e^x\,dx \;=\ln 2 \simeq 0.69$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{2}\int_{y=1}^{3} \frac{x e^x}{y^2}\,dy\,dx = \frac{2}{3}\int_0^2 x e^x\,dx = \frac{2}{3}\left(1 + e^2\right)$$

$$I_3 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{2} \frac{x e^{2x}}{y^3}\,dy\,dx = \frac{3}{8}\int_0^1 x e^{2x}\,dx = \frac{3}{32}\left(1 + e^2\right)$$

$$c)\quad I_1 = \int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{2} \left(\frac{2x}{y} - \frac{y}{x}\right) dy\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(4x\ln 2 - \frac{3}{x}\right) dx = \frac{3}{2}\ln 2 \simeq 1.04$$

$$I_2 = \int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{2} \left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{x^2}\right) dy\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(3\ln 2\cdot x - \frac{7}{x^2}\right) dx = -\frac{7}{6} + \frac{3}{2}\ln 2 \simeq -0.13$$

$$d)\quad I_1 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \frac{x}{1+xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1 \simeq 0.39$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} \frac{x}{1+2xy}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(1+2x)\,dx = \frac{5}{4}\ln 5 - 1 \simeq 1.01$$

$$I_3 = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} \frac{x^2}{1+xy}\,dy\,dx = \int_0^2 x\ln(1+x)\,dx = \int_1^3 (u-1)\ln u\,du \;=\; \frac{3}{2}\ln 3 \simeq 1.65\quad (u = 1+x)$$

$$e)\quad I_1 = \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+y}\,dy\,dx = \ln 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{16}{3}\ln 2 \simeq 3.70$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{(1+y)^2}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{8}{3}$$

Aufgabe 153:

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale.

a) $I_1 = \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=0}^{y} xy\,dx\,dy, \qquad I_2 = \int\limits_{y=0}^{2} \int\limits_{x=0}^{\sqrt{y}} xy\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$

b) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{3} \int\limits_{y=0}^{x} x y^2\,dy\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{x} x^2 y^2\,dy\,dx, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=1-x}^{1-x^2} xy\,dy\,dx$

c) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_{y=0}^{3} \int\limits_{x=0}^{\sqrt{y}} (x^3 + y^3)\,dx\,dy, \qquad I_3 = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x^2-1} (x + y)\,dy\,dx$

d) $I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{x} (1 + \sin y)\,dy\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2} \int\limits_{y=0}^{x} (\cos x + \sin y)\,dy\,dx$

Lösung:

$$a)\quad I_1 = \int\limits_{y=0}^{1}\int\limits_{x=0}^{y} xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} y^3\,dy = \frac{1}{8}$$

$$I_2 = \int\limits_{y=0}^{2}\int\limits_{x=0}^{\sqrt{y}} xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} y^2\,dy = \frac{4}{3}$$

$$I_3 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x(4-x^2)\,dx = \frac{7}{8}$$

$$b)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{x} xy^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{3} x^4\,dx = \frac{81}{5}$$

$$I_2 = \int\limits_{x=0}^{2}\int\limits_{y=0}^{x} x^2y^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2} x^5\,dx = \frac{32}{9}$$

$$I_3 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=1-x}^{1-x^2} xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x\left((1-x^2)^2-(1-x)^2\right)dx = \frac{1}{24}$$

$$c)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{x} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int\limits_{y=0}^{3}\int\limits_{x=0}^{\sqrt{y}} (x^3+y^3)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{3}\left(\frac{y^2}{4}+y^{7/2}\right)dy = \frac{9}{4}+18\sqrt{3} \simeq 33.43$$

$$I_3 = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{x^2-1} (x+y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{1}\left(x(x^2-1)+\frac{1}{2}(x^2-1)^2\right)dx = \frac{1}{60}$$

$$d)\quad I_1 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{x} (1+\sin y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\pi/2}(1+x-\cos x)\,dx = \frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-1 = 1.8$$

$$I_2 = \int\limits_{x=0}^{\pi/2}\int\limits_{y=0}^{x} (\cos x+\sin y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\pi/2}(1+x\cos x-\cos x)\,dx = -2+\pi \simeq 1.14$$

Aufgabe 154:

(a) $\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (b) $\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (c) $\int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)\cdot\sin(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

(d) $\int_{n=1}^{2}\int_{v=2}^{4} n(1+v)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}v$, (e) $\int_{y=-1}^{1}\int_{x=-1/2}^{1/2}\int_{z=0}^{2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, (f) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=y_o}^{y_1}\int_{z=z_o}^{z_1} e^{az}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Lösung:

(a) Nach zwei Integrationen ergibt sich: $[x]_0^a\,[y]_0^b = (a-0)(b-0) = ab$

(b) $2/3$

(c) 4

(d) $[v+v^2/2]_2^4\cdot[n^2/2]_1^2 = 12$

(e) 4

(f) $\frac{1}{a}(e^{az_1}-e^{az_o})\cdot(y_1-y_o)\cdot 1$

Aufgabe 155:

Berechnen Sie folgendes Integral.

$$I = \int_1^4\int_1^3\int_0^2 \left(x^2 - 2\,y\,z\right)\,dz\;dy\;dx$$

Lösung:

$$I = \int_1^4\int_1^3\left[\int_0^2 \left(x^2 - 2\,y\,z\right)\,dz\right]dy\;dx = \int_1^4\int_1^3\left[\,x^2 z - y\,z^2\,\right]_{z_1=0}^{z_2=2}\;dy\;dx =$$

$$= 2\int_1^4\left[\int_1^3 \left(x^2 - 2\,y\right)\,dy\right]dx = 2\int_1^4\left[\left(x^2 y - y^2\right)\right]_{y_1=1}^{y_2=3}\,dx =$$

$$= 4\int_1^4 \left(x^2 - 4\right)\,dx = 4\left[\frac{x^3}{3} - 4\,x\right]_{x_1=1}^{x_2=4} = 36$$

Aufgabe 156:

Berechnen Sie folgende Integrale.

$$I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=-y^2}^{x^2} (1+x)\, dz\, dy\, dx$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} \sin x \cdot y z\, dz\, dy\, dx$$

$$I_3 = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{x-y} y \cdot e^{z}\, dz\, dy\, dx$$

$$I_4 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-1}^{4} \int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cdot \cos(y z)\, dz\, dy\, dx$$

Lösung:

$$I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=-y^2}^{x^2} (1+x)\; dz\; dy\, dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} (1+x)\,(x^2+y^2)\; dy\, dx = \frac{3}{5}$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin x\; dx \int_{y=0}^{1} y\; dy \int_{z=y}^{y^2} z\; dz = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi/2} \sin x\; dx \int_{y=0}^{1} (y^5 - y^3)\, dy = -\frac{1}{24}$$

$$I_3 = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{x-y} y \cdot e^z\; dz\; dy\, dx = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} y\,(e^{x-y} - 1)\; dy\, dx =$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left(e^x \int_{y=0}^{x} y\; e^{-y}\, dy - \int_{y=0}^{x} y\; dy \right) dx = \int_{x=1}^{2} \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \right) dx =$$

$$= -e - \frac{11}{3} + e^2 \simeq 1.004$$

$$\boxed{\int u\; v'\; d\,x = u\; v - \int u'\; v\; d\,x}$$

$$I_4 = \int_{x=0}^{1} x^2\; dx \int_{y=-1}^{4} \int_{z=0}^{\pi} y\; \cos(y\, z)\; dz\, dy =$$

$$\int_{z=0}^{\pi} \cos(y\, z)\; dz = \frac{1}{y} \int_{u=0}^{\pi\, y} \cos u\; du = \frac{1}{y}\, \left[\sin(y\, z) \right]_{z=0}^{\pi} = \frac{\sin(\pi\, y)}{y}$$

$$u = y\, z$$

$$I_4 = \int_{x=0}^{1} x^2\; dx \int_{y=-1}^{4} \sin(\pi\, y)\, dy = -\frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{1} x^2\; dx \cdot \left[\cos(\pi\, y) \right]_{y=-1}^{4} =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} x^2\; dx = -\frac{2}{3\,\pi}$$

Partielle Ableitungen

Aufgabe 157:

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung.

$$a)\ f(x, y) = x^2 y, \qquad f(x, y) = x y^2$$

$$b)\ f(x, y) = e^{x y^3}, \qquad c)\ f(x, y) = 4 \frac{x}{y^5}$$

$$d)\ f(x, y) = (2x - y)^2 + \ln(x y)$$

$$e)\ f(x, y) = x y^2 \cdot (\sin x + \sin y)$$

$$f)\ f(x, y) = \sin(x^2 - y)$$

$$g)\ f(x, y) = \ln\left(2x + \frac{4}{y}\right)$$

$$h)\ f(x, y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$$

$$i)\ f(x, y, z) = e^{x-y} \cos(5z)$$

Lösung:

$$a)\ f(x, y) = x^2 y, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2 x y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$f(x, y) = x y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 x y$$

$$b)\ f(x, y) = e^{x y^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y^3 e^{x y^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 x y^2 e^{x y^3}$$

$$c)\ f(x, y) = 4 \frac{x}{y^5}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{y^5}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -20 \frac{x}{y^6}$$

$$d)\ f(x, y) = (2x - y)^2 + \ln(x y) = (2x - y)^2 + \ln x + \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4\ (2x - y) + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2\ (2x - y) + \frac{1}{y}$$

$$f(x, y) = x\, y^2 \cdot (\sin x + \sin y) = u \cdot v, \quad u = x\, y^2, \quad v = \sin x + \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (u \cdot v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u \qquad f_x = u_x\, v + v_x\, u$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (u \cdot v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot u \qquad f_y = u_y\, v + v_y\, u$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\, x\, y^2 = y^2, \qquad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\sin x + \sin y) = \cos x$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\, x\, y^2 = 2\, x\, y, \qquad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot (\sin x + \sin y) = \cos y$$

$$f_x = y^2 \cdot (\sin x + \sin y) + x\, y^2 \cdot \cos x$$

$$f_y = 2\, x\, y \cdot (\sin x + \sin y) + x\, y^2 \cdot \cos y$$

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y)$$

Wir führen zunächst die *'Hilfsvariable'* ein, erhalten die 'äußere' Funktion und wenden die Kettenregel an:

$$f = f(x, y) = F(u(x, y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$u = x^2 - y$ – Hilfsvariable

$f(x, y) = \sin(x^2 - y) = F(u(x, y)) = \sin u$ – äußere Funktion

$$\frac{dF}{du} = \frac{d}{du} \sin u = \cos u = \cos(x^2 - y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) = 2\, x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\, x \cdot \cos(x^2 - y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x^2 - y)$$

$$f(x, y) = \ln\left(2x + \frac{4}{y}\right) = F(u) = \ln u, \qquad u = 2x + \frac{4}{y}$$

$$\frac{dF}{du} = \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{2x + \frac{4}{y}} = \frac{y}{2(2 + x\,y)}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + \frac{4}{y}\right) = 2, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + \frac{4}{y}\right) = -\frac{4}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{2 + x\,y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2}{y(2 + x\,y)}$$

$h)\ f(x, y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2} - 2y\,e^{2xy} + 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2} - 2x\,e^{2xy}$$

$i)\ f(x, y, z) = e^{x-y}\cos(5z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}\cos(5z), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}\cos(5z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -5\,e^{x-y}\sin(5z)$$

Aufgabe 158:

Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen

$$a)\ \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right);\quad \frac{\partial}{\partial v_0}(v_0 + a\,t);\quad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{2\,\pi\,r}{T}\right)$$

$$b)\ \frac{\partial}{\partial t}\sin(c\,t - 5\,x);\quad \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2\,\pi\,r^{3/2}}{\sqrt{G\,M}}\right)$$

$$c)\ \frac{\partial}{\partial \beta}\,\frac{e^{x\,\beta - 3}}{2\,y\,\beta + 5};\quad \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lösung:

$$a)\ \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \frac{v^2}{2};\quad \frac{\partial}{\partial v_0}(v_0 + a\,t) = 1;\quad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{2\,\pi\,r}{T}\right) = -\frac{2\,\pi\,r}{T^2}$$

$$b)\ \frac{\partial}{\partial t}\sin(c\,t - 5\,x) = c\cos(c\,t - 5\,x);\quad \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2\,\pi\,r^{3/2}}{\sqrt{G\,M}}\right) = -\frac{\pi\,r^{3/2}}{\sqrt{G\,M^3}}$$

$$c)\ \frac{\partial}{\partial \beta}\,\frac{e^{x\,\beta - 3}}{2\,y\,\beta + 5} = e^{x\,\beta - 3}\,\frac{(2\,x\,y\,\beta + 5\,x - 2\,y)}{(2\,y\,\beta + 5)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0\,v}{c^2\,\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}}$$

Aufgabe 159:

Bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung folgender Funktionen:

a) $f(x, y) = 2xy + x\ln(3y + 1) - \frac{1}{5}y$

b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$

Lösung:

a) $f(x,y) = \boxed{2\cdot x\cdot y} + \boxed{x\cdot \ln(3y+1)} - \boxed{\frac{1}{5}\cdot y}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\cdot y + \ln(3y+1) - 0$

$\boxed{= 2y + \ln(3y+1)}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boxed{2x + \frac{3x}{3y+1} - \frac{1}{5}}$

NR:

$(\cancel{x}\cdot \ln(3y+1))'$

$= \cancel{x}\cdot(\ln(3y+1))'$

$= \cancel{x}\cdot \frac{1}{3y+1}\cdot \underbrace{(3y+1)'}_{=3}$

$= 3\cdot x\cdot \frac{1}{3y+1}$

$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)} = \frac{1}{\ln(y)}\cdot\sqrt{x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boxed{\frac{1}{\ln(y)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x)$

NR:

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})'$

$= \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

$f(x,y) = \frac{1}{\ln(y)}\cdot\sqrt{x}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{y\cdot(\ln(y))^2}\right)$

$= \boxed{-\frac{\sqrt{x}}{y\cdot(\ln(y))^2}}$

NR

$\frac{1}{y} = y^{-1} \overset{\text{abl.}}{\leadsto} (-1)\cdot y^{-2}$

NR:

$\left(\frac{1}{\ln(y)}\right)'$

$g(y) = \frac{1}{y} \rightarrow -\frac{1}{y^2}$

$h(y) = \ln(y)$

$\overset{\text{KR}}{=} -\frac{1}{(\ln(y))^2}\cdot\frac{1}{y}$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)} = \frac{1}{\ln(y)} \cdot \sqrt{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boxed{\frac{1}{\ln(y)} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}$$

$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

NR:
$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln(y)} \cdot \sqrt{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{y \cdot (\ln(y))^2}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{x}}{y \cdot (\ln(y))^2}}$$

NR:
$$\frac{1}{y} = y^{-1} \overset{\text{abl.}}{\rightsquigarrow} (-1) \cdot y^{-2}$$

NR:
$$\left(\frac{1}{\ln(y)}\right)'$$

$g(y) = \frac{1}{y} \rightsquigarrow -\frac{1}{y^2}$

$h(y) = \ln(y)$

$$\overset{KR}{=} -\frac{1}{(\ln(y))^2} \cdot \frac{1}{y}$$

Aufgabe 160:

Ermitteln Sie sämtliche partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung für die folgenden Funktionen.

(a) $f(x,y) = x^2y^3 + xy^4 - x^2 + 2\sqrt{y}$ (b) $f(x,y) = e^{xy}$

(c) $f(x,y) = e^{2y}\sin x + \frac{y}{x}$ (d) $f(x,y) = x\ln(x^2 - y)$

(e) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ (f) $f(x,y,z) = x^2ye^z + \sin(x-y) - xz^3$

Lösung:

(a) $f_x = 2xy^3 + y^4 - 2x$ $\quad f_y = 3x^2y^2 + 4xy^3 + \frac{1}{\sqrt{y}}$

$f_{xx} = 2y^3 - 2$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2 + 4y^3$ $\quad f_{yy} = 6x^2y + 12xy^2 - \frac{1}{2\sqrt{y^3}}$

(b) $f_x = ye^{xy}$ $\quad f_y = xe^{xy}$

$f_{xx} = y^2e^{xy}$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = (1+xy)e^{xy}$ $\quad f_{yy} = x^2e^{xy}$

(c) $f_x = e^{2y}\cos x - \frac{y}{x^2}$ $\quad f_y = 2e^{2y}\sin x + \frac{1}{x}$

$f_{xx} = -e^{2y}\sin x + \frac{2y}{x^3}$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2e^{2y}\cos x - \frac{1}{x^2}$ $\quad f_{yy} = 4e^{2y}\sin x$

(d) $f_x = \frac{2x^2}{x^2-y} + \ln(x^2 - y)$ $\quad f_y = \frac{-x}{x^2-y}$

$f_{xx} = \frac{2x^3-6xy}{(x^2-y)^2}$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{x^2+y}{(x^2-y)^2}$ $\quad f_{yy} = \frac{-x}{(x^2-y)^2}$

(e) $f_x = \frac{-2y}{(x-y)^2}$ $\quad f_y = \frac{2x}{(x-y)^2}$

$f_{xx} = \frac{4y}{(x-y)^3}$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3}$ $\quad f_{yy} = \frac{4x}{(x-y)^3}$

(f) $f_x = 2xye^z + \cos(x-y) - z^3$ $\quad f_y = x^2e^z - \cos(x-y)$ $\quad f_z = x^2ye^z - 3xz^2$

$f_{xx} = 2ye^z - \sin(x-y)$ $\quad f_{xy} = 2xe^z + \sin(x-y)$ $\quad f_{xz} = 2xye^z - 3z^2$

$f_{yx} = 2xe^z + \sin(x-y)$ $\quad f_{yy} = -\sin(x-y)$ $\quad f_{yz} = x^2e^z$

$f_{zx} = 2xye^z - 3z^2$ $\quad f_{zy} = x^2e^z$ $\quad f_{zz} = x^2ye^z - 6xz$

Aufgabe 161:

Bestimmen Sie sämtliche partielle Ableitungen bis zur 3. Ordnung von

$f(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$ für x∈R, y∈R, z∈R.

Lösung:

Lösung:

1. Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-5e^{x-y}\sin(5z)$$

2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=-e^{x-y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=-5e^{x-y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=5e^{x-y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=-25e^{x-y}\cos(5z)$$

3. Ordnung:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y,z)=e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y,z)=-e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}(x,y,z)=-5e^{x-y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y,z)=-e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y,z)=e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(x,y,z)=-5e^{x-y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x,y,z)=125e^{x-y}\sin(5z)\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}(x,y,z)=-25e^{x-y}\cos(5z)\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y}(x,y,z)=25e^{x-y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z)=5e^{x-y}\sin(5z)$$

Nach Satz von Schwarz sind alle Ableitungen 3. Ordnung, die sich aus Vertauschungen der Variablen ergeben, nach denen abgeleitet wird, identisch zu der entsprechenden Formel, von der bei der Vertauschung ausgegangen wird.

Folgen und Reihen

Aufgabe 162:

Berechnen Sie bis a_5.

(a) $a_1 = 12\ ;\ a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$

(b) $a_1 = 1\ ;\ a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$

(c) $a_1 = 4\ ;\ a_n = \frac{3}{2} \cdot a_{n-1}$

(d) $a_1 = -1\ ;\ a_n = 4 - a_{n-1}$

(e) $a_1 = 1\ ;\ a_n = a_{n-1}{}^2$

(f) $a_1 = -2\ ;\ a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}{}^2$

(g) $a_1 = 2\ ;\ a_n = \frac{1 - a_{n-1}}{a_{n-1}}$

(h) $a_1 = 2; a_2 = 1\ ;\ a_n = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$

(i) $a_1 = 4\ ;\ a_n = a_{n-1} + \frac{n-1}{n}$

(k) $a_1 = 0\ ;\ a_n = 2^{a_{n-1}}$

Lösung:

Aufgabe 163:

(1) Beweise, daß eine arithmetische Folge vorliegt. Stelle eine Berechnungsvorschrift auf.

a) $a_3 = -28$; $a_5 = 26$; $a_8 = 107$

b) $a_2 = 249$; $a_6 = 405$; $a_{10} = 561$

c) $a_{11} = 296$; $a_{16} = 216$; $a_{25} = 72$

d) $a_3 = 20181$; $a_{10} = 17311$; $a_{20} = 13211$; $a_{131} = -32299$

(2) Zeige, daß keine arithmetische Folge vorliegt.
Wie müßte a_{12} lauten, wenn eine arithmetische Folge vorliegen sollte ?

a) $a_5 = 450$; $a_7 = 506$; $a_{12} = 674$

b) $a_6 = 630$; $a_8 = 560$; $a_{12} = 455$

(3) Gegeben sind 3 Glieder eine Folge. Setze so wenig wie nötig Zahlen dazwischen, damit eine arithmetische Folge entsteht.
Berechne dann a_1 und a_n .

a) $a_6 = 122$; $b = 156$; $c = 207$

b) $b = 388$; $a_{15} = 340$; $c = 280$

c) $b = -84$; $c = -39$; $a_{20} = 24$

(4) Ist b ein Glied der gegebenen Folge ?

a) $a_n = 14n + 16$; $b = 1808$

b) $a_n = 240 - 28n$; $b = -290$

c) $a_3 = 64$; $a_6 = 256$; $b = 640$

d) $a_{10} = 25$; $a_{14} = -25$; $b = 175$

(5) Gegeben sind die arithmetischen Folgen a_n und b_n .
Prüfe nach, ob $c_n = a_n + b_n$; $d_n = a_n - b_n$; $e_n = 3a_n$ und $f_n = a_n \cdot b_n$ arithmetische Folge sind.

z.B. für $a_n = 6n - 12$ und $b_n = 2n + 15$

(6) Beweise allgemein, daß eine Folge der Form $f_n = an^2 + bn + c$ keine arithmetische Folge ist.

Lösung:

(1) Beweise, daß eine arithmetische Folge vorliegt. Stelle eine Berechnungsvorschrift auf.

a) $a_3 = -28$; $a_5 = 26$; $a_8 = 107$

$a_5 - a_3 = 26 + 28 = 54 = 2d \Rightarrow d = 27$

$a_8 - a_5 = 107 - 26 = 81 = 3d \Rightarrow d = 27$

Weil beide Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_n = a_3 + (n-3) \cdot d = -28 + (n-3) \cdot 27 = -28 + 27n - 81 = 27n - 109$

(und wer möchte:) $a_1 = a_3 - 2d = -28 - 54 = -82$.

b) $a_2 = 249$; $a_6 = 405$; $a_{10} = 561$

$a_6 - a_2 = 405 - 249 = 156 = 4d \Rightarrow d = 39$

$a_{10} - a_6 = 561 - 405 = 156 = 4d \Rightarrow d = 39$

Weil beide Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_n = a_2 + (n-2) \cdot d = 249 + (n-2) \cdot 39 = 249 + 39n - 78 = 39n + 171$

c) $a_{11} = 296$; $a_{16} = 216$; $a_{25} = 72$

$a_{16} - a_{11} = 216 - 296 = -80 = 5d \Rightarrow d = -16$

$a_{25} - a_{16} = 72 - 216 = -144 = 9d \Rightarrow d = -16$

Weil beide Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_n = a_{11} + (n-11) \cdot d = 296 + (n-11) \cdot (-16) = 296 - 16n + 176 = -16n + 472$

d) $a_3 = 20181$; $a_{10} = 17311$; $a_{20} = 13211$; $a_{131} = -32299$

$a_{10} - a_3 = 17311 - 20181 = -2870 = 7d \Rightarrow d = -410$

$a_{20} - a_{10} = 13211 - 17311 = -4100 = 10d \Rightarrow d = -410$

$a_{131} - a_{20} = -32299 - 13211 = -45510 = 111d \Rightarrow d = -410$

Weil alle drei Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_n = a_3 + (n-3) \cdot d = 20181 + (n-3) \cdot (-410) = 20181 - 410n + 1230$

$a_n = -410n + 21411$

**(2) Zeige, daß keine arithmetische Folge vorliegt.
Wie müßte a_{12} lauten, wenn eine arithmetische Folge vorliegen sollte ?**

a) $a_5 = 450$; $a_7 = 506$; $a_{12} = 674$

$a_7 - a_5 = 506 - 450 = 56 = 2d \Rightarrow d = 28$
$a_{12} - a_7 = 674 - 506 = 168 = 5d \Rightarrow d = \frac{168}{5} = 33{,}6$

Diese verschiedenen d-Werte sind ein Widerspruch zur Annahme, es liege eine arithmetische Folge vor.

