Aufgabensamm-
lung

Mathematik I

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart

Campus Horb

Dozent

Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Inhaltsverzeichnis

Keine Handys, Smartphones, Tablets, Notebooks, MP3-Player, und sonstige elektronischen Geräte.

(Sollten auch nicht auf dem Tisch liegen)

Sollten Sie unbedingt kommunizieren müssen, so gehen Sie freiwillig aus dem Raum oder Sie bekommen von mir eine Pause zugeteilt, in der Sie in Ruhe Ihre Kommunikation durchführen können.

Lösungen zu den Aufgaben

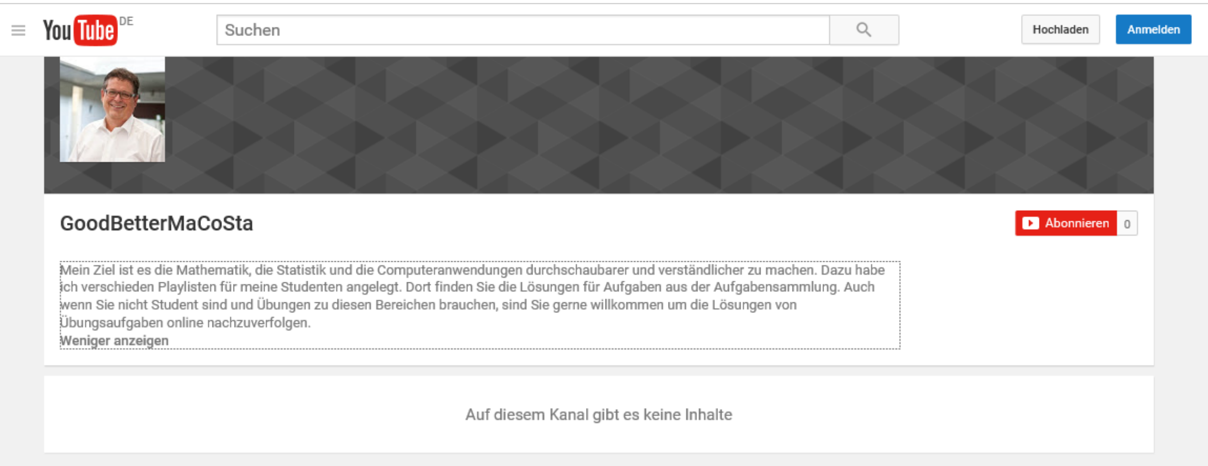
Internet

http://www.cs-geiger.de/wiw.htm

QR-Code Internet

YouTube

http://www.youtube.com/channel/UCro4ldWf20euH8u1SXU3l-g



QR-Code YouTube

Matrizen

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Spur der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Transponieren Sie die Matrix A zu A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Addieren Sie folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3 \\ 9 & 10 & 8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie die folgenden Operationen:

a) A+B; b) A+C; c) B+A; d) C+A; e) B+C; f) C+B; g) A-B; h) A-C; i) B-A

j) C-A; k) B-C; l) C-B

Aufgabe 5:

Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Skalar λ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 11 & 15 & 21 \\ 27 & 30 & 34 \\ 35 & 36 & 40 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2$$

Aufgabe 6:

Es sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Rechenoperationen:

a) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$

b) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{C}$

c) $\mathrm{B} \cdot \mathrm{C}$

d) $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$

e) $\mathrm{C} \cdot \mathrm{A}$

f) $\mathrm{C} \cdot \mathrm{B}$

Aufgabe 7:

Führen Sie folgende Rechenoperation A^2 mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperation überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:

Berechnen Sie die Matrizenprodukte AB, BA, A^TA, AA^T mit:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche besondere Eigenschaft besitzen die Matrizen A^TA und AA^T?

Aufgabe 9:

Gegeben sind die 3-reihigen Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie mit dem *Falk-Schema* die folgenden Produkte:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Produkte auf zwei *verschiedene* Arten:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}), \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}), \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

Sind die bekannten *Binomischen Formeln* auf Matrizen anwendbar?

Aufgabe 10:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 wird das Material M1 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material 1 wird im ersten Quartal benötigt?

Aufgabe 11:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1, E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material wird im ersten Quartal benötigt?

Aufgabe 12:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

In den Quartalen des Jahres sollen folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16
Quartal 2	10	20	20
Quartal 3	12	24	25
Quartal 4	10	18	20

Wie viel Einheiten der 4 Materialien werden in den 4 Quartalen benötigt?

Aufgabe 13:

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus die Endprodukte P_1, P_2 und P_3 her.

Erstellen Sie folgende Matrizen.

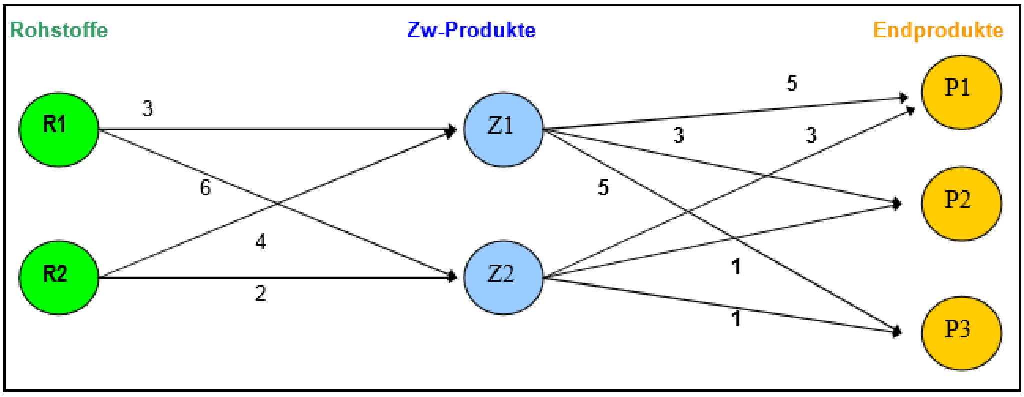
a) Die Rohstoff–Zwischenprodukt-Matrix

b) Die Zwischenprodukt–Endprodukt-Matrix

c) Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix

d) Ein Kunde bestellt 123 P_1, 345 P_2 und 234 P_3. Zusätzlich benötigt er noch 98 Z_1 und 114 Z_2. Wieviel Rohstoffe muss er bestellen um diesen Auftrag bearbeiten zu können?

e) Wie groß sind seine gesamten Ausgaben für diese Rohstoffe, wenn er R_1 für 13 Euro und R_2 für 21 Euro einkaufen kann?



Aufgabe 14:

In einer Möbelfabrik werden aus Holz, Metall und Stoff Tische, Bänke und Stühle produziert, die einzeln bzw. als Sitzgruppen verkauft werden.

Für einen Tisch werden 12 Einheiten Holz und 3 Einheiten Metall,

für eine Bank 6 Einheiten Holz, 2 Einheiten Metall und 5 Einheiten Stoff,

für einen Stuhl 2 Einheiten Holz, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Stoff benötigt.

Eine Sitzgruppe A besteht aus einem Tisch und vier Stühlen,

eine Sitzgruppe B aus einem Tisch, einer Bank und drei Stühlen.

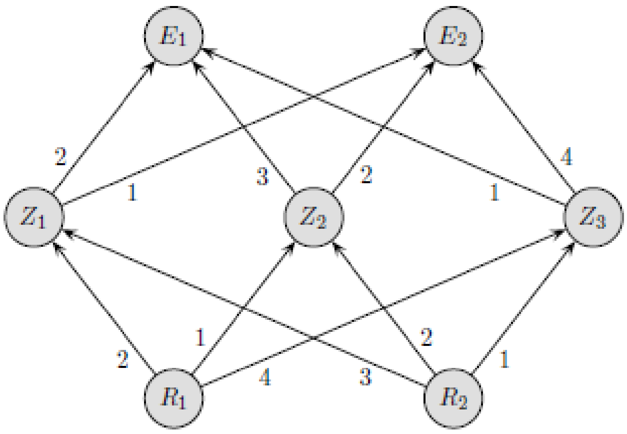
a) Geben Sie die Verflechtungsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Einzelprodukten und für den Zusammenhang von Einzelprodukten und Sitzgruppen an und bestimmen Sie aus diesen durch Matrizenmultiplikation die Verflechtungsmatrix für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Sitzgruppen!

b) Ein Kunde bestellt 40 Sitzgruppen A, 60 Sitzgruppen B und zusätzlich 10 Bänke. Ermitteln Sie unter Verwendung der Verflechtungsmatrizen aus a), welche Mengen der Ausgangsmaterialien benötigt werden!

Aufgabe 15:

In einem Unternehmen mit einem mehrstufigen Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:

Es sollen 4 Mengeneinheiten (ME) von E_1 und 7 ME von E_2 produziert werden. Wie viel Rohstoffe sind nötig?



Aufgabe 16:

Es liegt ein zweistufiger Produktionsprozess vor, bei dem folgende Bedingungen vorliegen:

1. Stufe: Rohstoffe R1, R2, R3, R4 −>Halbfabrikate H1, H2, H3

2. Stufe: Halbfabrikate H1, H2, H3 −>Endprodukte E1, E2

z. B.

Für 1 ME Endprodukt E_1 wird benötigt: 4 ME H_1, 2 ME H_2, 10 ME H_3
Für 1 ME Halbfabrikat H_2 wird benötigt: 3 ME R_1, 5 ME R_2, 0 ME R_3, 7 ME R_4

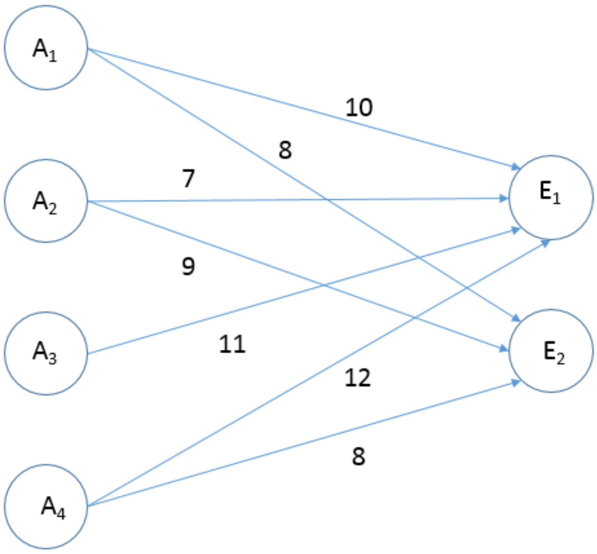
	H_1	H_2	H_3
R_1	1	3	0
R_2	10	5	8
R_3	2	0	1
R_4	3	7	1

	E_1	E_2
H_1	4	20
H_2	2	3
H_3	10	5

Wie viel Rohstoffe sind nötig, um 2000 ME E_1 und 10000 ME E_2 herzustellen?

Aufgabe 17:

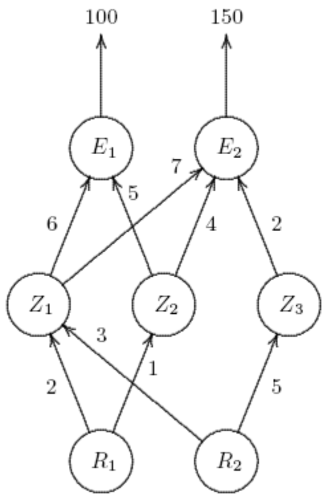
Zwei Produkte E_1 und E_2 werden mit Hilfe von 4 Baugruppen A_1, A_2, A_3 und A_4 hergestellt. Die Beziehungen werden durch den folgenden Graphen dargestellt:



Ein Kunde bestellt 230 Stück von E_1 und 410 Stück von E_2. Wie viele Baugruppen braucht er dazu?

Aufgabe 18:

In einem Unternehmen mit mehrstufigem Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:

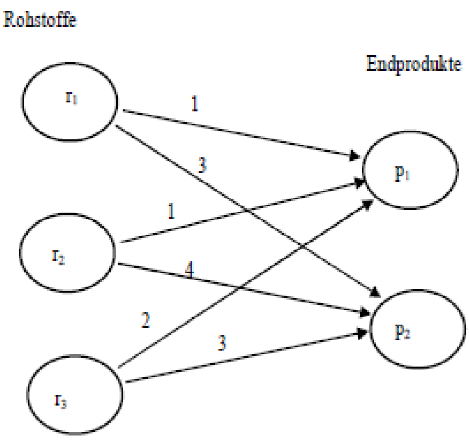


Der Pfeil z. B. von R_1 nach Z_1 gibt an, dass pro Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts Z_1 2 Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1 erforderlich sind.

Die Frage ist nun, wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1 und R_2 zur Verfügung stehen müssen, um eine Produktion der Endprodukte E_1 = 100 (ME) und E_2 = 150 (ME) zu ermöglichen.

Aufgabe 19:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Der folgende Graph gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in Euro werden durch den Vektor $\vec{K} = (5; 34; 23)$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert einer Bestellung von 6 ME P_1 und 3 ME P_2?

Aufgabe 20:

Ein Betrieb stellt aus drei Rohstoffen vier Bauteile her, die zu drei Fertigprodukten gemäß folgender Stücklisten weiterverarbeitet werden.

Stückliste 1:

Rohstoffe	ME je Bauteil			
	B_1	B_2	B_3	B_4
R_1	2	2	1	3
R_2	0	2	3	0
R_3	3	0	2	2

Stückliste 2:

Bauteile	ME je Fertigprodukt		
	F_1	F_2	F_3
B_1	2	2	1
B_2	1	2	2
B_3	3	0	2
B_4	1	2	1

a) (3) Berechnen Sie die Rohstoffkosten für je eine ME der Fertigprodukte mit Hilfe von Matrizenmultiplikationen, wenn die Kosten der Rohstoffe pro ME 2,50 Euro für R1, 1,00 Euro für R2 und 1,50 Euro für R3 betragen.

b) (3)Die Fertigungskosten bei der Produktion der Bauteile pro ME betragen 5,00 Euro für B1, 3,00 Euro für B2, 4,00 Euro für B3 und 6,00 Euro für B4. Berechnen Sie für jedes der drei Fertigprodukte die Kosten je ME, die durch die Fertigung der Bauteile entstehen, ebenfalls durch Matrizenmultiplikationen.

c) (3) Die Fertigungskosten bei der Produktion der Fertigprodukte betragen je ME 40,00 Euro bei F1, 35,00 Euro bei F2 und 32,00 Euro bei F3. Die Fertigprodukte können zu folgenden Preisen verkauft werden: 165,00 Euro bei F1, 150,00 Euro bei F2 und 140,00 Euro bei F3. Um wie viel Euro übersteigen die Verkaufserlöse die variablen Kosten je ME von F1, F2 und F3?

d) (5) Technisch bedingt können die Fertigprodukte nur im festen Mengenverhältnis von 5:4:3 hergestellt werden. Wie viel ME der Fertigprodukte können mit einer Menge von 8.080 ME des Rohstoffs R2 produziert werden?

Aufgabe 21:

Berechnen Sie von folgender Matrix A die Inverse Matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das an einem Beispiel noch deutlicher machen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Hier ist also $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$ und $d = 5$. Der Wert von $ad - bc$ ist dann

$$ad - bc = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = 10 + 3 = 13$$

Das steht also unter dem Bruchstrich vor der Matrix in der Formel der Inversen. Die selbst lautet

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und zusammen mit dem Bruch $\frac{1}{13}$ haben wir

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Wegen der Übersichtlichkeit würde man den Bruch $\frac{1}{13}$ vermutlich vor der Matrix stehen lassen.

Aufgabe 22:

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 24:

Berechnen Sie Inverse Matrix zu A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 25:

Berechnen Sie die inversen Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 26:

Berechnen Sie die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27:

Berechnen sie die inverse Matrix von:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 28:

Wie lautet die Inverse der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 29:

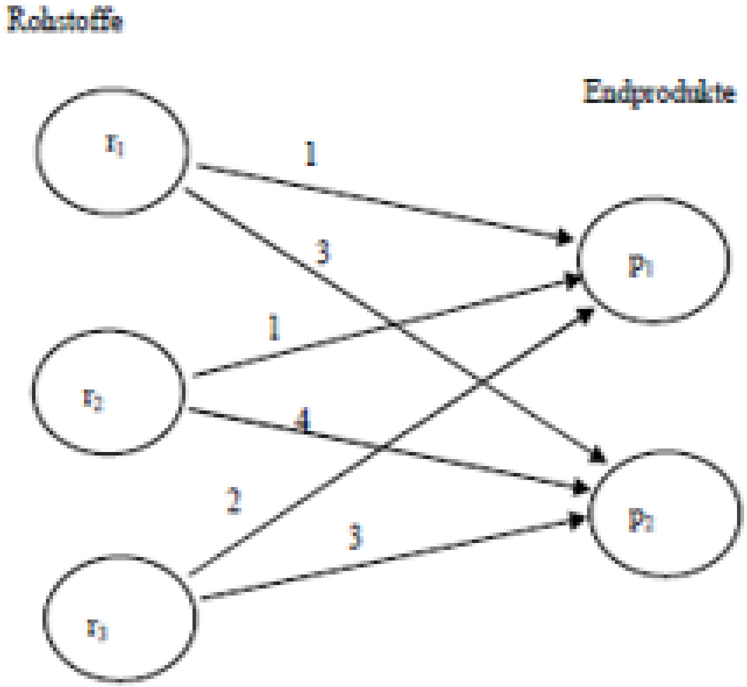
Bestimmen Sie die Inverse zur folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 30:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Das folgende Verflechtungsdiagramm gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



a) (3) Wie viele Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 werden benötigt, um 6 ME der Sorte P_1 und 3 ME der Sorte P_2 herzustellen?

b) (2) Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in € werden durch den Vektor k_r =(R_1; R_2; R_3)= (5; 34; 23) gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert der in a) zu bestellenden Einzelteile?

Aufgabe 31:

Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte. Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt. Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz			
$R \to Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	a_{31}	0	a_{33}
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz			
$Z \to E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

a) (5) Berechnen Sie die Elemente a_{31} und a_{33} in der Rohstoffeinsatzmatrix A so, dass die Rohstoff/Endproduktmatrix C wie folgt lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

b) (3) Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 hergestellt werden können.

c) (10) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A gab es einen Ausfall bei der Herstellung des Zwischenproduktes Z_2. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden.

Zurzeit sind am Lager in Werk B nur noch die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.

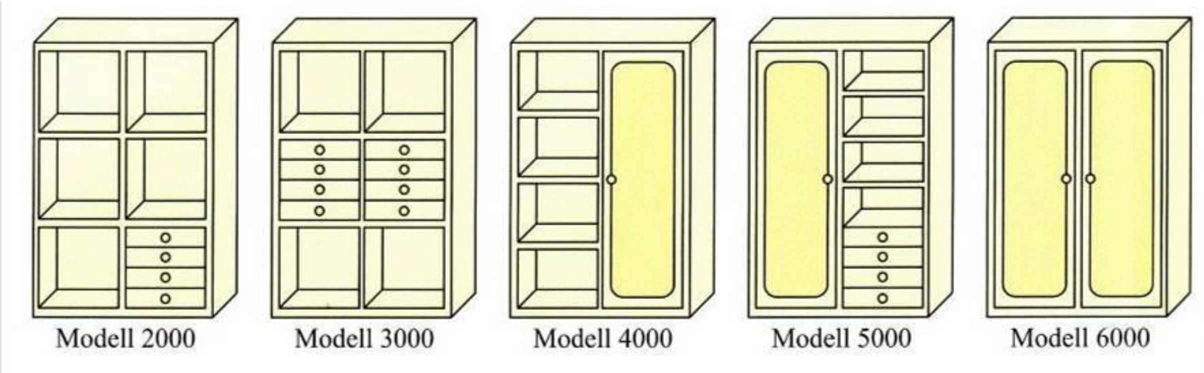
Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3.

Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.

Zeigen Sie durch eine Berechnung, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

Aufgabe 32:

Eine Möbelfabrik bietet ein Möbelsystem an, dessen Schränke nach Wünschen der Kunden auf fünf verschiedene Arten (Modell 2000, Modell 3000, Modell 4000, Modell 5000, Modell 6000) aus den Grundelementen "Korpus", "Tür", Einlegeboden" und "Schubladensatz" zusammengestellt werden können.



In der folgenden Tabelle ist angegeben, wie viele Grundelemente jeweils für die fünf Schrankmodelle benötigt werden.

	Korpus	**Türen**	**Einlegeböden**	**Schubladensätze**
Modell 2000	1	0	3	1
Modell 3000	1	0	0	2
Modell 4000	1	1	3	0
Modell 5000	1	1	3	1
Modell 6000	1	2	6	0

Es soll folgender Auftrag zur Lieferung der verschiedenen Schrankmodelle erstellt werden.

Auftrag:

Modell 2000: 20 Stück, Modell 3000: 25 Stück, Modell 4000: 40 Stück, Modell 5000: 50 Stück, Modell 6000: 70 Stück.

Berechnen Sie wie viel der Schrankelemente jeweils hergestellt werden müssen.

Aufgabe 33:

Bestimmen Sie alle 2-reihigen Matrizen vom Typ $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dessen Matrizenprodukt mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sich kommutativ verhält ($A \cdot X = X \cdot A$)

Aufgabe 34:

In einem Produktionsprozess werden aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt, aus denen wiederum drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt werden. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den folgenden Tabellen zu entnehmen:

	Z_1	**Z_2**	**Z_3**
R_1	8	9	10
R_2	9	7	10
R_3	7	11	10

	E_1	**E_2**	**E_3**
Z_1	1	2	2
Z_2	3	3	1
Z_3	2	0	2

Die Rohstoffkosten in Euro/ME betragen: $K_R^T = (0{,}05 \quad 0{,}03 \quad 0{,}04)$,

die Fertigungskosten in Euro/ME der Endprodukte $K_E^T = (10 \quad 20 \quad 20)$.

a) Im Lager sind 1500 ME von R_1 und 2700 ME von R_2. Der Rohstoff R_3 ist nicht mehr vorrätig. Von jedem Endprodukt sollen 40 ME hergestellt werden.

Wie viele ME der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 müssen beschafft werden, damit von jedem Rohstoff 1000 ME als Reserve übrig bleiben?

b) Der Verkaufspreis für je 1 ME der Endprodukte beträgt 80 Euro für E_1, 100 Euro für E_2 und 90 Euro für E_3. Bei einem Auftrag über 700 ME von E_1, 600 ME von E_2 und 800 ME von E_3 soll ein Gewinn von 62500 Euro erwirtschaftet werden. Die Fixkosten für diesen Auftarg belaufen sich auf 34205 Euro. Die Fertigungskosten pro ME sind für Z_2 dreimal so hoch wie für Z_1 und für Z_3 1,5-mal so hoch wie für Z_1.

