Aufgabensamm-lung

Mathematik I

Wirtschaftsingenieurwesen

DHBW Stuttgart

Campus Horb

Dozent

Dipl. Math. (FH) Roland Geiger

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis 3
Allgemeine Regeln 5
Lösungen zu den Aufgaben....6
Internet 6
QR-Code Internet 6
YouTube 6
QR-Code YouTube....6
Matrizen 7
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....36
Determinanten....50
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....68
Lineare Gleichungssysteme 75
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....112
Eigenschaften von Funktionen 117
Trigonometrische Gleichungen....134
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....149
Vektorrechnung 151
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....333
Ableitungen 351
Ableitungen von gebrochen rationalen Funktionen 351
Ableitungen von Wurzelfunktionen 359
Ableitungen von Exponentialfunktionen 364
Ableitungen von Logarithmusfunktionen 372
Kurvendiskussion 379
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....444
Erstellen von Funktionen Anhand von Bedingungen....449
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....467
Vermischtes 472
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....506
Funktionsscharen....518
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....520
Extremwertaufgaben....522
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben....558

Komplexe Zahlen 565
Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben 617

Keine Handys, Smartphones, Tablets, Notebooks, MP3-Player, und sonstige elektronischen Geräte.

(Sollten auch nicht auf dem Tisch liegen)

Sollten Sie unbedingt kommunizieren müssen, so gehen Sie freiwillig aus dem Raum oder Sie bekommen von mir eine Pause zugeteilt, in der Sie in Ruhe Ihre Kommunikation durchführen können.

Lösungen zu den Aufgaben

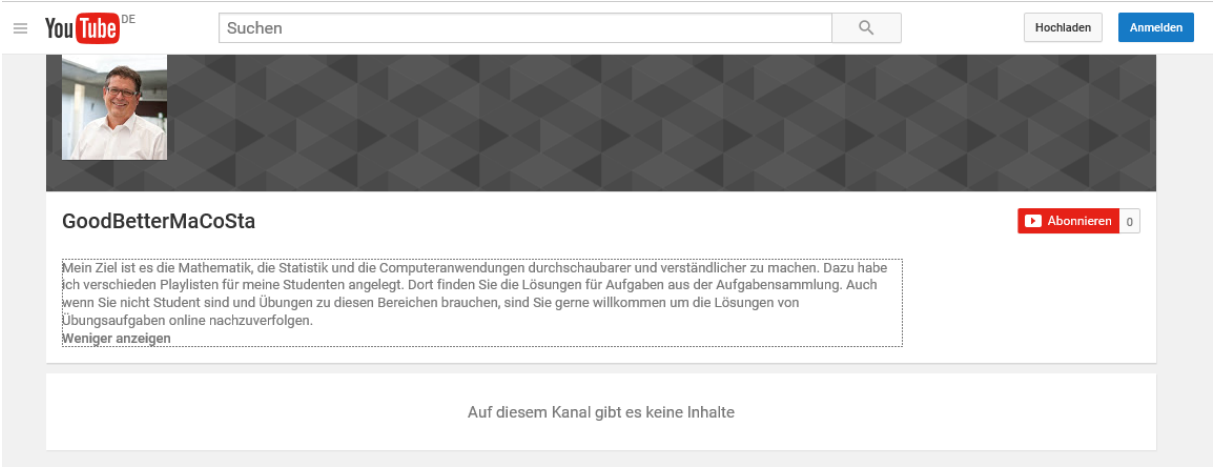
Internet

http://www.cs-geiger.de/wiw.htm

QR-Code Internet

YouTube

http://www.youtube.com/channel/UCro4ldWf20euH8u1SXU3l-g



QR-Code YouTube

Matrizen

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Spur der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$\mathrm{sp(A)} = 10$

Aufgabe 2:

Transponieren Sie die Matrix A zu A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Addieren Sie folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{typgleiche Matrizen}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -3+0 & 2+3 & 0+2 & 1-3 \\ 7+2 & 5+0 & 4-1 & 0+4 \\ -1+1 & -2+8 & 3+7 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 & -2 \\ 9 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Aufgabe 4:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3\\ 9 & 10 & 8 & 12 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Bilden Sie die folgenden Operationen:

a) A+B; b) A+C; c) B+A; d) C+A; e) B+C; f) C+B; g) A-B; h) A-C; i) B-A

j) C-A; k) B-C; l) C-B

Lösung:

a)
$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3\\ 9 & 10 & 8 & 12 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 7 & 8 & 9 & 10 & 5\\ 12 & 13 & 11 & 15 & 3\end{pmatrix}$$

b) $$A+C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3\\ 9 & 10 & 8 & 12 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$$

c)
$$B+A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3\\ 9 & 10 & 8 & 12 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 7 & 8 & 9 & 10 & 5\\ 12 & 13 & 11 & 15 & 3\end{pmatrix}$$

d) $$C+A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3\\ 9 & 10 & 8 & 12 & 0\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$$

e) $B+C=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

f) $C+B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

g) $A-B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&1&2&3&-1\\3&4&5&6&1\\6&7&5&9&-3\end{pmatrix}$

h) $A-C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

i) $B-A=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&-1&-2&-3&1\\-3&-4&-5&-6&-1\\-6&-7&-5&-9&3\end{pmatrix}$

j) $C-A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\5&6&7&8&3\\9&10&8&12&0\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

k) $B-C=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\text{geht nicht}$

I) $C - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{geht nicht}$

Aufgabe 5:

Multiplizieren Sie die Matrix A mit dem Skalar λ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 11 & 15 & 21 \\ 27 & 30 & 34 \\ 35 & 36 & 40 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2$$

Lösung:

$$A * \lambda = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 18 \\ 22 & 30 & 42 \\ 54 & 60 & 68 \\ 70 & 72 & 80 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6:

Es sind folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Rechenoperationen:

a) $A \cdot B$

b) $A \cdot C$

c) $B \cdot C$

d) $B \cdot A$

e) $C \cdot A$

f) $C \cdot B$

Lösung:

a) $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5+0 & 1+6 \\ 10+0 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot C$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2+9 \\ 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

c) $B \cdot C$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10+3 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d) $B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5+2 & 15+4 \\ 0+4 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

e) $C \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ geht nicht

f) $C \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ geht nicht

Aufgabe 7:

Führen Sie folgende Rechenoperation A^2 mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Bedingung:

$\text{Typ}(3,3) \cdot \text{Typ}(3,3)$

Kann multipliziert werden.

			1	2	3
			3	2	1
			2	3	1
1	2	3	13	15	8
3	2	1	11	13	12
2	3	1	13	13	10

Aufgabe 8:

Berechnen Sie die Matrizenprodukte AB, BA, A^TA, AA^T mit:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche besondere Eigenschaft besitzen die Matrizen A^TA und AA^T?

Lösung:

$AB =$

A \ B	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 \\ 15 & 3 & -3 \\ 26 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

z.B.: $5 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-8) = 16$

$BA =$

B \ A	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 & 17 & 11 \\ 2 & 3 & 3 \\ -36 & -22 & -16 \end{pmatrix}$

z.B.: $(-8) \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -36$

$A^TA =$

A^T \ A	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 42 & 23 & 9 \\ 23 & 13 & 6 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

z.B.: $3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 13$

$AA^T =$

A \ A^T	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 38 & 3 & 26 \\ 3 & 2 & 4 \\ 26 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

z.B.: $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 20$

AA^T und A^TA sind symmetrische Matrizen.

Aufgabe 9:

Gegeben sind die 3-reihigen Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie mit dem *Falk-Schema* die folgenden Produkte:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Produkte auf zwei *verschiedene* Arten:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}), \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}), \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

Sind die bekannten *Binomischen Formeln* auf Matrizen anwendbar?

Lösung:

a) Mit dem *Falk-Schema* erhalten wir:

		B		
		2	1	1
		1	2	−1
		0	1	0
A	1	4	−1	6	8	−3
	2	0	3	4	5	2
	1	2	1	4	6	−1

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

		A		
		1	4	−1
		2	0	3
		1	2	1
B	2	1	1	5	10	2
	1	2	−1	4	2	4
	0	1	0	2	0	3

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Erwartungsgemäß ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (die Matrizenmultiplikation ist *nicht* kommutativ).

		A		
		1	4	−1
		2	0	3
		1	2	1
A	1	4	−1	8	2	10
	2	0	3	5	14	1
	1	2	1	6	6	6

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$

		B		
		2	1	1
		1	2	−1
		0	1	0
B	2	1	1	5	5	1
	1	2	−1	4	4	−1
	0	1	0	1	2	−1

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2$

b) Die Matrizenprodukte (Potenzen) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$, $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$ und $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ dürfen wir nicht nach den *Binomischen Formeln* berechnen, da die Matrizenmultiplikation eine *nicht-kommutative* Rechenoperation ist:

$$(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 \pm 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}^2 \quad \text{und} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$$

Vielmehr gilt:

$$(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}\pm\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\pm\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 \pm \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \pm \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}^2$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}^2$$

Am einfachsten erhält man diese Produkte, in dem man zunächst die Matrizen $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ bildet und dann mit dem *Falk-Schema* die gesuchten Produkte berechnet:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1&4&-1\\2&0&3\\1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&5&0\\3&2&2\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1&4&-1\\2&0&3\\1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&3&-2\\1&-2&4\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Berechnung der Matrizenprodukte $(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})^2$

				$\mathbf{A}+\mathbf{B}$		
			3	5	0
			3	2	2
			1	3	1
$\mathbf{A}+\mathbf{B}$	3	5	0	24	25	10
	3	2	2	17	25	6
	1	3	1	13	14	7

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$

				$\mathbf{A}-\mathbf{B}$		
			−1	3	−2
			1	−2	4
			1	1	1
$\mathbf{A}-\mathbf{B}$	−1	3	−2	2	−11	12
	1	−2	4	1	11	−6
	1	1	1	1	2	3

$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$

Kontrollrechnung:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix}8&2&10\\5&14&1\\6&6&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8&-3\\4&5&2\\4&6&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&10&2\\4&2&4\\2&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5&1\\4&4&-1\\1&2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24&25&10\\17&25&6\\13&14&7\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix}8&2&10\\5&14&1\\6&6&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&8&-3\\4&5&2\\4&6&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&10&2\\4&2&4\\2&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5&1\\4&4&-1\\1&2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-11&12\\1&11&-6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

Aufgabe 10:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 wird das Material M1 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material 1 wird im ersten Quartal benötigt?