Richtiger Wert für a_{12}': $a_{12} = a_7 + 5 \cdot d = 506 + 5 \cdot 28 = 646$

b) $a_6 = 630$; $a_8 = 560$; $a_{12} = 455$

$a_8 - a_6 = 560 - 630 = -70 = 2d \Rightarrow d = -35$

$a_{12} - a_8 = 455 - 560 = -105 = 4d \Rightarrow d = -\frac{105}{4} \neq -35$

Also liegt keine arithmetische Folge vor.

Richtiger Wert für a_{12}: $a_{12} = a_8 + 4d = 560 + 4 \cdot (-35) = 560 - 140 = 420$

3) Gegeben sind 3 Glieder eine Folge. Setze so wenig wie nötig Zahlen dazwischen, damit eine arithmetische Folge entsteht.
Berechne dann a_1 und a_n.

a) $a_6 = 122$; $b = 156$; $c = 207$

$b - a_6 = 156 - 122 = 34$ und $c - b = 207 - 156 = 51$

Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Differenzen ist 17:
$34 = 2 \cdot 17$ und $51 = 3 \cdot 17$, also wählen wir die Folgendifferenz $d = 17$.
Dann muß zwischen 122 und 156 die Zahl $a_7 = 122 + 17 = 139$ geschaltet werden, b ist dann a_8. Und zwischen b und c haben wir 3 Differenzen (Abstände), also benötigen wir dort 2 Zwischenwerte:

$a_9 = 156 + 17 = 173$, $a_{10} = 156 + 2 \cdot 17 = 190$, $a_{11} = 156 + 3 \cdot 17 = 207$ ist dann c.

Die Folge lautet also

$$\ldots \xrightarrow[+17]{} 122 \xrightarrow[+17]{} 139 \xrightarrow[+17]{} 156 \xrightarrow[+17]{} 173 \xrightarrow[+17]{} 190 \xrightarrow[+17]{} 207$$

Damit folgt

$a_n = a_1 + (n-6) \cdot d = 122 + (n-6) \cdot 17 = 122 + 17n - 102 = 17n + 20$

3) Gegeben sind 3 Glieder eine Folge. Setze so wenig wie nötig Zahlen dazwischen, damit eine arithmetische Folge entsteht.
Berechne dann a_1 und a_n.

a) $a_6 = 122$; $b = 156$; $c = 207$

$b - a_6 = 156 - 122 = 34$ und $c - b = 207 - 156 = 51$

Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Differenzen ist 17:
$34 = 2 \cdot 17$ und $51 = 3 \cdot 17$, also wählen wir die Folgendifferenz $d = 17$.
Dann muß zwischen 122 und 156 die Zahl $a_7 = 122 + 17 = 139$ geschaltet werden, b ist dann a_8. Und zwischen b und c haben wir 3 Differenzen (Abstände), also benötigen wir dort 2 Zwischenwerte:

$a_9 = 156 + 17 = 173$, $a_{10} = 156 + 2 \cdot 17 = 190$, $a_{11} = 156 + 3 \cdot 17 = 207$ ist dann c.

Die Folge lautet also

$$\ldots \xrightarrow[+17]{} 122 \xrightarrow[+17]{} 139 \xrightarrow[+17]{} 156 \xrightarrow[+17]{} 173 \xrightarrow[+17]{} 190 \xrightarrow[+17]{} 207$$

Damit folgt

$$a_n = a_1 + (n-6) \cdot d = 122 + (n-6) \cdot 17 = 122 + 17n - 102 = 17n + 20$$

b) $b = 388$; $a_{15} = 340$; $c = 280$

$a_5 - b = 340 - 388 = -48$ und $c - a_5 = 280 - 340 = -60$
Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Differenzen ist -12:
$-48 = 4 \cdot (-12)$ und $-60 = 5 \cdot (-12)$, wir wählen die Folgendifferenz d = -48.
Dann haben wir zwischen 388 und 340 4 Differenzen (Abstände) und schalten folglich 3 Zahlen dazwischen:

$$388 \xrightarrow[-12]{} 376 \xrightarrow[-12]{} 364 \xrightarrow[-12]{} 352 \xrightarrow[-12]{} 340$$

$b = 338$ ist daher a_{11}.

Zwischen b und c haben wir 5 Differenzen (Abstände), also benötigen wir dort 4 Zwischenwerte:

$$340 \xrightarrow[-12]{} 328 \xrightarrow[-12]{} 316 \xrightarrow[-12]{} 304 \xrightarrow[-12]{} 292 \xrightarrow[-12]{} 280$$

Damit wir c = 280 zu a_{20}.

Wir erhalten dann $a_1 = a_{11} - 10d = 388 - 10 \cdot (-12) = 388 + 120 = 508$
und $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 508 + (n-1) \cdot (-12) = 508 - 12n + 12 = 520 - 12n$

c) $b = -84$; $c = -39$; $a_{20} = 24$

$c - b = -39 + 84 = 45$ und $a_{20} - c = 24 + 39 = 63$
Der größte gemeinsame Teiler von 45 und 63 ist 9: $45 = 9 \cdot 5$ und $63 = 9 \cdot 7$.
Also haben wir zwischen b und c 5 Abstände der Größe 9 und zwischen c und a_{20} 7 Abstände der Größe 9. Wir schalten also zwischen b und c 4 Zahlen und zwischen c und a_{20} 6 Zahlen:

$$-84 \xrightarrow[+9]{} -75 \xrightarrow[+9]{} -66 \xrightarrow[+9]{} -57 \xrightarrow[+9]{} -48 \xrightarrow[+9]{} -39$$

$$-39 \xrightarrow[+9]{} -30 \xrightarrow[+9]{} -21 \xrightarrow[+9]{} -12 \xrightarrow[+9]{} -3 \xrightarrow[+9]{} 4 \xrightarrow[+9]{} 15 \xrightarrow[+9]{} 24$$

Damit wird $b = a_7$, dann von a_{20} aus zählen wir 5+7=12 Zwischenräume herunter, also 13 Zahlen !

Es folgt also $a_1 = a_7 - 6d = -84 - 7 \cdot 9 = -147$
und $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -147 + (n-1) \cdot 9 = 9n - 156$.

(5) Ist b ein Glied der gegebenen Folge ?

a) $a_n = 14n + 16$; $b = 1808$

$$1808 = 14n + 16 \Rightarrow 14n = 1792 \Rightarrow n = 128. \quad \text{Erg.: } b = a_{128}.$$

b) $a_n = 240 - 28n$; $b = -290$

$$-290 = 240 - 28n \Rightarrow 28n = 290 + 240 = 530 \Rightarrow n = 18{,}9...$$

b ist also kein Glied der Folge.

c) $a_3 = 64$; $a_6 = 256$; $b = 640$

$$3d = a_6 - a_3 = 256 - 64 = 192 \Rightarrow d = 64$$

$$\text{Aus } b = a_6 + k \cdot d \Rightarrow k = \frac{b - a_6}{d} = \frac{640 - 256}{64} = \frac{384}{64} = 6 \qquad \text{d.h. } b = a_{12}$$

d) $a_{10} = 25$; $a_{14} = -25$; $b = 175$

$$4d = a_{14} - a_{10} = -25 - 25 = -50 \Rightarrow d = -12{,}5 \quad \text{(Fallende Folge !)}$$

$$\text{Aus } b = a_{14} + k \cdot d \Rightarrow k = \frac{b - a_{14}}{d} = \frac{175 + 25}{-12{,}5} = -\frac{200}{12{,}5} = -16$$

Also wäre $b = a_{-2}$. Das ist nicht möglich !

b ist kein Glied der Folge.

(3) Gegeben sind die arithmetischen Folgen a_n und b_n .
Prüfe nach, ob $c_n = a_n + b_n$; $d_n = a_n - b_n$; $e_n = 3a_n$ und $f_n = a_n \cdot b_n$ arithmetische Folge sind für $a_n = 6n - 12$ und $b_n = 2n + 15$

1. $c_n = a_n + b_n = 8n + 3$ ist eine lineare Folge (Gleichungstyp !) und daher eine arithmetische Folge.

2. $d_n = a_n - b_n = 4n - 27$ ist eine lineare Folge (Gleichungstyp !) und daher eine arithmetische Folge.

3. $e_n = 3a_n = 18n - 36$ ist eine lineare Folge (Gleichungstyp !) und daher eine arithmetische Folge.

4. $f_n = a_n \cdot b_n = (6n - 12)(2n + 15) = 12n^2 - 24n + 90n - 180 = 12n^2 + 66n - 180$ ist keine lineare Folge und daher keine arithmetische Folge, was wir wie folgt beweisen (und das geht bei allen quadratischen Folgen so):

Beweis, daß $f_n = 12n^2 + 66n - 180$ keine arithmetische Folge ist:

$$f_1 = 12 + 66 - 180 = -102$$
$$f_2 = 48 + 132 - 180 = 0$$
$$f_3 = 108 + 198 - 180 = 126 \quad \text{usw.}$$

$$-102 \xrightarrow[+102]{} 0 \xrightarrow[+126]{} 126 \xrightarrow[+150]{} 276 \xrightarrow[+174]{} 450 \ldots$$

Die Differenzen sind nicht konstant sondern nehmen zu.
Interessant ist, wie sie zunehmen:

$$-102 \xrightarrow[+102]{} 0 \xrightarrow[+126]{} 126 \xrightarrow[+150]{} 276 \xrightarrow[+174]{} 450 \ldots$$

$$\xrightarrow{+24} \quad \xrightarrow{+24} \quad \xrightarrow{+24} \quad \xrightarrow{+24}$$

(6) Beweise allgemein, daß eine Folge der Form $f_n = an^2 + bn + c$ keine arithmetische Folge ist.

Beweis:

Wir zeigen, daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder nicht konstant ist:

$$f_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$

$$f_n = an^2 + bn + c$$

$$f_{n+1} - f_n = \left[a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right]$$

$$f_{n+1} - f_n = [an^2 + 2an + a + bn + b + c] - [an^2 + bn + c]$$

$$f_{n+1} - f_n = 2an + a + b = d_n$$

Und wie man sieht, hängt die Differenz von der Zahl n ab, bei der diese berechnet wird. Sie ist also nicht konstant. Daher ist die Folge nicht arithmetisch.

Ich habe die Differenzenfolge d_n genannt. Sie ist im Beispiel von der Seite zuvor mit

$$f_n = 12n^2 + 66n - 180 \qquad (a = 12, b = 66)$$

$$d_n = 2 \cdot 12 + 12 + 66 = 24n + 78$$

Vom Typ her ist diese nun eine arithmetische Folge mit der konstanten Differenz $d = 24$, was man auf der vorherigen Seite schon gesehen hat. Doch jetzt wurde dies bewiesen.

Eine solche Folge, deren Differenzenfolge eine arithmetische Folge ist, deren 2. Differenzenfolge also erst konstant ist, nennt man eine arithmetische Folge 2. Ordnung.

Darum geht es im nächsten Abschnitt !

Aufgabe 164:

(1) Berechne 5 Glieder dieser Folgen und zeige daß die 2. bzw. 3. Differenzenfolge konstant ist.

(a) $a_n = n^2 - 8n + 12$ (b) $a_n = -n^2 + 3n$

(c) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n + 1$ (d) $a_n = \frac{1}{3}n^3$

(e) $a_n = -n^3 + 2n + 20$ (f) $a_n = 4n^3 - 10n^2 + 3n - 300$

(2) Zeige, daß eine Differenzenfolge konstant ist und berechne darauf hin den Funktionsterm für die Folge.

(a) 21 ; 44 ; 69 ; 96 ; ...

(b) 19 ; 12 ; -1 ; -20 ; -45 ; ...

(c) 30 ; 29 ; 16 ; -15 ; -70 ; ...

(d) 2 ; 0 ; 26 ; 104 ; 258 ; ...

(3) Zeige durch Berechnung von 7 Gliedern, daß die 4. Differenzenfolge bei

$a_n = n^4 - n^2$ konstant ist.

Lösung:

(1) Berechne 5 Glieder dieser Folgen und zeige daß die 2. bzw. 3. Differenzenfolge konstant ist.

(a) $a_n = n^2 - 8n + 12$

Stammfolge:	5 ; 0 ; -3 ; -4 ; -3	
1. Differenzenfolge:	-5 ; -3 ; -1 ; 1	
2. Differenzenfolge:	2 ; 2 ; 2	(konstant!)

(b) $a_n = -n^2 + 3n$

Stammfolge:	2 ; 2 ; 0 ; -4 ; -10	
1. Differenzenfolge:	0 ; -2 ; -4 ; -6	
2. Differenzenfolge:	-2 ; -2 ; -2	(konstant!)

(c) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n + 1$

Stammfolge:	$\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{5}{2}$; 5 ; $\frac{17}{2}$	
1. Differenzenfolge:	$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$	
2. Differenzenfolge:	1 ; 1 ; 1	(konstant!)

(d) $a_n = \frac{1}{3}n^3$

Stammfolge:	$\frac{1}{3}$; $\frac{8}{3}$; 9 ; $\frac{64}{3}$; $\frac{125}{3}$	
1. Differenzenfolge:	$\frac{7}{3}$; $\frac{19}{3}$; $\frac{37}{3}$; $\frac{61}{3}$	
2. Differenzenfolge:	4 ; 6 ; 8	
3. Differenzenfolge:	2 ; 2 ;	(konstant!)

(e) $a_n = -n^3 + 2n + 20$

Stammfolge:	21 ; 16 ; -1 ; -36 ; -95	
1. Differenzenfolge:	-5 ; -17 ; -35 ; -59	
2. Differenzenfolge:	-12 ; -18 ; -24	
3. Differenzenfolge:	-6 ; -6 ;	(konstant!)

(f) $a_n = 4n^3 - 10n^2 + 3n - 300$

Stammfolge:	-303 ; -302 ; -273 ; -192 ; -35	
1. Differenzenfolge:	1 ; 29 ; 81 ; 157	
2. Differenzenfolge:	28 ; 52 ; 76	
3. Differenzenfolge:	24 ; 24	(konstant!)

(2) Zeige, daß eine Differenzenfolge konstant ist und berechne darauf hin den Funktionsterm für die Folge.

a) Stammfolge: 21 ; 44 ; 69 ; 96 ; ...
1. Differenzenfolge: 23 ; 25 ; 27 ; ...
2. Differenzenfolge: 2 ; 2 ; .... (konstant)

Weil die 2. Differenzenfolge konstant ist, kann ein quadratischer Funktionsterm vorliegen, also machen wir diesen Ansatz:

$a_n = an^2 + bn + c$ und bilden mit a_1, a_2 und a_3 3 Gleichungen:

n = 1: $a_1 = a + b + c = 21$ (1)

n = 2: $a_2 = 4a + 2b + c = 44$ (2)

n = 3: $a_3 = 9a + 3b + c = 69$ (3)

(2) – (1): $3a + b = 23$ (4)
(3) – (2): $5a + b = 25$ (5)

(5) – (4): $2a = 2 \Rightarrow a = 1$
in (4): $b = 23 - 3 = 20$
in (1): $c = 21 - 1 - 20 = 0$

Ergebnis: $a_n = n^2 + 20 \cdot n$

Probe: $a_4 = 16 + 80 = 96$

Neuberechnung: $a_5 = 25 + 5 \cdot 20 = 125$.

(b) Stammfolge: 19 ; 12 ; -1 ; -20 ; -45 ; ...
1. Differenzenfolge: -7 ; -13 ; -19 ; -25...
2. Differenzenfolge: -6 ; -6 ; -6 ; (konstant)

Weil die 2. Differenzenfolge konstant ist, kann ein quadratischer Funktionsterm vorliegen, also machen wir diesen Ansatz: $a_n = an^2 + bn + c$ und bilden mit a_1, a_2 und a_3 3 Gleichungen:

n = 1: $a_1 = a + b + c = 19$ (1)

n = 2: $a_2 = 4a + 2b + c = 12$ (2)

n = 3: $a_3 = 9a + 3b + c = -1$ (3)

(2) – (1): $3a + b = -7$ (4)
(3) – (2): $5a + b = -13$ (5)

(5) – (4): $2a = -6 \Rightarrow a = -3$
in (4): $b = -7 - 3a = -7 + 9 = 2$
in (1): $c = 19 - a - b = 19 + 3 - 2 = 20$

Ergebnis: $a_n = -3n^2 + 2n + 20$

Probe für $a_4 = -48 + 8 + 29 = -20$

Probe für $a_5 = -75 + 10 + 20 = -45$.

(c) Stammfolge: 30 ; 29 ; 16 ; -15 ; -70 ; ...
1. Differenzenfolge: -1 ; -13 ; -31 ; -55
2. Differenzenfolge: -12 ; - 18 ; -24
3. Differenzenfolge: -6 ; -6 ; (konstant!)

Weil die 3. Differenzenfolge konstant ist, kann ein Funktionsterm 3. Ordnung vorliegen, also machen wir diesen Ansatz:

$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ und bilden mit a_1 , a_2 , a_3 und a_4 vier Gleichungen.

n=1: $a_1 = a + b + c + d = 30$ (1)
n=2: $a_2 = 8a + 4b + 2c + d = 29$ (2)
n=3: $a_3 = 27a + 9b + 3c + d = 16$ (3)
n=4 $a_4 = 64a + 16b + 4c + d = -15$ (4)

(2) – (1): $7a + 3b + c = -1$ (5)
(3) – (2): $19a + 5b + c = -13$ (6)
(4) – (3): $37a + 7b + c = -31$ (7)

(6) – (5): $12a + 2b = -12$ (8)
(7) – (6): $18a + 2b = -18$ (9)
(9) – (8) $6a = -6 \Rightarrow a = -1$

in (8): $2b = -12 - 12a = -12 + 12 = 0 \Rightarrow b = 0$
in (5): $c = -1 - 7a - 3b = -1 + 7 = 6$
in (1): $d = 30 - a - b - c = 30 + 1 - 6 = 25$

Ergebnis: $a_n = -n^3 + 6n + +25$

Probe: $a_5 = -125 + 30 + 25 = -70$ stimmt !

(d) Stammfolge: 2 ; 0 ; 26 ; 104 ; 258 ; ...
1. Differenzenfolge: -2 ; 26 ; 78 ; 154
2. Differenzenfolge: 28 ; 52 ; 76
3. Differenzenfolge: 24 ; 24 ; (konstant!)

Weil die 3. Differenzenfolge konstant ist, kann ein Funktionsterm 3. Ordnung vorliegen, also machen wir diesen Ansatz:

$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ und bilden mit a_1 , a_2 , a_3 und a_4 vier Gleichungen.

n=1: $a_1 = a + b + c + d = 2$ (1)
n=2: $a_2 = 8a + 4b + 2c + d = 0$ (2)
n=3: $a_3 = 27a + 9b + 3c + d = 26$ (3)
n=4 $a_4 = 64a + 16b + 4c + d = 104$ (4)

(2) – (1): $7a + 3b + c = -2$ (5)
(3) – (2): $19a + 5b + c = 26$ (6)

Aufgabe 165:

Von einer geometrischen Folge kennt man $a_3 = 4$ und $a_6 = 8\sqrt{2}$.
Berechne a_9 und a_n.

Lösung:

$$q^3 = \frac{a^6}{a^3} = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^3 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$a^9 = a^6 \cdot q^3 = 8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 16 \cdot 2 = 32$$

Die Formel für a_n kann man von a_1 aus bestimmen, also so $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Aber dazu muß man zuerst a_1 kennen. Gut, wer will, kann dies berechnen:

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{2} = 2.$$ Dann erhält man

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \sqrt{2}^{n-1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{n+1}$$

Man kann aber genauso von a_3 aus rechnen, das geht dann so:

$$a_n = a_3 \cdot q^{n-3} = 4 \cdot \sqrt{2}^{n-3} = 2^2 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{2+\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}$$

Daraus folgt dann $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$

Aufgabe 166:

Von einer geometrischen Folge kennt man $a_4 = 3$ und $a_8 = 27$
Berechne alle Glieder von a_1 bis a_7 und a_n.

Lösung:

$$q^4 = \frac{a^8}{a^4} = \frac{27}{3} = 9 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{9} = \pm\sqrt{3}$$

ACHTUNG: Es gibt zwei passende geometrische Folgen,

Mit $a_1 = \frac{a^4}{q^3} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und mit $a_1{}^* = \frac{a^4}{q^3} = \frac{3}{-3\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Daraus folgt:

$$a_2 = a_1 \cdot q = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = +1 \qquad \text{(eindeutig!)}$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = 1 \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm\sqrt{3}$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = \pm\sqrt{3} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = 3 \qquad \text{(eindeutig!)}$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = 3 \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm 3\sqrt{3}$$
$$a_6 = a_5 \cdot q = \pm 3\sqrt{3} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = 9 \qquad \text{(eindeutig!)}$$
$$a_7 = a_6 \cdot q = 9 \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm 9\sqrt{3}$$

und $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right)^{n-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\pm\sqrt{3}\right)^n}{\pm\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(\pm\sqrt{3}\right)^n$$

Diese beiden Folgen kann man so darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{\sqrt3} & \searrow & & \nearrow & \sqrt3 & \searrow & & \nearrow & 3\sqrt3 & \searrow & & \nearrow & 9\sqrt3 & \searrow & \\
 & & 1 & & & & 3 & & & & 9 & & & & 27\\
-\frac{1}{\sqrt3} & \nearrow & & \searrow & -\sqrt3 & \nearrow & & \searrow & -3\sqrt3 & \nearrow & & \searrow & -9\sqrt3 & \nearrow &
\end{array}$$

Man beobachtet, daß hier zwei Folgen verknüpft sind. Sie treffen sich immer bei jedem übernächsten Glied, weil bei eben bei q^2 der Vorzeichenunterschied weg fällt. Die untere Folge ist wegen negativem q alternierend (d.h. sie wechselt ständig das Vorzeichen.

Aufgabe 167:

Untersuche, ob eine geometrische Folge vorliegt. Wenn ja, erstelle den Funktionsterm für a_n.

(a) $a_3 = 15;\ \ a_5 = 375;\ \ a_8 = 46875$

(b) $a_3 = 18;\ a_6 = \frac{9}{4};\ \ a_8 = \frac{9}{32}$

(c) $a_2 = 36;\ \ a_4 = 81;\ \ a_7 = \frac{2187}{8}$

(d) $a_1 = -27;\ \ a_3 = -3;\ a_4 = 1$

Lösung:

(a) $a_3 = 15;\ \ a_5 = 375;\ \ a_8 = 46875$

$$\frac{a_5}{a_3} = q^2 = \frac{375}{15} = 25 \;\Rightarrow\; q = \pm 5$$
$$\frac{a_8}{a_5} = q^3 = \frac{46875}{375} = 125 \;\Rightarrow\; q = \sqrt[3]{125} = 5$$

Für $q = 5$ liegt somit eine geometrische Folge vor.