Bestimmen Sie die Fertigungskosten je ME der Zwischenprodukte.

c) Eine verfahrenstechnische Innovation erfordert die Herstellung von Vorprodukten unmittelbar aus den Rohstoffen. Diese Vorprodukte werden dann zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 weiter verarbeitet.

Der Materialfluss ist in den folgenden Tabellen zusammengefasst.

	V_1	**V_2**
R_1	2	3
R_2	3	4
R_3	3	2

	Z_1	Z_2	Z_3
V_1	1	3	2
V_2	2	1	2

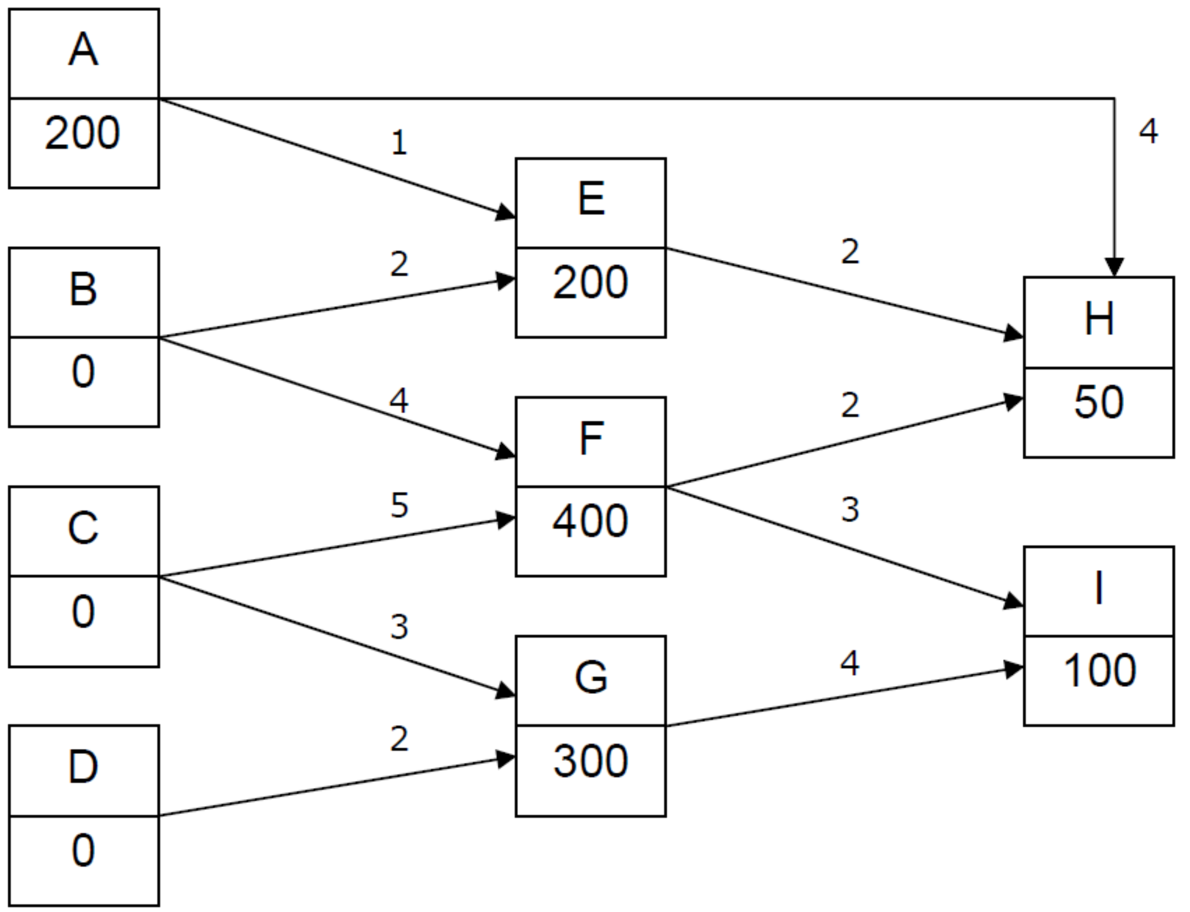
Die Fertigungskosten in Euro/ME der Vorprodukte betragen $K_V^T = (0{,}7 \quad 0{,}6)$.

Die Fertigungskosten in Euro/ME der Zwischenprodukte aus den Vorprodukten betragen $K_{Z_{neu}}^T = (1 \quad 2 \quad 1)$.

Untersuchen Sie für die einzelnen Zwischenprodukte, ob durch die Innovation Kosten eingespart werden können, wenn die Herstellungskosten für je 1 ME der Zwischenprodukte bisher 2,95 Euro für Z_1, 7,10 Euro für Z_2 und 4,20 Euro für Z_3 betragen.

Aufgabe 35:

Gegeben ist ein Gozintograph mit vier Werkstoffen (A, B, C und D), drei Zwischenprodukten (E, F und G) sowie zwei Endprodukten (H und I). Die Zahlen unter den Buchstaben stellen den aktuellen Lagerbestand dar:



Ermitteln Sie den Gesamtbedarf der Güterarten A, B, C und D.

Determinanten

Aufgabe 36:

Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Sarrus.

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 2k & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 1-k & k & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 0 & k^2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & k \end{vmatrix}$

Aufgabe 37:

Für welche Werte von k hat diese Determinante der Wert 0 ?

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 38:

Erzeugen Sie an den markierten Stellen zwei Nullen durch Addition der Vielfachen zweier Zeilen oder Spalten und berechnen dann:

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 27 & 5 & 8 \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix}$

Aufgabe 39:

Vereinfachen Sie durch Addition eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte so, dass, möglichst eine oder zwei Nullen entstehen und berechnen dann:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Aufgabe 40:

Vereinfachen Sie zuerst durch Ausklammern von Faktoren, erzeugen Sie dann zwei Nullen und berechnen den Wert der Determinante.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 21 & 14 & 21 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 55 & 7 & -22 \\ 10 & 6 & -8 \\ 35 & -9 & -14 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2k & 9 & 12 \\ 4k & 3 & 7 \\ k^2 & 12 & 14 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 44 & 22 & -22 \\ 7 & 6 & 5 \\ 15 & -12 & 18 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 24 & 5 & 14 \\ 12 & 6 & 7 \\ -18 & 20 & 21 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3 & 4k & 5 \\ 3k & 4 & 2 \\ 6 & 2k & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 41:

Für welche Werte von k hat die Determinante den Wert 0?

(a) $\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 4 \\ 5 & 1 & k \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & 2k & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 2k & k & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Aufgabe 42:

Erzeugen Sie zuerst Nullen und berechnen dann durch Entwickeln:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -12 & 3 & 12 \\ 34 & 8 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der zweiten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 2. Zeile!

(b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 15 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der ersten Spalte zwei Nullen und entwickle dann nach der 1. Spalte!

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -9 & -6 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der dritten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 3. Zeile!

Aufgabe 43:

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 44:

Rechne Sie die folgenden Aufgaben nach eigener Vorstellung.

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 22 & 24 & 26 \\ 20 & 22 & 24 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 5 \\ 17 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} 1-k & 1 & k \\ 2-k & 2 & k \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} k & k & 2k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

Aufgabe 45:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 46:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 47:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 48:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 49:

Für welche $x \in R$ ist die folgende Determinante Null?

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3x-5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 50:

Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie hierzu ein Verfahren Ihrer Wahl.

Aufgabe 51:

Eine Matrix, deren Determinante den Wert 0 besitzt, heißt singulär. Ist die Determinante von 0 verschieden, so nennt man die Matrix regulär.

Finden Sie eine Lösung für die Parameter-Werte, damit die Matrizen singulär bzw. regulär werden?

a) $\begin{vmatrix} t & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} s & 0 & 2 \\ 8 & t & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 52:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Vereinfachen Sie diese Determinante durch elementare Umformungen in den *Spalten* so lange, bis Sie eine Determinante erhalten, die in einer Zeile nur noch ein von Null verschiedenes Element enthält und entwickeln Sie anschließend nach *Laplace* (Berechnung der anfallenden 3-reihigen Determinante nach der *Regel von Sarrus*).

Aufgabe 53:

Welche der nachfolgenden 3-reihigen Matrizen sind *regulär*, welche *singulär*?
(Nachweis über Determinanten)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 & 9 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } a \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 54:

Bestimmen Sie mit Hilfe *elementarer Umformungen* in den Zeilen bzw. Spalten der Matrix den *Rang* r dieser Matrix und entscheiden Sie dann, ob die Matrix *regulär* oder *singulär* ist.

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & -3 \\ 8 & -7 & 21 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 55:

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen *orthogonal* sind:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)}\ \mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die jeweilige *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$?

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

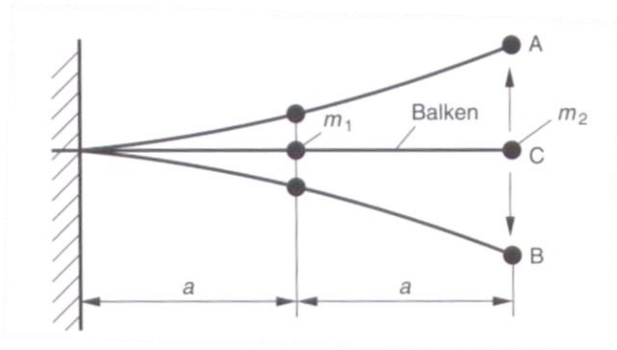
Aufgabe 56:

Für welche Werte von λ wird folgende Determinante Null?

$$A = \begin{vmatrix} (\lambda-1) & 0 & 2 \\ 1 & (\lambda-1) & 1 \\ -2 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Aufgabe 57:

Der im Bild dargestellte elastische Balken der Länge l=2a ist am linken Ende fest eingespannt und trägt in der angegebenen Weise zwei gleiche Punktmassen $m_1=m_2=m$.



A, B: Umkehrpunkte der Biegespannung

C: Gleichgewichtslage des Balkens

Infolge seiner Elastizität ist er zu Biegeschwingungen fähig. Die Kreisfrequenz ω dieser sog. Eigenschwingungen lassen sich aus der Determinanten-Gleichung

$$\begin{vmatrix} (\alpha-\omega^2) & -\frac{5}{2}\omega^2 \\ -\frac{5}{2}\omega^2 & (\alpha-8\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad \left(mit\ \alpha = \frac{3EI}{ml^3}\right)$$

bestimmen (EI: Biegesteifigkeit des Balkens).

Berechnen Sie diese Eigenkreisfrequenzen.

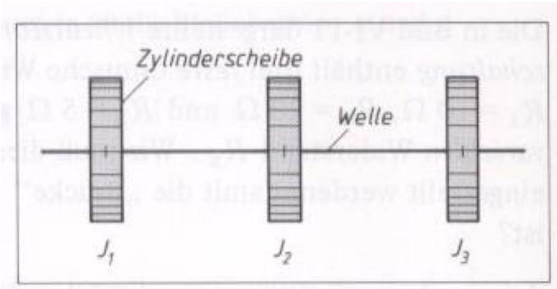
Aufgabe 58:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 59:

Das Bild zeigt eine elastische Welle mit konstantem Durchmesser, die in symmetrischer Anordnung drei starre Zylinderscheiben vom gleichen Massenträgheitsmoment $J_1=J_2=J_3$ trägt.



Werden die Scheiben gegeneinander verdreht, so treten infolge der elastischen Rückstellmomente sog. Torsionsschwingungen um die Wellenachse auf. Die Kreisfrequenzen ω dieser Eigenschwingungen (auch Eigenkreisfrequenzen genannt) lassen sich dabei aus der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 J + c) & -c & 0 \\ -c & (-\omega^2 J + 2c) & -c \\ 0 & -c & (-\omega^2 J + c) \end{vmatrix} = 0$$

berechnen. Wie lauten diese Eigenkreisfrequenzen.

Aufgabe 60:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 61:

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 6 & -2 & 5 & -6 \\ 6 & -9 & 3 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 62:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 63:

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Gleichungen mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) $y=3x+22$ und $y=5x+14$

b) $y=3x+8$ und $y=0{,}5x+2$

c) $4x+2y=18$ und $7x-y=13$

d) $8x-4y=-3$ und $14x-2y=8{,}5$

Aufgabe 64:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Gleichungen nach dem Einsetzungsverfahren.

$10x-7y+4=0$ und $6x-5y=-2$

Aufgabe 65:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen nach dem Additionsverfahren.

$6y=9x-81$ und $6x-4y=12$

Aufgabe 66:

Bestimmen Sie die Lösung dieses LGS.

I $x+y+z=6$

II $y+z=3$

III $z=1$

Aufgabe 67:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

I $x-3y+2z=-4$

II $-2y+5z=7$

III $-5y+4{,}5z=-6{,}5$

Aufgabe 68:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

I $3x-y+4z=12$

II $x-2y+z=5$

III $6x-4y+3z=16$

Aufgabe 69:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus und der Cramer'schen Regel.

a) I: $4x - 2y + z = 15$

II: $-x + 3y + 4z = 15$

III: $5x - y + 3z = 26$

b) I: $2x - 3y + z = 10$

II: $x + y - 2z = -6$

III: $3x - y - 4z = -5$

c) I: $x + y + z = 1$

II: $17x + y - 7z = 9$

III: $4x + 2y + z = 3$

d) I: $3y - z = 7$

II: $2x - 3y + 2z = -21$

III: $3x + y = -21$

e) I: $2x + 7y - z = 13$

II: $17x - 3y + 4z = -9$

III: $3x - 2y + z = -5$

f) I: $3x - 4y - 6z = 42$

II: $-x - 2y + 3z = -6$

III: $7x + 10y + 6z = 0$

Aufgabe 70:

Bestimme die Lösungsmenge des Systems.

I $x-y+z=4$

II $3x-y+4z =12$

III $x-4y+5z=15$

Aufgabe 71:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme.

a) I:$4x + 3y = 14$

II: $2x - y = 12$

b) I: $-4x - y = 40$

II: $x + 5y = 9$

c) I: $2x - 6y = 6$

II: $5x + 3y = 42$

d) I: $4x + 2y = 4$

II: $-6x + 3y = 33$

e) I: $12x + 11y = 18$

II: $16x - 7y = -2$

f) I: $3x - 10y = 3$

II: $-9x + 24y = -10$

g) I: $14x - 8y = 10$

II: $-21x + 15y = 60$

h) I: $18x + 24y = -132$

II: $27x - 40y = 676$

i) I: $11x - 10y = 13$

II: $-8x + 7y = -7$

Aufgabe 72:

Tick, Trick und Track sind zusammen 123 Jahre alt. Trick ist 32 Jahre älter als Tick, Track ist 26 Jahre älter als Trick.

Bestimme das jeweilige Alter der drei.

Aufgabe 73:

Bestimme die beiden Zahlen, die die Summe 32 ergeben und bei denen die Differenz doppelt so groß ist wie die kleiner der beiden Zahlen.

Aufgabe 74:

Die absolut identischen Hansen-Zwillinge und die Schulz-Drillinge wiegen zusammen 348 kg 750 g. Stellt sich jedoch nur ein Hansen-Zwilling mit zwei der Schulz-Drillinge auf die Waage, so zeigt diese lediglich 210 kg an.

Fragestellung: Wie viel wiegen die einzelnen Zwillinge?

Aufgabe 75:

Lösen Sie lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 76:

Christa und Julia haben sich verabredet. Sie starten beide um 15 Uhr mit ihren Fahrrädern in ihren 14 km voneinander entfernten Heimatorten. Christa schafft in jeder Stunde 12, Julia 16 km. Wie weit von Christas Heimatort entfernt treffen sie sich?

Aufgabe 77:

Zwei Autofahrer starten gleichzeitig in 55 km voneinander entfernten Ortschaften. Der erste legt 75, der zweite 90 km pro Stunde zurück. Wie weit vom Startort des ersten Fahrers entfernt treffen sie sich?

Aufgabe 78:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Wählen Sie selbst einen Lösungsweg!

a) $4y-19 = y+20$
$5x+2y = 126$

b) $20x-50 = 29y$
$2x+5y = 8y$

c) $3x+50 = 6x+5y$
$2y+10 = 3x+2y$

d) $x = 8y-6$
$x = 3y+4$

e) $y = 2x-3y+4$
$x = 2x-3y+4$

f) $3(2y+3) = 2x+7y$
$4(x+2) = 5x-3y$

g) $\frac{25x-3}{12} - \frac{20y-1}{18} = 2x-y$
$\frac{x+4}{9} = \frac{y+3}{5}$

h) $\frac{x+y}{2} + \frac{4y}{3} = 10$
$5-y = \frac{x+y}{2}$

i) $\frac{7(x-y)}{11} + \frac{x}{4} = 4.8$
$\frac{7(x-y)}{11} - \frac{3x}{4} = 2.4$

Aufgabe 79:

a) Suchen Sie zwei Zahlen, deren Summe 34 und deren Differenz 16 ist.

b) Eine Zahl ist um 8 grösser als eine andere, aber nur halb so groß wie deren Dreifaches. Um welche beiden Zahlen handelt es sich?

c) Gibt es zwei natürliche Zahlen mit dem Mittelwert 17, von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere.

Aufgabe 80:

Ermitteln Sie die vierstellige Zahl mit folgenden Eigenschaften:

Die Quersumme beträgt 14.

Die Summe von Tausender- und Einerziffer ist gleich der Summe von Hunderter- und Zehnerziffer.

Die Summe von Tausender- und Hunderterziffer ist gleich der Summe von Zehner- und Einerziffer.

Die Tausenderziffer ist um 1 grösser als die Einerziffer.

Aufgabe 81:

In einem mechanischen Uhrwerk wird ein großes Zahnrad von einem kleinen Zahnrad angetrieben. Wenn das kleine Rad 16 Umdrehungen gemacht hat, hat sich das große Rad nur 3-mal gedreht. Das kleine Rad hat 39 Zähne weniger als das große Zahnrad.

Berechne die Anzahl der Zähne von beiden Rädern.

Aufgabe 82:

Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $a \in R$ auf Lösbarkeit.

$$\begin{array}{cccccc} a \cdot x_1 & + x_2 & + x_3 & = & a \\ x_1 & + a \cdot x_2 & + x_3 & = & 1 \\ x_1 & + x_2 & + a \cdot x_3 & = & a \end{array}$$

a) Für welches a erhält man unendlich viele Lösungen?

b) Für welches a erhält man keine Lösung?

c) Für welches a erhält man eine eindeutige Lösung?

Aufgabe 83:

Für welche Werte des Parameters a (a>0) hat das Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccc} 3x & + & 2y + & z = & 1 \\ 2x & + & y + & az = & 0 \\ & & 4ay + & z = & 2a+1 \end{array}$$

unendlich viele Lösungen?

Welche Gestalt hat in diesem Fall die Lösungsmenge?

Aufgabe 84:

Im Maschinenbau werden Federn und Membranen oft aus Kupferlegierungen hergestellt, die 90% Kupfer, 5% Zink und 5% Zinn enthalten. Kupferhütten bieten verschiedene Legierungen an. Zur Auswahl stehen nun drei Legierungen A, B und C, die sich in der Zusammensetzung unterscheiden. Der Anteil dieser Größen in diesen Legierungen ist der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

	A	B	C
Kupferanteil (in %)	80	95	80
Zinkanteil (in %)	20	0	10
Zinnanteil (in %)	0	5	10

Entscheiden Sie, ob sich die gewünschte Legierung aus den drei angebotenen zusammenschmelzen lässt. Wenn möglich berechnen Sie die Lösungsmenge, mit Hilfe des Cramer'schen Determinatenverfahrens.

Aufgabe 85:

Lösen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem mit Hilde der Cramer'schen Regel.

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$
$$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

Aufgabe 86:

Welche Lösungsmenge hat das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & a \\ cx & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Bestimmen Sie für dieses Gleichungssystem die Parameter a und c so, dass es

a) eine Lösung

b) keine Lösung

c) unendlich viele Lösungen

gibt.

Aufgabe 87:

Es ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$7\mathrm{x}_1 - 3\mathrm{x}_2 = 5$$
$$-28\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}\mathrm{x}_2 = \mathrm{b}$$

a) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

b) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

c) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

Aufgabe 88:

Gegeben ist das von den reellen Parametern a abhängige lineare Gleichungssystem:

$$2x - a \cdot y + 3z = 11$$

$$x - a \cdot y + 2z = 3$$

$$-2x - 4y + z = 1$$

Für welche Werte von a erhält man keine Lösung?

Aufgabe 89:

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$2x - 2y = -10$$

$$-4x - a \cdot y = 2$$

$$4x + 2y + 2z + 2u = -8$$

$$3x + y - z - 2u = 1$$

mit dem reellen Parameter a.

Welchen Wert muss a annehmen, dass keine Lösung existiert?

Aufgabe 90:

Gegeben ist das Lineare Gleichungssystem

$$3x - 2y - 2z = 16$$

$$-2x - c \cdot y + z = -5$$

$$5x + 7y - 4z = 8$$

mit dem reellen Parameter c.

Welchen Wert muss c annehmen, dass keine Lösung existiert?

Aufgabe 91:

Stellt man in einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 9 die dritte Ziffer an den Anfang, so nimmt die Zahl um 135 zu.

Addiert man dagegen zur dritten Ziffer 3, so erhält man den fünften Teil der aus den ersten beiden Ziffern bestehenden Zahl.

Wie heißt die Zahl?

Aufgabe 92:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= t^2 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 93:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= t \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= t^2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 3t-1 \end{aligned}$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 94:

Für $k \in R$ ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$4x_1 + 2x_2 + (2k-4)x_3 = 2$

$12x_1 - 6x_2 + (3k-3)x_3 = 3k$

$(k^2 - k - 6)x_3 = k^2 - 4$

Untersuchen Sie, für welche Werte von k das lineare Gleichungssystem unlösbar, mehrdeutig lösbar bzw. eindeutig lösbar ist.

Geben Sie eine Lösung an, bei der $x_3 = 0$ ist.

Aufgabe 95:

Lösen Sie die folgenden *homogenen* linearen (m, n)-Systeme:

a) $$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{aligned} u + 3v + 2w &= 0 \\ 2u - 18v + w &= 0 \\ -6u + 2v + 3w &= 0 \\ 3u + v + 5w &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -10 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 96:

Lösen Sie die folgenden *inhomogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der *Cramerschen Regel*:

a) $$\begin{aligned} -x + 10y + 5z &= 3 \\ 3x - 6y - 2z &= -2 \\ -8x + 14y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 97:

Der in Bild I-3 skizzierte Balken der Länge $2a$ mit loser Einspannung am linken Ende und schrägem Loslager am rechten Ende wird in der Balkenmitte durch eine schräg unter dem Winkel $\alpha > 0$ angreifende konstante Kraft F belastet.