Lösung:

$$A_{(1,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_{(E,1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = 0*8 + 1*15 + 3*16 = 63$$

Es werden also im ersten Quartal 63 Einheiten des Materials 1 benötigt.

Aufgabe 11:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1, E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

Es sollen im ersten Quartal folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16

Wie viel Material wird im ersten Quartal benötigt?

Lösung:

$$\mathrm{A}_{(\mathrm{M,E})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}^{\mathrm{T}}{}_{(\mathrm{E,1})} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} * \mathrm{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0*8+1*15+3*16 = 63 \\ 1*8+1*15+1*16 = 39 \\ 2*8+0*15+4*16 = 80 \\ 1*8+3*15+1*16 = 69 \end{matrix}$$

Es werden somit im ersten Quartal folgende Einheiten der Materialien benötigt:

¤	Material1¤	Material2¤	Material3¤	Material4¤	¤
Quartal1¤	63¤	39¤	80¤	69¤	¤

Aufgabe 12:

Für die Produktion der Erzeugnisse E1,E2, E3 werden die Materialien M1, M2, M3, M4 wie folgt benötigt:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Material 1	0	1	3
Material 2	1	1	1
Material 3	2	0	4
Material 4	1	3	1

In den Quartalen des Jahres sollen folgende Mengen produziert werden:

	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	Erzeugnis 3
Quartal 1	8	15	16
Quartal 2	10	20	20
Quartal 3	12	24	25
Quartal 4	10	18	20

Wie viel Einheiten der 4 Materialien werden in den 4 Quartalen benötigt?

Lösung:

$$A_{(M,E)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T_{(E,Q)} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 10 \\ 15 & 20 & 24 & 18 \\ 16 & 20 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A * B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 10 \\ 15 & 20 & 24 & 18 \\ 16 & 20 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Bei der Multiplikation zweier Matrizen wird jede Zeile der ersten Matrix mir jeder Spalte der zweiten Matrix multipliziert. Die Produkte werden addiert. Dabei geht man nach ff. Rechenschema vor:

¤	¤	¤	8¤	10¤	12¤	10¤	¤
¤	¤	¤	15¤	20¤	24¤	18¤	¤
¤	¤	¤	16¤	20¤	25¤	20¤	¤
0¤	1¤	3¤	63¤	80¤	99¤	78¤	¤
1¤	1¤	1¤	39¤	50¤	61¤	48¤	¤
2¤	0¤	4¤	80¤	100¤	124¤	100¤	¤
1¤	3¤	1¤	69¤	90¤	109¤	84¤	¤

$0*8+1*15+3+16=63$ $0*10+1*20+3*20=80$

$1*8+1*15+1*16=39$ $1*10+1*20+1*20=50$

$2*8+0*15+4*16=80$ $2*10+0*20+4*20=100$

$1*8+3*15+1*16=69$ $1*10+3*20+1*20=90$

usw.

Es werden in den Quartal folgende Einheiten der Materialien benötigt:

¤	Material1¤	Material2¤	Material3¤	Material4¤	¤
Quartal·1¤	63¤	39¤	80¤	69¤	¤
Quartal·2¤	80¤	50¤	100¤	90¤	¤
Quartal·3¤	99¤	61¤	124¤	109¤	¤
Quartal·4¤	78¤	48¤	100¤	84¤	¤

Aufgabe 13:

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus die Endprodukte P_1, P_2 und P_3 her.

Erstellen Sie folgende Matrizen.

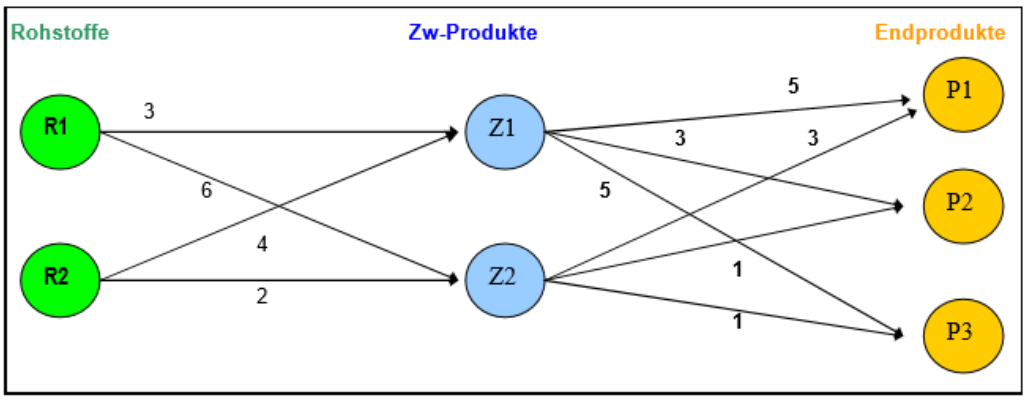
a) Die Rohstoff–Zwischenprodukt-Matrix

b) Die Zwischenprodukt–Endprodukt-Matrix

c) Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix

d) Ein Kunde bestellt 123 P_1, 345 P_2 und 234 P_3. Zusätzlich benötigt er noch 98 Z_1 und 114 Z_2. Wieviel Rohstoffe muss er bestellen um diesen Auftrag bearbeiten zu können?

e) Wie groß sind seine gesamten Ausgaben für diese Rohstoffe, wenn er R_1 für 13 Euro und R_2 für 21 Euro einkaufen kann?



Lösung:

a) Rohstoff–Zwischenprodukt-Matrix:

$$A_{R,Z} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

Zwischenprodukt–Endprodukt-Matrix:

$$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

Rohstoff-Endprodukt-Matrix:

$$C_{R,E} = A_{R,Z} \cdot B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 15 & 21 \\ 26 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

d)

$$C_{R,E} \cdot D_{E,B} = \begin{pmatrix} 33 & 15 & 21 \\ 26 & 14 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 345 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14148 \\ 13176 \end{pmatrix} = F_{R,B}$$

$$A_{R,Z} \cdot G_{Z,B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 98 \\ 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 978 \\ 620 \end{pmatrix} = H_{R,B}$$

$$F_{R,B} + H_{R,B} = \begin{pmatrix} 14148 \\ 13176 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 978 \\ 620 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15126 \\ 13796 \end{pmatrix}$$

e)

$15.126 \cdot 13 = 196.638$

$13.796 \cdot 21 = 289.716$

$\text{Kosten} = 196.638 + 289.716 = 486.354 \text{ Euro}$

Ermittlung der Rohstoff-Endprodukt-Matrix auf dem Schaubild

	Endprodukte		
Rohstoffe	P1	P2	P3
R1	33	15	21
R2	26	14	22

Rohstoff-Zw-Prod.-Matrix auf dem Schaubild

	Zw-Produkte	
Rohstoffe	Z1	Z2
R1	3	6
R2	4	2

Zw-Prod.-Endprod.-Matrix

	Endprodukte		
Zw-Prod	P1	P2	P3
Z1	5	3	5
Z2	3	1	1

Rohstoff-Matrix x Zw-Produkt-Matrix

	Endprodukte		
Rohstoffe	P1	P2	P3
R1	33	15	21
R2	26	14	22

Aufgabe 14:

In einer Möbelfabrik werden aus Holz, Metall und Stoff Tische, Bänke und Stühle produziert, die einzeln bzw. als Sitzgruppen verkauft werden.

Für einen Tisch werden 12 Einheiten Holz und 3 Einheiten Metall,

für eine Bank 6 Einheiten Holz, 2 Einheiten Metall und 5 Einheiten Stoff,

für einen Stuhl 2 Einheiten Holz, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Stoff benötigt.

Eine Sitzgruppe A besteht aus einem Tisch und vier Stühlen,

eine Sitzgruppe B aus einem Tisch, einer Bank und drei Stühlen.

a) Geben Sie die Verflechtungsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Einzelprodukten und für den Zusammenhang von Einzelprodukten und Sitzgruppen an und bestimmen Sie aus diesen durch Matrizenmultiplikation die Verflechtungsmatrix für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Sitzgruppen!

b) Ein Kunde bestellt 40 Sitzgruppen A, 60 Sitzgruppen B und zusätzlich 10 Bänke. Ermitteln Sie unter Verwendung der Verflechtungsmatrizen aus a), welche Mengen der Ausgangsmaterialien benötigt werden!

Lösung:

a) Ausgangsmaterial – Einzelprodukte

	je Tisch	je Bank	je Stuhl
Holz	12	6	2
Metall	3	2	1
Stoff	0	5	2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Einzelprodukte – Sitzgruppen

	je Sitzgruppe A	je Sitzgruppe B
Tisch	1	1
Bank	0	1
Stuhl	4	3

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ausgangsmaterial – Sitzgruppen: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 7 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

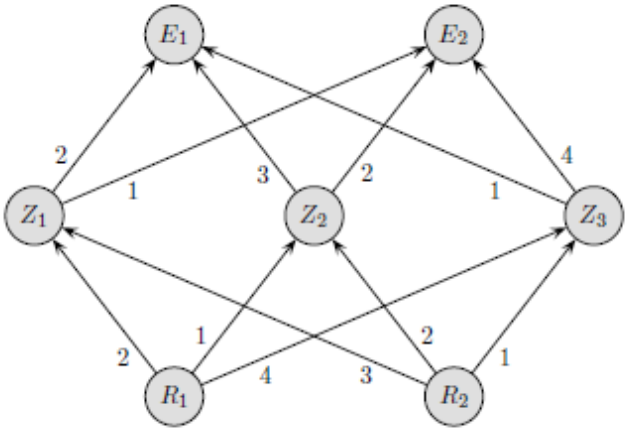
b) $\begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 7 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2240 \\ 760 \\ 980 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2300 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix}$

Es werden 2300 Einheiten Holz, 780 Einheiten Metall und 1030 Einheitem Stoff benötigt.

Aufgabe 15:

In einem Unternehmen mit einem mehrstufigen Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:

Es sollen 4 Mengeneinheiten (ME) von E_1 und 7 ME von E_2 produziert werden. Wie viel Rohstoffe sind nötig?



Lösung:

$A_{R,Z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$A_{R,Z} \cdot B_{Z,E}$:

			2	1
			3	2
			1	4
2	1	4	11	20
3	2	1	13	11

$C_{R,E} = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$

$D_{E,S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$C_{R,E} \cdot D_{E,S}$:

		4
		7
11	20	184
13	11	129

Man benötigt 184 von R_1 und 129 von R_2.