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \;\Rightarrow\; a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{5} \cdot 5^{n-1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5^n}{5} = \frac{3}{25} \cdot 5^n$$

(b) $a_3 = 18;\ a_6 = \frac{9}{4};\ \ a_8 = \frac{9}{32}$

$$\frac{a^6}{a^3} = q^3 = \frac{\frac{9}{4}}{18} = \frac{9}{4 \cdot 18}(!) = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; q = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{2}$$
$$\frac{a_8}{a_6} = q^2 = \frac{9}{32} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; q = \pm\sqrt{\tfrac{1}{8}}$$

Da sich für q verschiedene Werte ergeben, sind die Quotienten aufeinander folgender Glieder nicht konstant. Also liegt keine geometrische Folge vor.

(c) $a_2 = 36$; $a_4 = 81$; $a_7 = \frac{2187}{8}$

$$\frac{a_4}{a_2} = q^2 = \frac{81}{36} = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$$
$$\frac{a_7}{a_4} = q^3 = \frac{2187}{8 \cdot 81} = \frac{27}{8} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Für $q = \frac{3}{2}$ liegt eine geometrische Folge vor mit

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{36}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24 \quad \text{und} \quad a_n = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{3} = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

(d) $a_1 = -27$; $a_3 = -3$; $a_4 = 1$

$$\frac{a_3}{a_1} = q^2 = \frac{-3}{-27} = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{a_4}{a_3} = q = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Für $q = -\frac{1}{3}$ liegt eine geometrische Folge vor mit

$$a_n = -27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -27\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot (-3) = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{81}{(-3)^n}$$

Aufgabe 168:

Gegeben ist eine geometrische Folge durch 2 Glieder. Berechne die angegebenen Glieder der Folge sowie den Funktionsterm für a_n .

(a) $a_2 = \frac{4}{5}$; $a_3 = \frac{2}{25}$; $a_1 = ?$; $a_4 = ?$

(b) $a_3 = 1$; $a_6 = \frac{1}{8}$; $a_{10} = ?$; $a_1 = ?$

(c) $a_4 = 24$; $a_6 = \frac{32}{3}$; $a_8 = ?$; $a_{11} = ?$

(d) $a_3 = 144$; $a_7 = \frac{729}{16}$; $a_2 = ?$; $a_5 = ?$

(e) $a_3 = 4$; $a_6 = 8\sqrt{2}$; $a_4 = ?$; $a_5 = ?$

(f) $a_5 = 3\sqrt{3}$; $a_8 = 27$; $a_2 = ?$; $a_6 = ?$

Lösung:

(a) $a_2 = \frac{4}{5}$; $a_3 = \frac{2}{25}$; $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{10}$, ergibt

$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8$ und $a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{125}$; sowie

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 80 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{80}{10^n} = 80 \cdot 10^{-n}$$

(b) $a_3 = 1$; $a_6 = \frac{1}{8}$; $q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$$a_{10} = a_6 \cdot q^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8 \cdot 16} = \frac{1}{128}$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{8}{2^n} = 8 \cdot 2^{-n}$$

(c) $a_4 = 24$; $a_6 = \frac{32}{3}$; $q^2 = \frac{a_6}{a_4} = \frac{32}{3 \cdot 24} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \Rightarrow q_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$

$$a_8 = a_6 \cdot q^2 = \frac{32}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{128}{27} \quad \text{und} \quad a_{11} = a_8 \cdot q^3 = \frac{128}{27} \cdot \left(\pm\frac{8}{27}\right) = \pm\frac{1024}{729}$$

Hier gibt es zwei mögliche geometrische Folgen !

mit $a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{24}{\pm\frac{8}{27}} = \pm 81$ und

$$a_n = \pm 81 \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \pm 81\left(\pm\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)^{-1} = 81 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)^n = \frac{243}{2} \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)$$

(d) $a_3 = 144$; $a_7 = \frac{729}{16}$; $q^4 = \frac{a_7}{a_3} = \frac{729}{16 \cdot 144} = \frac{3^6}{2^4 \cdot 9 \cdot 16} = \frac{3^4}{2^4 \cdot 16} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2 \cdot 2} = \pm\frac{3}{4}$

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{144}{\pm\frac{3}{4}} = \pm\frac{4 \cdot 144}{3} = \pm 4 \cdot 48 = \pm 192$$

$$a_5 = a_3 \cdot q^2 = 144 \cdot \frac{9}{16} = 81$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{144}{\frac{9}{16}} = \frac{144 \cdot 16}{9} = 16 \cdot 16 = 256$$

$$a_n = 256 \cdot \left(\pm\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \text{oder gar} \quad \ldots = 256 \cdot \left(\pm\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\pm\frac{4}{3}\right) = \pm\frac{1024}{3} \cdot \left(\pm\frac{3}{8}\right)^n$$

(e) $a_3 = 4$; $a_6 = 8\sqrt{2}$; $q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^3 \Rightarrow q = \sqrt{2}$

$a_4 = a_3 \cdot q = 4\sqrt{2}$; $a_5 = a_4 \cdot q = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 = 8$

$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{2} = 2$ und $a_n = 2 \cdot \sqrt{2}^{n-1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{n+1}$

(f) $a_5 = 3\sqrt{3}$; $a_8 = 27$; $q^3 = \frac{a_8}{a_5} = \frac{27}{3\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3 \Rightarrow q = \sqrt{3}$

Oder mittels Potenzrechnung:

$$q^3 = \frac{a_8}{a_5} = \frac{27}{3\sqrt{3}} = 3^{3-1-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}^3 \Rightarrow q = \sqrt{3}$$

$a_2 = \frac{a_5}{q^3} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1$ und $a_6 = a_5 \cdot q = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}^n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}^n.$$

Oder gar so: $a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}^n}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}^{n-2}.$

Aufgabe 169:

Berechne die ersten 5 Glieder dieser Folgen:

(a)	$a_n = 2^{3n}$	(b)	$a_n = 3 \cdot 2^{n+1}$	(c)	$a_n = 3^{-2n+2}$
(d)	$a_n = 3 \cdot 2^{4-n}$	(e)	$a_n = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	(f)	$a_n = \frac{3}{2^{n-1}}$
(g)	$a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-n}$	(h)	$a_n = \sqrt{\frac{2}{3^n}}$	(i)	$a_n = 48 \cdot \frac{2^{n-2}}{3^{n+1}}$

Lösung:

(a) $a_n = 2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \Rightarrow q = 8$

$a_1 = 2^3 = 8;\ a_2 = 2^6 = 64;\ a_3 = 2^9 = 512;\ a_4 = 2^{12} = 4096;\ a_5 = 2^{15} = 32768$

(b) $a_n = 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n \cdot 2 = 6 \cdot 2^n \Rightarrow q = 2$

$a_1 = 12;\ a_2 = 24;\ a_3 = 48;\ a_4 = 96;\ a_5 = 192$

(c) $a_n = 3^{-2n+2} = 3^2 \cdot 3^{-2n} = 9 \cdot (3^{-2})^n = 9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{9}$

$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{9};\ a_3 = \frac{1}{81};\ a_4 = \frac{1}{729};\ a_5 = \frac{1}{6561}$

(d) $a_n = 3 \cdot 2^{4-n} = 3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-n} = 3 \cdot 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$a_1 = 24;\ a_2 = 12;\ a_3 = 6;\ a_4 = 3;\ a_5 = \frac{3}{2}$

(e) $a_n = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = 10 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow q = \frac{2}{3}$

$a_1 = 10;\ a_2 = \frac{20}{3};\ a_3 = \frac{40}{9};\ a_4 = \frac{80}{27};\ a_5 = \frac{160}{81}$

(f) $a_n = \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n \cdot 2^{-1}} = \frac{6}{2^n} = 6 \cdot 2^{-n} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$a_1 = 3;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{3}{4};\ a_4 = \frac{3}{8};\ a_5 = \frac{3}{16}$

(g) $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-n} = \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-n} = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \Rightarrow q = \frac{2}{5}$

$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{2}{5};\ a_3 = \frac{4}{25};\ a_4 = \frac{8}{125};\ a_5 = \frac{16}{625}$

(h) $a_n = \sqrt{\frac{2}{3^n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}^n} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}^{-n} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$a_1 = \sqrt{2};\ a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}};\ a_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2};\ a_4 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};\ a_5 = \frac{\sqrt{2}}{9}$

(i) $a_n = 48 \cdot \frac{2^{n-2}}{3^{n+1}} = 48 \cdot \frac{2^n \cdot 2^{-2}}{3^n \cdot 3} = \frac{48}{3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow q = \frac{2}{3}$

$a_1 = \frac{8}{3};\ a_2 = \frac{16}{9};\ a_3 = \frac{32}{27};\ a_4 = \frac{64}{81};\ a_5 = \frac{128}{243}$

Aufgabe 170:

Schalte zwischen die beiden gegebenen Zahlen die passenden Zahlen, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_1 = 8\ ;\ a_5 = 64$ (b) $a_1 = 5;\ a_4 = 6$

Lösung:

(a) $a_1 = 8\ ;\ a_5 = 64$

$q^4 = \frac{a_5}{a_1} = \frac{64}{8} = 8 = 2^3 \Rightarrow q = \pm 2^{\frac{3}{4}} = \pm\sqrt[4]{8}$

$a_2 = \pm 8 \cdot \sqrt[4]{8}\ ;\ a_3 = +8 \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{8} = 8 \cdot \sqrt{8} = 16\sqrt{2}\ ;$

$a_4 = 16\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8} = 16 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 16 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 16 \cdot 2^{1+\frac{1}{4}} = 16 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 32 \cdot \sqrt[4]{2}$

(b) $a_1 = 5;\ a_4 = 6$

$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{6}{5} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{6}{5}}$ also $a_2 = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{5}}\ ;\ a_3 = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{5}}^{\,2} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{36}{25}}$

Aufgabe 171:

Schalte zwischen diese Zahlen so wenig wie möglich neue, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_3 = \sqrt{2};\ b = 2\sqrt{2};\ c = 8$

(b) $b = 12;\ a_5 = \frac{4}{3}\ ;c = \frac{4}{81}$

(c) $b = \frac{1}{2};\ c = 4;\ a_7 = 128\sqrt{2}$

Lösung:

(a) $a_3=\sqrt{2}\,;\;\; b=2\sqrt{2}\,;\;\; c=8$

Es ist $\frac{b}{a_3}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$ und $\frac{c}{b}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=\sqrt{2}^3$

Also kann man $q=\sqrt{2}$ verwenden und erhält

$\frac{b}{a_3}=q^2 \Rightarrow b=a_3\cdot q^2=a_5$ und $\frac{c}{b}=\sqrt{2}^3=q^3 \Rightarrow c=b\cdot q^3=a_5\cdot q^3=a^8$.

$$\begin{tikzcd}
a_3=\sqrt{2} \arrow[rr, "\boxed{\cdot q^2=\sqrt{2}^2=2}"] \arrow[dr, "\boxed{\cdot q=\sqrt{2}}"'] & & b=a_5=2\sqrt{2} \arrow[rrr, "\boxed{\cdot q^3=\sqrt{2}^3=2\sqrt{2}}"] \arrow[dr] & & & c=a_8=8 \\
& a_4=2 \arrow[ur, "\boxed{\cdot q=\sqrt{2}}"] & & a_6=4 \arrow[r, "\boxed{\cdot q=\sqrt{2}}"'] & a_7=4\sqrt{2} \arrow[ur, "\boxed{\cdot q=\sqrt{2}}"'] &
\end{tikzcd}$$

(b) $b=12\,;\;\; a_5=\frac{4}{3}\,;\; c=\frac{4}{81}$

Es ist $\frac{a_5}{b}=\frac{4}{3\cdot 12}=\frac{1}{9}$ und $\frac{c}{a_5}=\frac{4}{81}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{27}$

Man kann also $q=\frac{1}{3}$ verwenden und erhält

$\frac{a_5}{b}=\frac{1}{9}=q^2 \Rightarrow b=\frac{a_5}{q^2}=a_3$ und $\frac{c}{a_5}=\frac{1}{27}=q^3 \Rightarrow c=a_5\cdot q^3=a_8$

Graphische Darstellung:

$$\begin{tikzcd}
b=a_3=12 \arrow[rr, "\boxed{\cdot q^2=\frac{1}{9}}"] \arrow[dr, "\boxed{\cdot q=\frac{1}{3}}"'] & & a_5=\frac{4}{3} \arrow[rrr, "\boxed{\cdot q^3=\frac{1}{27}}"] \arrow[dr] & & & c=a_8=\frac{4}{81} \\
& a_4=4 \arrow[ur, "\boxed{\cdot q=\frac{1}{3}}"] & & a_6=\frac{4}{9} \arrow[r, "\boxed{\cdot q=\frac{1}{3}}"'] & a_7=\frac{4}{27} \arrow[ur, "\boxed{\cdot q=\frac{1}{3}}"'] &
\end{tikzcd}$$

(c) $b=\frac{1}{2}\,;\;\; c=4\,;\;\; a_7=128\sqrt{2}$

Es ist $\frac{c}{b}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16$ und $\frac{a_7}{c}=\frac{128\sqrt{2}}{4}=32\sqrt{2}=2^5\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{11}{2}}=\sqrt{2}^{11}$

Man kann somit $q=\sqrt{2}$ verwenden und erhält

$\frac{a_7}{c}=q^{11} \Rightarrow c=\frac{a_7}{a_{11}}=a_{-4}$ Dies ist nicht möglich.

Aufgabe 172:

Gegeben ist die Folge $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Ist $b=0{,}156281$ ein Glied dieser Folge ?

Lösung:

Ansatz: $\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0{,}156281$

Logarithmieren: $\lg\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lg 0{,}156281$

$$n \cdot \lg\left(\frac{3}{4}\right) = \lg 0{,}156281$$

$$n = \frac{\lg 0{,}156281}{\lg \frac{3}{4}} = \frac{\lg 0{,}156281}{\lg 3 - \lg 4} = 6{,}45...$$

Weil n keine natürliche Zahl ist, gehört b nicht zur Folge a_n.

Aufgabe 173:

Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 120 \cdot 6^n$ und $b_n = 2 \cdot 7^n$.

Lösung:

Bedingung: $b_n > a_n$

d.h. $2 \cdot 7^n > 120 \cdot 6^n$

$$\frac{7^n}{6^n} > 60$$

$$\left(\frac{7}{6}\right)^n > 60$$

Logarithmieren: $\lg\left(\frac{7}{6}\right)^n > \lg 60$

ACHTUNG: Man muß hierzu wissen, daß sich die „Richtung" einer Ungleichung nicht ändert, wenn man logarithmiert. Das heißt:

Aus $a > b$ folgt $\log a > \log b$ (für jede Basis)

Der Grund liegt in der Monotonie der Logarithmusfunktion; was hier nicht besprochen werden soll.

Anwendung des 3. Logarithmengesetzes:

$$n \cdot \lg\left(\frac{7}{6}\right) > \lg 60 \quad \Big| : \lg\left(\frac{7}{6}\right)$$

$$n > \frac{\lg 60}{\lg \frac{7}{6}} = \frac{\lg 60}{\lg 7 - \lg 6} = 26{,}56\ldots$$

Ergebnis: Ab $n = 27$ ist $b_n > a_n$.

Aufgabe 174:

Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2 \cdot 3^n$ und $b_n = 25200 \cdot 2^{-n}$.

Lösung:

Ansatz. $b_n < a_n$

d.h. $25200 \cdot 2^{-n} < 2 \cdot 3^n$ (1)

$$\frac{2^{-n}}{3^n} < \frac{2}{25200} \quad \text{bzw.} \quad 2^{-n} \cdot 3^{-n} < \frac{2}{25200} \qquad (2)$$

$$6^{-n} < \frac{2}{25200}$$

Logarithmieren: $\lg 6^{-n} < \lg \frac{2}{25200}$

3. Logarithmengesetz: $-n \cdot \lg 6 < \lg \frac{2}{25200} \quad \Big| : (-\lg 6)$

ACHTUNG: ***Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahle multipliziert oder dividiert, kehrt sie ihre Richtung um !***

Es folgt also $n > \frac{\lg 2 - \lg 25200}{-\lg 6} = 5{,}2...$

Ergebnis: Ab $n = 6$ ist $b_n < a_n$.

Aufgabe 175:

Die Folge $a_n = 5^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt.
Wird die Folge kleiner als 10^{-15} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

Lösung:

Ansatz: $a_n < 10^{-15}$

d.h. $5^{-n} < 10^{-15}$

Nun kann man zwei verschiedene Wege einschlagen:

1. Weg	2. Weg: Zuerst die Kehrwerte:
gleich logarithmieren:	$5^n > 10^{15}$
$\lg 5^{-n} < \lg 10^{-15}$	$\lg 5^n > 15$
$-n \cdot \lg 5 < -15$	$n \cdot \lg 5 > 15$
$n > \frac{-15}{-\lg 5} = \frac{15}{\lg 5} \approx 21{,}4$	$n > \frac{15}{\lg 5} \approx 21{,}4$

Ergebnis: Ab $n = 22$ (d.h. für $n \geq 22$) ist $a_n < 10^{-15}$.

Aufgabe 176:

Die Folge $a_n = 5 \cdot 4^n$ besteht aus lauter positiven Gliedern und wächst, denn wegen $q = 4$ ist $a_{n+1} = 4 \cdot a_n$. Wir vermuten schnell, daß diese Folge unendlich groß wird. Doch wie kann man das beweisen ?

Hierzu haben sich die Mathematiker einen kleinen Trick überlegt. Sie sagen: Wenn wir beweisen können, daß jede noch so große Zahl ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird, dann ist die Folge nach oben u beschränkt.

Lösung:

Dies schauen wir uns zuerst in Beispielen an.

(1) Ab welcher Nummer n ist $a_n > 10.000$?

$$a_n = 5 \cdot 4^n > 10\,000$$

Daraus folgt $\quad 4^n > 2000$

Logarithmieren $\quad \lg 4^n > \lg 2000$

3. Logarithmengesetz: $\quad n \cdot \lg 4 > \lg 2000$

$$n > \frac{\lg 2000}{\lg 4} \approx 5{,}48\ldots$$

Also gilt für $n \geq 6$: $a_n > 10\,000$.

Zur Kontrolle berechnen wir

$$a_5 = 5 \cdot 4^5 = 5120 < 10\,000 \;;\; a_6 = 5 \cdot 4^6 = a_5 \cdot 4 = 20480 > 10\,000 \quad !$$

(2) Ab welcher Nummer n ist $a_n > 10^{30}$?

$$a_n = 5 \cdot 4^n > 10^{30}$$

Daraus folgt $\quad 4^n > \frac{1}{5} \cdot 10^{30} = 0{,}2 \cdot 10^{30} = 2 \cdot 10^{29}$

Logarithmieren $\quad \lg 4^n > \lg\left(2 \cdot 10^{29}\right) = \lg 2 + \lg 10^{29} = \lg 2 + 29$

3. Logarithmengesetz: $\quad n \cdot \lg 4 > 29 + \lg 2$

$$n > \frac{29 + \lg 2}{\lg 4} \approx 48{,}6\ldots .$$

Also gilt für $n \geq 49$: $a_n > 10^{30}$.

Zur Kontrolle berechnen wir

$$a_{48} = 5 \cdot 10^{48} \approx 3{,}96 \cdot 10^{29} < 10^{30} \;;\; a_{49} = 5 \cdot 4^{49} = 6{,}3 \cdot 10^{30} > 10^{30} \quad !$$

(3) Es sei nun M eine beliebig große positive Zahl.
Ab welcher Nummer n ist $a_n > M$?

$$a_n = 5 \cdot 4^n > M$$

$$4^n > \tfrac{1}{5} \cdot M = \tfrac{M}{5}$$

Logarithmieren $\quad \lg 4^n > \lg \tfrac{M}{5} = \lg M - \lg 5$

3. Logarithmengesetz: $\quad n \cdot \lg 4 > \lg M - \lg 5$

$$n > \frac{\lg M - \lg 5}{\lg 4} .$$

Da für jedes solche M diese Ungleichung lösbar wird, überschreitet die Folge jede beliebig große Schranke M, d.h. sie wächst unbegrenzt !

Aufgabe 177:

(a) Ist $z = 17.294.403$ ein Glied der Folge $a_n = 3 \cdot 7^n$?

(b) Ist $z = \dfrac{1}{531441}$ ein Glied der Folge $a_n = 3^{-n}$

(c) Ist $z = 358\,271\,148$ ein Glied der Folge $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$?

Lösung:

(a) Ist $z = 17.294.403$ ein Glied der Folge $a_n = 3 \cdot 7^n$?

$a_n = 3 \cdot 7^n = 17\,294\,403 \Rightarrow 7^n = 5764\,801$

Logarithmieren: $\lg 7^n = \lg 5764801 \Rightarrow n \cdot \lg 7 = \lg 5764801$

$$n = \frac{\lg 5764801}{\lg 7} = 8$$

Ergebnis: $z = a_8$.

(b) Ist $z = \dfrac{1}{531441}$ ein Glied der Folge $a_n = 3^{-n}$

$3^{-n} = \dfrac{1}{531441} \Leftrightarrow 3^n = 531441$

Logarithmieren: $\lg 3^n = \lg 531441 \Leftrightarrow n \cdot \lg 3 = \lg 531441$

$$n = \frac{\lg 531441}{\lg 3} = 12$$

Ergebnis: $z = a_{12}$

(c) Ist $z = 358\,271\,148$ ein Glied der Folge $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$?

$\frac{1}{2} \cdot 4^n = 358\,271148 \Leftrightarrow 4^n = 716542296$

Logarithmieren: $\lg 4^n = \lg 716542296 \Leftrightarrow n \cdot \lg 4 = \lg 716542296$

$$n = \frac{\lg 716542296}{\lg 4} \approx 14{,}7$$

Weil n keine natürliche Zahl ist, ist z kein Glied der Folge.

Aufgabe 178:

(a) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 758 \cdot 4^n$ und $b_n = 5 \cdot 6^n$.

(b) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2{,}5^n$ und $b_n = 890 \cdot 2^n$.

(c) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 4^{12-n}$ und $b_n = 2 \cdot 3^{-n}$.

Lösung:

(a) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 758 \cdot 4^n$ und $b_n = 5 \cdot 6^n$.

$$5 \cdot 6^n > 758 \cdot 4^n$$
$$\frac{6^n}{4^n} > \frac{758}{5}$$
$$1{,}5^n > 151{,}6$$
$$n \cdot \lg 1{,}5 > \lg 151{,}6$$
$$n > \frac{\lg 151{,}6}{\lg 1{,}5} \approx 12{,}3$$

Ergebnis: Für $n \geq 13$ ist $b_n > a_n$.

(b) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2{,}5^n$ und $b_n = 890 \cdot 2^n$.

$$890 \cdot 2^n < 2{,}5^n$$
$$890 < \frac{2{,}5^n}{2^n}$$
$$1{,}25^n > 890$$
$$n \cdot \lg 1{,}25 > \lg 890$$
$$n > \frac{\lg 890}{\lg 1{,}25} \approx 30{,}4...$$

(c) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 4^{12-n}$ und $b_n = 2 \cdot 3^{-n}$.

$$2 \cdot 3^{-n} > 4^{12-n} \quad \text{d.h.} \quad \frac{2}{3^n} > \frac{4^{12}}{4^n}$$
$$\frac{4^n}{3^n} > \frac{4^{12}}{2} = 2^{23}$$
$$n \cdot \lg\left(\tfrac{4}{3}\right) > 23 \cdot \lg 2$$
$$n > \frac{23 \cdot \lg 2}{\lg 4 - \lg 3} \approx 55{,}4...$$

Ergebnis: Für $n \geq 56$ ist $b_n > a_n$.

Aufgabe 179:

(a) Die Folge $a_n = 3^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt.
Wird die Folge kleiner als 10^{-12} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

(b) Ab welchem n ist $a_n = 2^{5-3n}$ kleiner als 10^{-20} ?

(c) Ab welchem n ist $a_n = \left(\tfrac{4}{5}\right)^n$ kleiner als 10^{-10} ?