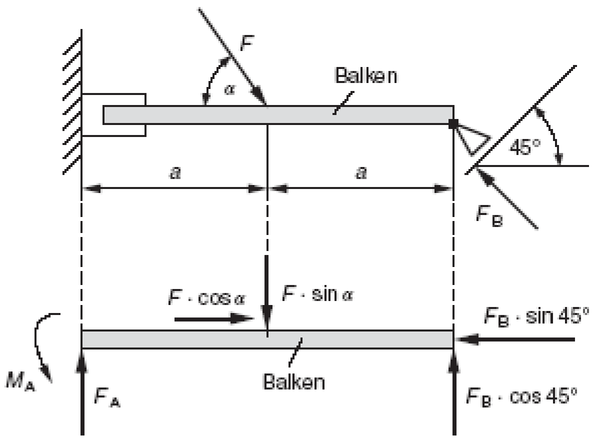


Bild I-3

Die beiden *Lagerkräfte* F_A und F_B sowie das *Moment* M_A genügen dabei dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F \cdot \sin\alpha \\ aF \cdot \sin\alpha \\ 2F \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Cramerschen Regel* die unbekannten Kräfte und Momente in Abhängigkeit vom Winkel α.

Aufgabe 98:

Das skizzierte Rollensystem enthalt in symmetrischer Anordnung drei *gleiche* Massen $m_1 = m_2 = m_3 = m$ die durch ein über Rollen führendes Seil miteinander verbunden sind. Die noch unbekannten Beschleunigungen a_1, a_2 und a_3 dieser Massen sowie die im Seil wirkende konstante Seilkraft F_s lassen sich mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ F_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot g \\ m \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen (wegen der Symmetrie gilt $a_1 = a_2$).

Welchen Wert besitzen diese Größen?

Anmerkung: Rolle und Seil werden als masselos angenommen, Reibungskräfte vernachlässigt (g: Erdbeschleunigung).

Aufgabe 99:

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem

a) unendlich viele Lösungen?

b) keine Lösung?

c) genau eine Lösung?

$x + \mathrm{a}y = 1$

$y + \mathrm{a}z = 1$

$x - \mathrm{z} = 2$

Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 100:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = 2x^5 - x^3 + x$$

Aufgabe 101:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = x^4 + 1{,}5$$

Aufgabe 102:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Aufgabe 103:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 104:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = e^{x+2}$$

Aufgabe 105:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{e^x}$$

Aufgabe 106:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x} + 2)$$

Aufgabe 107:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

Aufgabe 108:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Aufgabe 109:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$

Aufgabe 110:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = x^3 + x$$

Aufgabe 111:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 2$$

Aufgabe 112:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

Aufgabe 113:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 114:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -e^{x-2}$$

Aufgabe 115:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = e^{-x}$$

Aufgabe 116:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \ln\left(x^2\right)$$

Aufgabe 117:

Skizzieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -\ln(x)$$

Aufgabe 118:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Aufgabe 119:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Trigonometrische Gleichungen

Aufgabe 120:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Aufgabe 121:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq 2\pi$.

Aufgabe 122:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}3$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Aufgabe 123:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -0{,}5$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 124:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Aufgabe 125:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 126:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}8$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 127:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 128:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan(x) = -\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 129:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Aufgabe 130:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +4\pi$.

Aufgabe 131:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 132:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(3x) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 133:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +3\pi$.

Aufgabe 134:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x - 1) = \frac{1}{4}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Aufgabe 135:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 136:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$4 \cdot \sin^2(\mathrm{x}) + 3 \cdot \cos(\mathrm{x}) = 3 \quad \text{für} - \pi \leq \mathrm{x} \leq +\pi$

Aufgabe 137:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$3 \cdot \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x) =$

Vektorrechnung

Aufgabe 138:

Gegeben ist die Ebene E durch ihre Koordinatengleichung Bestimmen Sie eine Parameterform sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

a) $E:\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$ (Nach x_3 auflösen)

b) $E:\ 15x - 24y + 20z = 120$ (Nach z auflösen)

c) $E:\ 2x_1 + 9x_2 + 20x_3 = 15$ (Nach x_1 auflösen)

d) $E:\ 2x_1 + 5x_3 = 20$ (Nach x_1 auflösen)

e) $E:\ 4x_1 + 5x_2 + 20 = 0$ (Nach x_1 auflösen)

f) $E:\ x_2 + 4x_3 = 10$ (Nach x_2 auflösen)

Aufgabe 139:

Stellen Sie eine Koordinatengleichung von der Ebene E auf.

a) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (r und s aus (2) und (3) berechnen)

b) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (r und s aus (2) und (3) berechnen)

c) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

d) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (r und s aus (2) und (3) berechnen)

e) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

f) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

g) $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

h) $E:\ \vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

Aufgabe 140:

Welche Gleichung hat die Lotgerade von P(-2|3|8) auf die Ebene?

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 141:

Zeige, dass g und h in einer Ebene liegen und stelle deren Koordinatengleichung auf.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 142:

Zeige, dass A, B, C ein Dreieck bilden. Welche Gleichung hat die Lotgerade im Schwerpunkt des Dreiecks?

a) $A(1|1|0), B(2|0|1), C(-1|2|3)$

b) $A(1|1|1), B(-5|-2|-5), C(0|0|0)$

Aufgabe 143:

Überprüfe die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandeln Sie die Ebene nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechnen Sie ihn.

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\quad g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}11\\5\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 144:

Überprüfe die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandle die Ebene nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechne ihn.

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix},\quad g_3:\ \vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

Aufgabe 145:

Überprüfe die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandle die Ebene nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechne ihn.

$E:\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$, und

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-4\\6\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix},\quad g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 146:

Fälle von $A(7|6|1)$ das Lot auf die Ebene $E:\ x+2y+z=8$:
Berechne den Lotfußpunkt.

Aufgabe 147:

Fälle von $P(-2|-6|13)$ das Lot auf die Ebene $E:\ 2x_1+x_2-5x_3=15$

Aufgabe 148:

Eine Pyramide hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit
$A(8|5|1)$, $B(0|-3|-4)$, $C(28|4|3)$, $D(10|-6|16)$.

Beweise; Die Spitze S steht von der Ebene aus senkrecht über dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Aufgabe 149:

Eine Pyramide hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit
$A(1|5|3)$, $B(-2|5|1)$, $C(0|0|4)$, $S(1|-2|-4)$.

Überprüfe, ob diese Pyramide „überhängt“ (Dies ist dann der Fall, wenn das Lot von der Spitze auf die Grundfläche außerhalb des Dreiecks schneidet.

Aufgabe 150:

Gegeben sind diese zwei Ebenen und ein Punkt P. Lege durch P die Lotgerade zu beiden Ebenen und berechne die Schnittpunkte mit den Ebenen. Stelle an Hand der Ergebnisse fest, ob P zwischen den Ebenen liegt oder wo sonst ? $E_1:\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 27$, $E_2:\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -36$, $P(1|3|-2)$

Aufgabe 151:

Gegeben: $E_1:\ 2x + y - 5z = 17$, $E_2:\ 2x + y - 5z = 77$, $P(3|1|4)$

Bestimme die Lage von P relativ zu den beiden Ebenen E_1 und E_2 .

Aufgabe 152:

Untersuche die gegenseitige Lage, wenn eine Schnittgerade existiert, berechne deren Gleichung.

a) $E_1:\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12$ und $E_2:\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$

b) $E_1:\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12$ und $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $E_1:\ -2x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 9$ und $E_2:\ 3x_1 - 12x_2 + 9x_3 = 12$

d) $E_1:\ x + y - 2z = 8$ und $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 153:

Spiegele das Dreieck $A(1|0|0)$, $B(3|1|0)$, $C(-1|2|1)$ an $Z(4|2|-3)$

Aufgabe 154:

Spiegle die Punkte $P(5|-12|25)$ und $Q(-4|1|-11)$ an der Ebene
E: $4x-3y+12z=18$

Aufgabe 155:

Spiegle den Punkt $R(11|11|-11)$ an E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 156:

Spiegle die Geraden g an der Ebene E: $x_1-3x_2+2x_3=4$

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}$ c) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 157:

Spiegle die Geraden am Zentrum $Z(5|3|-4)$:

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$ b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}$ c) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 158:

Spiegle den Punkt $A(2|5|-3)$ an der Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$

Aufgabe 159:

Spiegle die Ebene E_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ an E_2: $x_1+x_2-2x_3=4$.

Aufgabe 160:

Spiegle die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ an den drei Koordinatenebenen.

Aufgabe 161:

Eine Pyramide hat die Ecken $A(2|0|2)$, $B(4|2|1)$, $C(5|-2|-2)$ und $D(8|-2|4)$. Spiegelt man die Spitze D an der Grundebene (ABC), dann entsteht eine Doppelpyramide.
Hängt die Spitze der Pyramide ABCD über ?

Aufgabe 162:

Spiegle die Ebene $x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$ an $Z(1|-1|5)$.

Aufgabe 163:

Projizieren Sie die unten genannten Geraden senkrecht auf die Ebenen.

(a) E: $x - y + 2z = 10$ (b) E: $2x_1 + x_3 = 0$

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 164:

Projiziere die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ von $Z(2|3|-1)$ auf die Ebene
E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 30$. Welcher Geradenpunkt erhält dabei keinen Bildpunkt?

Aufgabe 165:

Ergänze das Dreieck $A(2|0|2)$, $B(4|2|1)$, $C(5|-2|-2)$ zu einem Parallelogramm ABCD. Projiziere es von $Z(3|1|6)$ aus auf die Ebene E: $5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$. Ist die Bildfigur auch wieder ein Parallelogramm ?

Aufgabe 166:

Stelle die gegenseitige Lage der Geraden g und h fest:
Wenn sich die Geraden schneiden, dann berechne den Schnittpunkt.

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\8\\-11\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\5\\-6\end{pmatrix}$ $\qquad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-7\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7\\0\\-3\end{pmatrix}$

b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\-4\\7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\16\\-9\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$

c) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-9\\25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}$ $\qquad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\9\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\-6\\0\end{pmatrix}$

d) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\qquad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\5\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-12\\2\\8\end{pmatrix}$

e) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}14\\-8\\-6\end{pmatrix}$ $\qquad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}13\\-4\\-10\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7\\4\\3\end{pmatrix}$

f) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\12\\-15\end{pmatrix}$ $\qquad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\16\\-16\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-8\\10\end{pmatrix}$

Aufgabe 167:

Prüfe, ob die Punkte $P(5|-6|4{,}5)$ und $Q(3|-4{,}5|3{,}5)$ auf der Geraden g liegen: $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 168:

Wie heißt die Gleichung der Geraden g durch den Punkt $B(2|1|-3)$, die parallel zu h verläuft: $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}$. Sind g und h identisch ?

Aufgabe 169:

Zeige, daß g, h und k kein Dreieck bilden. Berechne die Schnittpunkte.

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-12\\8\\-8\end{pmatrix},\quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}13\\-7\\5\end{pmatrix},\quad k:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\9\end{pmatrix}$$

Welche der Geraden sind offenbar windschief ?

Aufgabe 170:

Welche Gleichung hat die Gerade g durch $A(2|-3|4)$ und $B(-2|-10|-1)$?

Zeige, daß sich g und h schneiden: $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$.

Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S.
In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AB ? Was folgt daraus über die Lage von A oder B?

Aufgabe 171:

Berechne die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen) von

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\6\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$, b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-12\\8\\-8\end{pmatrix}$

c) der Geraden durch $A\left(\frac{3}{2}|-4|3\right)$ und $B\left(-2|\frac{16}{3}|-4\right)$

Aufgabe 172:

Gegeben ist ein Dreieck $A(5|1|3)$, $B(6|4|-2)$, $C(3|-6|2)$.
Bestimmte die Spurpunkte der Geraden, die durch je zwei Dreieckspunkte gehen auf der x_1x_2-Ebene und zeigt, daß diese drei Spurpunkte auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 173:

Untersuche die Lage dieser Geraden in Abhängigkeit von t. Wenn sie sich schneiden, berechne den Schnittpunkt:

a) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ $\qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$!!!!!

d) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 174:

Gegeben sind die Punkte $A(2|-5|-3)$, $B(30|23|25)$:

Bestimme die Teilpunkte, die AB im Verhältnis

a) 2:5 b) 3:1 c) 2:3 teilen.

Aufgabe 175:

Gegeben sind die Geraden g und h_k für $k \in \mathbf{R}$ durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

a) Welche dieser Punkte liegen auf g und h_k: $R(4|3|-9)$, $S(-8|5|1)$?

b) Überprüfe die Lage der Geraden g und h_k. Wenn sie sich schneiden, berechne den Schnittpunkt.

c) Was kann man über die Lage der Geraden der Schar h_k aussagen? Berechne die Ortskurve der Aufpunkte $B_k(4|k|7)$.

d) Berechne die Durchstoßpunkte (Spurpunkte) der Geraden g mit den Koordinatenebenen.

Aufgabe 176:

Die Punkte $A(3|3|1),\ B(-2|-5|2),\ C(2|0|5)$

a) Berechne die Gleichungen der Seitengeraden

b) Berechne den Schwerpunkt S.

c) Berechne die Gleichungen der drei Seitenhalbierenden und deren Schnittpunkt. Zeige, daß er mit S identisch ist.

Aufgabe 177:

Gegeben sind $A(3|7|4),\ B(1|5|0),\ C(4|1|6),\ D(6|6|2)$

a) Ist das Viereck eben ?

b) Zeige, daß das Viereck, das aus den Mittelpunkten von ABCD gebildet wird, ein Parallelogramm ist.

Aufgabe 178:

Berechnen Sie folgende Skalarprodukte:

a) $\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}=?$

b) $\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}=?$

c) $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=?$

d) $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=?$

e) $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=?$

f) $\begin{pmatrix}t\\1\\2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t+1\\2\\-3\end{pmatrix}=?$

Aufgabe 179:

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\t\\2t\end{pmatrix}=16$

b) $\begin{pmatrix}k\\2k\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k+1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$

c) $\begin{pmatrix}3k\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\2k\\-1\end{pmatrix}=0$

d) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right]=0$

e) $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right]^2=16$ (nur umformen)

Aufgabe 180:

Welche Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ das Produkt 0 ?

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Welche Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ **und** mit $\vec{v}$ das Produkt 0 ?

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$ e) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 181:

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Gesucht ist eine Ebene in Parametergleichung, senkrecht zu g, die durch
a) $R(4|17|3)$ b) $S(-2|0|11)$ geht.

Aufgabe 182:

Gegeben sind zwei Punkte $A(3|6|-2)$, $B(-5|2|10)$: Bestimme die Gleichung der Ebene, die als Symmetrieebene von A und B bezeichnet werden kann.

Aufgabe 183:

Schreibe eine Parametergleichung zu dieser Ebene auf:

a) $2x + 4y - 6z = 5$ b) $2x_1 - 7x_2 + x_3 = 21$

c) $x_2 + 5x_3 = 12$ d) $x_1 = 3$

Aufgabe 184:

Gegeben sind die Geraden g und h. Zeige daß sie windschief sind.
Ermittle einen Vektor, der zu beiden orthogonal ist.

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\-8\end{pmatrix}\quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}\quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}$

Aufgabe 185:

Berechne die Normalengleichung zu diesen Ebenen:

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}12\\8\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\7\\-11\end{pmatrix}$

d) $\vec{x}=r\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}12\\-3\\8\end{pmatrix}$

e) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\t\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

f) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 186:

Bestimme die Hessesche Normalform, $\vec{n}^{o}$, den Abstand des Ursprungs von E und den Fußpunkt des Lotes von O auf E.

a) $2x-2y+z=16$ b) $3x+4y-12z=26$ c) $2x_1+6x_2+3x_3=35$

d) $4x_1+4x_2+7x_2=18$ e) $x=5$ f) $8x-12y+9z=-34$

g) $2x+10y-11z=75$ h) $3x_1+x_2-7x_3=59$ i) $8x_1-15x_3=85$

Aufgabe 187:

Berechne den Abstand des Punktes P von E und den Fußpunkt des Lotes von P auf E sowie das Spiegelbild von P an E.

a) $4x+8y-z=36$ $\quad P(3|2|5)$

b) $12y+5z=26$ $\quad P(-1|5|-7)$

c) $-6x_1+18x_2-x_3=38$ $\quad P(-5|20|-9)$

d) $12x_1-9x_3=120$ $\quad P(15|-2|-5)$

e) $5x-3y+5z=11$ $\quad P(3|6|-9)$

f) $12x_1+9x_2=150$ $\quad P(-10|5|4)$

Aufgabe 188:

Prüfe nach, ob g zu E parallel ist. Wenn ja, berechne d(g;E).

a) $2x-2y+z=15$ $\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

b) $4x-8y-z=36$ $\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$

c) $7x_1+2x_2+13x_3=9$ $\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\10\\-3\end{pmatrix}$

d) $x_1-12x_2-12x_3=17$ $\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\10\\-12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}12\\10\\-9\end{pmatrix}$

e) $4x+5y-20z=17$ $\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 189:

Prüfe nach, ob $E_1 \parallel E_2$. Wenn ja, berechne ihren Abstand.

a) $4x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 14$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $2x + 14y + 5z + 100 = 0$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $3x - 7y + 11z = 14$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $8x_1 + 16x_2 - 11x_3 = 124$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$

e) $x + y + 2z = 14$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) $12x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 7$ $\quad -9x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 12$

g) $x - y + 12z = 8$ $\quad 2x + 2y - 24z = 7$

h) $\frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 5$ $\quad -2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2$

Aufgabe 190:

Welche Punkte der Geraden g haben von E den angegebenen Abstand e ?

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 2x + y + 2z = -5$ $\quad e = 5$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 20 = 0$ $\quad e = \frac{13}{9}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ Ebene E durch $A(-1|-5|2), B(-1|1|-2), C(9|3|0)$, $e = \sqrt{14}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 3$ $\quad e = \sqrt{2}$.

Aufgabe 191:

Gegeben ist eine Ebene E. Gesucht sind 2 Ebenen E_1 und E_2, die beide zu E parallel sind und zu E den angegebenen Abstand e haben.

a) $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 12$ e = 7

b) $4x + 12y + 3z = 18$ e = 5

c) $6x_1 + 18x_2 - x_3 = 4$ e = 1

Aufgabe 192:

Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugel.

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 - 2x_2 - 15 = 0$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_1 - x_2 + 8x_3 = \frac{5}{2}$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2 + 3x_3 = 0$

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 2x_2 + 9x_3 = k$ Welche k sind zugelassen ?

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + kx_1 + (k-2)x_2 + 4x_3 = \frac{1}{2}k^2 + k$
Welche k sind zugelassen, und auf welcher Geraden liegen die Mittelpunkte der Kugelschar ?

f) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 8tx_2 - 6tx_3 = 20t$
Welche t sind zugelassen, und auf welcher Geraden liegen die Mittelpunkte der Kugelschar ?

g) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (2t-2)x_1 + 4tx_2 - 4tx_3 + 34t - 35 = 0$
Welche t sind zugelassen, und auf welcher Geraden liegen die Mittelpunkte der Kugelschar ?

Aufgabe 193:

Bestimme Mittelpunkt und Radius für diese Kugeln:

a) $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{x} - 12 = 0$

b) $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{x} + 1 = 0$

Aufgabe 194:

Gegeben ist eine Kugel durch $M(2|5|-1)$ und $r = 7$
Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(6|-1|4)$, $B(8|3|2)$, $C(0|8|2)$

Aufgabe 195:

Gegeben ist ein Kreis durch $M(-3|10)$ und $r = 15$.
Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(4|5)$, $B(10|1)$, $C(6|-2)$

Aufgabe 196:

Gegeben ist die Kugel K durch $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}\right] = 289$.
Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(-5|-10|1)$, $B(3|2|10)$, $C(11|-11|2)$

Aufgabe 197:

Gegeben ist die Kugel K durch $(x_1+5)^2 + (x_2-7)^2 + (x_3+1)^2 = 225$.
Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(-3|-3|10)$, $B(10|0|8)$, $C(0|-7|-1)$

Aufgabe 198:

Gegeben ist eine Kugel durch ihren Mittelpunkt $M(2|-2|-3)$ und einen Kugelpunkt $Q(5|2|9)$.

Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(-10|1|0)$, $B(6|1|-15)$, $C(13|6|3)$

Aufgabe 199:

Gegeben ist die Kugel K durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10x_1 + 2x_2 - 20x_3 = 198$.
Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(9|-3|18),\ B(7|7|-7),\ C(-3|13|2)$

Aufgabe 200:

Gegeben ist die Kugel K durch $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}\vec{x} - 35 = 0$.

Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(3|5|1),\ B(-3|1|4),\ C(5|-2|4)$

Aufgabe 201:

Untersuche die Lage der Ebene zur Kugel.

(a) E: $2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2 = 0$, $M(7|-4|-3)$, $r = 7$

(b) E: $4x_1 + 8x_2 - x_3 = 25$, $M(14|14|1)$, $r = 18$

(c) E: $6x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 27$ $M(-4|7|-4)$ $r = 11$

(d) E: $-3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 0$ $M(1|8|15)$, $r = 13$

(e) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ $M(5|11|2)$, $r = 9$

(f) E: $4x_1 - 3x_3 = 8$ K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right]^2 = 25$

Aufgabe 202:

Zeige, daß die gegebene Ebene Tangentialebene an die jeweilige Kugel ist.
Berechne den Berührpunkt.

a) E: $2x_1 + 10x_2 - 11x_3$, $M(5|-12|9)$, $r = 15$

b) E: $4x_1 + 3x_2 - x_1 = 13$, $M(9|9|-2)$, $r = \sqrt{104}$

c) E: $4x_1 + 20x_2 - 5x_3 = 25$ K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix}\right]^2 = 441$

d) E: $x_1 - x_2 - x_3 = 5$ K: $(x_1 - 9)^2 + x_2^2 + (x_3 + 8)^2 = 48$

Aufgabe 203:

Die gegebene Ebene ist Tangentialebene an eine Kugel mit dem Mittelpunkt M.
Berechne den Kugelradius r und den Berührpunkt B.

a) E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, $M(12|8|5)$

b) E: $18x_1 + 6x_2 - x_3 + 28 = 0$ $M(7|6|9{,}5)$

c) E: $3x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 20$ $M(-1|-9|20)$

Aufgabe 204:

Gegeben ist eine Kugelschar. Welche der Kugeln der Schar berührt
die gegebene Ebene E ? Berechne den Berührpunkt.

a) E: $x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -14$ K_t : $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}\right]^2 = t$; $t > 0$

b) E: $4x_1 - 8x_2 + x_3 = 16$ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4-t \\ 29 \\ t+1 \end{pmatrix}\right]^2 = 729$, $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 205:

Gegeben ist eine Kugel und eine Ebenenschar.
Welche Ebene ist Tangentialebene an K und wo liegt der Berührpunkt ?

a) $E_t: \quad 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = t \qquad K: \quad M(-1|-16|5) \quad$ und $\quad r = 21, \quad t \in \mathbb{R}$

Warum gibt es 2 Lösungen ? Berechne beide Berührpunkte.

b) $E_t: \quad tx_1 - x_2 - 2tx_3 = 5 \qquad K: \quad M(-6|7|17) \quad$ und $\quad r = 18; \quad t \in \mathbb{R}$

(Ergebnis: $t_1 = 4$ und $t_2 = 1485$). Berechne für $t_1 = 4$ den Berührpunkt.