Aufgabe 16:

Es liegt ein zweistufiger Produktionsprozess vor, bei dem folgende Bedingungen vorliegen:

1. Stufe: Rohstoffe R1, R2, R3, R4 –>Halbfabrikate H1, H2, H3

2. Stufe: Halbfabrikate H1, H2, H3 –>Endprodukte E1, E2

z. B.

Für 1 ME Endprodukt E_1 wird benötigt: 4 ME H_1, 2 ME H_2, 10 ME H_3
Für 1 ME Halbfabrikat H_2 wird benötigt: 3 ME R_1, 5 ME R_2, 0 ME R_3, 7 ME R_4

	H_1	H_2	H_3
R_1	1	3	0
R_2	10	5	8
R_3	2	0	1
R_4	3	7	1

	E_1	E_2
H_1	4	20
H_2	2	3
H_3	10	5

Wie viel Rohstoffe sind nötig, um 2000 ME E_1 und 10000 ME E_2 herzustellen?

Lösung:

Definieren entsprechende Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor

Berechnung der Verflechtungsbilanz (Menge nötiger Rohstoffe)

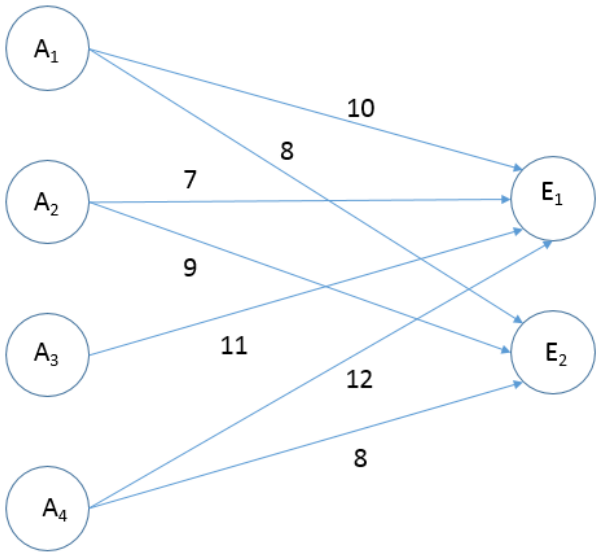
$$\begin{aligned} r &= A \cdot B \cdot p \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 29 \\ 130 & 255 \\ 18 & 45 \\ 36 & 86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310000 \\ 2810000 \\ 486000 \\ 932000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur Herstellung von 2000 ME E_1 und 10000 ME E_2 sind Rohstoffe in folgender Menge nötig:

310000 ME R_1, 2810000 ME R_2, 486000 ME R_3, 932000 ME R_4

Aufgabe 17:

Zwei Produkte E_1 und E_2 werden mit Hilfe von 4 Baugruppen A_1, A_2, A_3 und A_4 hergestellt. Die Beziehungen werden durch den folgenden Graphen dargestellt:



Ein Kunde bestellt 230 Stück von E_1 und 410 Stück von E_2. Wie viele Baugruppen braucht er dazu?

Lösung:

$$A_{B,E} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 9 \\ 11 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

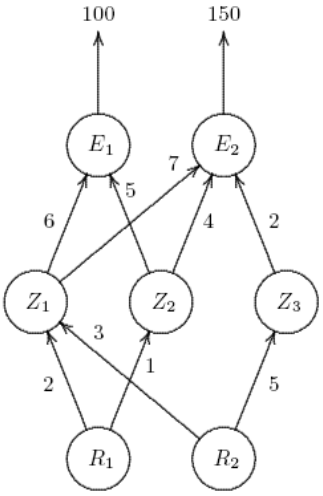
$$B_{E,S} = \begin{pmatrix} 230 \\ 410 \end{pmatrix}$$

$A_{B,E} \cdot B_{E,S}$:

			230			
			410			
10	8		5580			
7	9		5300			
11	0		2530			
12	8		6040			

Aufgabe 18:

In einem Unternehmen mit mehrstufigem Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:



Der Pfeil z. B. von R_1 nach Z_1 gibt an, dass pro Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts Z_1 2 Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1 erforderlich sind.

Die Frage ist nun, wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1 und R_2 zur Verfügung stehen müssen, um eine Produktion der Endprodukte E_1 = 100 (ME) und E_2 = 150 (ME) zu ermöglichen.

Lösung:

Die Mengenangaben können in sogenannten Verflechtungsmatrizen erfasst werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	0
R_2	3	0	5

	E_1	E_2
Z_1	6	7
Z_2	5	4
Z_3	0	2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} \text{ heißt Outputvektor.}$$

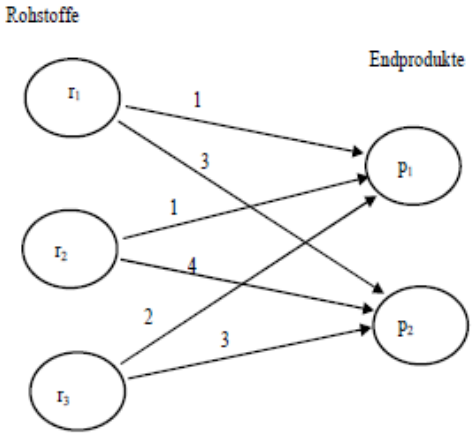
Für den Zwischenproduktvektor gilt: $\vec{z} = B \cdot \vec{y}$

und für den Rohstoffmengenvektor (oder Inputvektor): $\vec{x} = A \cdot \vec{z} = A \cdot (B \cdot \vec{y}) = (A \cdot B) \cdot \vec{y} = C \cdot \vec{y}$

Wir erhalten $C = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4400 \\ 6450 \end{pmatrix}$, d.h. $R_1 = 4400\ (ME)$, $R_2 = 6450\ (ME)$

Aufgabe 19:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Der folgende Graph gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in Euro werden durch den Vektor $\vec{K} = (5; 34; 23)$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert einer Bestellung von 6 ME P_1 und 3 ME P_2?

Lösung:

$$A_{R,P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \; A^T_{P,R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B_{K,R} = (5 \quad 34 \quad 23); \; B^T_{R,K} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$A^T_{P,R} \cdot B^T_{R,K}$:

			5
			34
			23
1	1	2	85
3	4	3	220

$$C_{P,K} = \begin{pmatrix} 85 \\ 220 \end{pmatrix}$$

$$C^T_{K,P} = (85 \quad 220)$$

$$D_{P,M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$C^T_{K,P} \cdot D_{P,M}$:

		6
		3
85	220	1170

Der Gesamtwert beträgt 1170 Euro.

Aufgabe 20:

Ein Betrieb stellt aus drei Rohstoffen vier Bauteile her, die zu drei Fertigprodukten gemäß folgender Stücklisten weiterverarbeitet werden.

Stückliste 1:

Rohstoffe	ME je Bauteil			
	B_1	B_2	B_3	B_4
R_1	2	2	1	3
R_2	0	2	3	0
R_3	3	0	2	2

Stückliste 2:

Bauteile	ME je Fertigprodukt		
	F_1	F_2	F_3
B_1	2	2	1
B_2	1	2	2
B_3	3	0	2
B_4	1	2	1

a) (3) Berechnen Sie die Rohstoffkosten für je eine ME der Fertigprodukte mit Hilfe von Matrizenmultiplikationen, wenn die Kosten der Rohstoffe pro ME 2,50 Euro für R1, 1,00 Euro für R2 und 1,50 Euro für R3 betragen.

b) (3)Die Fertigungskosten bei der Produktion der Bauteile pro ME betragen 5,00 Euro für B1, 3,00 Euro für B2, 4,00 Euro für B3 und 6,00 Euro für B4. Berechnen Sie für jedes der drei Fertigprodukte die Kosten je ME, die durch die Fertigung der Bauteile entstehen, ebenfalls durch Matrizenmultiplikationen.

c) (3) Die Fertigungskosten bei der Produktion der Fertigprodukte betragen je ME 40,00 Euro bei F1, 35,00 Euro bei F2 und 32,00 Euro bei F3. Die Fertigprodukte können zu folgenden Preisen verkauft werden: 165,00 Euro bei F1, 150,00 Euro bei F2 und 140,00 Euro bei F3. Um wie viel Euro übersteigen die Verkaufserlöse die variablen Kosten je ME von F1, F2 und F3?

d) (5) Technisch bedingt können die Fertigprodukte nur im festen Mengenverhältnis von 5:4:3 hergestellt werden. Wie viel ME der Fertigprodukte können mit einer Menge von 8.080 ME des Rohstoffs R2 produziert werden?

Lösung:

				Bauteile		
Produktionsmatix				2	2	1
				1	2	2
				3	0	2
Rohstoffe				1	2	1
2	2	1	3	**12**	**14**	**11**
0	2	3	0	**11**	**4**	**10**
3	0	2	2	**14**	**10**	**9**

Typ (R,B)*Typ(B,F)=Typ(R,F)

a)

Rohstoffkosten für je eine ME der Fertigprodukte

			Produktionsmatrix		
			12	14	11
			11	4	10
Rohstoffkosten			14	10	9
2,50	1,00	1,50	**62**	**54**	**51**

b)

Fertigungskosten für die Bauteile

				Bauteile		
				2	2	1
				1	2	2
				3	0	2
Bauteilkosten				1	2	1
5	3	4	6	**31**	**28**	**25**

c)

Ansatz: Verkaufserlöse-Rohstoffkosten-Fertigungskosten Bauteile-Fertigungskosten Fertigprodukte=Überschuß

165	-	62	-	31	-	40	=	32
150	-	54	-	28	-	35	=	33
140	-	51	-	25	-	32	=	32

d)

Ansatz: Produktionsmatrix * Mengenvektor = Rohstoffbedarfsvektor

$$\begin{pmatrix} 12 & 14 & 11 \\ 11 & 4 & 10 \\ 14 & 10 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5x \\ 4x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 8.080 \\ ? \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt der zweiten Zeile der Produktionsmatrix mit dem Mengenvektor ergibt folgende Gleichung:

11 * 5x + 4 * 4x + 10 * 3x = 8.080	
55x + 16x + 30x = 8.080	
101x = 8.080	/ 101
x = 80	

Also können von F_1 5 * 80 = 400 ME, von F_2 4 * 80 = 320 ME und von F_3 3 * 80 = 240 ME hergestellt werden.