(d) Ab welchem n ist $a_n = \dfrac{240}{4^n}$ kleiner als 10^{-12} ?

Lösung:

(a) Die Folge $a_n = 3^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt.
Wird die Folge kleiner als 10^{-12} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

$$3^{-n} < 10^{-12}$$
$$-n \cdot \lg 3 < \lg 10^{-12} = -12 \quad \big| : [-\lg 3]$$
$$n > \frac{12}{\lg 3} \approx 25{,}1$$

Ergebnis: Für $n \geq 26$ ist $3^{-n} < 10^{-12}$.

(b) Ab welchem n ist $a_n = 2^{5-3n}$ kleiner als 10^{-20} ?

$$2^{5-3n} < 10^{-20}$$
$$(5-3n) \cdot \lg 2 < -20$$
$$5 \cdot \lg 2 - 3n \cdot \lg 2 < -20$$
$$5 \cdot \lg 2 + 20 < 3n \cdot \lg 2$$
$$3n \cdot \lg 2 > 5 \cdot \lg 2 + 20$$
$$n > \frac{\lg 2^5 + 20}{3 \cdot \lg 2} = \frac{\lg 32 + 20}{\lg 8} \approx 23{,}8$$

Ergebnis: Für $n \geq 24$ ist $2^{5-3n} < 10^{-20}$.

(c) Ab welchem n ist $a_n = \left(\tfrac{4}{5}\right)^n$ kleiner als 10^{-10} ?

$$\left(\tfrac{4}{5}\right)^n < 10^{-10}$$
$$n \cdot \lg 0{,}8 < -10 \quad \big| : \lg 0{,}8 < 0!!!$$
$$n > \frac{-10}{\lg 0{,}8} \approx 103{,}1...$$

Ergebnis: Für $n \geq 104$ ist $\left(\tfrac{4}{5}\right)^n < 10^{-10}$.

(d) Ab welchem n ist $a_n = \frac{240}{4^n}$ kleiner als 10^{-12} ?

$$\frac{240}{4^n} < 10^{-12}$$
$$\frac{240}{10^{-12}} < 4^n \Leftrightarrow 4^n > 240 \cdot 10^{12} = 2{,}4 \cdot 10^{14}$$
$$n \cdot \lg 4 > \lg\left(2{,}4 \cdot 10^{14}\right) = \lg 2{,}4 + \lg 10^{14}$$
$$n > \frac{\lg 2{,}4 + 14}{\lg 4} \approx 23{,}8...$$

Ergebnis: Für $n \geq 24$ ist $\frac{240}{4^n} < 10^{-12}$.

Aufgabe 180:

(a) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 8^n$ größer als 10 Milliarden ?

(b) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 34 \cdot 2^n$ größer als 10^{15} ?

(c) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

(d) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \frac{5^{n+1}}{2^{n-2}}$.

Lösung:

(a) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 8^n$ größer als 10 Milliarden ?

$$8^n > 10^{10}$$
$$n \cdot \lg 8 > 10$$
$$n > \frac{10}{\lg 8} \approx 11{,}07...$$

Ergebnis: Für $n \geq 12$ ist $8^n > 10^{10}$.

(b) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 34 \cdot 2^n$ größer als 10^{15} ?

$$34 \cdot 2^n > 10^{15} \quad \text{d.h.} \quad 2^n > \frac{10^{15}}{34}$$
$$n \cdot \lg 2 > \lg 10^{15} - \lg 34$$
$$n > \frac{15 - \lg 34}{\lg 2} \approx 44{,}7...$$

Ergebnis: Für $n \geq 45$ ist $34 \cdot 2^n > 10^{15}$.

(c) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^n > M$$
$$n \cdot \lg 1{,}5 > \lg M$$
$$n > \frac{\lg M}{\lg 1{,}5}$$

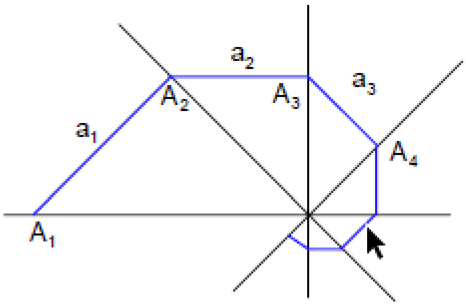
Ergebnis: Da M eine positive Zahl ist, kann die rechte Seite stets berechnet werden, d.h. die Ungleichung hat eine Lösungsmenge, so daß es eine Zahl n_o gibt, ab der gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^n > M$.

(d) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \frac{5^{n+1}}{2^{n-2}}$.

$$a_n = \frac{5^{n+1}}{2^{n-2}} = \frac{5 \cdot 5^n}{2^{-2} \cdot 2^n} = 20 \cdot 2{,}5^n$$
$$20 \cdot 2{,}5^n > M \quad \text{d.h.} \quad 2{,}5^n > \frac{M}{20}$$
$$n \cdot \lg 2{,}5 > \lg M - \lg 20$$
$$n > \frac{\lg M - \lg 20}{\lg 2{,}5}$$

Ergebnis: Da M eine positive Zahl ist, kann die rechte Seite stets berechnet werden, d.h. die Ungleichung hat eine Lösungsmenge, so daß es eine Zahl n_o gibt, ab der gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^n > M$.

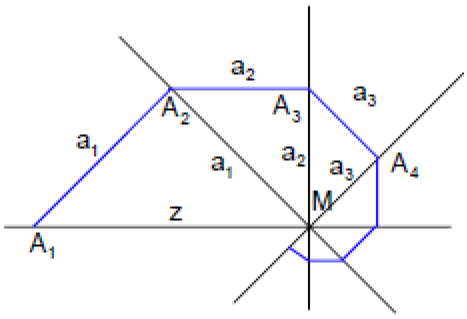
Aufgabe 181:



Nebenstehende Streckenschnecke entsteht, indem man von 4 Geraden ausgeht, die miteinander jeweils 45° bilden.
Dann beginnt man mit einem Punkt A_1, der vom Mittelpunkt M die Entfernung (z.B. z = 8) hat. Von A_1 aus fällt man das Lot im Uhrzeigersinn auf die nächste Gerade bis A_2. Von dort aus fällt man wieder das Lot bis A_3 usw. So entsteht eine Folge von Strecken a_1, a_2, ...

Berechne a_1 bis a_5 sowie a_n. Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.
Berechne a_{20}. Was läßt sich vermuten ?

Lösung:



Weil die Innenwinkel bei M alle 45° groß sind und zudem jedes der Dreiecke rechtwinklig ist, sind alle diese Rechtecke gleichschenklig rechtwinklig. Daher kann man mit dem Pythagoras diese Kette von Gleichungen erstellen:

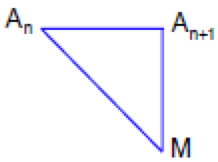
Dreieck A_1MA_2 :

$a_1^2 + a_1^2 = z^2 \Rightarrow 2a_1^2 = z^2 \Rightarrow a_1^2 = \frac{1}{2}z^2$

Also wird $a_1 = z \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Dreieck A_2MA_3 : $a_2^2 + a_2^2 = a_1^2 \Rightarrow 2a_2^2 = a_1^2 \Rightarrow a_2^2 = \frac{1}{2}a_1^2$, also $a_2 = a_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

Beliebiges Dreieck A_nMA_{n+1}: $a_n^2 + a_n^2 = a_{n-1}^2 \Rightarrow 2a_n^2 = a_{n-1}^2 \Rightarrow a_n^2 = \frac{1}{2}a_{n-1}^2$



Also wird $a_n = a_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$. Daraus bilden wir

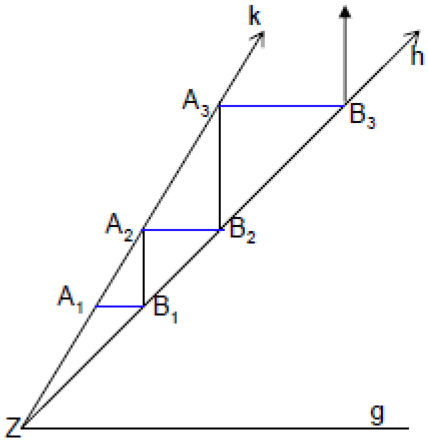
$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und man sieht, daß der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist !

Also liegt eine geometrische Folge vor mit $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Allgemeine Berechnungsformel: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = z\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}^{n-1} = z \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}^n = \frac{z}{\sqrt{2}^n} = z \cdot 2^{-\frac{n}{2}}$

Wie man sieht, gibt es verschiedene Möglichkeiten, einen Berechnungsterm für a_n aufzuschreiben.

Aufgabe 182:



Die Gerade g bildet mit h einen 45° Winkel, g und k dagegen 60°.
Wir wählen einen beliebigen Punkt A_1 auf k und konstruieren der Reihe nach die Punkte B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 usw.

Es sei $a_1 = \overline{A_1B_1}$, $a_n = \overline{A_nB_n}$.
Stelle eine Berechnungsformel für a_n auf, wenn a beliebige groß sein kann.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

Lösung:

(1) Im Dreieck $A_1B_1A_2$ ist $\alpha = 60^\circ$ und es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_1B_1}} \Rightarrow \overline{A_2B_1} = \overline{A_1B_1}\cdot\tan 60^\circ = \overline{A_1B_1}\cdot\sqrt{3} = a_1\cdot\sqrt{3}$$

Im Dreieck $B_1B_2A_2$ ist $\beta = 45^\circ$, also ist das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig, also sind die Strecken A_2B_2 und A_2B_1 gleich groß:
$a_2 = \overline{A_2B_2} = a_1\sqrt{3}$

(2) Im Dreieck $A_2B_2A_3$ ist $\alpha = 60^\circ$ und es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A_3B_2}}{\overline{A_2B_2}} \Rightarrow \overline{A_3B_2} = \overline{A_2B_2}\cdot\tan 60^\circ = \overline{A_2B_2}\cdot\sqrt{3} = a_2\cdot\sqrt{3}$$

Im Dreieck $B_2B_3A_3$ ist $\beta = 45^\circ$, also ist das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig, also sind die Strecken A_3B_3 und A_3B_2 gleich groß:
$a_3 = \overline{A_3B_3} = a_2\sqrt{3}$

Man beobachtet, daß die nächste Strecke immer um den Faktor $\sqrt{3}$ größer ist Also die vorangehende. Also liegt eine geometrische Folge vor.

Allgemein gilt dann: $a_n = a_1\cdot\sqrt{3}^{\,n-1}$

Aufgabe 183:

Beweise, daß diese Folgen geometrisch sind:

(a) $a_n = c\,b^{kn}$ (b) $a, = bk^{-n}$.
(c) $a_n = c\,b^{-kn}$ (d) $a_n = c\,b^{kn+s}$.

Lösung:

(a) $a_n = c\,b^{k\,n}$ (b) $a_n = b^{k-n}$ (c) $a_n = c\,b^{-k\,n}$ (d) $a_n = c\,b^{k\,n+s}$

zu (a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c \cdot b^{k(n+1)}}{c \cdot b^{kn}} = b^{kn+k-kn} = b^k$

zu (b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{k-(n+1)}}{b^{k-n}} = b^{k-n-1-k+n} = b^{-1} = \frac{1}{b}$

zu (c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c \cdot b^{-k(n+1)}}{c \cdot b^{-kn}} = b^{-kn-k+kn} = b^{-k} = \frac{1}{b^k}$

zu (d) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c \cdot b^{k(n+1)+s}}{c \cdot b^{kn+s}} = b^{kn+k+s-kn-s} = b^k$

Aufgabe 184:

Von einer arithmetischen Folge ist die Summe aus dem 5. und 11. Glied 58, die Summe aus dem 6. und 14. Glied 80. Berechne a_1 a_n und a_{12} .

Lösung:

a_n sei die arithmetische Folge mit den Eigenschaften
$a_5 + a_{11} = 58$ (1) und $a_6 + a_{14} = 80$ (2)
Da $a_{11} = a_1 + 10\,d$ ist und $a_5 = a_1 + 4d$
folgt aus (1): $a_1 + 10\,d + a_1 + 4d = 58$,
d.h. $2a_1 + 14\,d = 58$ (3)
Da $a_6 = a_1 + 5\,d$ ist und $a_{14} = a_1 + 13\,d$
folgt aus (2): $a_1 + 5\,d + a_1 + 13\,d = 80$
d.h. $2a_1 + 18\,d = 80$ (4)
Durch Subtraktion (4) – (3) erhält man $4d = 22$ d.h. $d = \frac{11}{2} = 5{,}5$
Setzt man dies in (3) ein, folgt $2a_1 + 77 = 58$ also $2a_1 = -19$ d.h.
$a_1 = -\frac{19}{2} = -9{,}5$
Es folgt: $a_n = a_1 + (n-1)d = -\frac{19}{2} + (n-1)(-\frac{11}{2}) = -\frac{11}{2}n - 15$
Und speziell $a_{12} = 66 - 15 = 51$.

Aufgabe 185:

Die Summe der ersten drei Glieder einer arithmetischen Folge beträgt 15, die Summe ihrer Kehrwerte $^{59}/_{45}$. Bestimme die Glieder der Folge.

Lösung:

Gegeben sind zwei Fakten:

1. $a_1 + a_2 + a_3 = 15$. Das bedeutet $a_1 + a_1 + d + a_1 = 15$

Also $3a_1 + 3d = 15$ | :3 ergibt $a_1 + d = 5$ (1)

Und da $a_2 = a_1 + d$ folgt $a_2 = 5$

2. $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{59}{45}$$

ergibt $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1 + 2d} = \frac{59}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + 2d} = \frac{59}{45} - \frac{1}{5} = \frac{50}{45} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + 2d} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \frac{a_1 + 2d + a_1}{(a_1 + 2d)a_1} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \frac{2a_1 + 2d}{a_1^2 + 2da_1} = \frac{10}{9}$$

Aufgrund von Gleichung (1) können wir d eliminieren:

Im Zähler des letzten Bruches steht $2a_1 + 2d$, dies ist 10, im Nenner ersetzen wir d durch $5 - a_1$: $$\frac{10}{a_1^2 + 2(5 - a_1)a_1} = \frac{10}{9}$$

Division durch Kehrwert auf beiden Seiten:

$$a_1^2 + 2(5 - a_1)a_1 = 9$$

$$a_1^2 + 10a_1 - 2a_1^2 = 9$$

$$-a_1^2 + 10a_1 - 9 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 10a_1 + 9 = 0$$

$$a_1 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

1. Lösung: $a_1 = 9$ folgt $d = 5 - 9 = -4$ also $a_n = 9 + (n-1)(-4) = -4n + 14$

2. Lösung: $a_1 = 1$ folgt $d = 5 - 1 = 4$ also $a_n = 1 + (n-1)4 = 4n - 3$.

Aufgabe 186:

Berechne die Summe der ersten 20 Glieder dieser arithmetischen Folge:

$a_1 = 215$; $a_2 = 205$; $a_3 = 195$; ...

Lösung:

Wir müssen zuerst a_{20} berechnen: Es ist $d = a_2 - a_1 = -10$ (!)

und folglich $a_{20} = 215 + 19 \cdot (-10) = 215 - 190 = 25$

$$s_{20} = \frac{20}{2}(215 + 25) = 10 \cdot 240 = 2400$$

Aufgabe 187:

Es ist $a_n = 100 - 7n$ Berechne $s_n = ?$

Lösung:

Man muß erkennt, daß d = - 7 ist und berechnet $a_1 = 93$

Es folgt: $s_n = \frac{n}{2} \cdot (93 + 100 - 7n) = \frac{n}{2}(193 - 7n) = -\frac{7}{2}n^2 + \frac{193}{2}n$

Aufgabe 188:

Es ist $a_4 = 64$ und $a_9 = 99$ Berechne s_{25} .

Lösung:

$a_9 - a_4 = 5d = 99 - 64 = 35 \Rightarrow d = 7$

Also ist $a_1 = a_4 - 3d = 64 - 21 = 43$ und $a_{25} = a_1 + 24 \cdot d = 43 + 24 \cdot 7 = 211$

Daher erhält man $s_{25} = \frac{25}{2}(43 + 211) = \frac{25}{2} \cdot 254 = 25 \cdot 127 = 3175$

Aufgabe 189:

5) Berechne die Summe der ganzen Zahlen von 37 bis 95.

6) Berechne die Summe der geraden Zahlen von 100 bis 500

7) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 1357 bis 2739

8) $528 + 540 + 552 + \ldots + 2544 = ?$

9) $264 + 421 + \ldots + 1677 = ?$

10) $412 + 360 + 308 + \ldots.$ Berechne s_{10} und s_n

11) $20 + 17 + 14 + \ldots. - 64 = ?$

12) $-218 - 200 - 182 - \ldots$
Berechne s_{20} und s_{500} . Ab welcher Nummer n ist s_n positiv ?

13) Gegeben ist die Folge a_n durch $a_1 = 4$ und $d = 3$. Berechne s_{20}

14) Gegeben ist $a_n = 105 - 5n$. Berechne s_{21} und s_n .

15) Gegeben ist $a_n = 12n - 30$. Berechne s_{30} und s_n.

16) Gegeben ist $a_n = \frac{3}{4}n + \frac{2}{3}$ Berechne s_5 ; s_{12} ; s_n

Lösung:

5) Berechne die Summe der ganzen Zahlen von 37 bis 95.

Die Folge 37, 38, ... hat d = 1 und die Summe besteht aus 59 Zahlen:

$$s_{59} = \frac{59}{2}\cdot(37+95) = \frac{59\cdot 132}{2} = 3894$$

6) Berechne die Summe der geraden Zahlen von 100 bis 500

Aus $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow (n-1)d = a_n - a_1 = 400 \Rightarrow n-1 = 200,\ n = 201$

Daher ist $100 + 102 + \ldots + 500 = s_{201} = \frac{201}{2}\cdot(100+500) = 201\cdot 300 = 60300$.

7) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 1357 bis 2739

$(n-1)d = 2739 - 1357 = 1382 \Rightarrow n-1 = 691$ und $n = 692$

$1357 + 1359 + \ldots + 2739 = \frac{692}{2}\cdot(1357+2739) = 1.417.216$

8) $528 + 540 + 552 + \ldots + 2544 = ?$

Zunächst ist d = 540 – 528 = 12 und $(n-1)\cdot 12 = 2544 - 528 = 2016$

Also folgt $n-1 = \frac{2016}{12} = 168 \Rightarrow n = 169$.

$s_{169} = \frac{169}{2}\cdot(528+2544) = 259584$

9) $264 + 421 + \ldots + 1677 = ?$

d = 421 – 264 = 157. $(n-1)\cdot 157 = 1677 - 264 = 1413 \Rightarrow n-1 = 9 \Rightarrow n = 10$

$s_{10} = \frac{10}{2}\cdot(264+1677) = 9705$

10) $412 + 360 + 308 + \ldots$ Berechne s_{10} und s_n

Aus $a_2 - a_1 = 360 - 412 = -52$ und $a_3 - a_2 = 308 - 360 = -52$ folgt d = - 52.

$a_{10} = a_1 + 9\cdot d = 412 - 9\cdot 52 = -56 \Rightarrow s_{10} = 5\cdot(412-56) = 1780$

$a_n = 412 + (n-1)(-52) = -52\cdot n + 464$

$s_n = \frac{n}{2}\cdot(412 - 52n + 464) = -26n^2 + 438$

11) $20 + 17 + 14 + \ldots - 64 = ?$

Es ist d = - 3 und $(n-1)d = -64 - 20 = -84 \Rightarrow n-1 = 28 \Rightarrow n = 29$.

$s_{29} = \frac{29}{2}\cdot(20-64) = -638$

12) $-218-200-181-\ldots$ Berechne s_{20} und s_{500} .
Ab welcher Nummer n ist s_n positiv ?

$a_2 - a_1 = -200 + 218 = 18$ und $a_3 - a_2 = -182 + 200 = 18$
Also liegt eine arithmetische Reihe mit d = 18 vor.

$a_{20} = -218 + 19 \cdot 18 = 124$
$s_{20} = 10 \cdot (-218 + 124) = -940$

$a_n = -218 + (n-1) \cdot 18 = 18n - 236$
$s_n = \frac{n}{2} \cdot (-218 + 18n - 236) = \frac{1}{2} n (18n - 454) = 9n^2 - 227n$
s_n ist positiv, wenn $18n - 454 > 0$ ist, also für $n > \frac{454}{18} = 25,2\ldots,$
d.h. ab der Nummer $n_o = 26$.

13) Gegeben ist die Folge a_n durch $a_1 = 4$ und $d = 3$. Berechne s_{20}

$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$

$s_{20} = 10 \cdot (4 + 61) = 10 \cdot 65 = 650$

14) Gegeben ist $a_n = 105 - 5n$. Berechne s_{21} und s_n .

$$a_1 = 100; \quad a_{21} = 0 \Rightarrow s_{21} = \frac{21}{2}(100+0) = 1050$$

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(100+105-5n) = \frac{n}{2}\cdot(205-5n) = -\frac{5}{2}n^2 + \frac{205}{2}n$$

Zur Kontrolle: $s_{21} = -\frac{5}{2}\cdot 21^2 + \frac{205}{2}\cdot 21 = 1050$

15) Gegeben ist $a_n = 12n - 30$. Berechne s_{30} und s_n.

$$a_1 = 12 - 30 = -18 \ ; \ a_{30} = 360 - 30 = 330$$

$$s_{30} = 15\cdot(-18+330) = 15\cdot 312 = 4680$$

$$s_n = \frac{n}{2}(-18+12n-30) = \frac{n}{2}(12n-48) = 6n^2 - 24n$$

16) Gegeben ist $a_n = \frac{3}{4}n + \frac{2}{3}$ Berechne s_5 ; s_{12} ; s_n

$$a_1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}; \ a_5 = \frac{3}{4}\cdot 5 + \frac{2}{3} = \frac{45+8}{12} = \frac{53}{12}; \ a_{12} = \frac{3}{4}\cdot 12 + \frac{2}{3} = \frac{108+8}{12} = \frac{116}{12}$$

$$s_5 = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{17}{12} + \frac{53}{12}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{70}{12} = \frac{175}{12}; \quad s_{12} = 6\cdot\left(\frac{17}{12} + \frac{116}{12}\right) = 6\cdot\frac{133}{12} = \frac{133}{2}.$$

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{17}{12} + \frac{3}{4}n + \frac{2}{3}\right) = \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{25}{12} + \frac{3}{4}n\right) = \frac{3}{8}n^2 + \frac{25}{24}n.$$

Aufgabe 190:

Berechne folgende geometrische Reihen:

	Gegeben		Gesucht
(a)	$a_1 = {}^3/_2$	$q = 4$	s_{10}
(b)	$a_1 = 5$	$q = {}^1/_2$	s_{15}
(c)	$a_1 = -2$	$q = -4$	s_8
(d)	$a_1 = -9$	$q = {}^1/_3$	s_{12}
(e)	$a_1 = 2187$	$q = {}^1/_4$	s_{12}
(f)	$a_1 = 6$	$q = -3$	s_n

Lösung:

a) Gegeben ist eine geometrische Folge mit $a_1 = \frac{3}{2}$ und q = 4. Dann folgt

$$s_{10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4^{10} - 1}{3} = \frac{4^{10} - 1}{2} = \frac{1.048.575}{2} = 524.287,5$$

b) Gegeben ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 5$ und $q = \frac{1}{2}$. Dann folgt

$$s_{15} = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}}{\frac{1}{2}} = 10\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{15}\right] = 9{,}999.694.8$$

c) Gegeben ist eine geometrische Folge mit $a_1 = -2$ und $q = -4$. Dann folgt

$$s_8 = -2 \cdot \frac{1 - (-4)^8}{1 + 4} = -2 \cdot \frac{1 - 4^8}{5} = -0{,}4\left[1 - 4^8\ \right] = 26.214$$

d) Gegeben ist eine geometrische Folge mit $a_1 = -9$ und $q = \frac{1}{3}$. Dann folgt

$$s_{12} = -9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{3}} = -9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{\frac{2}{3}} = -\frac{27}{2}\left[1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{12}\right] = -13{,}499.975$$

e) Gegeben ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 2187$ und $q = \frac{1}{4}$.
Dann folgt

$$s_{12} = 2187 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{12}}{1-\frac{1}{4}} = 2187 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{12}}{\frac{3}{4}} = 2926 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{12}\right] = 2925{,}999\ldots$$

f) Gegeben ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 6$ und $q = -3$.
Dann folgt

$$s_n = 6 \cdot \frac{1-(-3)^n}{1+3} = 6 \cdot \frac{1-(-3)^n}{4} = \frac{3}{2} \cdot \left[1-(-3)^n\right]$$

Aufgabe 191:

Welche arithmetische Folge liegt dieser Reihenformel zugrunde?
(Mache zur Bestätigung die Probe indem du erneut s_n zu a_n berechnest.)