Aufgabe 206:

Gegeben ist die Kugel und der Berührpunkt. Welche Gleichung hat die Tangentialebene ?

a) $M(2|-2|8)$ und $B(5|-3|1) \in K$

b) $M(5|-1|0)$ und $B(0|1|1) \in K$

Aufgabe 207:

Für welche Werte von a liegt B auf der Kugel K ?
Erstelle die Tangentialgleichungen der beiden Ebenen.
Ermittle deren Schnittgerade und Schnittwinkel.

a) $K: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]^2 = 9, \quad B(a|-3|5)$

b) $K: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 81, \quad B(-6|4|a)$

Aufgabe 208:

Welche Ebenen parallel zu E sind Tangentialebenen an die Kugel K ?

a) E: $2x_1 + 14x_2 - 5x_3 = 50$ K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix}\right]^2 = 225$

b) E: $4x_1 + 3x_2 - 12x_5 = 3879$ K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 19 \end{pmatrix}\right]^2 = 676$

Aufgabe 209:

Gegeben ist die Kugel K durch $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 13)^2 + (x_3 - 5)^2 = 250$
und die Ebene E durch $2x_1 - 14x_2 - 5x_3 = 20$

Zeige, daß ein Schnittkreis existiert. Berechne Radius und Mittelpunkt.

Aufgabe 210:

In der Ebene E: $2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 30$ liegt der Punkt $Z(6|5|4)$.
Diese Ebene schneidet eine Kugel K mit Radius 12 so, daß Z der Mittelpunkt des Schnittkreises wird, der den Radius $\sqrt{95}$ hat.
Berechne den Kugelmittelpunkt.

Aufgabe 211:

Schneide die Kugel um $M(3|0|-4)$ mit r = 9 mit diesen Ebenen:

a) die x_1x_3 – Ebene

b) die x_2x_3 – Ebene

c) $x_1 = 8$

d) $x_2 = -6$

e) $x_1 = -6$

f) $x_3 = 14$!

Aufgabe 212:

Gegeben ist die Kugel K durch $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}\right]^2 = 64$

Gib die Gleichungen aller 6 Tangentialebenen an, die zu einer der drei Koordinatenebenen parallel sind und deren Berührpunkte.

Aufgabe 213:

Durch die Punkte A(1|-2|3) und B(2|-6|5) wird eine Gerade g festgelegt.

Die Gleichung $2tx_1 - tx_2 + x_3 = -2$ beschreibt für jedes $t \in R$ die Ebene E_t. Es gibt einen Wert t, für den die Gerade g die Ebene E_t in der x_2x_3-Ebene durchstößt.

a) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt und den zugehörigen Wert von t.

b) Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden g und haben vom Punkt Q(0|2|1) den Abstand $3\sqrt{21}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

Aufgabe 214:

Gegeben sind die beiden Punkte A(3|5|4) und A*(1|-1|0). Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, die zu A und A* symmetrisch liegt.

Aufgabe 215:

Im Anschauungsraum sind die Punkte A(0|0|-1), B($3\sqrt{3}$|3|-1), C(0|6|-1) und D($\sqrt{3}$|3|5) gegeben.

Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte einer Pyramide mit dem gleichseitigen Dreieck ABC als Grundfläche.

a) Zeigen Sie, dass die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen hat.

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. $\left(V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h\right)$

c) Bestimmen Sie den Punkt, der von allen vier Ecken der Pyramide gleich weit entfernt

Aufgabe 216:

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad E: \quad 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7$$

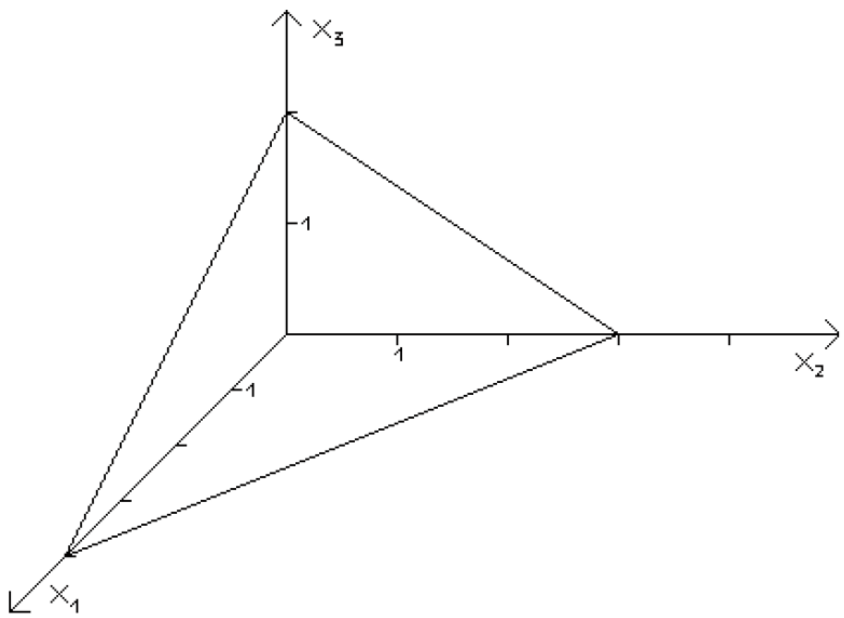
Prüfen Sie nach, ob der Punkt $A(1|5|-1)$ auf der Gerade g liegt.

Zeigen Sie: Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.

Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat. (4 VP)

Aufgabe 217:

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der dargestellten Ebene. (3 VP)



Aufgabe 218:

Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}$ die Geradenschar

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

sowie die Ebene $E: \; -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$.

Zeigen Sie, dass jede Gerade der Schar g_a in der Ebene E liegt.

Aufgabe 219:

Gegeben sind die Punkte

$$A(3|-1|2)\ ,\ \ B(-4|2|4)\ ,\ \ C(-2|1|0)$$

Zeigen Sie, dass diese drei Punkte nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen und ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die diese drei Punkte enthält. (4 VP)

Aufgabe 220:

Gegeben sind die beiden Ebenen E und F durch

$$E: \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -9$$

$$\text{und} \quad F: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ;\ s,\, t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen sie eine Gleichung der Schnittgerade s dieser beiden Ebenen.

Aufgabe 221:

Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ;\ s,\, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{und} \quad F: \quad x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$$

Wie liegen diese Ebenen zueinander? Bestimmen Sie ihren Abstand.

Aufgabe 222:

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E durch

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ;\ r \in \mathbb{R}$$

$$\text{und} \quad E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ;\ s,\, t \in \mathbb{R}$$

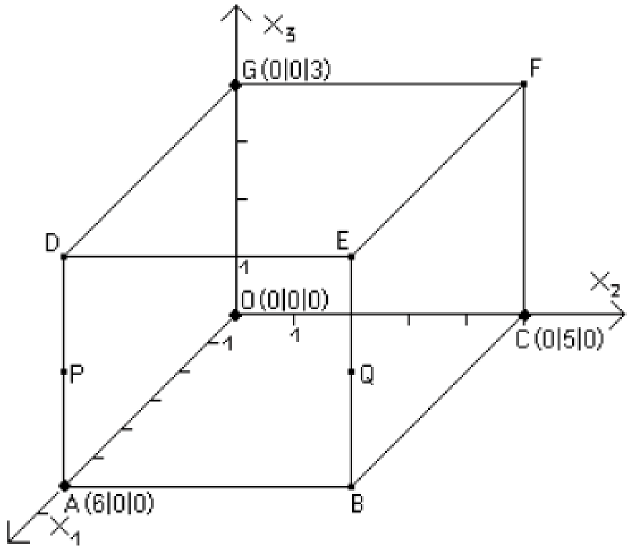
a) Geben sie eine Koordinatengleichung (oder Normalform) der Ebene E an.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E.

c) Geben Sie eine Gleichung derjenigen Ebene F an, welche die Gerade g enthält und orthogonal zur Ebene E ist (Parameterform oder Koordinatengleichung). (6 VP)

Aufgabe 223:

In der folgenden Abbildung ist ein Quader abgebildet.
Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. BE.



a) Begründen Sie durch geometrische Überlegungen, welche Lage die Geraden $g = (GQ)$ und $h = (FP)$ zueinander haben.

b) Geben Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Ebene E an, die durch die Punkte B, C und Q verläuft. (3 VP)

Aufgabe 224:

Gegeben sind die vier Ebenen E, F, G und H durch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} E:&\quad 3x_1 - 4x_3 &= 0 \\ F:&\quad 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 \\ G:&\quad x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

sowie $$H: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad ; \; s, t \in \mathbb{R}$$

a) Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem?

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade s der Ebenen F und G.

c) Welche besondere Lage haben die Ebenen G und H zueinander?

Wie kann man die rechte Seite der Ebene H zu einer Ebene H' abändern, damit G und H' identische Ebenen werden?

Aufgabe 225:

Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Gerade

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} \quad ; \ t \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass die gesamte Geradenschar in der Ebene

$$E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

liegt.

Aufgabe 226:

Die Gerade g geht durch die Punkte $A(5|3|2)$ und $B(3|-1|2)$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x_1x_3-Ebene.

Begründen Sie, dass S zwischen A und B liegt.

Aufgabe 227:

Gegeben sind die Ebenen E und F mit

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \ r, s \in \mathbb{R}$$

$$F: \quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind.

Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen.

Aufgabe 228:

Die Ebene $E:\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt.

Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein 80 m hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene.
(1 LE entspricht 10 m)

a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.
Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.
(6 VP)

b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.
Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.
(3 VP)

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6|4|k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4|0|2)$.
Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist. (3 VP)

Aufgabe 229:

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt $A(2|-1|-2)$ und die Gerade

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;\ t \in \mathbb{R}$$

enthält. (3 VP)

Aufgabe 230:

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt $A(2|-1|-2)$ und die Gerade

$$g:\quad \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{OP}} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;\ t \in \mathbb{R}$$

enthält.

Aufgabe 231:

Gesucht ist eine Parameterform der Ebene E, in der die Punkte $A(2/1/2)$, $B(0/1/4)$ und $C(4/0/2)$ liegen.

Mögliche Lösung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Liegt der Punkt $D(12/-2/-2)$ ebenfalls in der Ebene?

Berechnen Sie die Spurgerade von E in der x-y-Ebene!

In welchem Winkel geht die Ursprungsgerade, die die Ebene im Punkt $A(2/1/2)$ schneidet, durch die Ebene E?

Geben Sie die zur Ebene E parallele Ebene E_2 an, in der der Ursprung liegt!

Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Ursprung!

Aufgabe 232:

Gesucht ist die Gerade g_1 durch die Punkte $P(2/3/4)$ und $Q(3/3/5)$.

Mögliche Lösung: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Spurpunkt SP der Geraden g_1 mit der x-y-Ebene!

Gibt es einen Spurpunkt SP_2 der Geraden g_1 mit der x-z-Ebene?

Gegeben sind die Punkte $A(4/-2/5)$, $B(1/0/7)$ und $C(4/0/1)$. Wie lautet die Ebene E_1, in der die Punkte A, B und C liegen?

Mögliche Lösung: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, daß Punkt $R(1/2/3)$ in der Ebene liegt!

Die Punkte A, B und C geben drei Ecken eines Parallelogramms an. Bestimmen Sie den Punkt D, der die vierte Ecke bildet!

Wie lautet die Spurgerade SG in der x-z-Ebene der Ebene E_1?

Welchen Abstand hat die Ebene E_1 vom Punkt $S(3/4/4)$?

Bestimmen Sie die Lage von Ebene E_1 zur Geraden g_1. Falls ein Durchdringungspunkt existiert, geben Sie diesen und zusätzlich den Schnittwinkel an!

Wie lautet eine Parameterform einer Geraden g_2, die E_1 rechtwinklig im Punkt $T(4/1/-1)$ schneidet?

Aufgabe 233:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Für welches t sind die Vektoren linear abhängig?

Bilden Sie für $t=1$: $\vec{c} = 4 \cdot \vec{a} - \vec{b}$

Geben Sie die Ebene E in Paramter-, Normalen- und Koordinatenform an, für die $\vec{a}$ der Verschiebungsvektor und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Richtungsvektoren sind $(t=1)$!

Mögliche Lösung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Für $t=3$ ergeben sich die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die auf eine Gerade g zeigen. Bestimmen Sie die Gerade!

Mögliche Lösung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Untersuchen Sie die Lage zwischen Gerade g und Ebene E!

Wie lautet die Gerade g_2 durch den Punkt $P(-2/1/3)$, die parallel zur Geraden g verläuft?

Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Ursprung!

Aufgabe 234:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3k \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Für welches k sind die Vektoren linear abhängig?

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen eine Ebene E_1 aufspannen. Wählen Sie $k=3$. Der Punkt $D(1/-2/-2)$ liegt in der Ebene. Wie lautet die Gleichung der Ebene E_1?

Bilden Sie eine Gerade g_1, die die Ebene E_1 rechtwinklig in D schneidet!

Mit $k=2$ ergeben sich 2 neue Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bilden Sie daraus mit $\vec{c}$ als Verschiebungsvektor eine zweite Ebene E_2!

Wie lautet die Schnittgerade g_2 von E_1 und E_2?

Wie lautet der Schnittwinkel φ von E_1 und E_2?

Aufgabe 235:

Gegeben ist eine Kugel K mit der Gleichung $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]^2=50$ und die Gerade g mit

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

a) (1) Zeige, daß g eine Tangente an K ist. Berechne den Berührpunkt (Zwischenergebnis: $A(6|-2|3)$.)

(2) g liegt in einer Tangentialebene T_1 an K. Welche Gleichung hat T_1 ?

(3) In T_1 gibt es eine Tangente g' , die zu g orthogonal ist. Stelle ihre Gleichung auf.

(4) Welche Gleichung hat die zu T_1 parallele Tangentialebene T_2 an K ?

b) (1) Zeige: Die Ebene E mit $2x_1+2x_2-x_3=21$ schneidet K. Berechne den Radius und den Mittelpunkt des Schnittkreises.

(2) Es gibt zwei Kugeln $K_{2,3}$ mit dem Radius 13, welche mit Ebene E denselben Schnittkreis gemeinsam haben wie die Kugel K. Berechne ihre Mittelpunkte.

c) Die Gleichung

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1+t\\2+2t\\t\end{pmatrix}\right]^2=50 \quad \text{für } t\in\mathbf{R}.$$

stellt eine Kugelschar K_t dar.

Gehört die Kugel K auch zu dieser Schar ?

Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln dieser Schar ?

Zeige, daß sich K und K_1 schneiden, aber K und K_{10} nicht.

Für welche Werte von t berühren sich K und K_t ?

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 236:

In einem kartesischen Koordinatensystem der $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(0|0|2), C(1|4|1), D(-1|2|0) und die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, gegeben

a) (3) Zeigen Sie, dass die Punkte A, C und D eine Ebene festlegen, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

b) (4) Die Gerade g schneidet die Ebene E in einem Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens und zeigen Sie, dass der Punkt das Dreieck ACD zu einem Quadrat ABCD ergänzt

c) (4) Zusätzlich ist die Geradenschar

$\mathrm{h_t}: \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{t} \\ \mathrm{t} \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{t}-1 \\ \mathrm{t}+1 \\ 2\mathrm{t} \end{pmatrix}$ mit $\mu, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ gegeben.

Eine der Schargeraden h_t ist parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie den zugehöhrigen Scharparameter t und den Abstand dieser Geraden von E.

d) (5) Bestimmen Sie die Koordinaten des von B verschiedenen Punktes $P \in g$ so, dass die Geraden PA und PC senkrecht zueinander stehen.

Aufgabe 237:

Gegeben ist folgende Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie Darstellung in die Koordinatenform mit Hilfe des Skalarproduktverfahrens um.

Aufgabe 238:

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden. Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird.

Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck ABCD mit

A(0|0|0),B(6|6|0),C(0|18|0) und D(-8|4|0)

Und als Deckfläche das Viereck A*, B*, C* und D* mit

A*(4|1|20), B*(7|4|20), C*(4|10|20)

(Koordinatenangaben in Meter)

a) (5) Zeigen Sie, dass S(8|2|40) die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

b) (4) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D*.

Aufgabe 239:

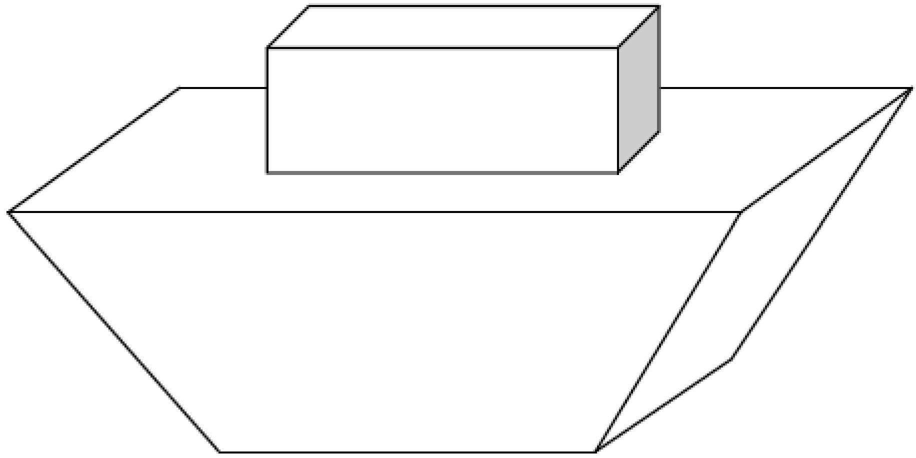
Im wilden Westen werden im Tagebau wertvolle Mineralien abgebaut. Von der Abbaustelle A (800|-400|-100) aus läuft ein gerades Gleis zum Stollenausgang, dass auch am Abbaupunkt B(750|-380| -95) vorbeiläuft (Angaben in m).

a) (4) Der Stollenausgang und das Ende des Gleises liegen in einer Höhe von 10m und werden von Cowboy Jim bewacht. Gib die Koordinaten von Jims Standplatz an.

b) (3) Wie lang ist das Gleisstück von A zum Stollenausgang?

Aufgabe 240:

Der Gemeinderat beschließt, einen eher langweiligen Spielplatz zu einem Abenteuerspielplatz umzugestalten. Das Motto lautet „Auf hoher See“. Daher soll ein Piratenschiff inmitten des Geländes die neue Attraktion werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Schiffes beschreiben durch die Eckpunkte

$$A_1(0 \mid 0 \mid 0),\ B_1(3 \mid 0 \mid 0),\ C_1(3 \mid 5 \mid 0),\ D_1(0 \mid 5 \mid 0)$$

und das Deck durch die Eckpunkte

$$A_2(0 \mid -1 \mid 2),\ B_2(3 \mid -1 \mid 2),\ C_2(3 \mid 6 \mid 2),\ D_2(0 \mid 6 \mid 2).$$

Die Koordinaten sind zugleich als Längenangaben in Metern zu lesen.

Auf dem Deck wird ein quaderförmiger, oben offener Aufbau – genannt Kommandobrücke – errichtet, der an allen Seiten 1 m Abstand zum Rand des Decks hat und 0,75 m hoch ist.

Die aus Sicherheitsgründen notwendige Reling rund um das Deck wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

Von den alten Spielgeräten gibt es auf dem Spielplatz Betonfundamente in den Punkten $G(6 \mid 11 \mid 0)$ und $H(-3 \mid 8 \mid -1)$.

Von G zu C_2 und von H zu D_2 sollen Kletterstangen angebracht werden, die das Entern des Piratenschiffes ermöglichen und damit den Spielwert erhöhen.

a) (4) Berechnen Sie die Länge der beiden Kletterstangen

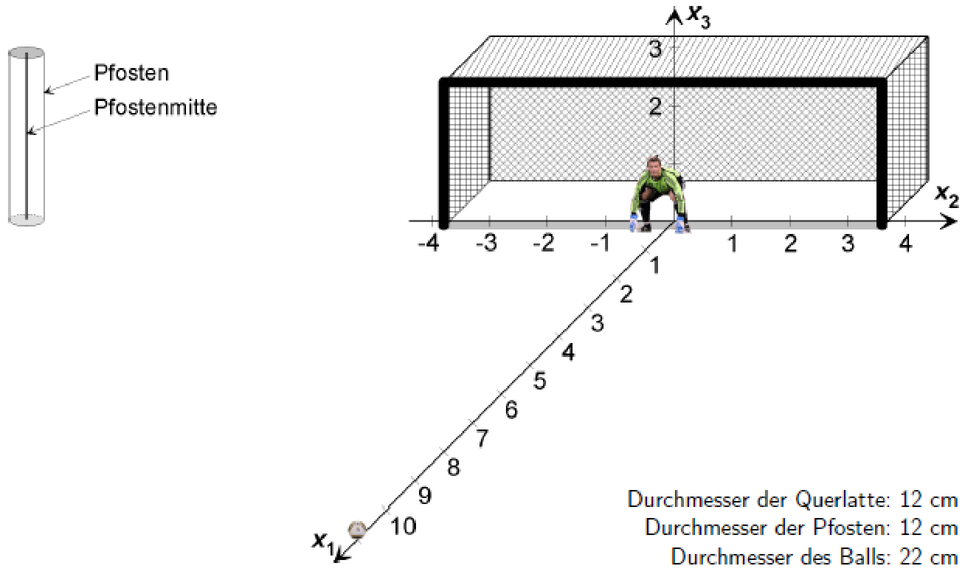
b) (4) Da kleine Kinder es nicht schaffen, an den Stangen an Deck zu klettern, treten die Eltern an den Gemeinderat heran und fordern, dass zwischen den beiden Stangen eine ebene Holzwand mit Grifflöchern so angebracht wird, dass die beiden Stangen die Begrenzung der Holzwand bilden. Begründen Sie rechnerisch, warum der Wunsch der Eltern schon allein aus mathematisch-geometrischen Gründen nicht erfüllt werden kann.

Aufgabe 241:

Die Abbildung zeigt ein Fußballtor in einem Koordinatensystem mit Längeneinheit 1m. Der Stützpunkt der Geraden entlang der Lattenmitte ist L(0,06|0|2,5) und die Stützpunkte der Geraden entlang den Pfostenmitten sind

P_1(0,06|3,72|0) bzw. P_2(0,06|-3,72|0).