Aufgabe 21:

Berechnen Sie von folgender Matrix A die Inverse Matrix A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das an einem Beispiel noch deutlicher machen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Hier ist also $a = 2, b = -3, c = 1$ und $d = 5$. Der Wert von $ad - bc$ ist dann

$$ad - bc = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = 10 + 3 = 13$$

Das steht also unter dem Bruchstrich vor der Matrix in der Formel der Inversen. Die selbst lautet

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und zusammen mit dem Bruch $\frac{1}{13}$ haben wir

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Wegen der Übersichtlichkeit würde man den Bruch $\frac{1}{13}$ vermutlich vor der Matrix stehen lassen.

Aufgabe 22:

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (1) mal 0,5 + (2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ (2) mal (-$\frac{2}{3}$) +(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ (1) geteilt 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \text{ mal } (\frac{2}{3})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 24:

Berechnen Sie Inverse Matrix zu A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

```
            M                          E

         3  5  1                    1  0  0
         2  4  5                    0  1  0
         1  2  2                    0  0  1

Vertausche die erste und die dritte Zeile

         1  2  2                    0  0  1
         2  4  5                    0  1  0
         3  5  1                    1  0  0

Subtrahiere das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten

         1  2  2                    0  0  1
         0  0  1                    0  1 -2
         3  5  1                    1  0  0

Subtrahiere das Dreifache der ersten Zeile von der dritten

         1  2  2                    0  0  1
         0  0  1                    0  1 -2
         0 -1 -5                    1  0 -3

Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit -1

         1  2  2                    0  0  1
         0  1  5                   -1  0  3
         0  0  1                    0  1 -2

Subtrahiere das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten

         1  0 -8                    2  0 -5
         0  1  5                   -1  0  3
         0  0  1                    0  1 -2

Addiere das Achtfache der dritten Zeile zur ersten

         1  0  0                    2  8 -21
         0  1  5                   -1  0  3
         0  0  1                    0  1 -2

Subtrahiere das Fünffache der dritten Zeile von der zweiten

         1  0  0                    2  8 -21
         0  1  0                   -1 -5  13
         0  0  1                    0  1  -2

          = E                        = M^-1
```

Aufgabe 25:

Berechnen Sie die inversen Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) 1. Schritt: Berechnung der Determinante der Matrix A

$$\det(A) = 1\cdot3\cdot2 + 0\cdot4\cdot3 + 2\cdot2\cdot0 - 2\cdot3\cdot3 - 1\cdot4\cdot0 - 0\cdot2\cdot2 = 6 - 18 = -12$$

2. Schritt: Berechnung der Matrix der Adjunkten von A

$$\begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix}3&4\\0&2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}2&4\\3&2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}2&3\\3&0\end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} +(6) & -(-8) & +(-9) \\ -(0) & +(-4) & -(0) \\ +(-6) & -(0) & +(3) \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ -0,67 & 0,33 & 0 \\ 0,75 & 0 & -0,25 \end{pmatrix}$$

b.) 1. Schritt: Berechnung der Determinante der Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 3\cdot4\cdot2 + 5\cdot5\cdot1 + 1\cdot2\cdot2 - (1\cdot4\cdot1 + 3\cdot5\cdot2 + 5\cdot2\cdot2) = 53 - 54 = -1$$

2. Schritt: Berechnung der Matrix der Adjunkten von B

$$\begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix}4&5\\2&2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix}5&1\\2&2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix}5&1\\4&5\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}3&1\\2&5\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & -1 \\ 21 & -13 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 21 \\ 1 & 5 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} -2 & -8 & 21 \\ 1 & 5 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -8 & 21 \\ 1 & 5 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c.) $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ $\det(C)= 5-4=1$

$$C^{-1}=\frac{1}{\det(C)}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 26:

Berechnen Sie die inverse Matrix.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 10 & -3 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3\end{array}\right)$$

Es existiert keine inverse Matrix.

Aufgabe 27:

Berechnen sie die inverse Matrix von:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

Lösung:

Schritt 1: Erweiterung der Matrix A um die passende Einheitsmatrix:

$$(A\mid E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Schritt 2: Zeilentransformationen ausgehend von (A | E) hin zu (E | A^{-1}):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad 0,5Z2 + Z1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0,5 \end{array}\right) \qquad Z2 * 0,5$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \end{array}\right) \qquad Z1 + (-3) * Z2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0,5 & -0,75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \end{array}\right) \qquad Ziel\ erreicht!$$

Schritt 3: Herausziehen der Inversen A^{-1} aus (E | A^{-1}):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,75 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 28:

Wie lautet die Inverse der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 29:

Bestimmen Sie die Inverse zur folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

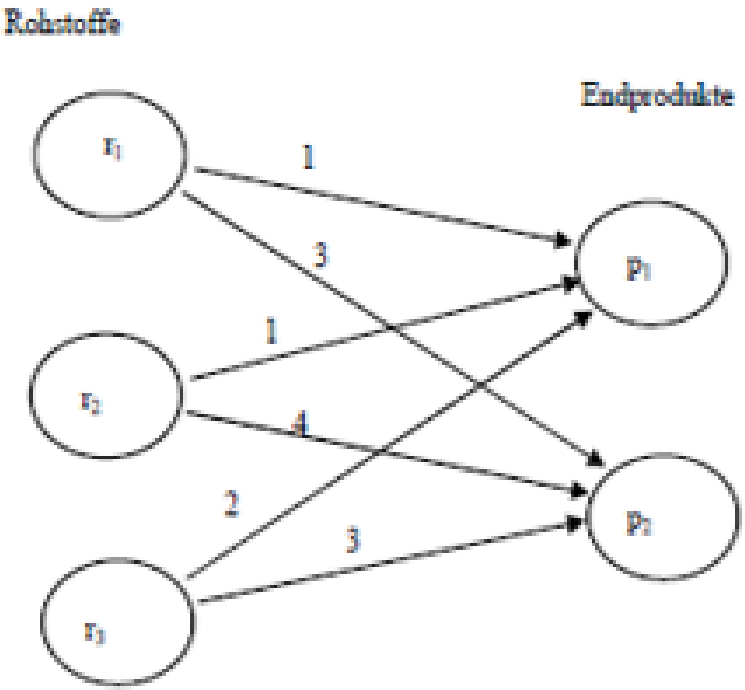
Lösung:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,15 & -0,25 & 0,05 \\ 0,05 & 0,25 & 0,35 \end{pmatrix}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 30:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Das folgende Verflechtungsdiagramm gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



a) (3) Wie viele Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 werden benötigt, um 6 ME der Sorte P_1 und 3 ME der Sorte P_2 herzustellen?

b) (2) Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in € werden durch den Vektor $k_r = (R_1; R_2; R_3) = (5; 34; 23)$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert der in a) zu bestellenden Einzelteile?

Lösung:

$$A_{R,E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; B_{E,B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{R,E} \cdot B_{E,B} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix} = C_{R,B}; D_{R,P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$C_{B,R}^T = (15 \quad 18 \quad 21)$$

$$C_{B,R}^T \cdot D_{R,P} = (15 \quad 18 \quad 21) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix} = 1.170 \text{ Euro}$$

Aufgabe 31:

Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte. Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt. Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz

$R \to Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	a_{31}	0	a_{33}
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz

$Z \to E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

a) (5) Berechnen Sie die Elemente a_{31} und a_{33} in der Rohstoffeinsatzmatrix A so, dass die Rohstoff/Endproduktmatrix C wie folgt lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

b) (3) Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 hergestellt werden können.

c) (10) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A gab es einen Ausfall bei der Herstellung des Zwischenproduktes Z_2. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden.

Zurzeit sind am Lager in Werk B nur noch die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.

Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3.

Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.

Zeigen Sie durch eine Berechnung, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

Lösung:

a)

$$C = A \cdot B \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 2a_{31} + 6a_{33} & a_{31} + 2a_{33} & 4a_{31} + 2a_{33} \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich: $2a_{31} + 6a_{33} = 16$

$$a_{31} + 2a_{33} = 6$$

$$4a_{31} + 2a_{33} = 12$$

Durch Auflösen von 2 Gleichungen und Einsetzen in die 3. Gleichung erhält man: $a_{31} = 2$ und $a_{33} = 2$.

b)

$$C \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_R \ \textit{mit} \ \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ bedeutet } \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11850 \\ 24300 \\ 6600 \\ 13650 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung von 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 werden folgende Rohstoffvorräte benötigt: 11850 ME von R_1, 24300 ME von R_2, 6600 ME von R_3 und 13650 ME von R_4.

c)

$$B \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_Z \text{ mit } \vec{x}_Z = \begin{pmatrix} 75 \\ z_2 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e_1 + e_2 + 48 \\ 8e_1 + 10e_2 + 12 \\ 6e_1 + 2e_2 + 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcll} & 2e_1 + e_2 + 48 & = 75 & I & 2e_1 + e_2 = 27 \\ \text{Hieraus ergibt sich:} & 8e_1 + 10e_2 + 12 & = z_2 \text{ oder} & II & 8e_1 + 10e_2 - z_2 = -12 \\ & 6e_1 + 2e_2 + 24 & = 100 & III & 6e_1 + 2e_2 = 76 \end{array}$$

Aus *I* folgt: $e_2 = 27 - 2e_1$. Eingesetzt in *III* ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6e_1 + 2(27 - 2e_1) &= 76 \\ 6e_1 + 54 - 4e_1 &= 76 \\ +54 &= 76\,. \\ 2e_1 &= 22 \\ e_1 &= 11 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis in *III* eingesetzt ergibt $e_2 = 5$.

Einsetze in Gleichung *II* liefert $z_2 = 150$.