(a) $s_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$ (b) $s_n = 10\,n - 2\,n^2$ (c) $s_n = 0{,}5\,n^2 + 7{,}5\,n$

(d) $s_2 = 42$, $s_3 = 68$ (e) $s_3 = -6$, $s_5 = 10$ (d) $s_2 = -7$; $s_5 = 5$

(e) $s_4 = 184$, $s_{10} = 820$

Lösung:

a) $s_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n \Rightarrow s_1 = \frac{3}{2} - \frac{17}{2} = -7$ d.h. $a_1 = -7$; $s_2 = -11$ also
$a_2 = s_2 - a_1 = -11+7 = 3$, damit $d = a_2 - a_1 = 3$ und $a_n = a_1+(n-1)d = 3n - 10$

b) $s_n = 10n - 2n^2$ liefert $s_1 = 8 = a_1$ und $s_2 = 12$, somit $a_2 = s_2 - a_1 = 4$, damit
$d = a_2 - a_1 = -4$ und $a_n = a_1 + (n-1)d = -4n + 12$

c) $s_n = 0{,}5n^2 + 7{,}5\,n$ liefert $s_1 = 8 = a_1$ und $s_2 = 17$, somit $a_2 = s_2 - a_1 = 9$, damit
$d = a_2 - a_1 = 1$ und $a_n = a_1 + (n-1)d = n + 7$

d) $s_2 = 42$; $s_3 = 68$. Aus $s_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1+d) = 2a + d = 42$ (1) und aus
$s_3 = 3a_1 + 3d = 68$ folgt über (2) – 3*(1): $3a_1 - 6a_1 = 68 - 126$ also $a_1 = \frac{58}{3}$.
In (1) ergibt $d = \frac{10}{3}$ und somit $a_n = \frac{58}{3} + (n-1)\frac{10}{3} = \frac{10}{3}n + 16$

e) $s_3 = -6$ bedeutet $3a_1 + 3d = -6$ (1); $s_5 = 10$ bedeutet $5a_1 + 10d = 10$ (2)
Dividiert man (1) durch 3, so folgt $a_1 + d = -2$ (3)
Dividiert man (2) durch 5, so folgt $a_1 + 2d = 2$ (4)
(4)-(3) liefert $d = 4$, aus (3) folgt dann $a_1 = -6$.
Somit erhält man $a_n = -6 + (n-1)\,4 = 4n - 10$

f) $s_2 = -7$ bedeutet $2a_1 + d = -7$ (1); $s_5 = 5$ bedeutet $5a_1 + 10d = 5$ (2)
(2) – 10*(1) liefert $-15a_1 = 75$, also $a_1 = -5$. In (1) folgt $d = 3$. Daher:
$a_n = -5 + (n-1)3 = 3n - 8$

g) $s_4 = 184$ bedeutet $4a_1 + 6d = 184$ (1) | : 2 folgt $2a_1 + 3d = 92$ (3)
$s_{10} = 820$ bedeutet $10a_1 + 45d = 820$ (2) | : 5 folgt $2a_1 + 9d = 164$ (4)
(4) – (3) liefert $-3d = -9$, also $d = 3$. Aus (1) folgt damit $a_1 = -5$.
Somit $a_n = 28 + (n-1)12 = 12\,n + 16$

Potenzreihen

Aufgabe 192:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

Lösung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

Der Entwicklungspunkt ist gleich 0 und wir wollen wissen, für welche x die Reihe konvergiert. Dafür müssen wir lediglich die Folge

$$a_n = n^2$$

betrachten. Wir benutzen direkt die Formel von Euler:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = 1$$

Für alle $|x|<1$ konvergiert die Reihe also auf jeden Fall, wir müssen jetzt nur noch die Randpunkte 1 und -1 betrachten, also die Fälle:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$$

Da wir wissen, dass n^2 keine Nullfolge ist zeigt sich direkt, dass beide Reihen divergieren (siehe auch den Artikel über Konvergenz von Reihen). Der Definitionsbereich für f(x) ist also:

$$D =]-1, 1[$$

Aufgabe 193:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$$

Lösung:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$$

Wir benutzen das Kriterium nach Euler:

$$a_n = \frac{n^3}{n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^3(n+1)!}{n!(n+1)^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^3(n+1)}{(n+1)^3} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^3}{(n+1)^2} \right| = \infty$$

Wir machen also nichts anderes, als die Folge einzusetzen, den Bruch zu kürzen und dann den Grenzwert zu berechnen.

Das Ergebnis hier bedeutet einfach, dass die Potenzreihe auf den gesamten reellen Zahlen konvergiert und die Funktion damit überall definiert ist.

Aufgabe 194:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$$

Lösung:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$$

Die Folge hier lautet:

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

Aufgrund des n in der Potenz wenden wir einfach Cauchy-Hadamard an und vereinfachen den Bruch:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty$$

Den lim sup können wir hier genauso betrachten wie den normalen Limes. Wie in der Aufgabe zuvor ist hier die Lösung der Aufgabe also, dass der Konvergenzradius unendlich ist und damit die Funktion auf allen reellen Zahlen definiert ist!

Aufgabe 195:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$$

Lösung:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$$

Hier bestimmen wir lediglich den Konvergenzradius und lassen die Randpunkte außen vor. Da wir in der Folge bereits ein n² in der Potenz haben liegt die Berechnung nach Cauchy-Hadamard nahe:

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

Und schon sind wir fertig!

Aufgabe 196:

Für welche Werte konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n} x^n$$

Lösung:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n} x^n$$

Wieder haben wir ein n in der Potenz, daher verwenden wir die Formel nach Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(5+(-1)^n)^n}{n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}}$$

Hier bekommen wir jetzt das erste mal ein Problem, denn der obere Teil der Folge divergiert mit den Häufungspunkten 4 und 6. Da wir aber direkt von Anfang an den lim sup anstatt des lim genommen haben stört uns das nicht weiter und wir nehmen – nach Definition des lim sup, also des größten Häufungspunktes – die 6:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{\frac{6}{1}} = \frac{1}{6}$$

Und das ist der Konvergenzradius.

Taylorreihen

Aufgabe 197:

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - xy = 0, \quad y(0) = 1$$

mit einem Potenzreihenansatz!

Lösung:

$$y' - xy = 0, \quad y(0) = 1$$

Aus der allgemeinen Potenzreihe $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ergibt sich die Ableitung $y'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$. Die Differentialgleichung lautet also umgeformt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} - x \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0$$

Verschiebt man ganz links den Index, sodass die Summe wieder bei $i = 0$ beginnt, kommt man auf:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0$$

$$a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0$$

Erneutes Indexverschieben in derselben Summe führt zu:

$$a_1 + \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) a_{i+2} x^{i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = 0$$

$$a_1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left((i+2) a_{i+2} - a_i\right) x^{i+1} = 0$$

Die Lösung hierfür ist:

$$a_1 = 0 \text{ und } (i+2)a_{i+2} = a_i$$

Falls i **ungerade** ist, ergibt sich aus $a_1 = 0$ über die zweite Bedingung auch $a_3 = 0$, hieraus $a_5 = 0$ usw., also allgemein

$$a_i = 0$$

Falls i **gerade** lässt sich a_i über die Bedingung $a_{i+2} = \frac{a_i}{i+2}$ induktiv auf a_0 zurückführen:

$$a_i = \frac{a_{i-2}}{i} = \frac{a_{i-4}}{i(i-2)} = \dots = \frac{a_0}{i(i-2)\dots\cdot 4\cdot 2}$$

Außerdem gilt die Bedingung $y(0) = a_0 + 0\cdot 0 + a_2 0^2 + 0\cdot 0 + a_4 0^4 \dots = a_0 = 1$. Also gilt sind die Koeffizienten für ungerade i:

$$a_i = \frac{1}{i(i-2)\dots\cdot 4\cdot 2}$$

Um dies allgemein auszudrücken, kann man für irgendein $i \neq 0$ auch schreiben:

$$a_{2i} = \frac{1}{2i(2i-2)\dots\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2^i\cdot i(i-1)\dots\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{2^i i!}$$

Damit ist es möglich, die Potenzreihe nur für alle geraden Potenzen darzustellen, was nötig ist, da die ungeraden aufgrund ihrer verschwindenden Koeffizienten nicht auftauchen. In der Summe kann auch $i = 0$ dazugenommen werden, da $0! = 1$.

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i i!} x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{2}x^2\right)^i$$
$$= e^{1/2x^2}$$

Zur **Kontrolle** kann man auch den Ansatz über Separation der Variablen wählen:

$$y' - xy = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy$$
$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = x\mathrm{d}x$$
$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\mathrm{d}x$$
$$\Longrightarrow \ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + c$$
$$\Longrightarrow y = e^{1/2x^2+c}$$

Da $y(0) = e^c = 1$, ist $c = 0$ und das Ergebnis bestätigt sich mit diesem Ansatz:

$$y(x) = e^{1/2x^2}$$

Aufgabe 198:

1. Entwickeln Sie die logarithmische Funktion $f(x) = ln\,x$ um die Stelle $x = 1$ in eine Taylorreihe.
2. Stellen Sie $ln\,2$ in Form einer Zahlenreihe dar.

Lösung:

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1 \; - \; \text{Entwicklungszentrum}$$

$$f(x_0) = \ln x_0 = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \qquad f''(1) = -1 = -1!$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}, \qquad f'''(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -2 \cdot 3 \; x^{-4}, \qquad f^{(4)}(1) = -2 \cdot 3 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = -2 \cdot 3 \cdot (-4) \; x^{-5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \; x^{-5} = 4! \; x^{-5}$$

$$f^{(5)}(1) = 4!$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \, (n-1)! \; x^{-n}, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} \, (n-1)!$$

Taylorreihe einer Funktion im Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Um $\ln 2$ in Form einer Zahlenreihe darzustellen, muss man den Wert $x = 2$ in die Formel (●) auf Seite 2-1b einsetzen.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots \simeq 0.6931$$

Den Konvergenzradius r der Taylorreihe bestimmt man nach der Formel:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

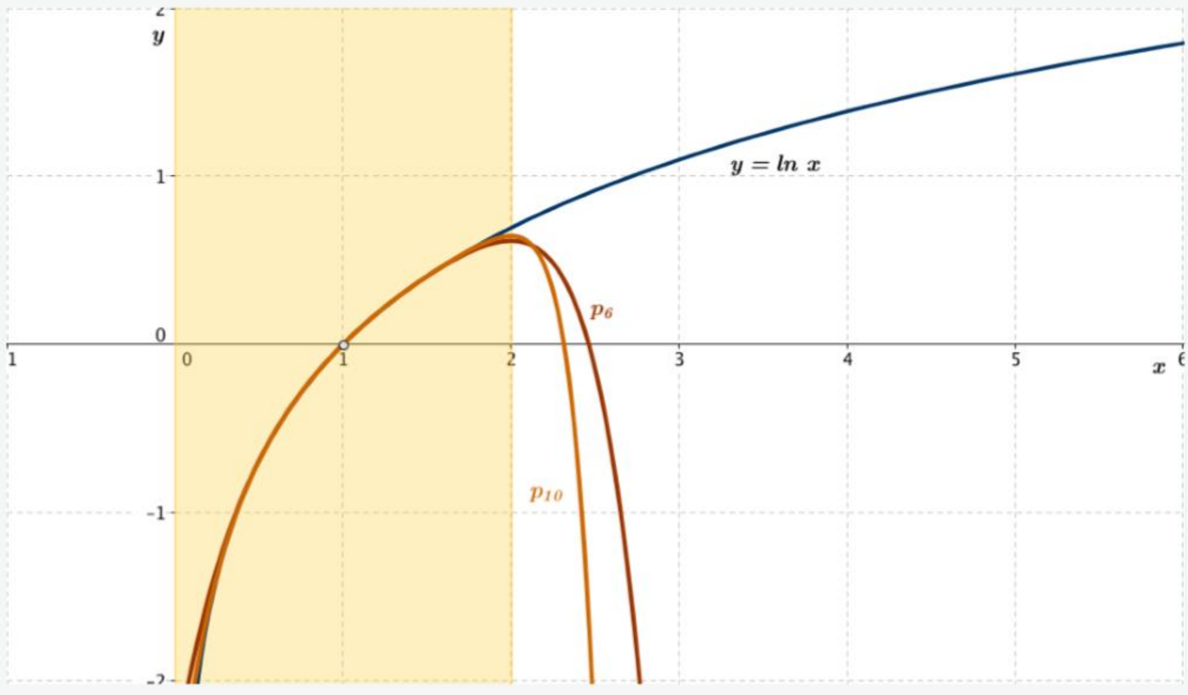


Abb. L1-1: Die Funktion $f(x) = \ln x$ und Näherungspolynome 6. und 10. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = 1$, der Konvergenzradius ist $r = 1$

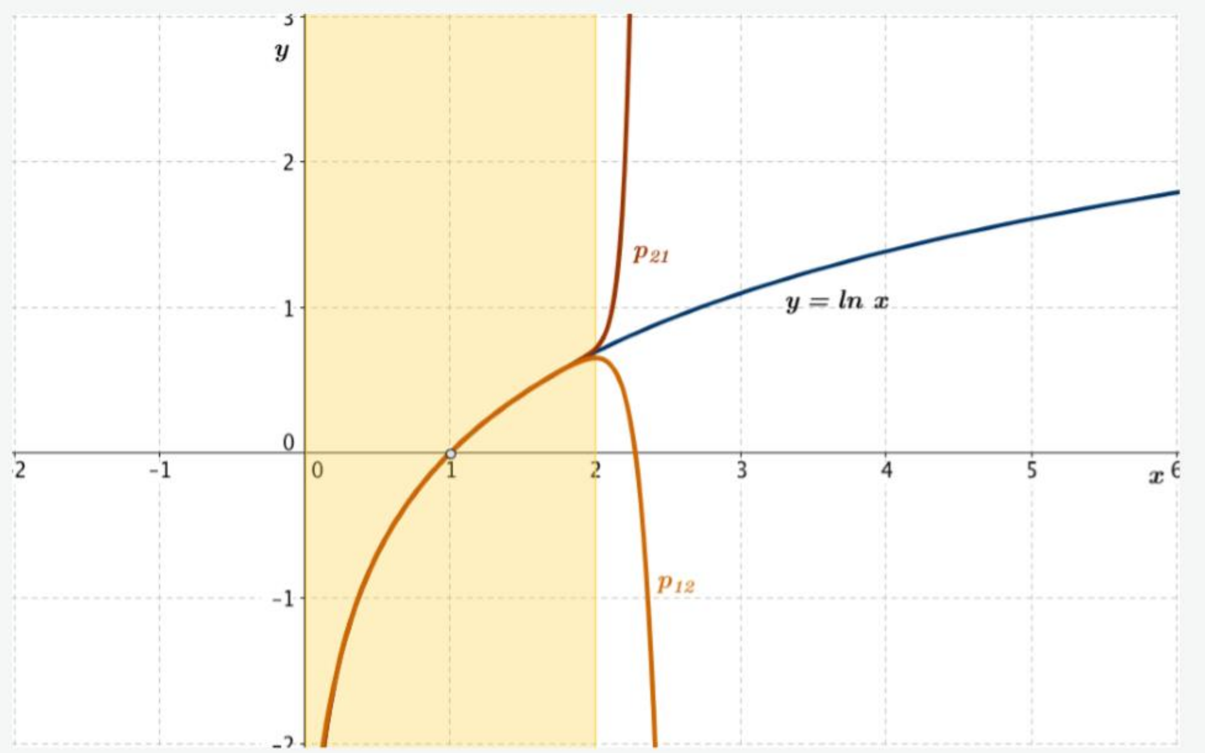


Abb. L1-2: Die Funktion $f(x) = \ln x$ und Näherungspolynome 12. und 21. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = 1$, der Konvergenzradius ist $r = 1$

Aufgabe 199:

Entwickeln Sie die logarithmische Funktion $f(x) = \ln x$ um die Stelle *a)* $x = 2$, *b)* $x = 3$ in eine Taylorreihe. Vergleichen Sie die Ergebnisse dieser Aufgabe mit den Ergebnissen der Aufgabe 1.

Lösung:

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = 2 \; - \; \text{Entwicklungszentrum}$$

$$f(x_0) = \ln x_0 = \ln 2$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad f\,'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f\,''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \qquad f\,''(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f\,'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2\,x^{-3}, \qquad f\,'''(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{2\,!}{2^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -3\,!\;x^{-4}, \qquad f^{(4)}(2) = -\frac{3\,!}{2^4}$$

$$f^{(5)}(x) = -2 \cdot 3 \cdot (-4)\;x^{-5} = 2 \cdot 3 \cdot 4\;x^{-5} = \frac{4\,!}{x^5}$$

$$f^{(5)}(2) = \frac{4\,!}{2^5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)\,!\;x^{-n} = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)\,!}{x^n}$$

$$f^{(n)}(2) = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)\,!}{2^n}$$

Taylorreihe einer Funktion im Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + + \frac{f^4(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \ldots$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4 \cdot 2^4} + \ldots =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} \right) = 2 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) =$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

Entwicklung der Logarithmusfunktion $f(x) = ln\, x$ um die Stelle $x = 2$ in eine Taylorreihe.

$$\ln x \,|_{x_0 = 2} = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4 \cdot 2^4} + \ldots =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist $r = 2$.

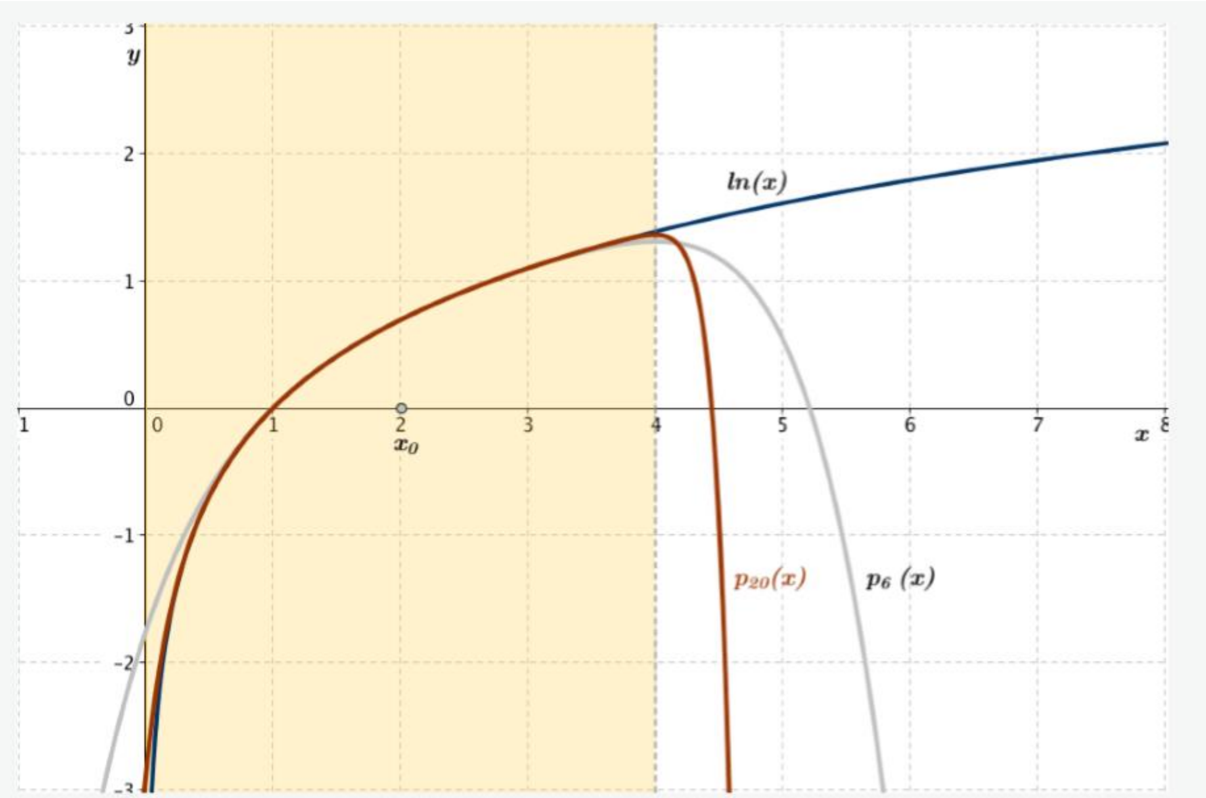
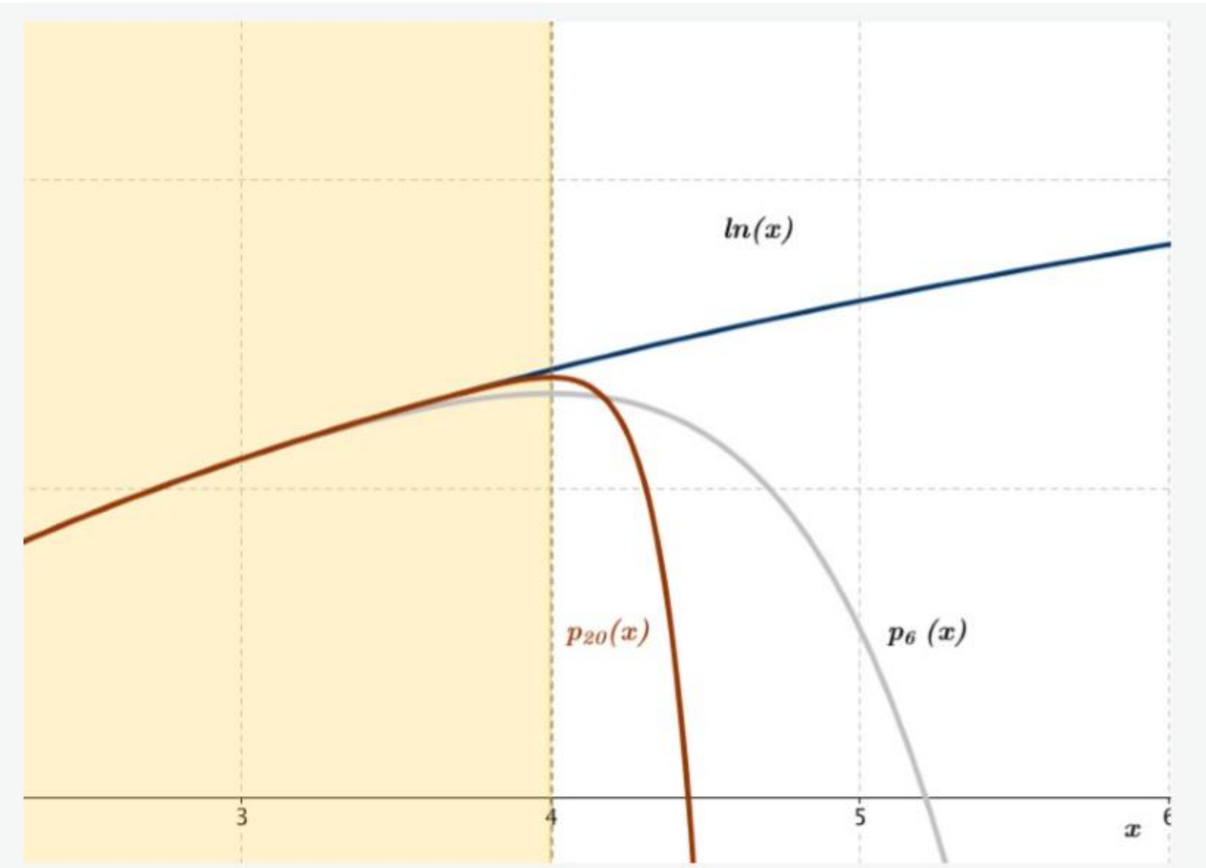


Abb. L2-1: Die Funktion f (x) =ln x und Näherungspolynome 6. und 20. Grades. Der Entwicklungspunkt ist x = 2, der Konvergenzradius ist r = 2



Entwicklung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ um die Stelle $x = 3$ in eine Taylorreihe.

$$\ln x\,|_{x_0=3} = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{3 \cdot 3^3} - \frac{(x-3)^4}{4 \cdot 3^4} + \ldots =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist $r = 3$.