Pfosten, Latte und Torlinie haben einen Durchmesser bzw. Breite von 12cm, so dass die x_2-Achse die Hinterkante der Torlinie darstellt, die der Ball laut FIFA-Regeln vollständig überqueren muss. Der Ball hat einen Radius von 11cm.



a) (5) Beim Viertelfinalspiel gegen England und Deutschland wir in der 40. Spielminute der Engländer Lampard den Ball so gegen die Unterkante der Latte schießen, dass er von dort ins Tor abprallt. Der Ballmittelpunkt bewegte sich dabei nach dem Aufprall an der Unterkante der Latte auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 22,9 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den Punkt A, in dem der Ball auf dem Boden aufgekommen ist. Wird es sich dabei um ein reguläres Tor handeln.

b) (5) Sonntag, 13. Juli 2014, 23:20 Uhr: Endspiel Deutschland gegen Spanien:

Es steht 1:1 nach der Verlängerung und es kommt zum Elfmeterschießen. Xavi Alonso schießt den Ball (genauer gesagt: den Mittelpunkt des Balles) vom Punkt E(11|0|0,11) geradlinig Richtung Punkt R(-1|1,9|2). Der deutsche Torwart Neuer hält den Schuss sicher, wenn die Flugbahn weniger als 2,5m vom Punkt N(0,2|0|0) entfernt ist. Erzielt Xavi Alonso das 2:1?

c) (5) Danach drischt Özil den Ballmittelpunkt entlang der Geraden

$$ö: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0,11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -55 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

ins rechte obere Eck. Trifft Özil das Tor, ohne dass der Ball den Pfosten oder die Latte berührt?

Aufgabe 242:

Der Tower am Frankfurter Flughafen besitzt die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Flugsicherung ortet ein Flugzeug um 12:01 Uhr in $\begin{pmatrix} 7 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix}$ und um 12:02 in $\begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

(Alle Angaben sind in km).

Um 12:02 Uhr kommt der SOS-Ruf: Hydraulik ausgefallen – Leitwerk blockiert, Kurs nicht änderbar, wird beibehalten. Alles vorbereiten zur Crash-Landung.

a) (2) Bestimmen Sie die Gerade g, welche die Flugroute des Flugzeugs beschreibt.

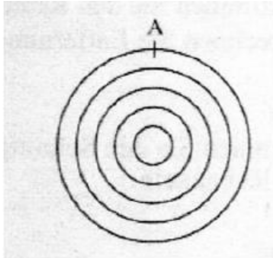
b) (3) Wie viel Meter über dem Erdboden befindet sich das Flugzeug um 12:04 Uhr?

c) (4) Nach wie vielen Minuten wird das Flugzeug den Boden erreichen?

d) (3) Bestimmen Sie die Koordinaten des Aufprall Punktes A.

e) (3) Wie viele Kilometer müssen die Rettungskräfte vom Tower zum Aufprallpunkt A fahren?

Aufgabe 243:



Maike und Jan zielen mit Laserpointern auf eine Zielscheibe. Die Zielscheibe hat einen Durchmesser von 1 m. Sie befindet sich in der x_2x_3-Ebene und der Aufhängepunkt am oberen Rand der Scheibe liegt im Punkt A(0|3|2,5).

Alle Koordinaten sind in Meter angegeben. Der Boden liegt in der x_1x_2 -Ebene.

Die Spitze von Maikes Pointer befindet sich im Punkt M(4|2|1,4), die Richtung des Strahls ist durch den Vektor

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Die Spitze von Jans Pointer befindet sich im Punkt J(3|4|2) und der Strahl trifft die Zielscheibe im Punkt T(0|2,8|2).

a) Zeigen Sie, dass der Strahl von Maikes Pointer die Zielscheibe trifft.

b) Wessen Strahl trifft die Zielscheibe näher an ihrem Zentrum?

c) Maike dreht ihren Pointer so, dass die Richtung des Strahls nun durch

$$a_t = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \; mit \;\; t \in R$$

gegeben ist, während die Spitze des Pointers im Punkt M verbleibt.

Berechnen Sie den Wert von t, für den sich der Laserstrahl von Maikes Pointer und der Laserstrahl von Jans Pointer schneiden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

d) Wenn der Laserstrahl von Maikes Pointer die Zielscheibe trifft, erzeugt er dort einen Lichtpunkt. Bestimmen Sie den Wert von t, für den dieser Lichtpunkt dem Zentrum der Zielscheibe am nächsten liegt.

Ableitungen

Ableitungen von gebrochen rationalen Funktionen

Aufgabe 244:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\frac{3x-5}{2x}$ (b) $f(x)=\frac{x^2-8}{3x}$ (c) $f(x)=\frac{4x^2-9}{x^3}$

(d) $f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{8x^2}$ (e) $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^3}$ (f) $f(x)=\frac{4x+2}{10x^2}$

Aufgabe 245:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\frac{3}{4-x}$ (b) $f(x)=\frac{24}{x^2-4}$ (c) $f(x)=\frac{-8}{(x+3)^2}$ (d) $f(x)=\frac{-18}{(x^2-9x)^2}$

Aufgabe 246:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ (b) $f(x)=\frac{16x}{x^2+8}$ (c) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$

(d) $f(x)=\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$ (e) $f(x)=\frac{2x+3}{(x+1)^2}$ (f) $f(x)=\frac{4x+8}{x^2+t}$

(g) $f(x)=\frac{t^2-x^2}{x-2t}$ (h) $f(x)=\frac{x^2}{(x+t)^2}$ (i) $f(x)=\frac{x^3}{x+2}$

(j) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+4}$ (k) $f(x)=\frac{3x^3-3x}{x^2+4}$ (l) $f(x)=\frac{x^3-8}{(x+1)^2}$

Ableitungen von Wurzelfunktionen

Aufgabe 247:

Berechnen Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(1) $f(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{x}}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$

(3) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{2x}$

(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x}$

(5) $f(x)=\dfrac{4-\sqrt{x}}{x^2}$

(6) $f(x)=\sqrt{4-3x^2}$

(7) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$

(8) $f(x)=x\sqrt{x^2+25}$

(9) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$

(10) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

(11) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}$

(12) $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+8}}$

(13) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}$

(14) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

Ableitungen von Exponentialfunktionen

Aufgabe 248:

Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

a) $f(x) = 4e^{2x}$

b) $f(x) = e^{x+3}$

c) $f(x) = e^{2-3x}$

d) $f(x) = 2e^{-x-1}$

e) $f(x) = x + e^{-\frac{1}{2}x}$

f) $f(x) = x^2 - e^{-x}$

Aufgabe 249:

Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

b) $f(x) = x \cdot e^{2-x}$

c) $f(x) = (x+2) \cdot e^{x}$

d) $f(x) = (1-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

e) $f(x) = \dfrac{e^{x} + x}{e^{2x}}$

f) $f_t(x) = tx \cdot e^{\frac{1}{2}x-1}$

g) $f_k(x) = \frac{1}{k}x \cdot e^{-kx}$

h) $f_t(x) = (x^2 - t^2) \cdot e^{-x}$

Aufgabe 250:

Leiten Sie folgende Funktionen zweimal ab.

a) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{1-e^{x}}{2x}$

d) $f_t(x) = \dfrac{e^{-x}}{t-e^{-x}}$

e) $f(x) = 2 - \dfrac{4}{e^{2x}-1}$

f) $f_t(x) = \dfrac{e^{x}-t}{e^{x}+t}$

g) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{2-e^{x}}$

h) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-4}{e^{x}}$

Ableitungen von Logarithmusfunktionen

Aufgabe 251:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a)	$f(x)=\ln(x-2)$	b)	$f(x)=\ln(2-x)$
c)	$f(x)=x+\ln x$	d)	$f(x)=\ln(4x)$
e)	$f(x)=\ln\frac{x}{2}$	f)	$f(x)=4\cdot\ln(\frac{1}{4}x)$
g)	$f(x)=\ln(2x)-\frac{1}{2}x$	h)	$f(x)=x^2-\ln(1-4x)$

Aufgabe 252:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a)	$f(x)=\ln(6x-x^2)$	b)	$f(x)=\ln(x^2-16)$
c)	$f(x)=\ln x(x-a)$	d)	$f(x)=\ln\frac{x}{t}(4-x)$

Aufgabe 253:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a)	$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$	b)	$f(x)=\ln\frac{2-x}{x+4}$
c)	$f(x)=\ln\frac{4x-1}{x}$	d)	$f(x)=\ln\frac{x^2-4}{x^2}$

Aufgabe 254:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a)	$f(x)=x\cdot\ln(x-4)$	b)	$f(x)=(x-2)\cdot\ln x$
c)	$f(x)=x^2\cdot\ln x$	d)	$f(x)=\frac{x}{t}\cdot\ln(tx)$

Aufgabe 255:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a)	$f(x)=\frac{2-\ln x}{x}$	b)	$f(x)=\frac{a+\ln x}{2x}$
c)	$f(x)=(\ln x)^2$	d)	$f(x)=[\ln(x+2)]^2$
e)	$f(x)=(\ln x-1)^2$	f)	$f(x)=4\sqrt{a-\ln x}$

Kurvendiskussion

Aufgabe 256:

1) $\frac{x^4 + 8x^2 + 16}{2x^4 - 32}$

2) $\frac{x^4 - 16x^2}{x^3 + 2x^2 - 24x}$

3) $\frac{3x^2 - 24x + 45}{6x^2 - 18x - 60}$

4) $\frac{3x^2 - 5x + 2}{3x - 2}$

5) $\frac{a^3 - 2a^2 + a}{a^2 - a^4}$

6) $\frac{2x^2 - 3x - 2}{4x^2 - 1}$

7) $\frac{4x^2 - 24x + 36}{2x^4 - 162}$

8) $\frac{0,6x^2 + 0,5x - 0,4}{0,2x - 0,1}$

9) $\frac{-\frac{1}{8}x^2 - 6 + 2x}{3 - \frac{1}{4}x}$

Bringen Sie den folgenden Term auf den in Klammern angegebenen Nenner und vereinfachen dann <u>nur</u> den Zähler.

10) $\frac{2x}{x - 1}$ $\left[x^2 + x - 2\right]$

11) $\frac{7x - y}{4x - 3y}$ $\left[6xy - 8x^2\right]$

Aufgabe 257:

Ermitteln Sie zu folgende Aufgaben jeweils die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten.

$$f(x)=\frac{4}{x-2}$$
$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$$
$$f(x)=\frac{8}{x^2-4}$$
$$f(x)=\frac{5}{(x-2)^2}$$

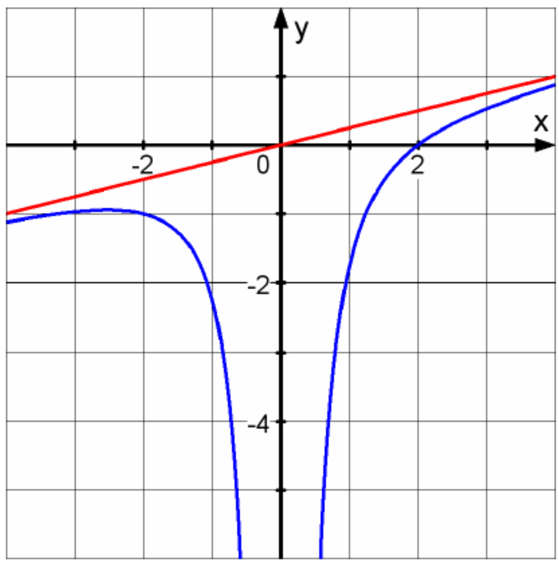
Aufgabe 258:

Ermitteln Sie zu folgende Aufgaben jeweils die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten.

(7)	$f(x)=3-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}$	(8)	$f(x)=\frac{4x+2}{2-x}$
(9)	$f(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)^2}$	(10)	$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
(11)	$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4x}$	(12)	$f(x)=\frac{16-4x^2}{x^2+16}$

Aufgabe 259:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{x^3-8}{4x^2}$. K sei das Schaubild von f.



a) Gib die Gleichung der schiefen Asymptote an und berechne den Hochpunkt.

b) P (u I f(u)) sei ein beliebiger Kurvenpunkt von K. Für welchen Wert von u geht die Tangente in P durch den Ursprung ?
In welchem Punkt S schneidet die Tangente in P die Kurve K nochmals ?

c) Die Parallele zur y-Achse durch P(u I f(u)) jetzt mit u > 1 schneidet die schiefe Asymptote in Q. Ferner sei R (1 I 0) gegeben.
Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.
Für welchen Wert von u nimmt das Dreieck einen extremen Inhalt an ?
Bestimme dessen Art und Größe.

Aufgabe 260:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{4x^2}$, K sei ihr Schaubild.

a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte.
Zeichne K für $-7 \le x \le 7$

b) Die Gerade x = u mit u < 0 schneidet das Schaubild K von f in P und die schiefe Asymptote in Q. Untersuche den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ.

c) An welcher Stelle x > 0 ist f(x) = 3 ?
Bestimme x mit einem Näherungsverfahren

d) P (u I v) sei ein Kurvenpunkt mit u < 0.
Die Tangente in P schneidet die beiden Asymptoten in R und T.
Berechne den Inhalt des Dreiecks RTV.

e) Welche Parallelen zur schiefen Asymptote haben mit der Kurve K wie viele Punkte gemeinsam ?

Aufgabe 261:

Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 2 - \sqrt{24 - 4x}$$

a) Bestimme den Definitionsbereich D_f, die Wertmenge W_f, Nullstellen und Extrempunkte.

Aufgabe 262:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten. Berechnen Sie zwei Ableitungen und stelle fest, ob eine senkrechte Tangente vorliegt.

a) $f(x) = \sqrt{8 - x}$

b) $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{5 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{-x - 3}$

Aufgabe 263:

Gegeben ist die Funktionenschar f_a für $a \in \mathbb{R}$ durch

$$f_a(x) = x - \sqrt{x+a}$$

a) Berechne den Definitionsbereich.
Für welche Werte von a kann es Nullstellen geben ? Berechne sie für a = 2.

b) Berechne alle Extrem- und Wendepunkte. Welche Gleichung hat die Ortskurve der Extrempunkte ?
Wo gibt es senkrechte Tangenten ?

c) Zeichne K_2. Gib dazu alle bekannten Daten zu K_2 an.

d) In welchem Punkt hat K_2 eine Tangente, die zur Geraden g: $y = \frac{1}{2}x$ parallel ist ? Gib die Gleichung dieser Tangente an.

Aufgabe 264:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x - 4\sqrt{x}$.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.
Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte für das Schaubild K von f.

Zeichne das Schaubild für $0 \leq x \leq 8$.

b) $P(u \mid v)$ sei ein Punkt von K mit $0 < u < 4$. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q.

Das Dreieck OPQ hat den Flächeninhalt A(u). Für welches u nimmt die Flächeninhaltsfunktion einen Extremwert an und wie groß ist er ?

c) Durch Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen V(u). Für welches u nimmt dieses Volumen einen Extremwert an?

d) Berechne den Inhalt F der Fläche, die K und die x-Achse begrenzen.

e) Dreht man diese Fläche um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen V*.

Aufgabe 265:

Es ist folgende Funktion gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + e^{-x}$

a) K sei das Schaubild von f. K hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Einer davon läßt sich berechnen. Begründe, warum es einen zweiten geben muss.

Welchen Extrempunkt hat K ? Zeige daß seine y-Koordinate $y_E = \ln\sqrt{\frac{2}{e}}$ ist

Welche Asymptote hat die Kurve K ?

Warum hat K keine Wendepunkte ?

Zeichne das Schaubild K für $-3 \leq x \leq 10$.

b) Die Kurve K, die Asymptote und die y-Achse begrenzen eine ins Unendliche reichende Fläche. Berechne deren Inhalt.

c) Gib die Gleichung der Tangente an K an, die zur Asymptote orthogonal ist.

d) Die Gerade g: $x = u$ mit $u > 0$ schneidet K in P und die Asymptote in Q. Die Parallelen zur x-Achse durch P und Q sowie g und die y-Achse begrenzen ein Rechteck. Für welches u nimmt der Inhalt dieses Rechtecks einen extremen Wert an ? Mache über dieses Extremwert Aussagen.

Aufgabe 266:

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = tx - e^{tx-1} \quad für\ t > 0$

K_t sei das Schaubild der Funktion f_t.

a) Berechne den Schnittpunkte von K_t mit der y-Achse, Extrem- und Wendepunkte sowie die Gleichung der Asymptoten.

Zeichne $K_{\frac{1}{2}}$ für $-6 \le x \le 6$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) Gesucht sind drei Tangenten an K_t:

(1) Die Tangente im Punkt $P\left(-\frac{1}{t} \mid ?\right)$

(2) Die Tangente parallel zur Geraden $g:\ y = -2tx - t^2$

(3) Die Tangente, die durch den Ursprung geht.

(4) Die Tangente, die durch den Punkt $Q(0 \mid e)$ geht.

c) Die Kurve $K_{\frac{1}{2}}$, die Asymptote, die x-Achse und die Gerade h: $x = u$, $(u < 0)$ begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt $A(u)$ sowie deren Grenzwert für $u \to -\infty$.

d) Die Gerade h: $x = u$ $(u < 0)$ schneidet die Kurve $K_{\frac{1}{2}}$ in R und die Asymptote in S.

Berechne den Inhalt $F(u)$ des Dreiecks ORS.

Für welchen Wert von u wird der Inhalt ein Extremwert? Gib die Art des Extremums an und seine Größe.

Aufgabe 267:

Untersuche die folgenden Funktionen bzw. ihre Schaubilder auf

Definitionsbereich,
Randwerte,
senkrechte Asymptoten,
Nullstellen,
2 Ableitungen,
Extrem- und Wendepunkte.

a)

$$f(x) = \ln\left(4 - \tfrac{1}{2}x\right)$$

b)

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{t}x - t\right) \quad \text{für } t > 0$$

Aufgabe 268:

Untersuche die folgenden Funktionen bzw. ihre Schaubilder auf

Definitionsbereich,
Randwerte,
senkrechte Asymptoten,
Nullstellen,
Symmetrie !!!
2 Ableitungen,
Extrem- und Wendepunkte.

$$f(x) = \ln\left(8 - \tfrac{1}{2}x^2\right)$$

Aufgabe 269:

Bestimme den Definitionsbereich, Nullstellen, die Randwerte, Asymptoten und berechne zwei Ableitungen sowie Extrem- und Wendepunkte.

Zeichne das Schaubild K mit Längeneinheit 1 cm.

Beweise eine eventuell vorhandene Symmetrie.

$$f(x) = \ln\frac{x-4}{x+4}$$

Aufgabe 270:

Bestimme den Definitionsbereich, Nullstellen, die Randwerte, Asymptoten und berechne zwei Ableitungen sowie Extrem- und Wendepunkte.

Zeichne das Schaubild K mit Längeneinheit 1 cm.

Beweise eine eventuell vorhandene Symmetrie.

$$f(x) = \ln\frac{x-4}{x+4}$$

Aufgabe 271:

Gegeben ist zwei Funktionenscharen f_a und g_a durch

$$g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin x \quad \text{und} \quad f_a(x) = \frac{a}{4} \cdot \sin x$$

für $0 \le x \le 2\pi$ und $a > 0$.

a) Gib die Extremwerte von g_a in Abhängigkeit von a an.

b) Für welche Werte von a besitzt g_a keine, eine oder zwei Nullstellen ?

c) Zeichne das Schaubild K_2 von g_2 in ein Achsenkreuz (Längeneinheit 2 cm)
Durch welche Abbildungen entsteht die Kurve K_2 aus der Kurve $y = \sin x$?

d) Für welche Werte von a schneiden sich die Schaubilder von f_a und g_a auf der Geraden $x = \frac{1}{3}\pi$?

Für welchen Wert von a berühren sich die beiden Schaubilder ?

e) Für a = 2 schließen die beiden Kurven ein Flächenstück ein.
Berechne seinen Inhalt.

f) Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Kurven von Teilaufgabe c) bilden ein Drachenviereck. Berechne seinen Inhalt.

Aufgabe 272:

Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = tx + t \cdot \sin tx \quad \text{mit} \quad x \in \left] -\frac{2\pi}{t} ; \frac{2\pi}{t} \right[$$

Das Schaubild von f_t sei K_t.

a) Untersuche das Schaubild von K_1 auf Symmetrie, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K_1 mit Längeneinheit 1 cm.

b) Für welche Werte von t besitzt K_t waagerechte Tangenten ?

c) Berechne die Wendepunkte und die Gleichungen der Wendetangenten von K_t

Aufgabe 273:

Für welches t existiert für folgende Funktion eine Nullstelle?

$$f(x) = \ln(tx) - \frac{x^2}{2t} \quad t > 0$$

Aufgabe 274:

Bilden Sie zu der folgenden Funktion zwei Ableitungen und ermitteln sie den oder die Wendepunkte.

$f(x) = \sqrt{e^x - 4}$

Aufgabe 275:

Bilden Sie von folgender Funktion zwei Ableitungen:

$f(x) = 4\sqrt{a - \ln(x)}$

Aufgabe 276:

Bilden Sie von folgender Funktion die ersten beiden Ableitungen:

$f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 277:

Gegeben ist die Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \frac{x^3 - t^3}{tx^2} \quad \text{für } t > 0$$

a) (6) Untersuchen sie K_t auf Schnittpunkte mit den Achsen, Asymptoten, Extremwerte und Wendepunkte.

b) (7) B(u|v) sei ein Punkt von K_2 mit u>0.

Die Parallelen zu den Asymptoten von K_2 durch B schneiden die Asymptoten in A und C. Für welchen Wert von u nimmt der Umfang des Parallelogramms OABC einen Extremwert an? Von welcher Art und wie groß ist er?

Aufgabe 278:

Bestimmen Sie für die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1 - 2x - 2x^2}{x^2 - 1}$$

a) (2) den Definitionsbereich

b) die erste Ableitung

c) alle Asymptoten

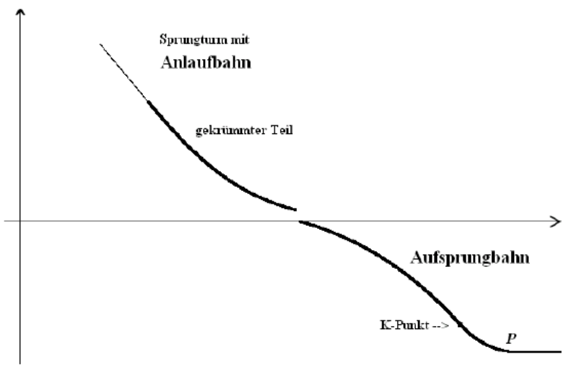
Aufgabe 279:

Sie sehen ein Foto, sowie schematisch das ungefähre Profil der Olympiaschanze in Sotschi. Der Sprungturm mit der Anlaufbahn besteht aus einem geraden Teil und einem gekrümmten Teil. Zuerst soll der gekrümmte Teil mithilfe eines Teils des Graphen einer geeigneten Funktion modelliert werden. Die x-Achse verlaufe dabei waagerecht.