Möglich ist auch die formale Lösung des LGS:

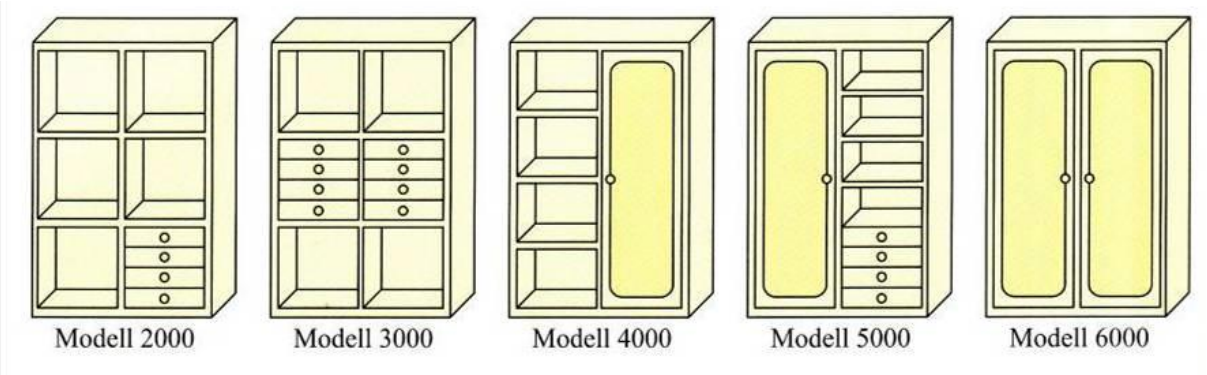
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 8 & 10 & -1 & -12 \\ 6 & 2 & 0 & 76 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+3\cdot I]{-II+4\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -6 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{II+6\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Hieraus lässt sich ablesen: $e_2 = 5 \wedge z_2 = 150$, eingesetzt in I folgt $e_1 = 11$

Die genannten Zwischenproduktbestände lassen sich bei der Produktion aller Endprodukte vollständig verarbeiten. Das Werk A muss dazu 150 ME von Z_2 liefern und es können zu den bestellten 12 ME von E_3, 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 hergestellt werden.

Aufgabe 32:

Eine Möbelfabrik bietet ein Möbelsystem an, dessen Schränke nach Wünschen der Kunden auf fünf verschiedene Arten (Modell 2000, Modell 3000, Modell 4000, Modell 5000, Modell 6000) aus den Grundelementen "Korpus", "Tür", Einlegeboden" und "Schubladensatz" zusammengestellt werden können.



In der folgenden Tabelle ist angegeben, wie viele Grundelemente jeweils für die fünf Schrankmodelle benötigt werden.

	Korpus	**Türen**	**Einlegeböden**	**Schubladens-ätze**
Modell 2000	1	0	3	1
Modell 3000	1	0	0	2
Modell 4000	1	1	3	0
Modell 5000	1	1	3	1
Modell 6000	1	2	6	0

Es soll folgender Auftrag zur Lieferung der verschiedenen Schrankmodelle erstellt werden.

Auftrag:

Modell 2000: 20 Stück, Modell 3000: 25 Stück, Modell 4000: 40 Stück, Modell 5000: 50 Stück, Modell 6000: 70 Stück.

Berechnen Sie wie viel der Schrankelemente jeweils hergestellt werden müssen.

Lösung:¶

$$A_{M.E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix};\ A^T_{E,M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}¶$$

Auftragsvektor:¶

$$B_{M,A} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix}¶$$

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 205 \\ 230 \\ 750 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 33:

Bestimmen Sie alle 2-reihigen Matrizen vom Typ $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dessen Matrizenprodukt mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sich kommutativ verhält $(A \cdot X = X \cdot A)$

Lösung:

17 Bestimmen Sie alle 2-reihigen Matrizen vom Typ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deren Matrizenprodukt mit der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sich *kommutativ* verhält $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A})$.

Wir berechnen zunächst die benötigten Matrizenprodukte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ und $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+0) & (b+0) \\ (-a+c) & (-b+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ (c-a) & (d-b) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & (0+b) \\ (c-d) & (0+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & b \\ (c-d) & d \end{pmatrix}$$

Somit müssen die noch unbekannten Elemente a, b, c und d die folgende Matrizengleichung erfüllen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ (c-a) & (d-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & b \\ (c-d) & d \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich entsprechender Elemente auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man vier Gleichungen mit folgender Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(I)} & a = a - b & \Rightarrow \quad b = 0, \quad a = \text{beliebig} \\ \text{(II)} & b = b & \Rightarrow \quad b = \text{beliebig} \\ \text{(III)} & c - a = c - d & \Rightarrow \quad d = a, \quad c = \text{beliebig} \\ \text{(IV)} & d - b = d & \Rightarrow \quad b = 0, \quad d = \text{beliebig} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = d = \text{beliebig}, \quad b = 0, \quad c = \text{beliebig}$$

Lösung: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Kontrollrechnung:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (-a+c) & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (c-a) & a \end{pmatrix} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (c-a) & a \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$$

Aufgabe 34:

In einem Produktionsprozess werden aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt, aus denen wiederum drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt werden. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den folgenden Tabellen zu entnehmen:

	Z_1	**Z_2**	**Z_3**
R_1	8	9	10
R_2	9	7	10
R_3	7	11	10

	E_1	**E_2**	**E_3**
Z_1	1	2	2
Z_2	3	3	1
Z_3	2	0	2

Die Rohstoffkosten in Euro/ME betragen: $K_R^T = (0{,}05 \quad 0{,}03 \quad 0{,}04)$,

die Fertigungskosten in Euro/ME der Endprodukte $K_E^T = (10 \quad 20 \quad 20)$.

a) Im Lager sind 1500 ME von R_1 und 2700 ME von R_2. Der Rohstoff R_3 ist nicht mehr vorrätig. Von jedem Endprodukt sollen 40 ME hergestellt werden.

Wie viele ME der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 müssen beschafft werden, damit von jedem Rohstoff 1000 ME als Reserve übrig bleiben?

b) Der Verkaufspreis für je 1 ME der Endprodukte beträgt 80 Euro für E_1, 100 Euro für E_2 und 90 Euro für E_3. Bei einem Auftrag über 700 ME von E_1, 600 ME von E_2 und 800 ME von E_3 soll ein Gewinn von 62500 Euro erwirtschaftet werden. Die Fixkosten für diesen Auftarg belaufen sich auf 34205 Euro. Die Fertigungskosten pro ME sind für Z_2 dreimal so hoch wie für Z_1 und für Z_3 1,5-mal so hoch wie für Z_1.

Bestimmen Sie die Fertigungskosten je ME der Zwischenprodukte.

c) Eine verfahrenstechnische Innovation erfordert die Herstellung von Vorprodukten unmittelbar aus den Rohstoffen. Diese Vorprodukte werden dann zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 weiter verarbeitet.

Der Materialfluss ist in den folgenden Tabellen zusammengefasst.

	V_1	**V_2**
R_1	2	3
R_2	3	4
R_3	3	2

	Z_1	Z_2	Z_3
V_1	1	3	2
V_2	2	1	2

Die Fertigungskosten in Euro/ME der Vorprodukte betragen $K_V^T = (0{,}7 \quad 0{,}6)$.

Die Fertigungskosten in Euro/ME der Zwischenprodukte aus den Vorprodukten betragen $K_{Z_{neu}}^T = (1 \quad 2 \quad 1)$.

Untersuchen Sie für die einzelnen Zwischenprodukte, ob durch die Innovation Kosten eingespart werden können, wenn die Herstellungskosten für je 1 ME der Zwischenprodukte bisher 2,95 Euro für Z_1, 7,10 Euro für Z_2 und 4,20 Euro für Z_3 betragen.

Lösung:

a)

Gegeben ist die Rohstoff-Zwischenproduktmatrix $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 7 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

und die Zwischenprodukt-Endproduktmatrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der Rohstoff-Endproduktmatrix C:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 55 & 43 & 45 \\ 50 & 39 & 45 \\ 60 & 47 & 45 \end{pmatrix}$$

Gegeben ist der Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Rohstoffvektor $\vec{r}$.

$$\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 55 & 43 & 45 \\ 50 & 39 & 45 \\ 60 & 47 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5720 \\ 5360 \\ 6080 \end{pmatrix}$$

Von R_1 müssen 5720 + 1000 – 1500 = 5220 ME besorgt werden.
Von R_2 müssen 5360 + 1000 – 2700 = 3660 ME besorgt werden.
Von R_3 müssen 6080 + 1000 = 7080 ME besorgt werden.

b)

Es sei $\vec{p} = \begin{pmatrix} 700 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}$.

Anzahl der benötigten Rohstoffe: $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 55 & 43 & 45 \\ 50 & 39 & 45 \\ 60 & 47 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 700 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100300 \\ 94400 \\ 106200 \end{pmatrix}$

Anzahl der benötigten Zwischenprodukte: $\vec{z} = B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 700 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 4700 \\ 3000 \end{pmatrix}$

Die Rohstoffkosten betragen $K_R = 100300 \cdot 0{,}05 + 94400 \cdot 0{,}03 + 106200 \cdot 0{,}04 = 12095\,€$.

Die Fertigstellungskosten vom Zwischenprodukt zum Endprodukt betragen
$K_E = 700 \cdot 10 + 600 \cdot 20 + 800 \cdot 20 = 35000\ €$.

Für die Fertigungskosten der Zwischenprodukte gilt $\vec{k}_Z^T = (x \quad 3x \quad 1{,}5x)$.
Die Fertigstellungskosten vom Rohstoff zum Zwischenprodukt betragen
$K_Z = 3500 \cdot x + 4700 \cdot 3x + 3000 \cdot 1{,}5x = 22100x$

Der Verkaufserlös beträgt $700 \cdot 80 + 600 \cdot 100 + 800 \cdot 90 = 188000\ €$

Die Gesamtkosten betragen
$K_R + K_Z + K_E + K_{Fix} = 12095 + 22100x + 35000 + 34205 = 81300 + 22100x$

Da der Gewinn 62500 € betragen soll, muss gelten:

$188000 - (81300 + 22100x) = 62500$
Daraus folgt x = 2.

Damit gilt $\vec{k}_Z^T = (2 \quad 6 \quad 3)$.

Die Fertigungskosten je ME der Zwischenprodukte betragen 2 € bzw. 6 € bzw. 3 €.

c)

Um 1 ME von Z_1 herzustellen, benötigt man $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Vorprodukte und

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Rohstoffe.

Kosten für Rohstoffe: $8 \cdot 0{,}05 + 9 \cdot 0{,}03 + 7 \cdot 0{,}04 = 0{,}95$ Euro.
Kosten für Vorprodukte: $1 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}9$ Euro.

Die Gesamtkosten für 1 ME von Z_1 inklusive Rohstoffkosten betragen
0,95 + 1,90 + 1 = 3,85 Euro.

Die Innovation ist mit 3,85 Euro teurer als bisher mit 2,95 Euro.

Um 1 ME von Z_2 herzustellen, benötigt man $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Vorprodukte und

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ als Rohstoffe.

Kosten für Rohstoffe: $9 \cdot 0{,}05 + 7 \cdot 0{,}03 + 11 \cdot 0{,}04 = 1{,}10$ Euro.
Kosten für Vorprodukte: $3 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}6 = 2{,}7$ Euro.