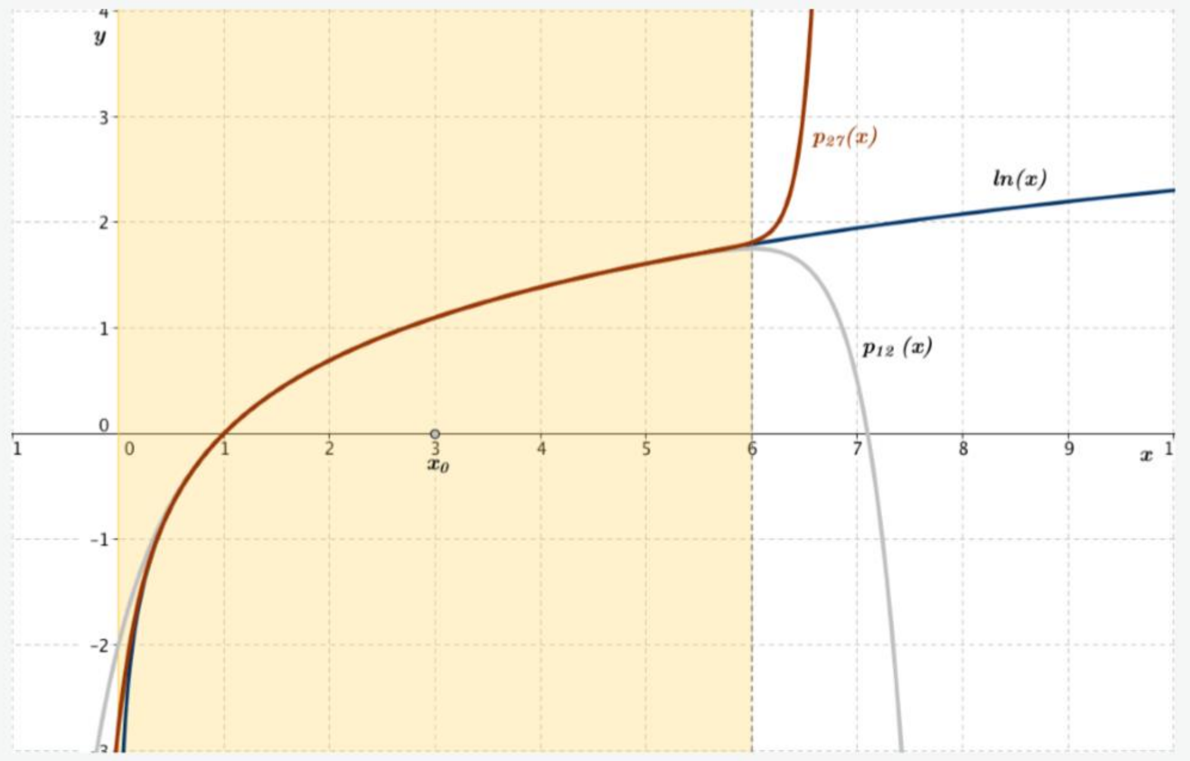


Abb. L2-4: Die Funktion $f(x) = \ln x$ und Näherungspolynome 12. und 27. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = 3$, der Konvergenzradius ist $r = 3$

Entwicklung der Logarithmusfunktion $f(x) = ln\,x$ um die Stelle $x = x_0$ in eine Taylorreihe kann man in einer allgemeinen Form darstellen:

$$\ln x\,|_{x=3x_0} = \ln 3 + \frac{x - x_0}{x_0} - \frac{(x - x_0)^2}{2 \cdot x_0^2} + \frac{(x - x_0)^3}{3 \cdot x_0^3} - \frac{(x - x_0)^4}{4 \cdot x_0^4} + \ldots =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - x_0)^n}{n \cdot x_0^n}$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot x_0^n}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist $r = x_0$.

Aufgabe 200:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von $x - 2$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

Lösung:

Allgemeine Formel der Taylorreihe:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Entwicklung einer Funktion in die Taylorreihe um die Stelle $x = 2$:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \ldots$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x + 5, \qquad f''(x) = 24x - 6, \qquad f'''(x) = 24$$

$$f^{(n)}(2) = 0 \qquad n \geqslant 4$$

$$f(x) = 29 + 41(x-2) + \frac{42}{2!}(x-2)^2 + \frac{24}{3!}(x-2)^3 =$$

$$= 29 + 41(x-2) + 21(x-2)^2 + 4(x-2)^3$$

Aufgabe 201:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um das Entwicklungszentrum x_0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$$

$$b)\quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -2$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f'(-1) = -\frac{2}{(-1)^3} = 2$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4}, \qquad f''(-1) = \frac{3!}{(-1)^4} = 3!$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = -\frac{4!}{x^5}, \qquad f'''(-1) = -\frac{4!}{(-1)^5} = 4!$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \qquad f^{(n)}(-1) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = (n+1)!$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} (x+1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$$

Taylor-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0=-1)}{n!} = n+1$$

Der Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \right) = 1$$

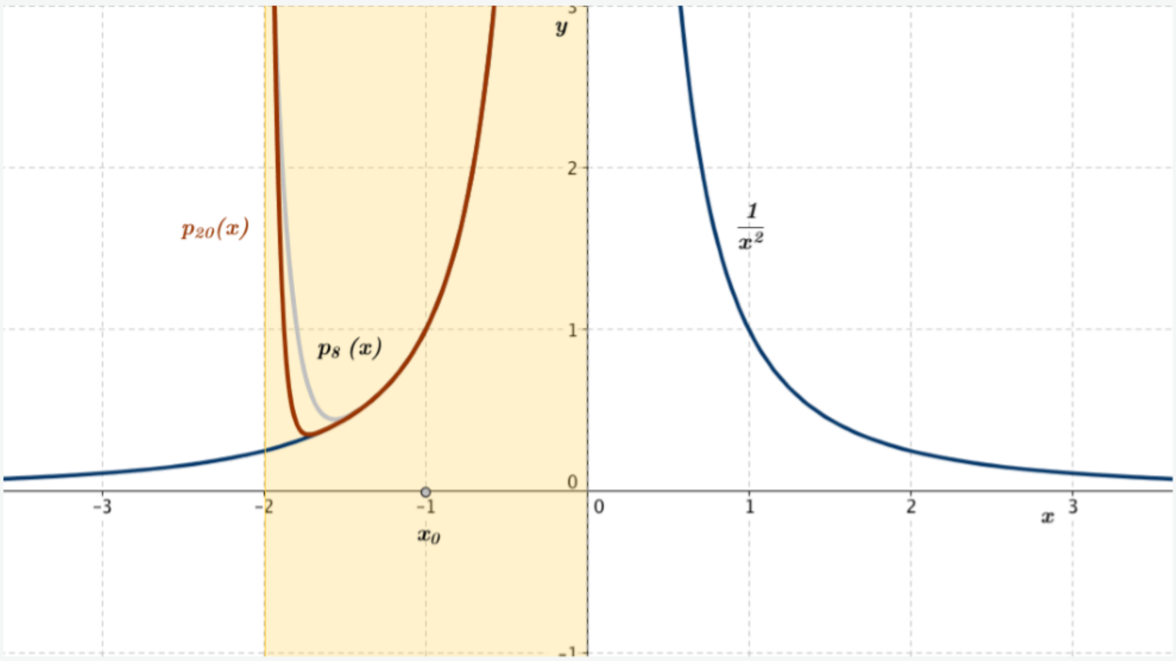


Abb. L4-1: Die Funktion f (x) = 1/x² und Näherungspolynome 8. und 20. Grades. Der Entwicklungspunkt ist x = -1, der Konvergenzradius ist r = 1

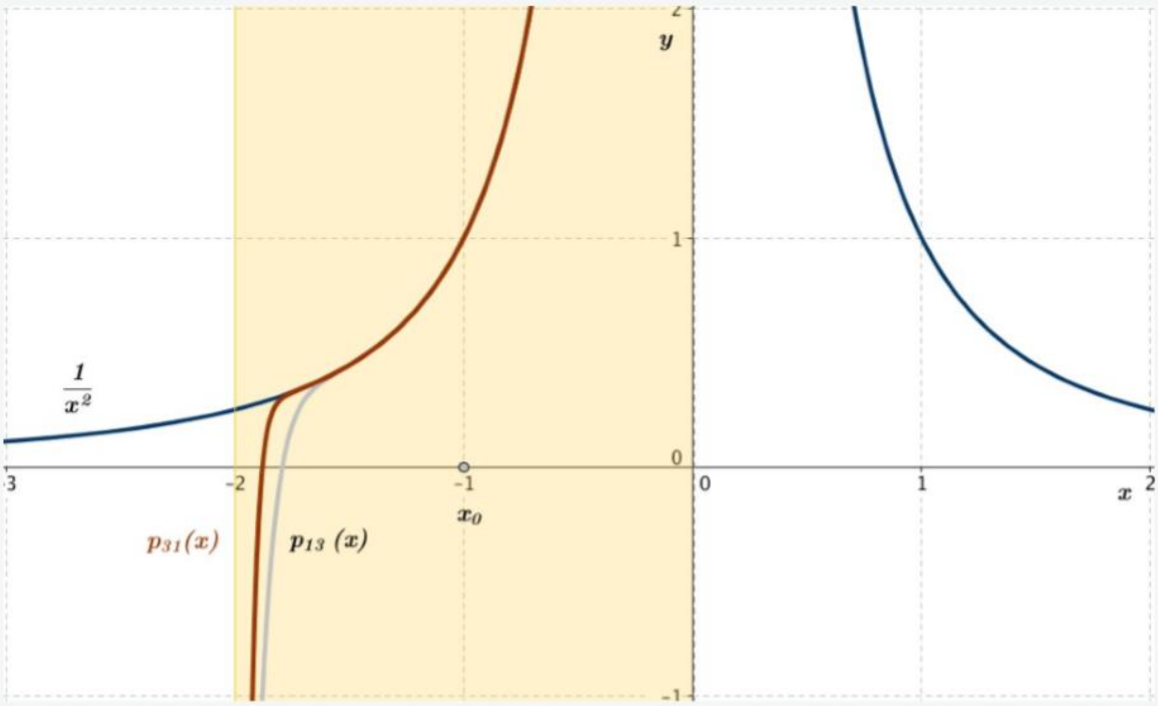


Abb. L4-2: Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ und Näherungspolynome 13. und 31. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = -1$, der Konvergenzradius $r = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{2^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f'(-2) = -\frac{2}{(-2)^3} = \frac{2\,!}{2^3}$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4}, \qquad f''(-2) = \frac{3!}{(-2)^4} = \frac{3!}{2^4}$$

$$f'''(x) = -\frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5} = -\frac{4!}{x^5}, \qquad f'''(-2) = -\frac{4!}{(-2)^5} = \frac{4!}{2^5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\,\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \qquad f^{(n)}(-2) = (-1)^n\,\frac{(n+1)!}{(-2)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!\cdot 2^{n+2}}\,(x+2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}}\,(x+2)^n$$

Taylor-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (x+2)^n$$

Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0 = -2)}{n!} = \frac{n+1}{2^{n+2}}$$

Der Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+3}\,(n+1)}{2^{n+2}\,(n+2)} \right) = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \right) = 2$$

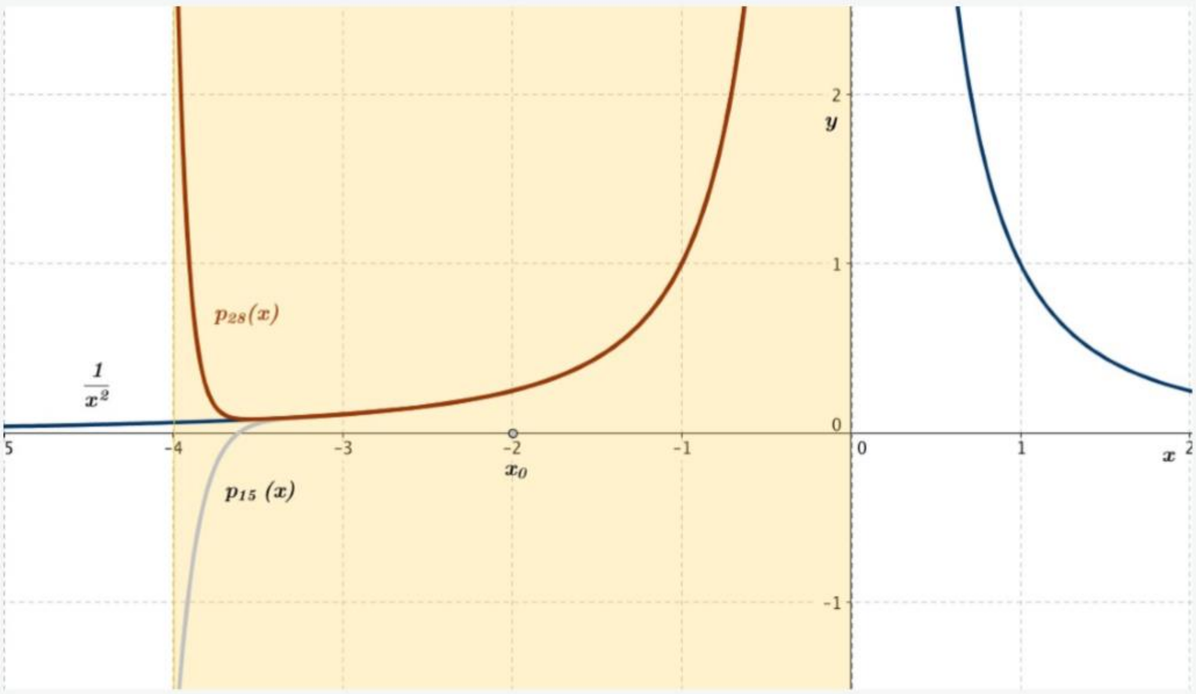


Abb. L4-3: Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ und Näherungspolynome 15. und 28. Grades. Der Entwicklungspunkt ist $x = -2$, der Konvergenzradius $r = 2$

Aufgabe 202:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x_0 = 2$$

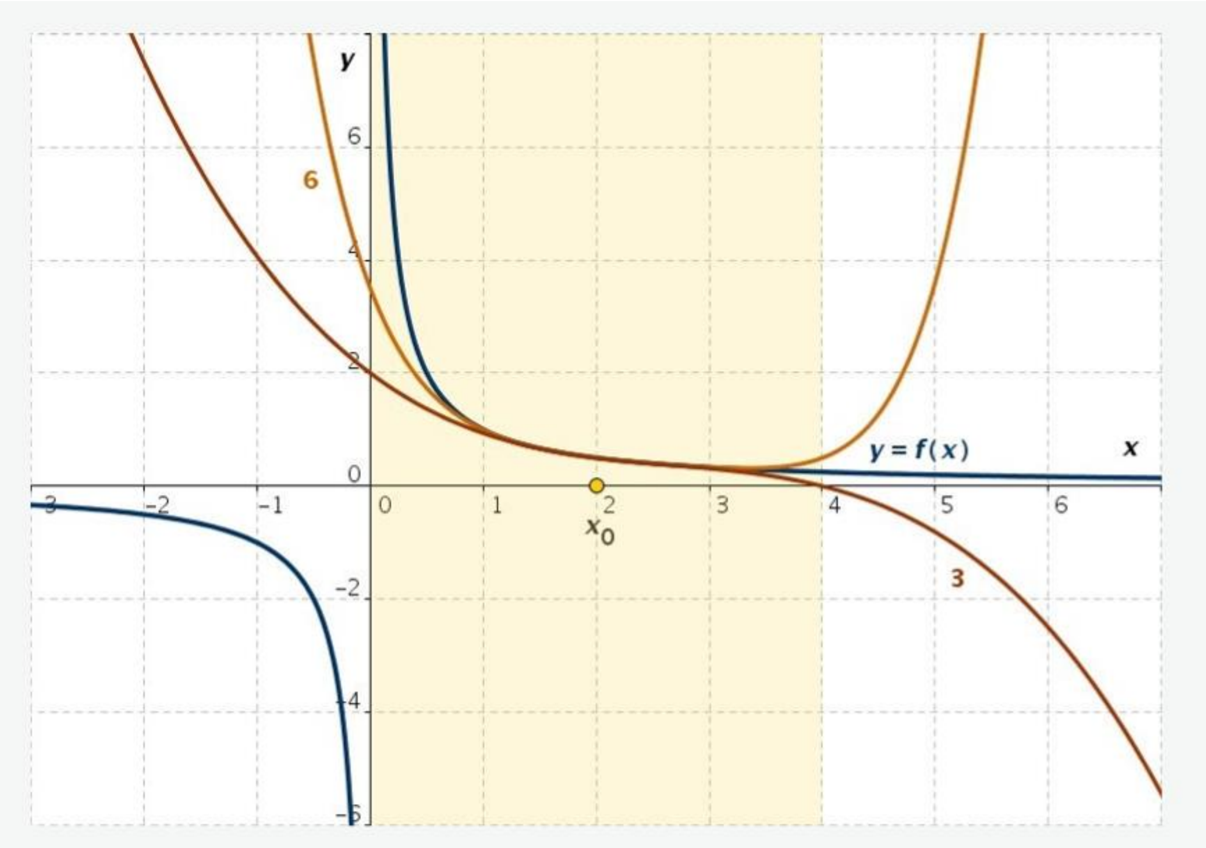
Lösung:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot (x-2)^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \right| = 2$$



Aufgabe 203:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \qquad x_0 = 0$$

Lösung:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} - \frac{x^5}{64} + \ldots$$

$$\frac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \right| = 2$$

Aufgabe 204:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x_0 = 4$$

Lösung:

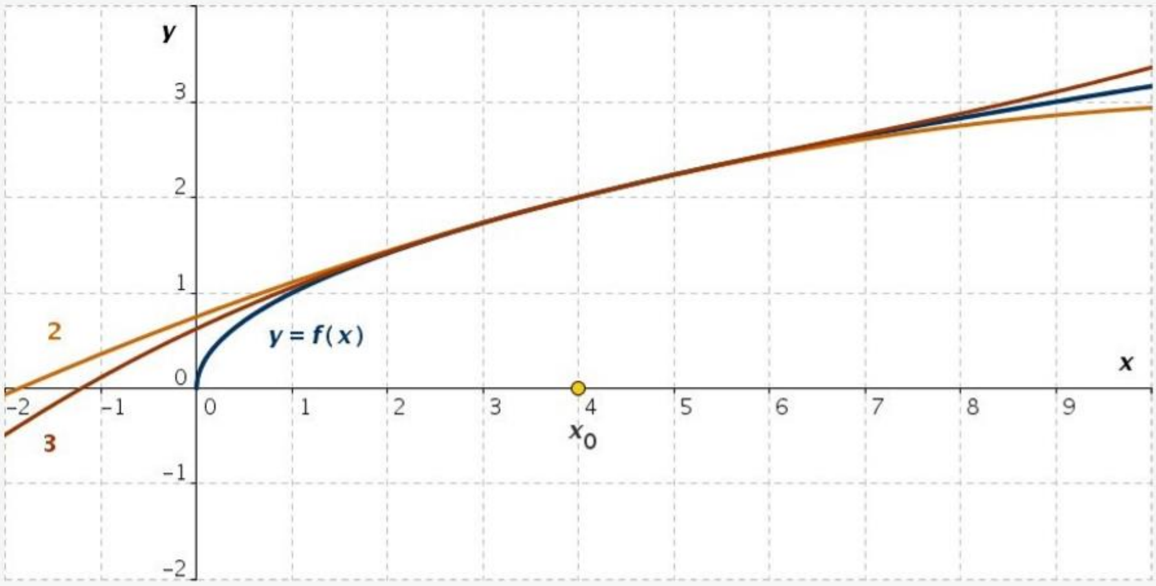


Abb. L7: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und Näherungspolynome 2. und 3. Grades

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{16384}(x-4)^4 + \ldots$$

Aufgabe 205:

Entwickeln Sie folgende Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2), \qquad x_0 = 0$$

Lösung:

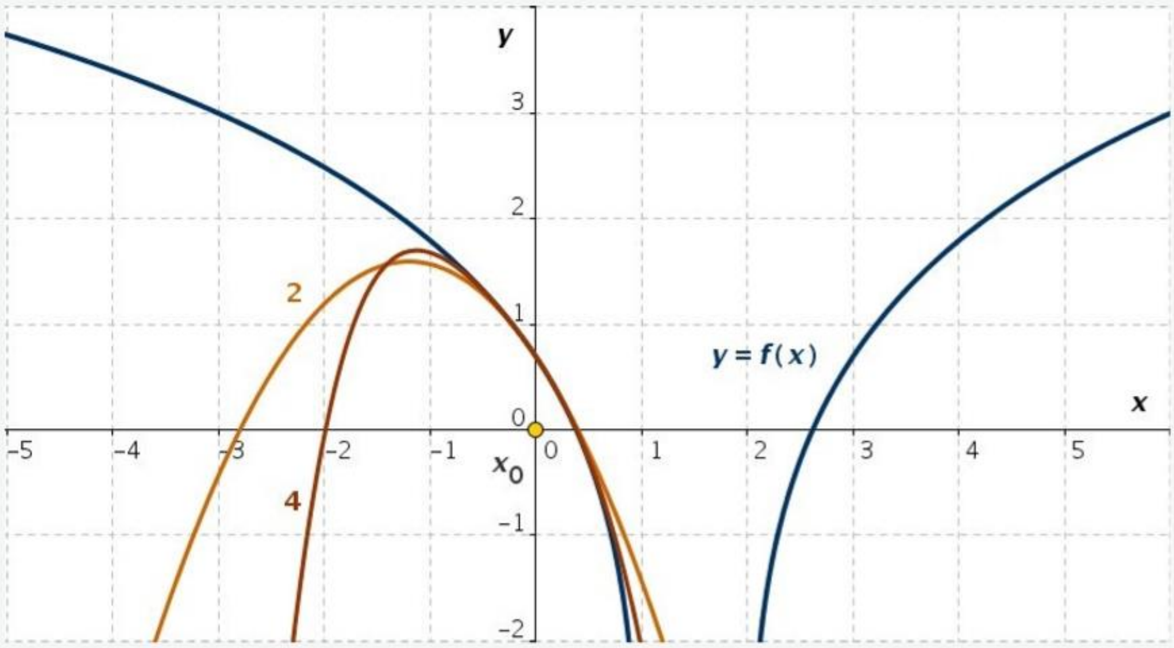


Abb. L8: Die Funktion $f(x) = \ln(2 - 3x + x^2)$ und Näherungspolynome 2. und 4. Grades

$$\ln(2 - 3x + x^2) = \ln(2) - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{8}x^3 - \frac{17}{64}x^4 - \frac{33}{160}x^5 + \dots$$

Fourierreihen

Aufgabe 206:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{R}$:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$!