Betrachten Sie dazu zunächst die Funktionsgleichung:

$$f_k(x) = e^{-k \cdot x^2} \text{ mit } k > 0$$

Untersuchen Sie die Funktionen f_k in Abhängigkeit von k in Bezug auf Symmetrie, Nullstellen mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkte und Verhalten für $x \to \pm\infty$.



Erstellen von Funktionen Anhand von Bedingungen

Aufgabe 280:

Gesucht wird eine Funktion 3. Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und durch die Punkte $A(1,-2)$ und $B(2, 8)$ geht.

Aufgabe 281:

Gesucht wird eine Funktion 4. Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft, die y-Achse bei $y = -0, 5$ schneidet und die Punkte $A(2;-4{,}5)$ und $B(-3;-32)$ enthält.

Aufgabe 282:

Eine Parabel hat ihren Scheitel bei $(2;-1)$ und schneidet die y-Achse bei $y = -3$.

Aufgabe 283:

Eine Funktion 3. Grades hat ihren Wendepunkt bei $(1; 1)$, eine Nullstelle bei $x = 2$ und geht durch den Punkt $(3; 5)$.

Aufgabe 284:

Eine Funktion 3. Grades besitzt bei $x = 2$ eine doppelte Nullstelle, schneidet die y-Achse bei $y = 4$ und geht durch $(1; 2)$.

Aufgabe 285:

Aufgabe 1 Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und einen Wendepunkt bei $x_w = 1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

Aufgabe 2 Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(5|-12,5)$ und einen Hochpunkt bei $H(1|3,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f(x)$!

Aufgabe 3 Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(-1|8)$. Bei $x = 1$ lässt sich die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -4x + 4$ als Tangente an den Graphen der gesuchten Funktion $f_1(x)$ legen. Bestimmen Sie diese Funktionsgleichung!

Aufgabe 4 Ein Polynom 3. Grades berührt bei $x_1 = -2$ die Tangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -8x - 15$. Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei $y_0 = 1$. Dort beträgt die Steigung $m = 16$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

Aufgabe 5 Ein Polynom 4. Grades ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Bei $x_w = -1$ hat sie eine Wendetangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 8x + 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

Aufgabe 6 Ein Polynom 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph der Funktion hat einen Hochpunkt bei $H(2|48)$ und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 5x + 19$ an der Stelle $x_s = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion?

Aufgabe 7 Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|4)$. Bei $x_b = 2$ berührt sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 4x - 8$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

Aufgabe 8 Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -2x + 4$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Eine andere Parabel mit der Funktionsgleichung $f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ schneidet die gesuchte Parabel bei $x_s = 2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Parabel!

Aufgabe 9 Ein Polynom 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ schneidet die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x^2 + 4x - 4$ bei $x_1 = -1$, bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 5$. Außerdem hat der Graph der gesuchten Funktion einen Hochpunkt bei $x_h = 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 286:

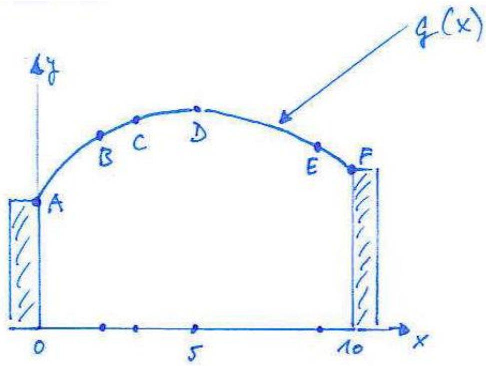
Zu bestimmen ist eine ganz-rationale Funktion f vom Grad 4, deren Graph den Punkt H(2 | 4) als Hochpunkt und im Koordinatenursprung die Gerade mit der Gleichung y = x als Wendetangente hat.

Aufgabe 287:

Im Bild sehen Sie den geplanten Tunnel der olympischen Bobbahn in Sotschi. Mit diesem Tunnel werden die Bobfahrer zum ersten Mal bei einem olympischen Turnier in eine 150m lange gekrümmte Röhre fahren.

Man interessiert sich für die Gestaltung des Eingangs (Portal) und sucht eine geeignete Funktion, die den gekrümmten Verlauf möglichst passend beschreibt.

Dazu hat man die 6 Punkte A bis F mit ihren Koordinaten ermittelt. Sie dienen als Rechenbasis. Diese sind auf der nachfolgenden Skizze abgebildet.



A(0|8); B(2|9); C(3|9,5); D(5|10); E(9|8,75)); F(10|8,5)

Alle Angaben sind in Metern gemacht.

Bestimmen Sie die Parabel 2. Ordnung, die durch die Punkte A, D und F geht.

Vermischtes

Aufgabe 288:

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$

a) (18) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für folgende Funktion. Geben Sie dabei speziell die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit der x- und y-Achse, Asymptoten, Extrempunkte und Wendepunkte an.

b) (7) P(u|f(u)) sei für u>0 ein beliebiger Kurvenpunkt. Q sei das Spiegelbild zu P bzgl. der y-Achse. Berechnen Sie den Inhalt A(u) des Dreiecks OPQ.

Aufgabe 289:

Für welches t existiert für folgende Funktion eine Nullstelle?

$$f(x) = \ln(tx) - \frac{x^2}{2t} \quad t > 0$$

Aufgabe 290:

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{t}{4},\ t \in R$

a) (5) Bestimmen Sie t so, dass die x-Achse eine Tangente an das Schaubild G von f_t ist.

b) (5)Berechnen Sie mit dem unter a) ermittelnden Wert für t den Inhalt des Flächenstücks zwischen G und der x-Achse

Aufgabe 291:

Der Punkt P(x |f(x)) auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ erzeugt mit den Punkten X(x|0), Y(0|f(x)) und dem Koordinatenursprung O(0|0) ein Rechteck der Fläche A(x).

(a) (5) Berechnen Sie die Punkte des Graphen der Funktion f(x) mit waagrechter Tangente.

(b) (5) Geben Sie die Koordinaten des Punktes P an, bei dem die Fläche des Rechtecks maximal ist.

Aufgabe 292:

Gegeben ist folgende Funktion:

$f_t(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}$ K sei das Schaubild von f.

a) (8) Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

b) (7) Die Gerade mit der Gleichung x = u mit u > - 2 schneidet K in P und die schräge Asymptote in Q. R sei der Schnittpunkt der Asymptoten. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 293:

Es ist

$$f(x) = \frac{1}{8}x(x-6)^2 + 4$$

a) (4) Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie den Wendepunkt des Schaubilds der Funktion von f.

b) (2) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf.

c) (4) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von der Wendetangente, der y-Achse und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.

Aufgabe 294:

Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion

$$f(x) = (x^2 + b) \cdot e^{ax}$$

in der Nullstelle N(3|0) die Steigung m=6e hat.

Aufgabe 295:

Führen Sie für die Funktion f(x) eine Kurvendiskussion durch.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 16}{3x}$$

a) (12) Bestimmen Sie die Definitionsmenge, Asymptoten, Nullstellen mit der x-Achse, Extremwerte und Wendepunkte.

b) (5) Für welchen Wert von k hat die Fläche, die vom Grafen von f, von der schrägen Asymptote und den Geraden g: x=1 und h: x = k (k ist positiv) begrenzt wird, den Inhalt A=16/3?

c) (8) Zieht man im Punkte P(1|?) des Graphen von f die Tangente, bildet diese mit der y-Achse und der erwähnten Asymptote ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

Aufgabe 296:

Welche Gleichung hat die Tangente in der einzigen Nullstelle der Kurve f(x)?

$$f(x) = e^x \cdot \ln x$$

Aufgabe 297:

Es ist

$$f(x) = \frac{1}{8}x(x-6)^2 + 4$$

a) (6) Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie den Wendepunkt des Schaubilds der Funktion von f.

b) (2) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf.

Aufgabe 298:

Gegeben ist folgende Funktion:

$$f_t(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}$$ K sei das Schaubild von f.

a) (8) Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

b) (7) Die Gerade mit der Gleichung x = u mit u > - 2 schneidet K in P und die schräge Asymptote in Q. R sei der Schnittpunkt der Asymptoten. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 299:

Gegeben ist die Funktion f durch

$f(x) = x \cdot (lnx)^2;\ \ x > 0$

Ihr Schaubild sei K.

a) (16) Geben Sie für diese Funktion die Definitionsmenge, die Symmetrieeigenschaft, Asymptoten, Schnittpunkte mit der x- bzw. y-Achse und Extremwerte an.

b) (9) Die Tangente an K im Kurvenpunkt B schneidet die y-Achse im vom Koordinatenursprung O verschiedenen Punkt P. Bestimmen Sie den Punkt B so, dass die Strecken BP und BO gleich lang sind.

c) (9) Die 1. Winkelhalbierende und K schließen eine Fläche ein, die unterhalb der 1. Winkelhalbierenden liegt. Berechnen Sie deren Inhalt. Sie können dabei verwenden, dass für $f_1\ mit\ \ f_1(x) = x \cdot \ln{(x)}$ eine Stammfunkt F_1 mit

$F_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln{(x)}$ hat.

Aufgabe 300:

Zu jedem $t \in R^+$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = t \cdot [\ln{(x+t)}]^2$$

mit $(x + t) \in R^+$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) (13) Geben Sie die Definitionsmenge für die Funktion $f_t(x)$ an. Untersuchen Sie K_t auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse und y-Achse, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte.

b) (14) g_t sei die Gerade durch den Tiefpunkt und den Wendepunkt von K_t.

h_t sei die Senkrechte zu g_t durch den Tiefpunkt von K_t.

g_t und h_t schneiden die senkrechte Asymptote von K_t in G_t bzw. H_t.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Welche Kurve bilden die Punkte H_t, wenn t alle zugelassenen Werte annimmt?

Für welches t haben G_t und H_t die kleinste Entfernung?

Wie groß ist diese?

c) (8) Die x-Achse, K_t und die Gerade x = e – t begrenzen eine Fläche.

Berechnen Sie deren Inhalt A(t).

Aufgabe 301:

Für jedes t>0 ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t}(x^3 - 9x); \quad x \in R$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) (9) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extremwerte und Wendepunkte. Geben Sie dabei die Punkte explizit an.

b) (7) Jede Kurve K_t umschließt mit der positiven x-Achse eine Fläche. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

c) (10) Die Gerade n schneidet das Schaubild K_6 im Punkt N(3|0) rechtwinklig. Bestimmen Sie die weiteren Schnittpunkte von n und K_6

d) (10) Die Gerade x=1 schneidet das Schaubild K_t im Punkt R_t und sie schneidet die Gerade y=tx im Punkt S_t.

Berechnen Sie die Strecke R_tS_t.

Wie lang ist diese Strecke mindestens?

Aufgabe 302:

Wo besitzt die Funktion $y = 2x^2 \cdot \ln\left(\sqrt{x}\right), x > 0$ Extremwerte bzw. Wendepunkte?

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 303:

Gegeben ist eine Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{x} + 3\ mit\ x \neq 0$$

Das Schaubild von f hat im Punkt P(3|v) die Tangente t.

a) (5) Ermitteln Sie die Gleichung von t.

b) (5) Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimmen sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 304: (15)

Für jedes t>0 ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t}(x^3 - 9x); x \in \mathbb{R}$$

a) (6) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.

b) (9) Die Gerade n schneidet das Schaubild K_6 im Punkt N(3|0) rechtwinklig. Bestimmen Sie die weiteren Schnittpunkte von n und K_6.

Aufgabe 305:

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2; x \in \mathbb{R}$$

a) (8) Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Extrempunkte, Wendepunkte und Asymptoten.

b) (4) Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte.

c) (6) Das Schaubild $f_t(x)$ schließt mit den Geraden y=4, x=u (u<0) und der y-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A(u) ein. Berechnen Sie A(u). Bestimmen Sie hierbei auch

$\lim\limits_{u \to -\infty} A(u)$.

d) (5) Durch $k(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion k gegeben. Ihr Schaubild sei K.

Bestimmen Sie t>0 so, dass sich K und f_t orthogonal schneiden.

Funktionsscharen

Aufgabe 306:

Gegeben ist eine Funktionsschar durch ihre Gleichung

$f_t(x) = x^3 - 3t^2x \ \ mit\ t > 0$

a) Für welches t geht die Kurve durch (2/5)?

b) Für welches t ist die 2. Winkelhalbierende die Tangente im Ursprung?

c) Für welches t liegen die Extrempunkte auf der 2. Winkelhalbierenden?

d) Für welches t ist die Tangente im Schnittpunkt mit der positiven x-Achse parallel zur 1. Winkelhalbierenden?

e) Auf welcher Kurve liegen alle Extrempunkte?

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 307:

Die Kurve K_t begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechne deren Inhalt A. In welchem Verhältnis teilt die Ortskurve C der Tiefpunkte diese Fläche?

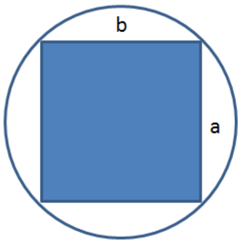
$$f_t(x) = \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \text{ für } t \in R^+$$

Information: Tiefpunkte $T_{1,2}\left(\pm t\sqrt{3} \mid -\frac{9}{2}t^2\right)$.

Extremwertaufgaben

Aufgabe 308:

Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite (b) und zum Quadrat der Balkendicke (a). In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen?

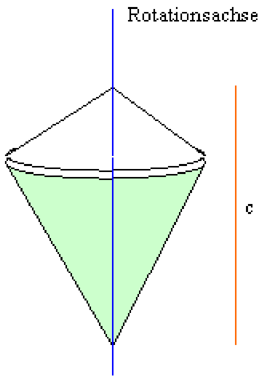


Aufgabe 309:

Aus einem Stück Draht, das 36 cm lang ist, soll eine "Säule" mit quadratischem Grundriss geformt werden. Welches ist das maximal mögliche Volumen der Säule?

Aufgabe 310:

Welches rechtwinkelige Dreieck mit der Hypotenuse c=6 cm erzeugt einen Doppelkegel größten Volumens, wenn man es um die Hypotenuse dreht?



Aufgabe 311:

Die Funktion

f(x) = -a * x^2 + b

schließt im ersten Quadranten ein Rechteck mit der x und y Achse ein.

Für welches x wird der Flächeninhalt maximal?

Aufgabe 312:

Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion f mit der Gleichung

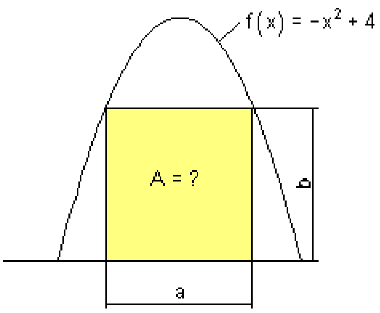
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \; und \; D_f = R^+$$

Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von f. Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jäger, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung s zwischen dem Bären und dem Schützen durch die x-Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort B(x_0|y_0)!

Aufgabe 313:

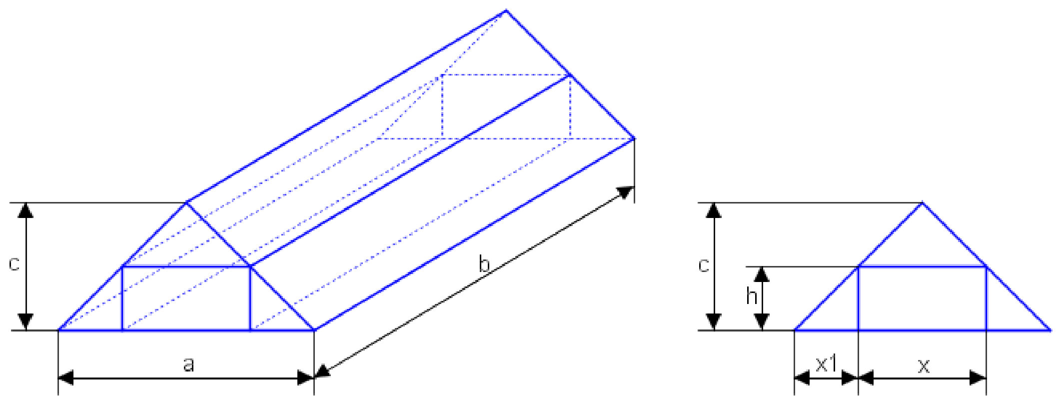
Für welche Werte von a und b hat das Rechteck den größten Flächeninhalt?

Wie groß ist dieser?



Aufgabe 314:

Der Dachboden eines Einfamilienhauses (dreiseitiges Prisma) soll ausgebaut werden. Der vorhandene Raum soll bei rechteckigem Zimmerquerschnitt maximal ausgenutzt werden.

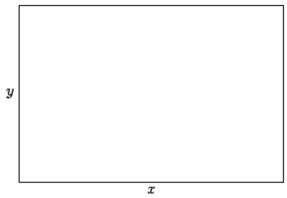


Zu wählende Abmessungen: a=8, b=10, c=5

Aufgabe 315:

Mit einer vorhandenen Rolle Zaun (darauf sind 50 m) soll ein möglichst großes Stück Land rechteckig eingezäunt werden. Zielgröße ist die eingezäunte Fläche.

Wie lauten die Maße x und y?



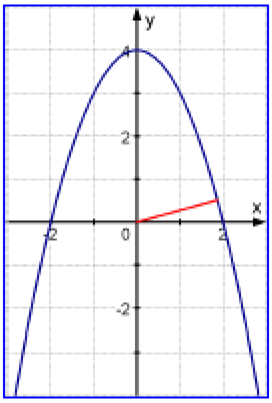
Aufgabe 316:

Es soll eine Dose mit einem Liter Fassungsvermögen hergestellt werden. Dabei werden Grund- und Deckkreis aus dem umschriebenen Quadrat ausgeschnitten. Wie groß sind die Ausmaße zu wählen, wenn dabei möglichst wenig Blech verwendet werden soll und der Abfall beim Ausstanzen der Grund- und Deckfläche zum verbrauchten Material zählt.

Aufgabe 317:

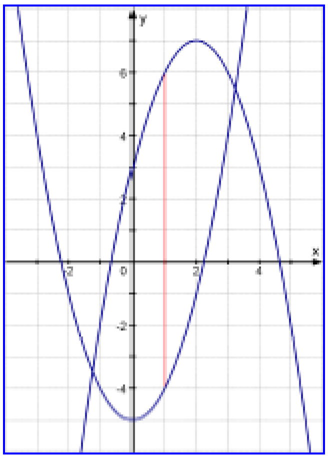
Aufgabe 1

Gegeben ist die Parabel als Schaubild der Funktion $f(x) = 4 - x^2$.
Welcher Punkt P dieser Parabel hat vom Ursprung die kürzeste Entfernung ?



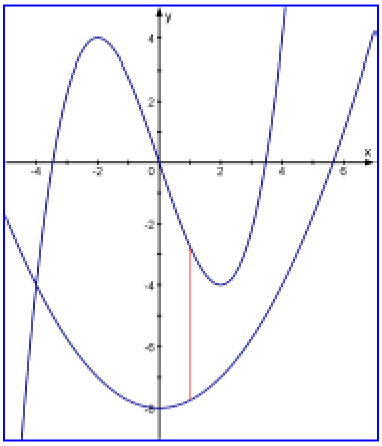
Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch:
$f(x) = x^2 - 5$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 3$
Die Gerade h: $x = u$ schneidet die von den beiden Parabeln begrenzte Fläche.
Für welches u ist die Sehne am längsten ?



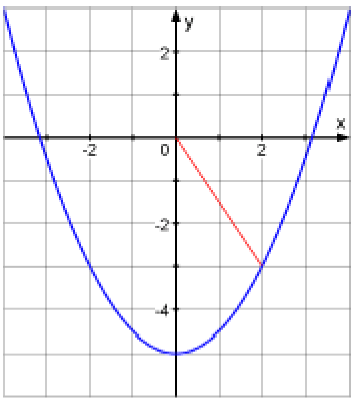
Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8$
Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > -4$ schneidet die beiden Schaubilder in P und Q.
Für welches u nimmt die Länge der Strecke PQ einen Extremwert an ?



Aufgabe 4

Bestimme die Punkte P (u I v) der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$, deren Abstand zum Ursprung einen Extremwert annimmt.



Aufgabe 318:

Abstand

Es sind die zwei Funktionen $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = (2x+1)e^{-x}$ gegeben. Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(u \geq 0)$ schneidet das Schaubild von f in P und das von g in Q. Wir bestimmen die Abstandsfunktion z zwischen den beiden Punkten.

Aufgabe 319:

Umfang

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch einen Kurvenpunkt $P(u|v)$ $(u > 0)$ begrenzen mit den Achsen ein Rechteck. Der Umfang des Rechtecks soll durch eine Zielfunktion in Abhängigkeit von u beschrieben werden. Dabei gilt allgemein für den Umfang von Rechtecken

$$U = 2a + 2b,$$

Aufgabe 320:

Flächeninhalt

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ und $g(x) = e^{-x}$. Die senkrechte Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(u \geq 0)$ schneidet die Schaubilder von f und g in den Punkten P und Q. Der Ursprung O und die Punkte P und Q bilden ein Dreieck. Wie sieht dann die Zielfunktion aus, die den Flächeninhalt des Dreiecks beschreibt?

Für die Fläche A von beliebigen Dreiecken gilt die Formel

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Aufgabe 321:

Oberfläche

Der Punkt $P(u|v)$ $(u > 0)$ soll ein Punkt auf der Kurve der Funktion $f(x) = \frac{3}{x^3} - 1$ sein. Die Punkte P, $Q(u|-1)$, $R(0|-1)$ und $S(0|v)$ bilden ein Rechteck. Die Zielfunktion soll die Oberfläche des Zylinders beschreiben,

der entsteht, wenn sich das Rechteck um die Seite RS dreht (die auf der y-Achse liegt).

Die Oberfläche eines Zylinders hat die Formel

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

Aufgabe 322:

Volumen

Für $0 \leq u \leq \sqrt{2}$ soll $P(u|v)$ ein Kurvenpunkt von $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ sein und Q der Punkt mit den Koordinaten $(-u|v)$. P und Q begrenzen mit dem Ursprung O ein Dreieck, das bei Rotation um die y-Achse einen Kegel erzeugt. Gesucht ist die Zielfunktion, die das Volumen des Kegels beschreibt.

Dazu wieder zuerst die allgemeine Formel für das Volumen von Kegeln:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Aufgabe 323:

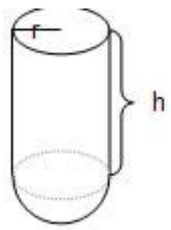
Gegeben sind die Funktionen $f(x)=x^2$ und $g(x)=-1{,}5x(x-3)$.

An welcher Stelle zwischen den beiden Schnittpunkten ist der Abstand der Funktionswerte maximal? Wie groß ist dieser Abstand der beiden Funktionen an diesem Punkt?