Die Gesamtkosten für 1 ME von Z_2 inklusive Rohstoffkosten betragen
1,10 + 2,70 + 2 = 5,80 Euro.

Die Innovation ist mit 5,80 Euro günstiger als bisher mit 7,10 Euro.

Um 1 ME von Z_3 herzustellen, benötigt man $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Vorprodukte und

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ als Rohstoffe.

Kosten für Rohstoffe: $10 \cdot 0{,}05 + 10 \cdot 0{,}03 + 10 \cdot 0{,}04 = 1{,}20$ Euro.
Kosten für Vorprodukte: $2 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}6 = 2{,}6$ Euro.

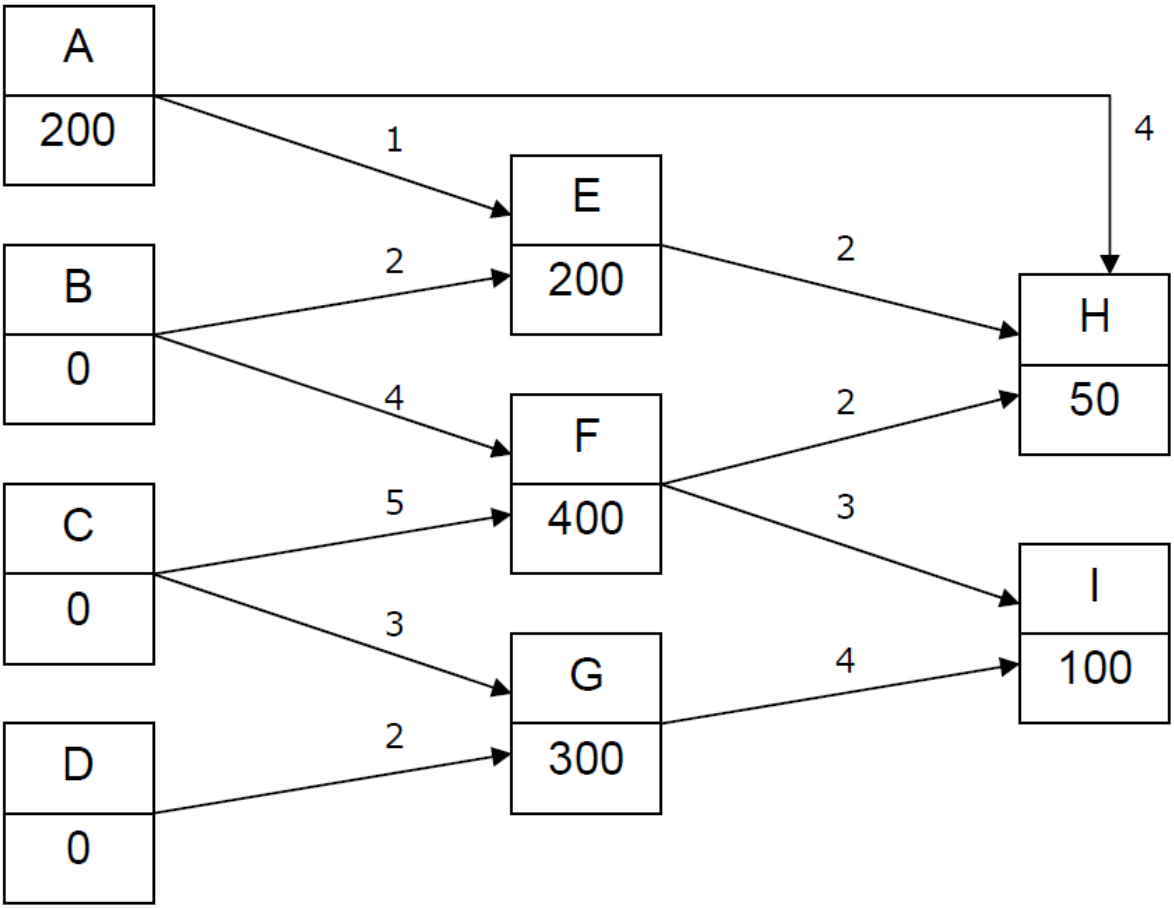
Die Gesamtkosten für 1 ME von Z_3 inklusive Rohstoffkosten betragen
1,20 + 2,60 + 1 = 4,80 Euro.

Die Innovation ist mit 4,80 Euro teurer als bisher mit 4,20 Euro.

Fazit: Nur für Z_2 wird es billiger, die Herstellkosten der anderen Zwischenprodukte werden durch die Innovation größer.

Aufgabe 35:

Gegeben ist ein Gozintograph mit vier Werkstoffen (A, B, C und D), drei Zwischenprodukten (E, F und G) sowie zwei Endprodukten (H und I). Die Zahlen unter den Buchstaben stellen den aktuellen Lagerbestand dar:



Ermitteln Sie den Gesamtbedarf der Güterarten A, B, C und D.

Lösung:

Rohstoff-Zwischenprodukt:

$$A_{W,Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{W,Z} \cdot B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 12 \\ 10 & 27 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = C_{W,E} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 12 \\ 10 & 27 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Güterart A:

$6 + 0 = 6$

Güterart B:

$12 + 12 = 24$

Güterart C:

$10 + 27 = 37$

Güterart D:

$0 + 8 = 8$

Determinanten

Aufgabe 36:

Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Sarrus.

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(c)}\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{(d)}\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{(e)}\ \begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 2k & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{(f)}\ \begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(g)}\ \begin{vmatrix} 1-k & k & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{(h)}\ \begin{vmatrix} 0 & k^2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & k \end{vmatrix}$$

Lösung:

(a)
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} = 12 + 4 + 12 - 6 - 16 - 6 = 0$$

(b)
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{matrix} = -2 - 9 - 12 + 12 + 9 + 2 = 0$$

Wenn man schon weiß, daß diese Determinante den Wert 0 haben muß, weil die erste Spalte ein Vielfaches der zweiten ist, spart man sich die Rechnung.

(c)
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{matrix} = 35 - 16 - 36 + 12 + 60 - 28 = 27$$

(d)
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ k & 1 \end{matrix} = 4k - 4$$

(e)
$$\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 2k & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} k & 3 \\ 2k & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -4k + 15 - 2 + 12k = 8k - 13$$

(f)
$$\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} k & k \\ 1 & 2k \\ -1 & 1 \end{matrix} = 4k^2 - k + 1 + 2k - k - 2k = 4k^2 - 2k + 1$$

(g)
$$\begin{vmatrix} 1-k & k & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-k & k \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix} = -2(1-k) + 4k + 2 - 8 - (1-k) + 2k = 9k - 9$$

(h)
$$\begin{vmatrix} 0 & k^2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & k^2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} = -6k^2 + 3 - k^3$$

Aufgabe 37:

Für welche Werte von k hat diese Determinante der Wert 0 ?

$$D=\begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & \textcircled{4} & \textcircled{6} \end{vmatrix}$$

Lösung:

Lösung: Man erhält zwei Nullen, wenn man das Doppelte der ersten Zeile von der dritten subrtrahiert:

$$D=\begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ 2 & k & 2k \\ 1-2k & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} k & 3 \\ 2 & k \\ 1-2k & 0 \end{matrix}$$

$$=6k(1-2k)-(1-2k)\cdot 4k=6k-12k^2-4k+8k^2=2k-4k^2$$

Nun setzt man die Bedingung D = 0 an:

$$D=0 \Leftrightarrow 2k(1-2k)=0 \Leftrightarrow k_1=0 \text{ oder } k_2=\tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 38:

Erzeugen Sie an den markierten Stellen zwei Nullen durch Addition der Vielfachen zweier Zeilen oder Spalten und berechnen dann:

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & \textcircled{3} & \textcircled{-5} \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} \textcircled{4} & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ \textcircled{3} & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 13 & 8 & \textcircled{6} \\ 7 & 7 & -2 \\ -5 & 3 & \textcircled{2} \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \textcircled{5} & \textcircled{-3} & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & \textcircled{7} & \textcircled{21} \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 3 & \textcircled{k} & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & \textcircled{3} & 2 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ \textcircled{2k} & 1 & \textcircled{-3} \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & \textcircled{4} \\ 27 & 5 & \textcircled{8} \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ \textcircled{27} & 5 & 8 \\ \textcircled{18} & 9 & -4 \end{vmatrix}$

Lösung:

(d) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & \textcircled{3} & \textcircled{-5} \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3-12 & 7+20 \\ 1 & 3-3 & -5+5 \\ 3 & 7-9 & 6+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -9 & 27 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 27 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} = -(-189+54) = 135$$

(e) $$\begin{vmatrix} \textcircled{4} & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ \textcircled{3} & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-4 & 3-12 & 7+20 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3-3 & 7-9 & 6+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 27 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 27 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} = 135$$

(f) $$\begin{vmatrix} 13 & 8 & \textcircled{6} \\ 7 & 7 & -2 \\ -5 & 3 & \textcircled{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13+21 & 8+21 & 6-6 \\ 7 & 7 & -2 \\ -5+7 & 3+7 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 29 & 0 \\ 7 & 7 & -2 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 34 & 29 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot (340-58) = 564$$

(g) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \textcircled{5} & \textcircled{-3} & -1 \\ 7 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2+20 & 3-12 & 4 \\ 5-5 & -3+3 & -1 \\ 1+15 & 1-9 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 22 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 16 & -8 & 3 \end{vmatrix} = +1 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 22 & -9 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} = -224$$

(h) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & \textcircled{7} & \textcircled{21} \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3-2 & 4-6 \\ 5 & -3-5 & -1-15 \\ 1 & 1-1 & 3-3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = -224$$

(i) $$\begin{vmatrix} 3 & \textcircled{k} & 2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4 & \textcircled{3} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k-k & 2+3k \\ 2k & 1 & -3 \\ 4-6k & 3-3 & 2+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 0 & 3k+2 \\ 2k & 1 & -3 \\ 4-6k & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 3k+2 \\ 4-6k & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 11(3-2k^2) - (4-6k)(3k+2) = 33 - 22k^2 - (12k - 18k^2 + 8 - 12k) = -4k^2 + 25$$

(j) $$\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ \textcircled{2k} & 1 & \textcircled{-3} \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k & 2+3k \\ 2k-2k & 1 & -3+3 \\ 4-6k & 3 & 2+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & k & 3k+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4-6k & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2k^2 & 3k+2 \\ 4-6k & 11 \end{vmatrix} = \text{(i)}$$