Lösung:

Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$: Wenn die Folge der Partialsummen $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ für $n\to\infty$ konvergiert, so heißt der Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ Summe der Funktionenreihe.

Nach Definition heißt das:

Konvergenz im Punkt x („**punktweise Konvergenz**"), falls für alle $\varepsilon>0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon,x)$ existiert, so dass $\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|<\varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n\geq n_0(\varepsilon,x)$ gilt.

Zu verschiedenen x können dabei verschiedene $n_0(\varepsilon,x)$ gehören, d.h., die Konvergenzgeschwindigkeit kann je nach x verschieden sein.

Gleichmäßige Konvergenz, falls für alle x aus dem entsprechenden Bereich ein einheitliches $n_0(\varepsilon)$ (nicht mehr von x abhängig!) gewählt werden kann, d.h.

gleichmäßige Konvergenz über dem Intervall $[a,b]$, falls für alle $\varepsilon>0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass $\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|<\varepsilon$ für alle $n\geq n_0(\varepsilon)$, $x\in[a,b]$ gilt.

Majorantenkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig, wenn eine konvergente Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $|f_k(x)|\leq a_k$ für alle k und für alle $x\in[a,b]$ existiert („Majorante").

Als Majoranten können bei den gegebenen Funktionenreihen Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ verwendet werden. Diese konvergieren im Falle $\alpha>1$. Davon kann man sich analog zur Vorgehensweise bei Aufgabe 13.111 überzeugen. Für $\alpha>1$ gilt nämlich $\frac{1}{k^\alpha}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^\alpha}$. Daraus folgt
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}<1+\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=1+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

a) $|f_k(x)|=\left|\frac{\cos kx}{k^3}\right|\leq\frac{1}{k^3}$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Da $\frac{1}{k^3}$ konvergiert, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}$ nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig über $\mathbb{R}$.

b) $|f_k(x)|=\left|\frac{1}{k^2+x^2}\right|\leq\frac{1}{k^2}$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Da $\frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x^2}$ nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 207:

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0=0$ in eine Taylorreihe!

b) Untersuchen Sie die absolute Konvergenz der Taylorreihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums!

c) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe in jedem Intervall $[a,b]$ mit $-1<a<b<1$ gleichmäßig konvergiert!

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe!

Lösung:

a) Taylorentwicklung: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{-1} & \qquad f(0) &= 1\\
f'(x) &= -(1+x)^{-2} & f'(0) &= -1\\
f''(x) &= 2\,(1+x)^{-3} & f'(0) &= 2\\
f'''(x) &= -2\cdot 3\,(1+x)^{-3} & f'''(0) &= -3!\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
f^{(k)}(x) &= (-1)^k k!\,(1+x)^{-k-1} & f^{(k)}(0) &= (-1)^k k!
\end{aligned}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1-x+x^2-x^3\pm\ldots$$

b) Reihe $\sum a_k$ konvergiert absolut, wenn $\sum|a_k|$ konvergiert

Quotientenkriterium für Konvergenz der Zahlenreihe $\sum a_k$ mit positiven Gliedern:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}\begin{cases} <1 & \text{Reihe konvergent}\\ =1 & \text{so nicht entscheidbar}\\ >1 & \text{Reihe divergent}\end{cases}$$

Für festes x ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ Zahlenreihe. Zur Untersuchung der absoluten Konvergenz werden die Beträge der Reihenglieder betrachtet:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x^{k+1}|}{|x^k|}=\lim_{k\to\infty}|x|=|x|,$$

$$\text{d.h.:}\begin{cases} |x|<1: & \text{Reihe konvergiert absolut (und damit auch einfach)}\\ |x|=1: & \text{keine Aussage}\\ |x|>1: & \text{Reihe divergiert absolut}\end{cases}$$

Offensichtlich ist aber die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1-x+x^2-x^3\pm\ldots$ für $x=1$ unbestimmt und für $x=-1$ bestimmt divergent.

Die Reihe konvergiert absolut genau dann, wenn $|x|<1$ gilt, in diesem Falle ist sie auch einfach konvergent und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=\frac{1}{1+x}$.

c) Nach b) konvergiert die Reihe für $|x|<1$, allerdings können zu den x aus diesem Bereich unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeiten gehören.

Eine Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig über dem Intervall $[a,b]$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine einheitliche (d.h. von x unabhängiges) natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ exisitiert, so dass $\left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$, $x \in [a,b]$ gilt.

Gleichmäßige Konvergenz kann mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium gezeigt werden: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig, wenn eine konvergente Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $|f_k(x)| \leq a_k$ für alle k, $x \in [a,b]$ existiert („Majorante“).

Sei nun $s = \max(|a|,|b|)$. Wegen der Voraussetzung von c) gilt offensichtlich $|s| < 1$, folglich konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$.

Für alle $x \in [a,b]$ gilt dann $|x| < s$ und damit auch $\left|(-1)^k x^k\right| < s^k$, so dass nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ für $x \in [a,b]$ folgt.

d) r heißt Konvergenzradius von $\sum c_k x^k$, wenn die Reihe für alle $|x| < r$ absolut konvergiert und für alle $|x| > r$ divergiert. Nach b) ist offensichtlich $r = 1$.

Formel für Konvergenzradius: $r = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}}$

(ergibt sich aus Quotienten- bzw. Wurzelkriterium)

Für die zu untersuchende Reihe sind beide Kriterien ohne Weiteres anwendbar, es ergibt sich

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(-1)^{k+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|(-1)^k|}} = 1.$$

Allerdings ist die Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius $x = \pm 1$ nicht gleichmäßig. Zu den Rändern zu wird sie immer langsamer.

Aufgabe 208:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x,\ 0 \leq x \leq \pi$

a) in eine reine Kosinusreihe,

b) in eine reine Sinusreihe!

c) Bestimmen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$!

Lösung:

Fourierreihen (für **periodische** Funktionen)

Periodenlänge 2π

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x$$

Periodenlänge T

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\frac{2\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}x \right)$$

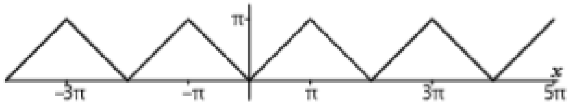
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos k\frac{2\pi}{T}x \, \mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin k\frac{2\pi}{T}x \, \mathrm{d}x$$

Eine **reine Kosinusreihe** ergibt sich für **gerade Funktionen**, eine **reine Sinusreihe** ergibt sich für **ungerade Funktionen**.

Für die gestellte Aufgabe muss also die über $[0,\pi]$ definierte Funktion zunächst gerade bzw. ungerade auf $(-\pi,0)$ fortgesetzt werden. Anschließend ist die nun über $(-\pi,\pi]$ definierte Funktion periodisch fortzusetzen, so dass sich die Periodenlänge 2π ergibt.

a) $f(x)=x,\ 0\le x\le\pi$ muss gerade auf $[-\pi,\pi]$ fortgesetzt werden:
$f(x)=|x|,\ -\pi\le x\le\pi$. Diese Funktion ist dann periodisch fortzusetzen, Periodenlänge 2π.



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos kx \, \mathrm{d}x, \ \text{ da Integrand gerade}$$

$b_k = 0$, da gerade (Bei Berechnung wäre Integrand $|x| \sin kx$ ungerade $\Longrightarrow$ Integral 0.)

$$\int x \cos kx \, \mathrm{d}x = x\frac{\sin kx}{k} - \int \frac{\sin kx}{k} \, \mathrm{d}x = \frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \quad \text{für } \ k \ne 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin kx}{k}+\frac{\cos kx}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k-1\right)$$

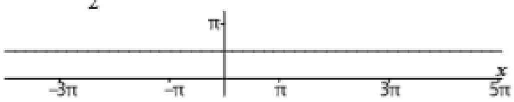
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade}, \neq 0 \end{cases}$$

Da $f(x)$ überall stetig ist, konvergiert die Fourierreihe überall, so dass

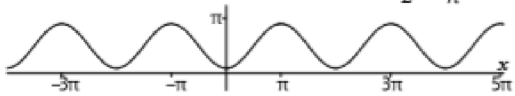
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{cos 5x}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad \text{gilt.}$$

$$F_{2n+1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

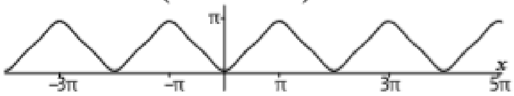
$F_0(x) = \frac{\pi}{2}$



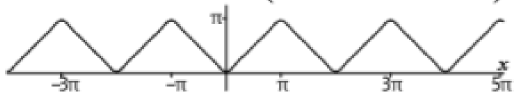
$F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$



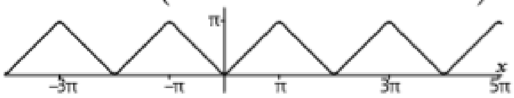
$F_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right)$



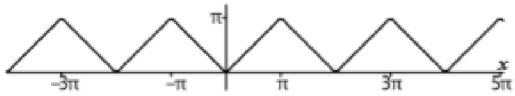
$F_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25}\right)$



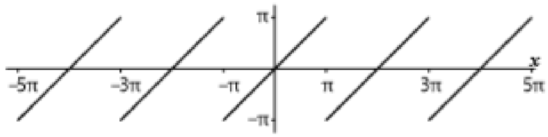
$F_7(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49}\right)$



$F_9(x)$



b) $f(x)=x,\ 0\le x\le\pi$ muss ungerade auf $(-\pi,\pi]$ fortgesetzt werden:
$f(x)=x,\ -\pi<x\le\pi$. Diese Funktion ist dann periodisch fortzusetzen, Periodenlänge 2π.



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x, \quad \text{da Integrand gerade}$$

$a_k = 0$, da ungerade (Bei Berechnung wäre Integrand $x\cos kx$ ungerade $\Longrightarrow$ Integral 0.)

$$\int x\sin kx\,\mathrm{d}x = x\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) + \int\frac{\cos kx}{k}\,\mathrm{d}x = -\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}$$

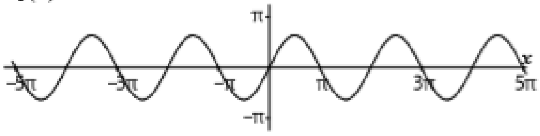
($k=0$ kommt nicht vor, da Sinuskoeffizient.)

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx \,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2\cos k\pi}{k} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

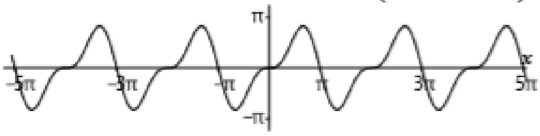
$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \pm \ldots\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}$$

$$F_n(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}$$

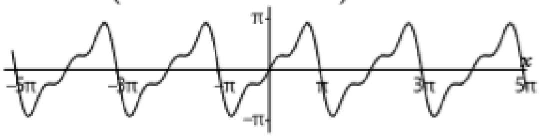
$F_1(x) = 2\sin x$



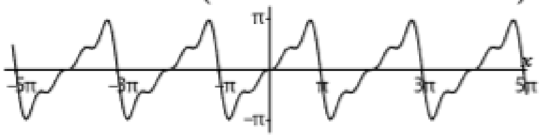
$F_2(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$



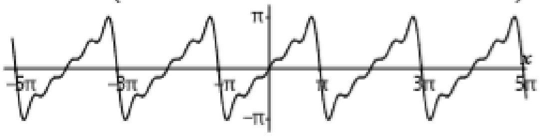
$F_3(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}\right)$



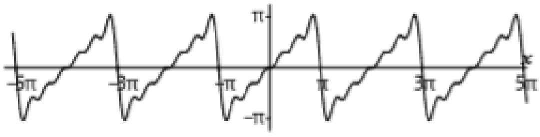
$F_4(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4}\right)$



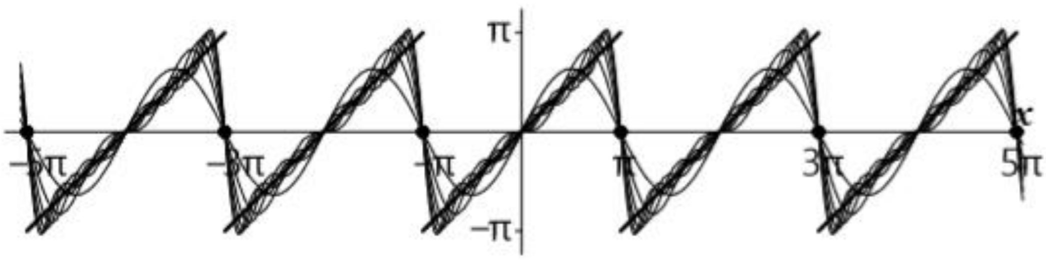
$F_5(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\right)$



$F_6(x)$



Nach dem Satz von Dirichlet konvergiert die Fourierreihe gegen $f(x)$ für $x \neq (2m+1)\pi$ und gegen $\frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0$ für $x = (2m+1)\pi$.



c) Da die Fourierreihe aus a) überall konvergiert, konvergiert sie auch für $x = 0$, also gilt

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{und damit} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.2337.$$

Aufgabe 209:

Sei $a \neq 0$. Die Funktion $f(x) = e^{ax}$, $-\pi < x \leq \pi$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion für $a = 1/2$!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Lösung:

Fourierreihen (für **periodische** Funktionen)

Periodenlänge 2π

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

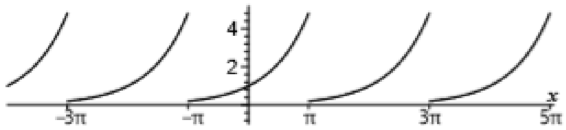
Periodenlänge T

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\frac{2\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}x \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos k\frac{2\pi}{T}x \, dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin k\frac{2\pi}{T}x \, dx$$

a) $e^{\pi/2} \approx 4.81$
$e^{-\pi/2} \approx 0.21$



Periodenlänge 2π, weder gerade noch ungerade

b) $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int e^{ax} \cos kx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos kx + \frac{k}{a} \int e^{ax} \sin kx \, dx$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos kx + \frac{k}{a^2} e^{ax} \sin kx - \frac{k^2}{a^2} \int e^{ax} \cos kx \, dx$$

$$\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos kx \, dx = \frac{a e^{ax} \cos kx + k e^{ax} \sin kx}{a^2}$$

$$\frac{a^2 + k^2}{a^2} \int e^{ax} \cos kx \, dx = \frac{a e^{ax} \cos kx + k e^{ax} \sin kx}{a^2}$$

$$\int e^{ax} \cos kx \, dx = \frac{a e^{ax} \cos kx + k e^{ax} \sin kx}{a^2 + k^2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos kx \, dx = \frac{a e^{ax} \cos kx + k e^{ax} \sin kx}{\pi(a^2 + k^2)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a e^{a\pi} \cos k\pi - a e^{-a\pi} \cos k\pi}{\pi(a^2 + k^2)}$$

$$= \frac{2a(-1)^k \sinh a\pi}{\pi(a^2 + k^2)}, \text{ d.h. insbesondere } a_0 = \frac{2 \sinh a\pi}{a\pi} \qquad \left(\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin kx\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin kx - \frac{k}{a}\int e^{ax}\cos kx\,dx\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin kx - \frac{k}{a^2}e^{ax}\cos kx - \frac{k^2}{a^2}\int e^{ax}\sin kx\,dx\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\sin kx\,dx = \frac{ae^{ax}\sin kx - ke^{ax}\cos kx}{a^2}$$

$$\frac{a^2+k^2}{a^2}\int e^{ax}\sin kx\,dx = \frac{ae^{ax}\sin kx - ke^{ax}\cos kx}{a^2}$$

$$\int e^{ax}\sin kx\,dx = \frac{ae^{ax}\sin kx - ke^{ax}\cos kx}{a^2+k^2}$$

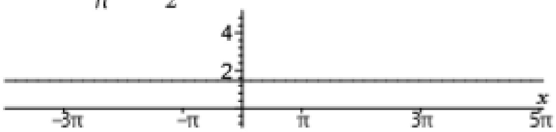
$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx = \left.\frac{ae^{ax}\sin kx - ke^{ax}\cos kx}{\pi(a^2+k^2)}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-ke^{a\pi}\cos k\pi + ke^{-a\pi}\cos k\pi}{\pi(a^2+k^2)}\\ &= -\frac{2k(-1)^k\sinh a\pi}{\pi(a^2+k^2)}\end{aligned}$$

Fourierentwicklung also

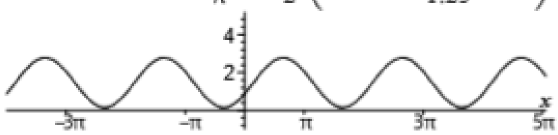
$$\begin{aligned}f(x) &\sim \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2a(-1)^k\sinh a\pi}{\pi(a^2+k^2)}\cos kx - \frac{2k(-1)^k\sinh a\pi}{\pi(a^2+k^2)}\sin kx\right)\\ &\sim \frac{2}{\pi}\sinh a\pi\left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}(a\cos kx - k\sin kx)\right)\\ &\sim \frac{2}{\pi}\sinh a\pi\left(\frac{1}{2a} + \left[-\frac{1}{a^2+1}(a\cos x - \sin x) + \frac{1}{a^2+4}(a\cos 2x - 2\sin 2x) \mp \dots\right]\right)\end{aligned}$$

$$F_n(x) = \frac{2}{\pi}\sinh\frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2+1/4}\left(\frac{1}{2}\cos kx - k\sin kx\right)\right)$$

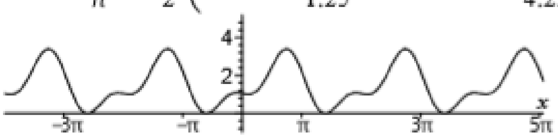
$F_0(x) = \frac{2}{\pi}\sinh\frac{\pi}{2}$



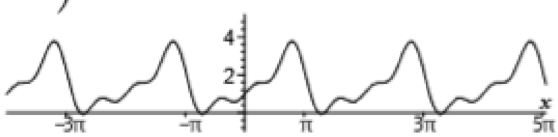
$F_1(x) = \frac{2}{\pi}\sinh\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{(\cos x)/2 - \sin x}{1.25}\right)$



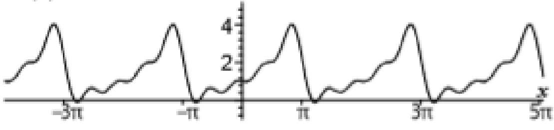
$F_2(x) = \frac{2}{\pi}\sinh\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{(\cos x)/2 - \sin x}{1.25} + \frac{(\cos 2x)/2 - 2\sin 2x}{4.25}\right)$



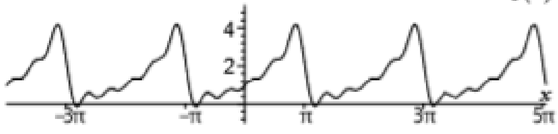
$F_3(x)$



$F_4(x)$



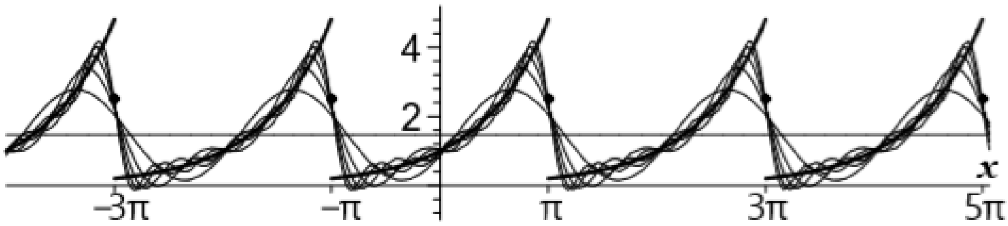
$F_5(x)$



c) Satz von Dirichlet: In Stetigkeitspunkten Konvergenz gegen $f(x)$,

an Sprungstellen gegen $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Also: $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} f(x), & x \neq (2l+1)\pi \\ \dfrac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2} = \cosh a\pi, & x = (2l+1)\pi \end{cases}$.



Differentialgleichungen

Aufgabe 210:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = a \cdot y$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y$$

$$\frac{1}{y} dy = a \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a \cdot dx$$

$$\ln y = a \cdot x + c$$

$$y = e^{ax+c}$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{c} = c_1 e^{ax}$$

Aufgabe 211:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = y^2$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot y^2$$

$$\frac{1}{y^2} dy = 1dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int 1dx$$

$$-y^{-1} = x + c$$

$$y = -\frac{1}{x+c}$$

Aufgabe 212:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = \frac{x}{y}$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = x \cdot dx$$

$$\int y dy = \int x dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$y^2 = x^2 + 2c$$

$$y^2 - x^2 = c_1$$

Aufgabe 213:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y' = -x \cdot y$$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y$$

$$\frac{1}{y} dy = -x dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int - x dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2} x^2 + c$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

$$y = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Aufgabe 214:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y' = \frac{y}{x}$$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y = \ln x + c$$

$$y = x \cdot e^{c}$$

$$y = k \cdot x$$

Aufgabe 215:

Es ist die Differentialgleichung $(1+e^{x}) \cdot y \cdot y' = e^{x}$ unter Beachtung der Forderung zu lösen, dass die Lösungskurve durch den Punkt $P_1(1,1)$ gehen soll.

Lösung:

Eine derartige Bedingung wird als Anfangsbedingung für die Lösung der Differenzialgleichung bezeichnet.