Aufgabe 324:

Ein Kessel besteht aus einem Zylinder. Oben auf den Zylinder ist ein Deckel aufgesetzt. Am unteren Ende ist eine Halbkugel aufgesetzt.

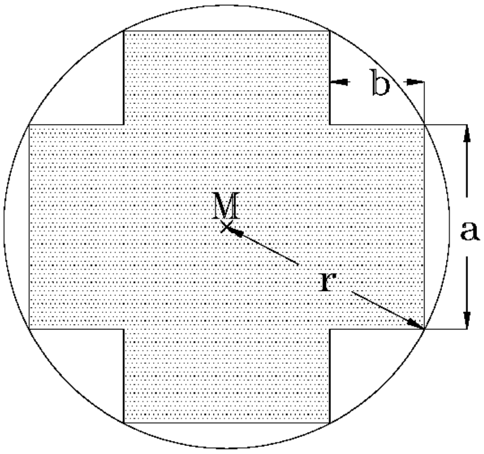
Wie sind seine Maße zu wählen, damit er mit Deckel und Halbkugel bei einer Oberfläche von 150 dm² ein möglichst großes Volumen hat?



Aufgabe 325:

Eine Spule mit dem Radius r (r = 0,2m) soll zur Vergrößerung der Induktivität mit einem kreuzförmigen Eisenkern gefüllt werden.

Bestimmen Sie die Abmessungen a und b des Eisenkerns so, dass sich möglichst viel Eisen im Innern der Spule befindet.



Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 326:

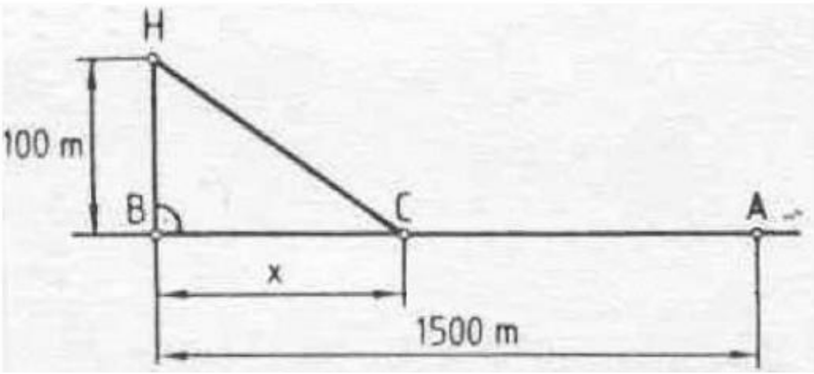
P(u|v) sei ein beliebiger Punkt auf der Parabel mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \text{ mit } -2 \leq x \leq 2$$

Bestimmen Sie P so, dass das Dreieck ABP mit A(-2|0) und B(u|0) den größtmöglichen Flächeninhalt hat. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

Aufgabe 327:

Die Reichenau Waldsiedlung liegt 100m abseits einer geradlinigen Straße, die von dem Fernheizkraftwerk Brennhütte wegführt. Auf dieser geradlinigen Straße verläuft auch das städtische Fernheizleitungssystem. Die Siedlung soll an das städtische Fernheizsystem angeschlossen werden. Ein Meter Verlegung kostet längs der Straße 1000 Euro, im Gelände hingegen 1400 Euro. Berechnen Sie denjenigen Wert für die Streckenlänge x, für den die gesamten Kosten für die Verlegung der Fernwärmeleitung von H über C nach A minimal werden und geben Sie die minimalen Kosten an.

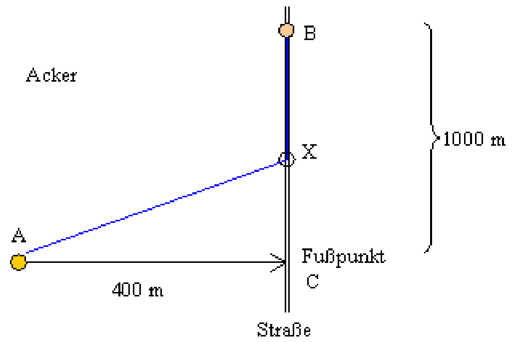


Aufgabe 328:

Ein Acker liegt an einer geradlinigen Straße. Ein Fußgänger befindet sich auf dem Acker im Punkt A und möchte möglichst schnell zu einem Punkt B auf der Straße gelangen. Der Fußpunkt C des Lotes von A auf die Straße hat von A die Entfernung 400m und die Entfernung B nach C betrage 1000m. Auf der Straße kann sich der Fußgänger doppelt so schnell fortbewegen wie auf dem Acker.

a) (10) Welchen Weg soll er einschlagen, damit er so schnell wie möglich am Ziel B ankommt?

b) (5) Was ändert sich, wenn die Entfernung von B nach C 100m beträgt.



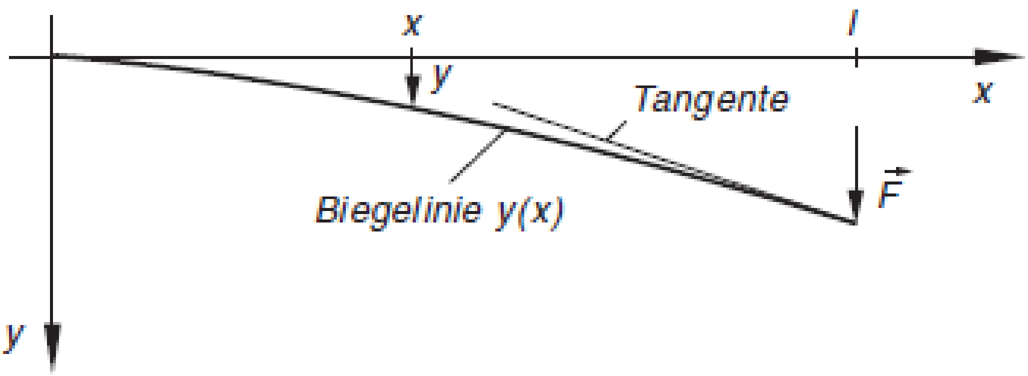
Aufgabe 329:

Die Biegelinie eines einseitig eingespannten und am freien Ende durch eine Kraft vom Betrage F auf Biegung beanspruchten Balkens der Länge l lautet wie folgt

$$y(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}\left(l \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \quad (0 \leq x \leq l)$$

Wobei E und I positive Konstanten sind.

An welcher Stelle des Balkens ist die Durchbiegung am größten und wo ist Sie am kleinsten?



Komplexe Zahlen

Aufgabe 330:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $2 \cdot 3i$ b) $-3i \cdot 6i$ c) $(-3i)\cdot(-4i)$ d) $i^3 \cdot 4i^2$

e) $i^5 \cdot i$ f) $\dfrac{4i^3}{2i^5}$ g) $\dfrac{4i^2}{5i}$ h) $1+\dfrac{1}{i^2}$

i) $i^6 + \dfrac{3}{i^2}$ j) $\dfrac{1}{(-i)^3} - i$ k) $\dfrac{2}{i} + \dfrac{3}{i^3}$ l) $(2i^3)^{-3}$

Aufgabe 331:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\sqrt{-36}$ b) $\sqrt{-169}$ c) $\sqrt{-48}$ d) $\sqrt{-3}^3$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{-2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$ g) $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$ h) $\dfrac{24}{\sqrt{-12}+\sqrt{-18}}$.

Aufgabe 332:

Führen Sie folgende Additionen durch:

a) $(12+15i)+(7+4i)$ b) $(-2+5i)+(7-2i)$ c) $(-3-i)+(1-5i)$
d) $(5+2i)+(-5-2i)$ e) $(7-3i)+(-7+9i)$ f) $(1+i)+(-2-i)$
g) $z_1 = -13 + i\cdot\sqrt{3}$ $z_1 + z_1{}^* = ?$ h) $z_2 = 5-8i$, $z_2 + z_2{}^* = ?$

Aufgabe 333:

Führen Sie folgende Subtraktionen durch:

a) $(12+15i)-(7+4i)$ b) $(-2+5i)-(7-2i)$ c) $(-3-i)-(1-5i)$
d) $(5+2i)-(-5-2i)$ e) $(7-3i)-(-7+9i)$ f) $(1+i)-(-2-i)$
g) $z_1 = -13 + i\cdot\sqrt{3}$, $z_1 - z_1{}^* = ?$ h) $z_2 = 5-8i$, $z_2 - z_2{}^* = ?$

Aufgabe 334:

Führen Sie folgende Multiplikationen durch:

a) $(2+3i)(4+7i)$ b) $(3-8i)(5+2i)$ c) $(12-i)(1-12i)$

d) $(-3+2i)(6-2i)$ e) $(5+2i)(5-2i)$ f) $(-2-7i)(-3-8i)$

Aufgabe 335:

Bringen Sie das Ergebnis auf die Form a + bi

a) $\frac{4}{8+3i}$ b) $\frac{i}{4-i}$ c) $\frac{2+3i}{2-3i}$ d) $\frac{4+2i}{2+4i}$

e) $\frac{8-8i}{2+2i}$ f) $\frac{1-i}{i-2}$ g) $\frac{12+5i}{13-8i}$ h) $\frac{1-4i}{5+6i}$

Aufgabe 336:

Berechnen Sie die Kehrwerte zu diesen Zahlen:

a) $-4+5\cdot i$ b) $-12-5i$ c) $\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$ d) $\frac{2}{7}\sqrt{6}-\frac{5}{7}$

Aufgabe 337:

Verwenden Sie die üblichen Binomischen Gesetze.

a) $\frac{3+2i}{(5-3i)^2}$ b) $\frac{2+10i}{(4+i)^2}$ c) $\frac{3-i}{(3+i)^3}$ d) $\left(\frac{2+7i}{3-2i}\right)^2$

e) $(2+4i)^3=(2+4i)^2\cdot(2+4i)=$ f) $(5-i)^3$ g) $(3+2i)^4$

h) $\frac{(4+5i)^3}{2-2i}$

Aufgabe 338:

Berechnen Sie die Lösungsmengen mit komplexen Zahlen für diese quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$ b) $x^2 - 3x + 9 = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 29 = 0$ d) $x^2 + 5x + 7 = 0$

e) $3x^2 - 4x + 2 = 0$ f) $\frac{3}{2}x^2 + 4x + 8 = 0$

g) $x^2 + 7x + 19 = 0$ h) $\frac{1}{8}x^2 + 3x + 20 = 0$

Aufgabe 339:

Zeichne die zu diesen komplexen Zahlen gehörenden Punkte in ein Achsenkreuz der Gauß'schen Ebene ein und berechne ihre Betrag:

a) $4 - i$ b) $3 + 4i$ c) $-3 + 4i$ d) $-2 - 3i$

e) $-3i$ f) $2 - 6i$ g) $1 + i$ h) 2

Aufgabe 340:

Berechnen Sie die Polarkoordinaten zu folgenden komplexen Zahlen:

(a) $z = 12 - 5i$ (b) $-6 + 8i$ (c) $-\sqrt{11} - 5i$

(d) $-1 - \sqrt{3}$ (e) $1 - i$ (f) $5 - i\sqrt{24}$

Aufgabe 341:

Folgende komplexe Zahlen sind durch Polarkoordinaten gegeben. Berechne Sie ihre Kartesischen Koordinaten.

(a) $[12; 60°]$ (b) $[\sqrt{32}; 135°]$ (c) $[15; 180°]$

(d) $[4; 90°]$ (e) $[8; 210°]$ (f) $[\sqrt{18}; 330°]$

(g) $[\sqrt{5}; 115°]$ (h) $[\sqrt{24}; 300°]$ (i) $[6; 218°]$

Aufgabe 342:

Stellen Sie in der Form $|z| = E(\varphi)$dar:

a) $z = 3 - 4i$ b) $z = -\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}$ c) $z = \sqrt{3} + i$ d) $z = 3 + i\sqrt{27}$

Aufgabe 343:

Berechnen Sie diese komplexen Zahlen:

a) $z = E(30^\circ) \cdot E(60^\circ)$ b) $z = E(45^\circ)^3$ c) $z = E(240^\circ)^2$

d) $z = E(-\frac{1}{3}\pi)$ e) $z = \dfrac{1}{E(135^\circ)}$ f) $z = \dfrac{E(\frac{1}{6}\pi)}{E(\frac{2}{3}\pi)}$

Aufgabe 344:

Berechne aus $z_1 = 1{,}5 \cdot E(60^\circ)$ und $z_2 = 3 \cdot E(135^\circ)$ das Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$.

Konstruiere den Vektorpfeil dieses Ergebnis auch über eine Drehstreckung.

Und als Nebenprodukt bestimme noch $\sin 195^\circ$ und $\cos 195^\circ$.

Aufgabe 345:

Was bedeutet eine Multiplikation einer Zahl mit

a) $-i$ b) $-\frac{4}{3} + i \cdot \frac{3}{5}$ c) $\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2} - i \cdot 2\sqrt{2}$ f) $-\sqrt{48} + i \cdot 4$

Aufgabe 346:

In Punkt z_1 in der Gaußschen Ebene wurde durch eine Drehstreckung abgebildet. Welcher Multiplikation hat dies entsprochen ?

a) $k = 2$ und $\varphi = 270^\circ$ b) $k = 0{,}5$ und $\varphi = 60^\circ$

c) $k = 4$ und $\varphi = 135^\circ$ d) $k = 8$ und $\varphi = 75^\circ$

(Anleitung zu d: $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ und $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Aufgabe 347:

Löse zeichnerisch und rechnerisch:

a) $(3+i\cdot 4)\cdot(1+i)$ b) $(5+i\cdot 2)(3-i\cdot 4)$

Aufgabe 348:

Berechnen Sie mit Polarkoordinaten und auf die übliche Art.

a) $\frac{0{,}9-i\cdot 1{,}2}{2-i\cdot 1{,}5}$ b) $\frac{8-i\cdot 6}{8+i\cdot 15}$ c) $\frac{-5-i\cdot 3}{2-i\cdot 7}$

Aufgabe 349:

Berechnen Sie die ersten 4 Potenzen und stellen sie zeichnerisch dar:

a) $z=\frac{1}{2}+i$ b) $1-i$ c) $\frac{4}{5}-i\cdot\frac{3}{5}$ d) $1{,}2+i\cdot 0{,}5$ e) $\frac{1}{2}-i\cdot 2$

Aufgabe 350:

Berechnen Sie folgende Quadratwurzeln über Polarkoordinaten:

a) $\sqrt{-4+3i}$ b) $\sqrt{-i}$ c) $\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{5+5i}$ e) $\sqrt{-5+5i}$ f) $\sqrt{-5-5i}$

g) $\sqrt{4i}$ h) $\sqrt{6-8i}$ i) $\sqrt{-2\sqrt{3}+2i}$

j) $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$ k) $\sqrt{4+i\sqrt{17}}$ l) $\sqrt{17-4i}$

Aufgabe 351:

a) $\sqrt[3]{i}$ b) $\sqrt[3]{-1-i}$ c) $\sqrt[3]{-27i}$

d) $\sqrt[3]{8\cdot E(120^\circ)}$ e) $\sqrt[3]{64\cdot E(240^\circ)}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

Aufgabe 352:

a) $\sqrt[4]{2i}$ b) $\sqrt[4]{-1+i}$ c) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}-i\cdot\frac{4}{5}}$

d) $\sqrt[4]{16\cdot E\left(120^\circ\right)}$ e) $\sqrt[4]{-1}$ f) $\sqrt[4]{-7+i\cdot 2\sqrt{2}}$

Aufgabe 353:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2-i}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-i\cdot 2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{-i}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{4i}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{-3+4i}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{1-i}}$

Aufgabe 354:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

a) $(3-4i)^{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt{6-i\cdot 3\sqrt{5}}^{\,3}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\,2}$

d) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{-1-i\cdot\sqrt{3}}\right)^2}$ e) $\sqrt[4]{-8i}^{\,3}$ f) $\sqrt{\dfrac{i}{1-i}}^{\,5}$

Aufgabe 355:

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

a) $z^3=i$

b) $z^3=-i$

Stellen Sie diese Lösungen auch auf dem Einheitskreis dar.

Aufgabe 356:

Es sind reelle Zahlen *a* und *b* so zu bestimmen, dass

$(a+bi)^2 = 3+4i$ gilt.

Aufgabe 357:

Berechnen Sie

a) (2) $w_1=z_1+z_2$ und $w_2=z_1-z_2$ mit $z_1=4+3i$ und $z_2=5-4i$

b) (2) w= $z_1 \cdot z_2$ mit $z_1=1+2i$ und $z_2=3+5i$

c) (2) w= $\frac{z_1}{z_2}$ mit $z_1=1+2i$ und $z_2=2-5i$

d) (2) w= $\frac{3-2i}{3+2i}$

e) (2) Lösen Sie die folgende Gleichung in C: $\frac{x-3}{x+3} = \frac{x+3}{3-x}$

Aufgabe 358:

Berechnen Sie folgende Gleichung: $z^4 = 1$

Aufgabe 359:

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen z=2+i und w=-2-2i. Berechnen Sie $\frac{z}{w}$ und bringen es in die Form a+bi.

Aufgabe 360:

Gegeben ist eine komplexe Zahl z=1+i. Berechnen Sie z^4.

Aufgabe 361:

Zeigen Sie in den komplexen Zahlen durch Umformung, dass folgender Sachverhalt gilt

$$z = \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = 1 + i$$

Aufgabe 362:

Es sei $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Zeigen Sie in den komplexen Zahlen durch Umformung, dass folgender Sachverhalt gilt

$$(z^*)^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Aufgabe 363:

Berechnen Sie folgende Gleichungen in den komplexen Zahlen.

$$2\underline{x} + j3\underline{x} = 19 - j4$$

$$3\underline{x} - j5\underline{x} = -6 + j10$$

$$2\underline{x} + j3\underline{x} = -13 + j13$$

$$5\underline{x} - j2\underline{x} = -1 + j12$$

$$5\underline{x} - j5\underline{x} = 50$$

$$(5 - j4) \cdot (2\underline{x} + j2) = 52 + j24$$

Aufgabe 364:

Berechnen Sie folgende Gleichungen in den komplexen Zahlen.

$$\frac{60\underline{x} - j50}{3 - j2} = 15\underline{x} + 25$$

$$\frac{\underline{x} - 3 + j2}{\underline{x} + j1} = \frac{\underline{x} - 2 + j5}{\underline{x} + 1 + j2}$$

$$\frac{2\underline{x} - j2}{2\underline{x} + j4} - \frac{\underline{x} + 1 - j}{3\underline{x} + j6} = \frac{\underline{x} + 2 - j}{4\underline{x} + j8}$$

Aufgabe 365:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der komplexen Lineargleichungssysteme!

$$\begin{aligned} (-5+j3)\underline{x}+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \\ (2-j)\underline{x}+(2+j4)\underline{y} &= -3-j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3+j2)\underline{x}-(5+j2)\underline{y} &= -20+j17 \\ (2-j3)\underline{x}+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3-j5)\underline{x}-(1-j3)\underline{y} &= 0 \\ (6-j10)\underline{x}+(2+j5)\underline{y} &= 7-j23 \end{aligned}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 366:

Lösen Sie folgende Gleichung in den Komplexen Zahlen.

$$\frac{x-3+2i}{x+i}=\frac{x-2+5i}{x+1+2i}$$

Aufgabe 367:

Lösen Sie folgende Gleichung in den komplexen Zahlen. Bestimmen Sie auch eine Definitionsmenge.

$$\frac{\mathrm{x}-3+2\mathrm{i}}{\mathrm{x}+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{x}-2+5\mathrm{i}}{\mathrm{x}+1+2\mathrm{i}}$$

Aufgabe 368:

Lösen Sie folgendes LGs in den komplexen Zahlen.

$$(-5+3\mathrm{i})\mathrm{x}+(2+\mathrm{i})\mathrm{y}=-19-12\mathrm{i}$$

$$(2-\mathrm{i})\mathrm{x}+(2+4\mathrm{i})\mathrm{y}=-3-\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned}(-5+j3)\underline{x}+(2+j)\underline{y} &= -19-j12\\ (2-j)\underline{x}+(2+j4)\underline{y} &= -3-j\end{aligned}$$

Aufgabe 369:

Berechnen Sie in den komplexen Zahlen z. Bringen Sie das Ergebnis in die Form a+bi.

a) (3)

$\mathbb{D}=\mathbb{C}$

$2-9\mathrm{i}=(1-2\mathrm{i})(\mathrm{z}-3+4\mathrm{i})$

b) (3)

$\mathbb{D}=\mathbb{C}$

$$\frac{3-2i}{z}=5+\mathrm{i}$$

c) (4)

$\mathbb{D}=\mathbb{C}$

$$\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{z}}+\frac{20}{4+3\mathrm{i}}=3-i$$

Lineare Optimierung (grafische Lösung)

Aufgabe 370:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 371:

Gegeben ist das LOP

Z: Min $z=3x_1+4x_2$

NB:
$$2x_1 + 5x_2 \ge 25$$
$$4x_1 + 4x_2 \ge 32$$
$$6x_1 + 2x_2 \ge 24$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 372:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 373:

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 \le 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 374:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 375:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 376:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=8x_1+4x_2$

NB:
$$3x_1 + 5x_2 \le 32$$
$$4x_1 + 4x_2 \le 32$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 28$$

Aufgabe 377:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=2x_1+3x_2$

NB:
$$6x_2 \le 30$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 36$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 38$$

Aufgabe 378:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1 - x_2 \geq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \geq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 379:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1 - x_2 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 380:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=-3x_1+2x_2$

NB:
$$x_1 - x_2 \leq 3$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 381:

Lösen Sie folgendes LOP.

a) Max. $F(x,y) = 4x + 3y$

$$\begin{aligned} x + 3y &\leq 9 \\ -x + 2y &\geq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

b) Max. $F(x,y) = x + y$

$$\begin{aligned} 5x + y &\leq 10 \\ x + 2y &\leq 6 \\ x - y &\geq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Max. $F(x,y) = x - y$

$$\begin{aligned} 2x - y &\leq 0 \\ x + 2y &\leq 1 \\ 2x + y &\geq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

d) Max. $F(x,y) = 2x + y$

$$\begin{aligned} -x + y &\leq 1 \\ x + 3y &\geq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 382:

Ein Gärtner möchte einen 100 qm großen Garten mit Rosen und/oder Nelken bepflanzen.

Er möchte max. 720 Euro an Arbeits- und Materialkosten investieren und höchstens 60qm für Nelken reservieren.

Folgende Tabelle enthält weitere Daten des Problems.

	Rosen	Nelken
Arbeits- und Materialkosten (in Euro/qm)	6	9
Gewinn	1	2

Wie viele qm sollen mit jeder Sorte bepflanzt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird?

Aufgabe 383:

Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten.

Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 Euro je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 Euro je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 Euro für die Zelte ausgeben.

Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?