(k) $$\begin{vmatrix} 3 & -12 & \textcircled{4} \\ 27 & 5 & \textcircled{8} \\ 18 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1+6 & -12+9 & 1-1 \\ 9+12 & 5+18 & 2-2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 12 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 21 & 23 & 0 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 21 & 23 \end{vmatrix} = -12(161+63) = -2688$$

(l) $$\begin{vmatrix} 3 & -12 & 4 \\ \textcircled{27} & 5 & 8 \\ \textcircled{18} & 9 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 9-9 & 5+108 & 2-9 \\ 6-6 & 9+72 & -1-6 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 1 \\ 0 & 113 & -7 \\ 0 & 81 & -7 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 113 & -7 \\ 81 & -7 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} 113 & 1 \\ 81 & 1 \end{vmatrix} = -84 \cdot (113-81) = -2688$$

Aufgabe 39:

Vereinfachen Sie durch Addition eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte so, dass, möglichst eine oder zwei Nullen entstehen und berechnen dann:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Lösung:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+21 & 5-14 & 7 \\ 8+3 & 10-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & -9 & 7 \\ 11 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 25 & -9 \\ 11 & 8 \\ 0 & 0 \end{matrix} = -200-99 = -299$

(b) $\begin{vmatrix} 45 & \textcircled{36} & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & \textcircled{24} & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45-90 & 36-36 & 18-36 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45-60 & 24-24 & 36-24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -45 & 0 & -18 \\ 30 & 12 & 12 \\ -15 & 0 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -45 & 0 \\ 30 & 12 \\ -15 & 0 \end{matrix}$

Hier wurde das Dreifache der 2. Zeile von der ersten subtrahiert und das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten.

$$= -45 \cdot 12 \cdot 12 - 15 \cdot 12 \cdot 18 = -9720$$

Man hätte hier vielleicht zuerst den Faktor 15 aus der ersten Spalte, 12 aus der 2. Spalte und 6 aus der dritten Spalte herausziehen sollen:

$$\begin{vmatrix} 45 & 36 & 18 \\ 30 & 12 & 12 \\ 45 & 24 & 36 \end{vmatrix} = 15 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1080 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 1080 \cdot (-9) = -9720$$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix} = -108+16 = -02$

Aufgabe 40:

Vereinfachen Sie zuerst durch Ausklammern von Faktoren, erzeugen Sie dann zwei Nullen und berechnen den Wert der Determinante.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 21 & 14 & 21 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 55 & 7 & -22 \\ 10 & 6 & -8 \\ 35 & -9 & -14 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2k & 9 & 12 \\ 4k & 3 & 7 \\ k^2 & 12 & 14 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 44 & 22 & -22 \\ 7 & 6 & 5 \\ 15 & -12 & 18 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 24 & 5 & 14 \\ 12 & 6 & 7 \\ -18 & 20 & 21 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3 & 4k & 5 \\ 3k & 4 & 2 \\ 6 & 2k & 1 \end{vmatrix}$

Lösung:

(a) $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 21 & 14 & 21 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 21\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 5 & -4-10 & -2-15 \\ 3 & 2-6 & 3-9 \end{vmatrix} = 21\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -14 & -17 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 21\cdot \begin{vmatrix} -14 & -17 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 21\cdot (84-68) = 336$$

(b) $$\begin{vmatrix} 55 & 7 & -22 \\ 10 & 6 & -8 \\ 35 & -9 & -14 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 11 & 7 & -11 \\ 2 & 6 & -4 \\ 7 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 7 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -2960$$

Hier wurde die erste Spalte zur dritten addiert.

(c) $$\begin{vmatrix} 2k & 9 & 12 \\ 4k & 3 & 7 \\ k^2 & 12 & 14 \end{vmatrix} = 3k\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 7 \\ k & 4 & 14 \end{vmatrix} = 3k\cdot \begin{vmatrix} 2-12 & 3-3 & 12-21 \\ 4 & 1 & 7 \\ k-16 & 4-4 & 14-28 \end{vmatrix} = 3k \begin{vmatrix} -10 & 0 & -9 \\ 4 & 1 & 7 \\ k-16 & 0 & -14 \end{vmatrix}$$

$$= 3k \begin{vmatrix} -10 & -9 \\ k-16 & -14 \end{vmatrix} = 3k\left(140+9(k-16)\right) = 3k(9k-4) = 27k^2-12k$$

(d) $$\begin{vmatrix} 44 & 22 & -22 \\ 7 & 6 & 5 \\ 15 & -12 & 18 \end{vmatrix} = 22\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 66\cdot \begin{vmatrix} 2-2 & 1-1 & -1 \\ 7+10 & 6+5 & 5 \\ 5+12 & -4+6 & 6 \end{vmatrix} = 66 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 17 & 11 & 5 \\ 17 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 66\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} = -66\cdot(34-187) = 10098$$

(e) $$\begin{vmatrix} 24 & 5 & 14 \\ 12 & 6 & 7 \\ -18 & 20 & 21 \end{vmatrix} = 6\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 42\cdot \begin{vmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 42\cdot(-7)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 2646$$

(f) $$\begin{vmatrix} 3 & 4k & 5 \\ 3k & 4 & 2 \\ 6 & 2k & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2k & 5 \\ k & 2 & 2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 1-10 & 2k-5k & 5-5 \\ k-4 & 2-2k & 2-2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} -9 & -3k & 0 \\ k-4 & 2-2k & 0 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot \begin{vmatrix} -9 & -3k \\ k-4 & 2-2k \end{vmatrix} = 6\cdot\left(-18+18k+3k^2-12k\right) = 18k^2+36k-108$$

Aufgabe 41:

Für welche Werte von k hat die Determinante den Wert 0?

(a) $$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 4 \\ 5 & 1 & k \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$ (b) $$\begin{vmatrix} 5 & 2k & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$ (c) $$\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 2k & k & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Lösung:

In dieser Lösung werden die Determinanten einmal mit der Sarrus-Regel berechnet. Die Ergebnisse müssen auch bei anderen Berechnungsverfahren gleich sein!

(a) $$D=\begin{vmatrix}1-k & 2 & 4\\ 5 & 1 & k\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1-k & 2\\ 5 & 1\\ 3 & 4\end{matrix}=1-k+6k+80-12-4k(1-k)-10$$

$$D=1-k+6k+80-12-4k+4k^2-10=4k^2+k+59$$

Die Bedingung D = 0 führt auf die quadratische Gleichung

$$4k^2+k+59=0.$$

Die allgemeine Lösungsformel $k_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ liefert

$$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 59}}{8}\notin \mathbf{R}$$

d.h. Für keinen reellen Wert von k nimmt diese Determinante den Wert 0 an.

(b) $$D=\begin{vmatrix}5 & 2k & k\\ 3 & 1 & 1\\ 6 & 2 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & 2k\\ 3 & 1\\ 6 & 2\end{matrix}=-20+12k+6k-6k-10+24k=36k-30$$

Die Bedingung D = 0 führt auf die Gleichung

$$36k-30=0\ \Rightarrow\ 36k=30\ \Rightarrow\ k=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

(c) $$D=\begin{vmatrix}k & 1 & 3\\ 2k & k & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}k & 1\\ 2k & k\\ 2 & 1\end{matrix}=3k^2+2+6k-6k-k-6k=3k^2-7k+2$$

Die Bedingung D = 0 führt auf die quadratische Gleichung

$$3k^2-7k+2=0$$

$$k_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm 5}{6}=\begin{cases}2\\ \frac{1}{3}\end{cases}$$

Ergebnis: D wird für k = 2 oder für $k=\frac{1}{3}$ Null.

Aufgabe 42:

Erzeugen Sie zuerst Nullen und berechnen dann durch Entwickeln:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -12 & 3 & 12 \\ 34 & 8 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der zweiten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 2. Zeile!

(b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 15 & 12 & 8 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der ersten Spalte zwei Nullen und entwickle dann nach der 1. Spalte!

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -9 & -6 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ Erzeuge in der dritten Zeile zwei Nullen und entwickle dann nach der 3. Zeile!

Lösung:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -12 & 3 & 12 \\ 34 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+28 & 7 & -5+6 \\ -12+12 & 3 & 12-12 \\ 34+32 & 8 & 12+34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 66 & 8 & 46 \end{vmatrix} =$

Hier wurde zuerst die erste Spalte zur dritten addiert, dann das vierfache der zweiten Spalte zur ersten. Ich entwickle jetzt nach der 2. Zeile:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 34 & 1 \\ 66 & 46 \end{vmatrix} = 3 \cdot (34 \cdot 46 - 66) = 4494$$

(b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 15 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 17 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 306$

2. Determinante: Die 2. Spalte wird zur ersten addiert.

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -9 & -6 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 54 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 54 \cdot (-5) = -270$

In der 2. Determinante wurde die 2. Zeile zur 3. addiert !

Aufgabe 43:

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 7 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$ (1) + (4) und an die (4) Spalte schreiben

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 7 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$ Zeile (3) mal (-3)+(4) an die (4) Zeile schreiben

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 7 & 1\\ -5 & -14 & -22 & 0\end{pmatrix}$$ nach Element a_{34} entwickeln

$$-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ -5 & -14 & -22\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ -5 & -14\end{matrix}=(-1)\cdot(22-30+14-5+42-44)=1$$

Aufgabe 44:

Rechne Sie die folgenden Aufgaben nach eigener Vorstellung.

(d) $\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & 6 & 2\\ -4 & -4 & 2\end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 10\\ 1 & 4 & 5\\ 9 & 8 & 7\end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix}5 & 8 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 8\end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ 2 & a & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix}22 & 24 & 26\\ 20 & 22 & 24\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix}13 & 3 & 5\\ 11 & 1 & 5\\ 17 & 7 & 5\end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix}1-k & 1 & k\\ 2-k & 2 & k\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix}k & k & 2k\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 5 & -5\end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}$

Lösung:

(d) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2 & 3+2 & 1 \\ 1+4 & 6+4 & 2 \\ -4+4 & -4+4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 70$$

Ich habe das Doppelte der 3. Spalte zur ersten und zweiten Spalte addiert und dann die Determinante nach der 3. Zeile entwicklelt.

(e) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 9 & 8 \end{matrix} = 56 + 80 - 360 - 80 = -304$$

Die Null hat mich verleitet, die Sarrus-Regel anzuwenden. Das geht rasch.

(f) $$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 8 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 40 + 24 - 5 + 128 = 187$$

(g) $$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2\left(a^2 - 2\right) = 2a^2 - 4$$

Es wurde die erste Spalte von der dritten subtrahiert.