Wir suchen zunächst das allgemeine Integral von

$$(1+e^{x}) \cdot y \cdot y' = e^{x}$$

$$y \cdot y' = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})}$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})}$$

$$ydy = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})} dx$$

$$\int ydy = \int \frac{e^{x}}{(1+e^{x})} dx$$

$$\frac{1}{2} y^{2} = \ln(1+e^{x}) + c$$

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \ln(1+e^{x}) + 2c}$$

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \ln(1+e^{x}) + c_1}$$

Nun wenden wir uns der Forderung zu, dass die Lösungskurve y=f(x) durch den Punkt $P_1(1,1)$ gehen soll. Da der Punkt P1 auf der Lösungskurve liegen soll, erfüllen seine Koordinaten deren Funktionsgleichung

$$\frac{1}{2} 1^{2} = \ln(1+e^{1}) + c$$

$$\frac{1}{2} = \ln(1+e^1) + c$$ oder $$c = \frac{1}{2} - \ln(1-e^1)$$

Das gesuchte partikuläre Integral der Differenzialgleichung lautet also

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \ln(1+e^x) + 2\left(\frac{1}{2} - \ln(1+e)\right)}$$

$$y = \pm\sqrt{2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e}\right)^2 + 1}$$

Aufgabe 216:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$(1+y^2)dx + xydy = 0$$

Lösung:

$$(1+y^2)dx = -xydy$$

$$\frac{1}{x}dx = -\frac{y}{(1+y^2)}dy$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int -\frac{y}{(1+y^2)}dy$$

$$\ln|x| = \pm\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+c$$

$$x = e^{\pm\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+c}$$

Aufgabe 217:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$y' = -\frac{y}{x}$ für x>0, y>0

Lösung:

Hier ist $g(x) = -\frac{1}{x}$ und $h(y) = y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln y + \ln x = c$$

$$\ln xy = c$$

Aufgabe 218:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y' + x \cdot y^2 = 0$$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = -xy^2$$

$$-\frac{1}{y^2}dy = xdx$$

$$-\int \frac{1}{y^2}dy = \int xdx$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2c}{2}$$

$$y = \frac{2}{x^2 + 2c}$$

Aufgabe 219:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y' = 1 + x - y$$

Lösung:

$$y' = 1 + x - y$$

Substitution:

$$x - y(x) = z(x) \Leftrightarrow 1 - y' = z' \Leftrightarrow y' = 1 - z'$$

Einsetzen:

$$1 - z' = 1 - z$$

$$-z' = z$$

$$-\frac{dz}{dx} = z$$

$$\int -\frac{1}{z}dz = \int dx$$

$$-\ln|z| = x + c$$

$$\ln|z| = -(x + c)$$

$$z = \pm e^{-x-c} = \pm e^{-c} \cdot e^{-x} = c_1 \cdot e^{-x}$$

Rücksubstitution:

$$z = c_1 \cdot e^{-x}$$

$$x - y = c_1 \cdot e^{-x}$$

$$y = x - c_1 \cdot e^{-x}$$

Probe:

$$y' = 1 + c_1 \cdot e^{-x} = 1 + x - x + c \quad \cdot e^{-x} = 1 + c_1 \cdot e^{-x}$$

Aufgabe 220:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$2x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

Lösung:

$$2x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{2x^2} dx$$

$$\ln y = -\frac{1}{2} x^{-1} + c$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^{-1}+c}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2x}+c}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2x}} \cdot e^c$$

$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2x}}$$

Aufgabe 221:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$(1+x^2) \cdot xy \cdot y' = 1 + y^2$$

Lösung:

$$\frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot (1+x^2)}$$

$$\frac{y}{1+y^2} \cdot dy = \frac{1}{x \cdot (1+x^2)} \cdot dx$$

$$\int \frac{y}{1+y^2} \cdot dy = \int \frac{1}{x \cdot (1+x^2)} \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \int \frac{1}{x \cdot (1+x^2)} \cdot dx$$

Hier Partialbruchzerlegung:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{1+x^2}$$

$$= \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x \cdot (1+x^2)}$$

$$=\frac{x^2\cdot(A+B)+Cx+A}{x\cdot(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow A=1; C=0; B=-1$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\int\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

$$\ln(1+y^2)=2\cdot\ln|x|-\ln(1+x^2)+2\cdot c$$

Nun sei $2\cdot c=\ln c_1\ \ c_1>0$

$$\ln(1+y^2)=\ln\frac{x^2\cdot c_1}{1+x^2}$$

$$(1+y^2)=\frac{x^2\cdot c_1}{1+x^2}$$

$$y^2=\frac{x^2\cdot c_1}{1+x^2}-1$$

$$y=\sqrt{\frac{x^2\cdot c_1}{1+x^2}-1}$$

Aufgabe 222:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y'+x\cdot y^2=0$$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx}=-xy^2$$

$$-\frac{1}{y^2}dy=xdx$$

$$-\int\frac{1}{y^2}dy=\int xdx$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+c$$

$$\frac{1}{y}=\frac{x^2+2c}{2}$$

$$y=\frac{2}{x^2+2c}$$

Aufgabe 223:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2}$$

Lösung:

$$y^2 dy = t^2 dt$$

$$\int y^2 dy = \int t^2 dt$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + c$$

$$y^3 = t^3 + 3c$$

$$y = \sqrt[3]{t^3 + c_1}$$

Aufgabe 224:

Lösen Sie bitte folgende DGL:

$$y' \cdot y + x = 0$$

Lösung:

Schritt 1: **Ermittlung der expliziten Form**

Hierbei wird die Funktion nach der Ableitung umgestellt, also:

$$y' \cdot y + x = 0 \quad \| \ -x$$

$$y' \cdot y = -x \quad \| \ : y$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Schritt 2: **Ersetzen durch Differentialquotient**

Wir könne wir die Ableitung auch den Differentialquotienten schreiben, was für unsere Funktion wie folgt aussehen würde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Schritt 3: **Trennung der Variablen**

Man bringt nun die Variable y auf eine und die Variable x auf die andere Seite der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \| \ \cdot dx$$

$$dy = -\frac{x}{y} \cdot dx \quad \| \ \cdot y$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

Schritt 4: **Integration**

Nun werden beide Seiten der Gleichung integriert:

$$\int y \ dy = -\int x \ dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + C$$

Schritt 5: Auflösen nach y

Nun wird abschliessend die integrierte Funktion nach y aufgelöst:

$$\frac{1}{2} \cdot y^2 = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + C$$

$$y^2 = -x^2 + 2C$$

$$y = \sqrt{2C - x^2}$$

für $|x| \leq \sqrt{2C}$, da sonst unter der Wurzel ein negativer Wert stehen würde.

Aufgabe 225:

Ermitteln Sie die partikuläre Lösung, die die gegebene Anfangsbedingung erfüllen:

$y' \cdot y^2 + x^2 - 1 = 0$

$mit\ x_0 = 2; y(x_0) = y_0 = 1$

Lösung:

Schritt 1: Explizite Form

$$y' \cdot y^2 + x^2 - 1 = 0 \quad \| +1 \quad -x^2 \quad : y^2$$

$$y' = \frac{-x^2 + 1}{y^2}$$

Schritt 2: Differentialquotient

$$y' = \frac{1 - x^2}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{y^2}$$

Schritt 3: Variablentrennung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{y^2} \quad \| \cdot dx \quad \cdot y^2$$

$$y^2 \cdot dy = (1 - x^2) \cdot dx$$

Schritt 4: Integration

$$y^2 \cdot dy = (1 - x^2) \cdot dx$$

$$\int y^2 \ dy = \int (1 - x^2) \ dx$$

--> $\frac{1}{3} y^3 = -\frac{1}{3} x^3 + x + C$

Schritt 5: Nach Y auflösen

$$\frac{1}{3} y^3 = -\frac{1}{3} x^3 + x + C \quad \| \cdot 3 \quad \sqrt[3]{\ }$$

$$y = \sqrt[3]{-x^3 + 3x + 3C}$$

Wir haben also errechnet, das $y=\sqrt[3]{-x^3+3x+3C}$ und wir wissen aus der Aufgabenstellung, das die Anfangsbedingung $x_0=2$, $y(x_0)=y_0=1$ lautet. In einfache Worte gefasst sagt uns die Anfangsbedingung:

$$x_0=2$$
$$y_0=1$$

$$y_0(x_0)=y_0 \quad \text{d.h.} \quad y_0(2)=1$$

Diese Werte setzen wir nun in unsere Integrierte Funktion ein, um die noch unbekannt Konstante C zu ermitteln:

$$y=\sqrt[3]{-x^3+3x+3C}$$

$$1=\sqrt[3]{-2^3+3\cdot 2+3\cot C}$$

Woraus sich nun der Schritt 6 ableitet...

Schritt 6: Nach C auflösen

$$\begin{array}{ll} 1=\sqrt[3]{-2^3+3\cdot 2+3\cot C} & \| \;\; ^3 \\ 1=-8+6+3\cdot C & \| \;\; \textit{ausrechnen} \\ 1=-2+3\cdot C & \| \;\; \textit{ausrechnen} \\ 3=3\cdot C & \| \;\; +2 \\ C=1 & \| \;\; :3 \end{array}$$

Das bedeutet also für unsere Funktion (C=1 einsetzen):

$$y=\sqrt[3]{-x^3+3x+3\cdot 1}$$

$$y=\sqrt[3]{-x^3+3x+3}$$

Aufgabe 226:

Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'+\frac{2x^2-1}{x}\cdot y=e^{-x^2}\cdot\ln(x),\quad x>0$$

Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung an.

Wie lautet die Lösung der inhomogenen Gleichung, für die gilt y(1)=1?

Lösung:

Aufgabe:

Gegeben sei die lineare DGL

$$y' + \frac{2x^2-1}{x} \cdot y = e^{-x^2} \ln x \quad , \quad x > 0$$

Man gebe die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung an. Wie lautet die Lösung der inhomogenen Gleichung, für die gilt $y(1) = 1$?

Lösung:

$$u(x) = C \cdot e^{-\int A(x)\,dx}$$

Umformen der Ausgangsgleichung:

$$y' = -\left(\frac{2x^2-1}{x} \cdot y\right) + e^{-x^2} \cdot \ln x$$

$$y' = \frac{1-2x^2}{x} \cdot y + e^{-x^2} \cdot \ln x$$

das bedeutet $A(x) = \frac{1-2x^2}{x}$

Für das Integral $\int A(x)\,dx$ berechnen wir:

$$\int A(x)\,dx = \int \frac{1-2x^2}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} - 2x\,dx$$

$$= \ln x - x^2 + C$$

Damit lautet die gesamte Lösung (homogen)

$$u(x) = e^{\ln x - x^2 + C} = C_0 \cdot x \cdot e^{-x^2}$$

Für die Gesamtlösung des inhomogenen Problems benötigen wir eine Lösung u der homogenen DGL

$u' = -A(x) \cdot u$

Eine solche Lösung ist durch

$$u(x) = C \cdot e^{\int -A(x)\,dx}$$

$$u(x) = C \cdot e^{-(\ln x - x^2 + c)}$$

$$u(x) = C \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{x^2} \cdot e^{-c}$$

$$u(x) = C_1 \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{x^2}$$ gegeben.

Damit lautet die Gesamtlösung des inhomogenen Problems

$$y = \frac{1}{u(x)} \cdot \int u \cdot B(x)\,dx$$

$$y = \frac{x}{e^{x^2}} \cdot \int \frac{e^{x^2}}{x} \cdot e^{-x^2} \ln x\,dx$$

$$y = x \cdot e^{-x^2} \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx$$

$$\boxed{y = x \cdot e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + d\right)}$$

Aufgabe 227:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

$$y' + x \cdot y^2 = 0$$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = -xy^2$$

$$-\frac{1}{y^2}dy = xdx$$

$$-\int \frac{1}{y^2}dy = \int xdx$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2c}{2}$$

$$y = \frac{2}{x^2 + 2c}$$

Aufgabe 228: (5)

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$y' = y^2 + 1, \qquad y(0) = \sqrt{3}.$$

Lösung:

Bsp 1 Zu lösen sei das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + 1, \qquad y(0) = \sqrt{3}.$$

Es hat sich bewährt, in folgenden Schritten vorzugehen:

Trennung der Veränderlichen:	$\frac{dy}{y^2+1} = dx$
unbestimmte Integration:	$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int 1\,dx$
	$\arctan y = x + C$
Auflösen nach y:	$y(x) = \tan(x + C)$
Bestimmung der Parameter:	$y(0) = \tan C = \sqrt{3}, \quad C = \frac{\pi}{3}$
gesuchte Lösung:	$y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$

Aufgabe 229:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 2 \cdot y - 5$ und bestimmen Sie mit dem gebenden Anfangswert $y(0) = \frac{3}{2}$ die dazugehörige Differentialgleichung.

Lösung:

Beispiel für die Lösung eine linearen DGL 1. Ordnung durch Trennung der Variablen

Bestimme die Lösung y(x) der Differentialgleichung $y'(x) = 2 \cdot y(x) - 5$ mit gegebenem Anfangswert $y(0) = \frac{3}{2}$

Lösung:

$y'(x) = 2 \cdot y(x) - 5$	Differentialschreibweise anwenden
$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot y - 5$	Trennung der Variablen: $\cdot dx$; $:2y - 5$
$\frac{dy}{2y-5} = dx$	Integration auf beiden Seiten:

Man integriert links von y(0) bis y(x) und rechts entsprechend von 0 bis x. Vereinfachend wird hier der gleiche Buchstabe x sowohl als Integrationsvariable als auch als obere Grenze eingesetzt!

$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{2y-5}\,dy = \int_0^x 1\,dx$	Integrale mit Stammfunktionen lösen
$\left[\frac{1}{2}\ln(2y-5)\right]_{y(0)}^{y(x)} = [x]_0^x$	Einsetzen
$\frac{1}{2}[\ln(2y(x)-5) - \ln(2y(0)-5)] = x - 0$	$\cdot 2$

$$\ln\left(\frac{2y(x)-5}{2y(0)-5}\right) = 2x \qquad | \text{ Exponieren}$$

$$\frac{2y(x)-5}{2y(0)-5} = e^{2x} \qquad | \cdot 2y(0)-5;\ +5;\ :2$$

$$y(x) = (y(0)-\frac{5}{2})e^{2x} + \frac{5}{2} \qquad | \ y(0) = \frac{3}{2} \text{ einsetzen}$$

$$= e^{2x} + \frac{5}{2}$$

$$y' = 2y - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 5$$

$$\int \frac{1}{2y-5}\,dy = \int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot \ln(2y-5) = x + c \qquad | \cdot 2$$

$$\ln(2y-5) = 2x + 2c \qquad | \ e^{(\ )}$$

$$2y-5 = e^{2x+2c} \qquad | +5 \ :2$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2x+2c} + \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot e^{2c}\cdot e^{2x} + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{c_1}\cdot e^{2x} + \frac{5}{2}$$

mit $y(0) = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot e^{c_1}\cdot e^{0} + \frac{5}{2}$$

$$-2 = e^{c_1} \quad / \quad ???$$

Aufgabe 230:

Geben Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu dem gegebenen Anfangswert an.

$y'(x)\cdot y(x) = x^2 + 3$ mit $y(0) = 0$

Lösung:

$y'(x)\cdot y(x) = x^2 + 3$

$$\frac{dy}{dx}\cdot y = x^2 + 3$$

$$y\,dy = x^2 + 3\,dx$$

$$\int y \, dy = \int x^2 + 3 \, dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + 3x + c$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 6x + 2c}$$

y(0)=0 → c=0 → $y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 6x}$

Aufgabe 231:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen.

$$y' = 1 + 2\,\frac{y}{x}$$

$$x - y + x\,y' = 0$$

$$x\,y' = y + x\,\tan\frac{y}{x}$$

$$x\,y' = y\,(\ln y - \ln x), \qquad y(1) = 1$$

$$x\,y' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad y(1) = 0$$

Lösung:

$$\boxed{y' = 1 + 2\,\frac{y}{x} = 1 + 2u}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$u + x\,u' = 1 + 2u \quad \Leftrightarrow \quad x\,u' = 1 + u$$

$$x\,\frac{du}{dx} = 1 + u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{1 + u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{1 + u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|1 + u| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|C\,x|$$

$$1 + u = C\,x \quad \Rightarrow \quad u = C\,x - 1 \quad (C \in \mathbb{R})$$

Rücksubstitution: $\quad u = \dfrac{y}{x} = C\,x - 1 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{y = x\,(C\,x - 1) = C\,x^2 - x}$$

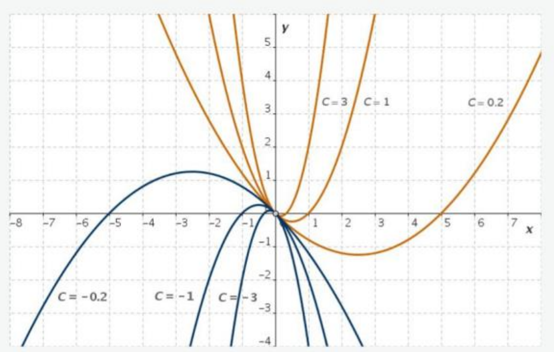


Abb. L5-1: Integralkurven der DGL

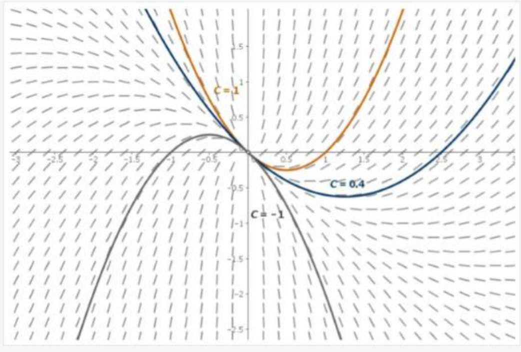


Abb. L5-2: Richtungsfeld der DGL, Integralkurven

$$\boxed{x - y + x\,y' = 0}$$

$$x - y + x\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{y}{x} + y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} - 1$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$y' = u + x\,u', \quad y' = u - 1 \quad \Rightarrow \quad u + x\,u' = u - 1 \quad \Rightarrow$$

$$u' = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int du = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$u = -\ln|x| + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = -\ln|x| + C \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x\,(C - \ln|x|)}$$

$$\boxed{x\,y' = y + x\,\tan\frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$u + x\,u' = u + \tan u \quad \Rightarrow \quad x\,u' = \tan u \quad \Leftrightarrow \quad x\,\frac{du}{dx} = \tan u \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$t = \sin u, \quad dt = \cos u\,du$$

$$\int \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\sin u|$$

$$\int \frac{\cos u\,du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|C\,x|$$

$$\sin u = C\,x \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{y}{x} = C\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \arcsin(C\,x)$$

$$\boxed{y = x\arcsin(C\,x)}$$

$$\boxed{x\,y' = y\,(\ln y - \ln x) \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$y' = u + x\,u' = u\,\ln u \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u\,(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$v = \ln u - 1\,, \quad v' = \frac{1}{u}\,, \quad du = u\;dv$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\,v\,| = \ln|\,x\,| + \ln|\,C\,| = \ln|\,C\,x\,|$$

$$v = C\,x \quad \Rightarrow \quad \ln|\,u\,| - 1 = C\,x \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C\,x + 1$$

$$\frac{y}{x} = e^{C\,x+1} \quad \Rightarrow \quad y = x\,e^{C\,x+1}$$

$$y = x\,e^{C\,x+1} \qquad \text{– allgemeine Lösung}$$

$$y(1) = 1, \quad y = x\,e^{1-x} \quad \text{– spezielle Lösung } (C = -1)$$

$$x\,y' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad y(1) = 0$$

$$x\,y' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}} \quad \left|\left(\frac{1}{x}\right)\right., \qquad y' = \frac{y}{x} - 1 - e^{\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\,u \quad \Rightarrow \quad y' = u + x\,u'$$

$$u + x\,u' = u - 1 - e^{u} \quad \Leftrightarrow \quad x\,u' = -1 - e^{u} \quad \Rightarrow$$

$$u' = -\frac{1 + e^{u}}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1 + e^{u}}{x} \qquad \left|\left(\frac{dx}{1 + e^{u}}\right)\right.$$

$$\frac{du}{1 + e^{u}} = -\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{1 + e^{u}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^{a\,x}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{a\,x}}{1 + e^{a\,x}}$$ aus Folmelsammlung

$$\ln\left|\frac{e^{u}}{1 + e^{u}}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad \frac{e^{u}}{1 + e^{u}} = \frac{C}{x}, \qquad x\,e^{u} = C\,(1 + e^{u})$$

$$e^{u}(x - C) = C, \qquad e^{u} = \frac{C}{x - C} = \frac{1}{C_1 x - 1} \qquad \left(C_1 = \frac{1}{C}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{1}{C_1 x - 1}\right| \quad \Rightarrow \quad y = x\,\ln\left|\frac{1}{C_1 x - 1}\right| = -x\,\ln\left|C_1 x - 1\right|$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = -x\,\ln\left|C_1 x - 1\right|$

Spezielle Lösung:

$y(1) = 0: \quad 0 = -\ln\left|C_1 - 1\right| \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$

$$y = x\,\ln\left|\frac{1}{2x - 1}\right|$$

Aufgabe 232:

Lösen Sie folgende linearen Differentialgleichungen.

$$y' + 2y = e^{-x}, \qquad y(0) = 4$$

$$y' + \frac{y}{x} = \cos x, \qquad y(\pi) = 1$$

$$x\,y' + y = 6x^2, \qquad y(1) = 3, \qquad y(1) = -1$$

$$x\,y' + y = 4x^3 - 2x^2$$

$$y(1) = -3, \qquad y(1) = 3$$

Lösung:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

$$DGL: \quad y' + 2y = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2, \quad g(x) = e^{-x}$$

Zuerst wird die entsprechende homogene Differentialgleichung durch Trennung der Variablen gelöst.

$$y_0' + 2y_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_0}{dx} = -2y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_0}{y_0} = -2\,dx$$

$$\int \frac{dy_0}{y_0} = -2\int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y_0| = -2x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y_0 = C\,e^{-2x}$$

$$C \to C(x), \qquad y_0 \to y = C(x) \cdot e^{-2x}$$

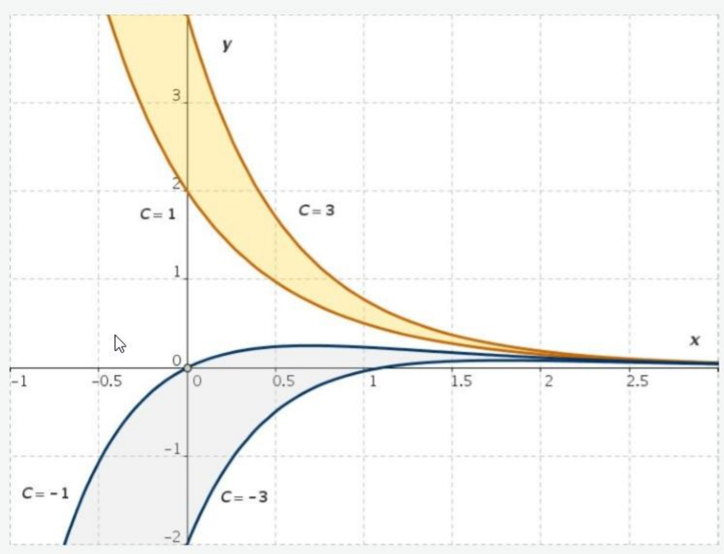
$$y' = C'(x) \cdot e^{-2x} - 2C(x) \cdot e^{-2x}$$

Die Funktionsterme für y und y' werden in die inhomogene DGL eingesetzt

$$C'(x) \cdot e^{-2x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = e^{x} + C_1$$

$$y = C(x)\,e^{-2x} = (e^{x} + C_1)\,e^{-2x} = C_1\,e^{-2x} + e^{-x}$$

<u>Allgemeine Lösung:</u> $\quad y = C_1\,e^{-2x} + e^{-x}$



$$y' + \frac{y}{x} = \cos x, \qquad y(\pi) = 1$$

$$y_0' + \frac{y_0}{x} = 0, \qquad \ln|y_0| = -\ln|x| + \ln|C|, \qquad \ln|y_0| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad y_0 = \frac{C}{x}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist: $y_0 = \dfrac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})$

$$C \to C(x), \qquad y_0 \to y = \frac{C(x)}{x}$$

$$y = \frac{C(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C'(x)\,x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \cos x: \quad \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{C'(x)}{x} = \cos x$$

$$C'(x) = x\,\cos x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int x\,\cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C_1$$

$$\int x\,\cos(a\,x)\,dx = \frac{\cos(a\,x)}{a^2} + \frac{x\sin(a\,x)}{a}$$

Allgemeine Lösung: $y = \dfrac{\cos x + x \sin x + C_1}{x}$

Spezielle Lösung:

$$y(\pi) = \frac{\cos \pi + \pi \sin \pi + C_1}{\pi} = \frac{-1 + C_1}{\pi} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = \pi + 1$$

$$y = \frac{1}{x} (\cos x + x \sin x + \pi + 1)$$

$$x\,y\,' + y = 6\,x^2, \qquad y\,' + \frac{y}{x} = 6\,x$$

$$y = 2\,x^2 + \frac{C}{x}$$

$$y(1) = 3, \qquad y = 2\,x^2 + \frac{1}{x}$$

$$y(1) = -1, \qquad y = 2\,x^2 - \frac{3}{x}$$

$$x\,y\,' + y = 4\,x^3 - 2\,x^2, \qquad y\,' + \frac{y}{x} = 4\,x^2 - 2\,x$$

$$y = x^3 - \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{C}{x}$$

$$y(1) = -3, \qquad y = x^3 - \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{10}{3\,x}$$

$$y(1) = 3, \qquad y = x^3 - \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{8}{3\,x}$$