Aufgabe 384:

Eine kleine Motoradfabrik baut und verkauft die beiden Typen Mofa und Lofa. Während die Produktionskosten für ein Mofa 5.000 Euro betragen, belaufen sie sich bei der Lofa nur auf 3.000 Euro pro Stück. Insgesamt können pro Tag nicht mehr als 30.000 Euro für die Produktion ausgegeben werden.

Für die Fertigung der Mofas rechnet die Arbeitsvorbereitung mit einer Arbeitszeit von 30 Stunden, für die der Lofas setzt sie hingegen 60 Stunden an. Pro Tag stehen maximal 480 Arbeitsstunden zur Verfügung. Vom Mofa sollen pro Tag maximal 3 Stück gefertigt werden.

Marktanalysen zeigen, dass pro Tag mindestens 4 Lofas abgesetzt werden müssen und unbegrenzt Mofas abgesetzt werden können. Der Verkaufspreis der Lofas liegt bei 5.000 Euro, der der Mofas bei 10.000 Euro pro Stück.

Wie viel Mofas und Lofas sollen täglich produziert werden, um das Umsatzmaximum zu erreichen? Wie groß ist dieser maximale Umsatz?

Aufgabe 385:

Eine Tischlerei erhält einen Auftrag, für den unterschiedliche Holzplatten mit der folgenden Stückzahl zu verwenden sind:

10 Platten der Größe A,

12 Platten der Größe B,

8 Platten der Größe C,

4 Platten der Größe D.

Die Tischlerei bezieht dazu aus einem Sägewerk zwei Holzplattentypen I und II, die auf vorgegebene Weise (Abbildung 1) zu zerschneiden sind.

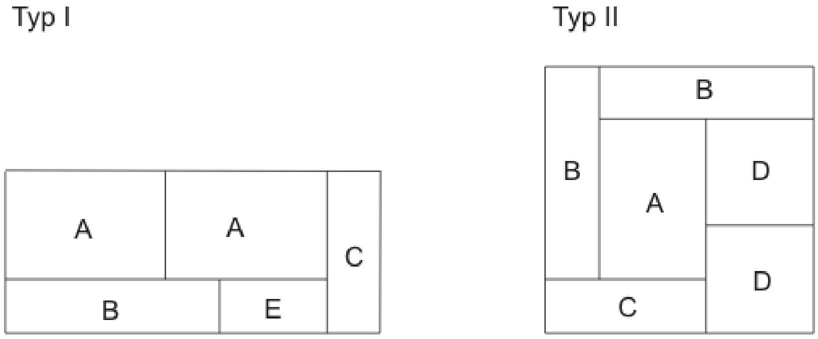


Abbildung 1: Zerlegung der Holzplattentypen.

Der Preis einer Platte des Typs I beträgt 300 Euro und der einer Platte des Typs II 200 Euro. Aus Lager- und Verkaufsgründen sollten nicht mehr als 16 Platten der Größe D und nicht mehr als 5 Platten der Größe E gelagert werden.

Es ist zu ermitteln, wie viel Platten I und II gekauft werden müssen, damit der Auftrag ausgeführt werden kann und der Gesamteinkaufspreis der Platten so gering wie möglich ausfällt.

Aufgabe 386:

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit zwei tiermehlfreien Futtersorten A und B (z.B. Rüben und Heu). Die Tagesrationen eines Rindes müssen die Nährstoffe 1,2 und 3 im Umfang von mindestens 6,12 bzw. 4 g enthalten.

Die Nährstoffgehalte in g pro kg und Preise in GE pro kg der beiden Sorten zeigt die folgende Tabelle:

	Sorte A	Sorte B	Tagesbedarf
Nährstoff 1	2	1	6
Nährstoff 2	2	4	12
Nährstoff 3	0	4	4
Preis in GE/kg	5	7	

Wie viele kg von Sorte A bzw. B muss jede Tagesration enthalten, wenn sie unter Einhaltung der Nährstoffbedingungen die Kosten minimal sein sollten.

Aufgabe 387:

Ein Hersteller produziert zwei Sortimente eines Artikels, der aus Teilen besteht, die geschnitten, zusammengebaut und fertig gestellt werden müssen.

Der Unternehmer weiß, dass er so viele Artikel verkaufen kann, wie er produziert. Sortiment 1 benötigt 25 Minuten zum Zerschneiden, 60 Minuten zum Zusammenbau und 68 Minuten, um es verkaufsfertig zu machen. Es erzielt 30 Euro Gewinn. Für Sortiment 2 braucht man 75 Minuten zum Schneiden, 60 Minuten für den Zusammenbau und 34 Minuten, zur Fertigstellung. Dieses Sortiment erzielt einen Gewinn von 40 Euro. Es stehen nicht mehr als 450 Minuten zum, Zerschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau und 476 Minuten zum Fertigstellen pro Tag zur Verfügung.

Nun stellt sich dem Unternehmer die Frage, wie viele Artikel von jedem Sortiment jeden Tag produziert werden müssen, um den Gewinn zu maximieren.

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 388:

Ein Unternehmen gewinnt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) zwei Mineralien (M_1,M_2). Eine Tonne M_1 wird aus 6 Tonnen R_1, 4 Tonnen R2 und 4 Tonnen R3 hergestellt; eine Tonne M_2 ergibt sich aus 3 Tonnen R_1, 4 Tonnen R_2 und 12 Tonnen R_3. Pro Woche stehen maximal 60 Tonnen R_1, 44 Tonnen R_2 und 84 Tonnen R_3 zur Verfügung. Eine Tonne M_1 bzw. M_2 wirft einen Gewinn von 200 € bzw. 300 € ab.

a) Lösen Sie dieses Problem grafisch. (6,5)

b) Was würde sich für das Optimum ergeben, wenn zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen verlangt würde, dass von M_2 mindestens 8 Tonnen erzeugt werden müssten?

Aufgabe 389:

Bestimmen Sie für folgendes LOP-Problem die minimale Lösung. Verwenden Sie hierzu die grafische Lösung. Zeichnen Sie dort die gefundene Lösung ein. Die x_1-Werte und die x_2-Werte brauchen Sie für die minimale Lösung nicht zu bestimmen.

Z:

$2x_1 - x_2 \rightarrow \text{Min}$

NB:

$2x_1 + 6x_2 \leq 10$

$-x_1 - x_2 \leq 2$

$3x_1 - 6x_2 \leq 9$

$-4x_1 + 5x_2 \leq 6$

NNB:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 390:

Eine Schulklasse mit 29 Schülern und 6 Begleitpersonen (mit Führerschein) möchte einen Ausflug machen. Um zu ihrem Ausflugsziel zu kommen, können sie Kleinbusse mit 8 Sitzplätzen bzw. Autos mit 5 Sitzplätzen mieten, die von den Begleitpersonen gefahren werden sollen. Die Busse kosten 50 € am Tag, die Autos 20 € am Tag.

Wie viele Busse bzw. Autos müssen die Schüler mieten, um möglichst preisgünstig den Ausflug machen zu können?

Aufgabe 391:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der grafischen Lösungsvariante.

$\mathrm{Z}: \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \rightarrow \min$

Nebenbedingungen:

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 10$

$\mathrm{x}_1 \leq 6$

$\mathrm{x}_2 \leq 5$

$5x_1 + 5x_2 \geq 25$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lineare Optimierung (rechnerische Lösung)

Aufgabe 392:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=3x_1+2x_2$

NB:
$$2x_1+x_2 \leq 100$$
$$x_1+x_2 \leq 80$$
$$x_1 \leq 40$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 393:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1+x_2 \leq 15$$
$$x_2 \leq 12$$
$$3x_1+2x_2 \leq 36$$
$$x_1 \leq 10$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 394:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB:
$$x_1 \leq 6$$
$$2x_1+x_2 \leq 16$$
$$x_1+4x_2 \leq 36$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 395:

Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten. Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 Euro je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 Euro je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 Euro für die Zelte ausgeben.

Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?

Aufgabe 396:

Lösen Sie folgende Aufgaben auf die rechnerische Variante.

a)

$$
\begin{aligned}
z = 21x_1 + 24x_2 &-> \max \\
3x_1 + x_2 &\leq 33 \\
x_1 + x_2 &\leq 13 \\
5x_1 + 8x_2 &\leq 80 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
z = 40x_1 + 30x_2 &-> \max \\
x_1 + 3x_2 &\leq 16 \\
2x_1 + x_2 &\leq 17 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 23 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 18x_2 &-> \max \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 33 \\
x_1 + x_2 &\leq 15 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 27 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
z = 18x_1 + 6x_2 &-> \max \\
-4x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
-x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\
x_1 - 4x_2 &\leq 4 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 397:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in rechnerischen Form.

$Z: 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-2x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 398:

Berechnen Sie die optimale Lösung folgendes Optimierungsproblem mit der rechnerischen Lösungsvariante nach Simplex (nicht in Tabellenform).

Z:

$3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

NB:

$x_1 + x_2 \leq 70$

$2x_1 + 3x_2 \leq 180$

$5x_1 + 3x_2 \leq 300$

NNB:

$x_1; x_2 \geq 0$

Lineare Optimierung (Pivot-Tabelle)

Aufgabe 399:

Ein Lackierbetrieb soll Stühle lackieren. Es sollen zwei verschiedene Farbversionen (hell und dunkel) hergestellt werden. Insgesamt stehen 20 Stühle zur Verfügung. Von der hellen Version können höchstens 12 Stühle hergestellt werden. Für die helle Version werden 2 Arbeitsstunden benötigt, für die dunkle Version dagegen nur 1 Arbeitsstunde. Insgesamt stehen 30 Arbeitsstunden zur Verfügung. Beim anschließenden Verkauf bringt ein Stuhl der dunklen Version 75.00 €, ein Stuhl der hellen Version 100.00 € Gewinn.

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode.

Aufgabe 400:

Ein Betrieb stellt ein Produkt nach drei verschiedenen Verfahren A, B, C her. Die folgende Tabelle zeigt die erforderlichen Einsatzmengen pro Produkteinheit für die einzelnen Verfahren und die maximal verfügbaren Einsatzmengen:

	A	B	C	Verfügbare Einsatzmengen
Rohstoff [kg]	10	8	5	500
Produktionszeit [h]	5	10	10	400
Lagerraum [ME_r]	0	5	10	600

Die Gewinne bei der Produktion durch die Verfahren A, B und C betragen 20 €, 25 € bzw. 15 €.

Es soll ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm aufgestellt werden. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode. (rechnerische Simplexmethode)

Aufgabe 401:

Eine Unternehmung produziere zwei Produkte ,P_1 und P_2. Dazu sei ein einziger Produktionsfaktor verwendet, dessen verfügbare Menge 10 ME beträgt. Zur Herstellung einer Einheit des Produktes P_1 bzw. P_2 werden 1 ME bzw. 2 ME des Produktionsfaktors benötigt.

Von den beiden Produkten sollen insgesamt mindestens 2 ME hergestellt werden

Der Gewinn pro ME des Produkts P_1 bzw. P_2 beträgt 3 GE bzw. 2 GE.

Gesucht ist das Produktionsprogramm mit maximalem Gewinn. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Aufgabe 402:

Ein Betrieb stellt zwei Artikel A_1 und A_2 auf den Maschinengattungen M_1 und M_2 her.

Außerdem müssen gelernte Montagekräfte eingesetzt werden. Die vorhandenen Informationen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst:

	A_1	A_2	Kapazität pro Tag
M_1	5	2	24 h
M_2	1	5	24 h
Montagegruppe	6	6	36 h
Gewinn/Stück in €	500	800	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das entsprechende Modell dar.
2. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Aufgabe 403:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$Z: x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 404:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$\mathrm{Z}: \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 1$

$0{,}5\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 \leq 0$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 405:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$\mathrm{Z}: 3\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 2$

$-\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \leq 7$

$\mathrm{x}_1 \leq 6$

$\mathrm{x}_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 406:

Eine Firma stelle 2 verschiedene Produkte her. Es stehen 3 Maschinen A, B, C zur Verfügung. Maschine A hat eine maximale monatliche Laufzeit (Kapazität) von 170 Stunden, Maschine B von 150 Stunden und Maschine C von 180 Stunden.

Eine Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 liefert einen Deckungsbeitrag von 300 Euro, eine ME von Produkt 2 dagegen 500 Euro.

Fertigt man 1 ME von Produkt 1, benötigt man dafür zunächst 1 Stunde die Maschine A und danach 1 Stunde die Maschine B.

1 ME von Produkt 2 belegt nacheinander 2 Stunden Maschine A, 1 Stunde Maschine B und 3 Stunden Maschine C.

Die Firma möchte den Deckungsbeitrag maximieren:

Eventuelle Fixkosten sind unabhängig von der Produktionsmenge und können daher einfach am Ende der Berechnung vom Gesamtdeckungsbeitrag abgezogen werden, um den Gewinn zu erhalten.

Aufgabe 407:

Eine Bergwerksgesellschaft besitzt zwei verschiedene Gruben (bzw. Minen), in denen bestimmte Erzarten gefördert werden. Die Gruben befinden sich in verschiedenen Landesteilen und verfügen über unterschiedliche Kapazitäten. Nach dem Brechen werden bei Erz drei Klassen unterschieden, grob- mittel- und feinkörniges Erz.

Nach jeder Erzart besteht eine gewisse Nachfrage. Die Bergwerksgesellschaft konzentriert sich darauf, einem Hüttenwerk mindestens 12t grob-, 8t mittel- und 24t feinkörniges Erz zu liefern.

Die Betriebskosten für die Gruben sind 200 GE (Geldeinheiten) pro Tag bei Grube 1 und 160 GE bei Grube 2. In der Grube 1 werden dabei pro Tag 6t grob-, 2t mittel- und 4t feinkörniges Erz gefördert, während die zweite Grube eine tägliche Leistung von 2t grob-, 2t mittel- und 12t feinkörnigem Erz hat.

Wie viele Tage sollte jede der Gruben pro Woche befahren werden, um die Aufträge der Firma auf wirtschaftliche Weise zu erfüllen?

Lösen Sie dieses Problem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

Aufgabe 408:

Ein Betrieb kann sein Produkt nach zwei Verfahren aus Grundstoffen A und B [t] sowie Energie W [kWh] herstellen. Für 1 t des Produktes wird benötigt:

	1. Verfahren	2. Verfahren	verfügbar
A	4	1	20
B	0	4	40
W	2	3	12

Die Gesamtproduktion soll maximiert werden. Lösen Sie dieses Problem mit dem Simplexalgorithmus in Pivot-Tabellenform

Aufgabe 409:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

Zielfunktion:

$Z: 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 4$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 6$

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 8$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Aufgabe 410:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$\mathrm{Z}: 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 8$

$3\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 12$

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 10$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 411:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$\mathrm{Z}: -\mathrm{x}_1 - 4\mathrm{x}_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$2\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \geq 3$

$-2\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \geq 2$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Aufgabe 412:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$\mathrm{Z}: \mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$\mathrm{x}_1 \leq 6$

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 4$

$2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 16$

$x_1 + 4x_2 \leq 36$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 413:

Ein Lackierbetrieb soll Stühle lackieren. Es sollen zwei verschiedene Farbversionen (hell und dunkel) hergestellt werden. Insgesamt stehen 20 Stühle zur Verfügung. Von der hellen Version können höchstens 12 Stühle hergestellt werden. Für die helle Version werden 2 Arbeitsstunden benötigt, für die dunkle Version dagegen nur 1 Arbeitsstunde. Insgesamt stehen 30 Arbeitsstunden zur Verfügung. Beim anschließenden Verkauf bringt ein Stuhl der dunklen Version 75.00 €, ein Stuhl der hellen Version 100.00 € Gewinn.

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode.

Aufgabe 414:

Ein Betrieb stellt ein Produkt nach drei verschiedenen Verfahren A, B, C her. Die folgende Tabelle zeigt die erforderlichen Einsatzmengen pro Produkteinheit für die einzelnen Verfahren und die maximal verfügbaren Einsatzmengen:

	A	B	C	Verfügbare Einsatzmengen
Rohstoff [kg]	10	8	5	500
Produktionszeit [h]	5	10	10	400
Lagerraum [ME_r]	0	5	10	600

Die Gewinne bei der Produktion durch die Verfahren A, B und C betragen 20 €, 25 € bzw. 15 €.

Es soll ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm aufgestellt werden. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode. (rechnerische Simplexmethode)

Aufgabe 415:

Eine Unternehmung produziere zwei Produkte ,P_1 und P_2. Dazu sei ein einziger Produktionsfaktor verwendet, dessen verfügbare Menge 10 ME beträgt. Zur Herstellung einer Einheit des Produktes P_1 bzw. P_2 werden 1 ME bzw. 2 ME des Produktionsfaktors benötigt.

Von den beiden Produkten sollen insgesamt mindestens 2 ME hergestellt werden

Der Gewinn pro ME des Produkts P_1 bzw. P_2 beträgt 3 GE bzw. 2 GE.

Gesucht ist das Produktionsprogramm mit maximalem Gewinn. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Aufgabe 416:

Ein Betrieb stellt zwei Artikel A_1 und A_2 auf den Maschinengattungen M_1 und M_2 her.

Außerdem müssen gelernte Montagekräfte eingesetzt werden. Die vorhandenen Informationen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst:

	A_1	A_2	Kapazität pro Tag
M_1	5	2	24 h
M_2	1	5	24 h
Montagegruppe	6	6	36 h
Gewinn/Stück in €	500	800	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das entsprechende Modell dar.
2. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Aufgabe 417:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$\mathrm{Z}: \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 1$

$\mathrm{x}_1 \leq 6$

$\mathrm{x}_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 418:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$Z: x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$0{,}5x_1 - x_2 \leq 0$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 419:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$Z: 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-2x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 420:

Eine Firma stelle 2 verschiedene Produkte her. Es stehen 3 Maschinen A, B, C zur Verfügung. Maschine A hat eine maximale monatliche Laufzeit (Kapazität) von 170 Stunden, Maschine B von 150 Stunden und Maschine C von 180 Stunden.

Eine Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 liefert einen Deckungsbeitrag von 300 Euro, eine ME von Produkt 2 dagegen 500 Euro.

Fertigt man 1 ME von Produkt 1, benötigt man dafür zunächst 1 Stunde die Maschine A und danach 1 Stunde die Maschine B.

1 ME von Produkt 2 belegt nacheinander 2 Stunden Maschine A, 1 Stunde Maschine B und 3 Stunden Maschine C.

Die Firma möchte den Deckungsbeitrag maximieren:

Eventuelle Fixkosten sind unabhängig von der Produktionsmenge und können daher einfach am Ende der Berechnung vom Gesamtdeckungsbeitrag abgezogen werden, um den Gewinn zu erhalten.

Aufgabe 421:

Eine Bergwerksgesellschaft besitzt zwei verschiedene Gruben (bzw. Minen), in denen bestimmte Erzarten gefördert werden. Die Gruben befinden sich in verschiedenen Landesteilen und verfügen über unterschiedliche Kapazitäten. Nach dem Brechen werden bei Erz drei Klassen unterschieden, grob- mittel- und feinkörniges Erz.

Nach jeder Erzart besteht eine gewisse Nachfrage. Die Bergwerksgesellschaft konzentriert sich darauf, einem Hüttenwerk mindestens 12t grob-, 8t mittel- und 24t feinkörniges Erz zu liefern.

Die Betriebskosten für die Gruben sind 200 GE (Geldeinheiten) pro Tag bei Grube 1 und 160 GE bei Grube 2. In der Grube 1 werden dabei pro Tag 6t grob-, 2t mittel- und 4t feinkörniges Erz gefördert, während die zweite Grube eine tägliche Leistung von 2t grob-, 2t mittel- und 12t feinkörnigem Erz hat.

Wie viele Tage sollte jede der Gruben pro Woche befahren werden, um die Aufträge der Firma auf wirtschaftliche Weise zu erfüllen?

Lösen Sie dieses Problem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

Aufgabe 422:

Ein Betrieb kann sein Produkt nach zwei Verfahren aus Grundstoffen A und B [t] sowie Energie W [kWh] herstellen. Für 1 t des Produktes wird benötigt:

	1. Verfahren	2. Verfahren	verfügbar
A	4	1	20
B	0	4	40
W	2	3	12

Die Gesamtproduktion soll maximiert werden. Lösen Sie dieses Problem mit dem Simplexalgorithmus in Pivot-Tabellenform

Aufgabe 423:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

Zielfunktion:

$Z: 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 4$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 6$

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 8$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Aufgabe 424:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$\mathrm{Z}: 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \to \max$

Nebenbedingungen:

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 8$

$3\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 12$

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 10$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 425:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$\mathrm{Z}: -\mathrm{x}_1 - 4\mathrm{x}_2 \to \max$

Nebenbedingungen:

$2\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \geq 3$

$-2\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \geq 2$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Aufgabe 426:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$\mathrm{Z}: \mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 \to \max$

Nebenbedingungen:

$\mathrm{x}_1 \leq 6$

$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 4$

$2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 16$

$x_1 + 4x_2 \leq 36$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 427:

Der Waschzuber KG stellt Handtücher, Badetücher und Duschhandtücher her. Für die Herstellung werden drei Maschinen (A, B und C) benötigt.

Die Bearbeitungszeit für ein Handtuch beträgt 2 Minuten auf Maschine A, 6 Minuten auf Maschine B und 1 Minute auf Maschine C.

Die Bearbeitungszeit für ein Badetuch beträgt 2 Minuten auf Maschine A, 8 Minuten auf Maschine B und 2 Minuten auf Maschine C.

Die Bearbeitungszeit eines Duschhandtuches beträgt 1 Minute auf Maschine A, 2 Minuten auf Maschine B und 1 Minute auf Maschine C.

Pro Woche kann Maschine A maximal 1400 Minuten betrieben werden, Maschine B 4400 Minuten und Maschine C 1000 Minuten.

Ein Handtuch wird für 12 Euro, ein Badetuch für 15 Euro und ein Duschhandtuch für 5 Euro verkauft.

Wie viele Hand-/Bade-/Duschhandtücher müssen produziert werden, damit der Umsatz maximal wird?

Lösung dieses Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus in Pivot-Tabellenform.

Aufgabe 428:

Ein Landwirt besitzt einen Stall für 10 Kühe und 20 ha Land. Pro Jahr kann er 2400 Arbeitsstunden (Ah) aufwenden. Um eine Kuh zu unterhalten benötigt er pro Jahr 0,5 ha Land, sowie 200 Ah. Der Anbau von 1 ha Weizen erfordert 100 Ah.

Durch eine Kuh erzielt er im Jahr 350,- € und 1 ha Weizen bringt ihm im gleichen Zeitraum260,- € Gewinn.

In diesem Zusammenhang soll die Frage beantwortet werden, mit wie vielen Kühen und wie viel ha Weizen sein Gewinn maximal wird? Ermitteln Sie die Lösung anhand des Simplex-Algorithmus in Pivot-Darstellung.