(h) $$\begin{vmatrix} 22 & 24 & 26 \\ 20 & 22 & 24 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 20 & 22 & 24 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Subtraktion der 2. Zeile von der ersten entstand dort dieselbe Zeile wie die dritte. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(i) $$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 5 \\ 17 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 5 \\ 10 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Subtraktion der 2. Spalte von der ersten entstand dort dieselbe Spalte wie die dritte. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(j) $$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & k \\ 2-k & 2 & k \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & k \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Addition der 3. Spalte zur ersten entstand dort dieselbe Spalte wie die zweite. Daher hat diese Determinante den Wert 0 !

(k) $$\begin{vmatrix} k & k & 2k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4k$$

2. Determinante: Das Doppelte der erste Zeile wurde von der 2. subtrahiert.

(l) $$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 6 + 6 + 6 - 1 + 8 + 27 = 52$$

Aufgabe 45:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{2} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{-6} +$$

$$+ (-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{-4} - 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{4} =$$

$$= 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-4) - 4 \cdot 4 =$$

$$= 2 + 12 + 12 - 16 = 10$$

Aufgabe 46:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{123} + (-5) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}_{57} - 10 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}_{9} =$$

$$= 1 \cdot 123 - 5 \cdot 57 - 10 \cdot 9 = 123 - 285 - 90 = -252$$

Aufgabe 47:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Wir entwickeln die Determinante zweckmäßigerweise nach der 2. *Zeile*, da diese zwei Nullen enthält $(a_{21} = a_{23} = 0)$ und erhalten:

$$\det \mathbf{A} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$

$$= 0A_{21} + 12A_{22} + 0A_{23} + 1A_{24} = 12A_{22} + A_{24} =$$

$$= 12 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{9} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{-6} =$$

$$= 12 \cdot 9 + 1 \cdot (-6) = 108 - 6 = 102$$

Aufgabe 48:

Berechnen Sie folgende Determinante nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Durch Entwicklung nach den Elementen der 4. Spalte erhalten wir:

$$\det \mathbf{A} = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} + =$$

$$= 0A_{14} + 3A_{24} + 0A_{34} + 0A_{44} = 3A_{24} =$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}_{2} = 3 \cdot 2 = 6$$

Aufgabe 49:

Für welche $x \in R$ ist die folgende Determinante Null?

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3x-5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3x-5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3x-5 & 4 & 0 \\ x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2(x-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (3x-5) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - (x-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -52(x-3) - 12(3x-5) + 8(x-3) \\ &= -80x + 192 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Aufgabe 50:

Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie hierzu ein Verfahren Ihrer Wahl.

Lösung:

Matrix A				Inverse Matrix			
1	3	1	2	0,3	0,3	1,0	-0,7
3	1	0	2	0,3	0,0	-0,3	0,0
1	0	1	2	1,0	-0,3	2,7	-1,3
2	2	2	5	-0,7	0,0	-1,3	1,0

Aufgabe 51:

Eine Matrix, deren Determinante den Wert 0 besitzt, heißt singulär. Ist die Determinante von 0 verschieden, so nennt man die Matrix regulär.

Finden Sie eine Lösung für die Parameter-Werte, damit die Matrizen singulär bzw. regulär werden?

a) $\begin{vmatrix} t & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} s & 0 & 2 \\ 8 & t & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Lösung:

a)
$$\begin{vmatrix} t & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} t & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$= 4t - 4 + 45 - 24 + 10t - 3$

$= 14t + 14$

Singulär: $14t + 14 = 0 \Leftrightarrow 14t = -14 \Rightarrow \underline{t = -1}$

Regulär: Rest $(t \neq -1)$

b)
$$\begin{vmatrix} s & 0 & 2 \\ 8 & t & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} s & 0 \\ 8 & t \\ 4 & 1 \end{matrix}$$

$= st + 0 + 16 - 8t - 2s - 0$

$= st - 8t - 2s + 16$

Singulär: $st - 8t - 2s + 16 = 0$

wähle $s = 0 \Rightarrow -8t + 16 = 0$

$8t = 16$

$t = 2$

$\Rightarrow s = 0$ und $t = 2$

regulär: $s = 0$ und $t = 3$

Aufgabe 52:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Vereinfachen Sie diese Determinante durch elementare Umformungen in den *Spalten* so lange, bis Sie eine Determinante erhalten, die in einer Zeile nur noch ein von Null verschiedenes Element enthält und entwickeln Sie anschließend nach *Laplace* (Berechnung der anfallenden 3-reihigen Determinante nach der *Regel von Sarrus*).

Lösung:

Wir nehmen folgende Umformungen in den *Spalten* der Determinante vor: von der vierten Spalte subtrahieren wir die erste Spalte, von der dritten Spalte das 5-fache der ersten Spalte. Dann enthält die Determinante in der *letzten* (grau unterlegten) Zeile nur noch *ein* von Null verschiedenes Element: $a_{41} = 1$, $a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$. Die Entwicklung der Determinante nach den Elementen dieser Zeile führt dann auf eine *dreireihige* Determinante, die wir nach der *Regel von Sarrus* leicht berechnen können.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \uparrow \\ -5S_1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \uparrow \\ -S_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & -8 & -14 & 4 \\ 7 & 5 & -34 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{a_{41}}_{1} A_{41} + \underbrace{a_{42}}_{0} A_{42} + \underbrace{a_{43}}_{0} A_{43} + \underbrace{a_{44}}_{0} A_{44} = A_{41}$$

Berechnung des *algebraischen Komplements* A_{41} aus der Unterdeterminante D_{41} nach *Sarrus*:

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot D_{41} = -D_{41} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & -8 & -14 & 4 \\ 7 & 5 & -34 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -8 & -14 & 4 \\ 5 & -34 & -7 \end{vmatrix}}_{D_{41} = 2052} = -2052$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -8 & -14 & 4 \\ 5 & -34 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 7 \\ -8 & -14 \\ 5 & -34 \end{matrix}}_{D_{41}} \quad \Rightarrow \quad D_{41} = 392 + 140 + 1088 + 280 + 544 - 392 = 2052$$

Ergebnis: $D = A_{41} = -2052$

Aufgabe 53:

Welche der nachfolgenden 3-reihigen Matrizen sind *regulär*, welche *singulär*?
(Nachweis über Determinanten)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 & 9 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } a \in \mathbb{R})$$

Lösung:

Eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ ist *regulär*, wenn ihre Determinante *nicht verschwindet*, anderenfalls ist sie *singulär*. Die Berechnung der hier vorliegenden 3-reihigen Determinanten erfolgt nach der *Regel von Sarrus*.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 1 + 16 + 0 - 4 - 2 - 0 = 11 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{B}} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{B} = 12 + 0 + 0 - 0 - 12 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \text{ ist } \textit{singulär}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & 1 & 9 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{C}} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{C} = 0 + 2a + 9 - 0 - a^2 - 1 = -a^2 + 2a + 8$$

$$\det \mathbf{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad -a^2 + 2a + 8 = 0 \;\big|\cdot(-1) \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2a - 8 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 4, \quad a_2 = -2$$

Für $a = 4$ bzw. $a = -2$ ist die Matrix $\mathbf{C}$ demnach *singulär*, für alle übrigen reellen Werte von a *regulär*.

Aufgabe 54:

Bestimmen Sie mit Hilfe *elementarer Umformungen* in den Zeilen bzw. Spalten der Matrix den *Rang* r dieser Matrix und entscheiden Sie dann, ob die Matrix *regulär* oder *singulär* ist.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & -3 \\ 8 & -7 & 21 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 16 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

Eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann *regulär*, wenn ihr *Rang* r gleich n ist, sonst ist sie *singulär*. Durch *elementare Zeilenumformungen* bringen wir die Matrix $\mathbf{A}$ auf die „Trapezform“ $\mathbf{A}^*$ und bestimmen den jeweiligen Rang (er ist gleich der Anzahl der *nicht-verschwindenden* Zeilen).

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ -2Z_1 \end{matrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} -2Z_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*$$

$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \quad n = 3 \quad \Rightarrow \quad r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist *regulär*

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & -3 \\ 8 & -7 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2Z_1 \\ -8Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 13 & 9 \\ 0 & -39 & -27 \end{pmatrix} +3Z_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^* \leftarrow$ Nullzeile

$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2, \quad n = 3 \quad \Rightarrow \quad r < n = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist *singulär*

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 16 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ +Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} -2Z_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} +Z_3 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} +2Z_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} -Z_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^* \leftarrow \text{Nullzeile}$$

$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \quad n = 4 \quad \Rightarrow \quad r < n = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist *singulär*

Aufgabe 55:

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen *orthogonal* sind:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die jeweilige *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$?

Lösung:

Eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ ist *orthogonal*, wenn sie die Bedingung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ erfüllt. Für eine *orthogonale* Matrix $\mathbf{A}$ gilt stets $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, d. h. die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ ist die *Transponierte* von $\mathbf{A}$.

a) Wir zeigen mit Hilfe des *Falk-Schemas*, dass die Matrix $\mathbf{A}$ die Eigenschaft $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ besitzt:

		$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0
			$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	0
			0	0	1
$\mathbf{A}$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	0	$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$	$(\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha)$	0
	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	0	$(\cos\alpha \cdot \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha)$	$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$	0
	0	0	1	0	0	1
				$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$		

Unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ erhalten wir:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) & (\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha) & 0 \\ (\cos\alpha \cdot \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha) & (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$ Die Matrix $\mathbf{A}$ ist somit *orthogonal*.

Inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$$

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ nach dem *Falk-Schema*:

				$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$		
				1	2	2
				2	1	−2
				−2	2	−1
$\mathbf{B}$	1	2	−2	9	0	0
	2	1	2	0	9	0
	2	−2	−1	0	0	9

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{orthogonal}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 56:

Für welche Werte von λ wird folgende Determinante Null?

$$A = \begin{vmatrix} (\lambda-1) & 0 & 2 \\ 1 & (\lambda-1) & 1 \\ -2 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Lösung:

I 14 Welche Lösungen besitzt die Gleichung $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$?

Wir berechnen zunächst die 3-reihige Determinante D nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{D} \begin{matrix} \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 \\ -2 & 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$D = (\lambda-1)^2(1-\lambda) + 0 + 0 + 4(\lambda-1) + 0 + 0 = (\lambda-1)^2(1-\lambda) + 4(\lambda-1)$$

Die sich daraus ergebende kubische Gleichung lösen wir durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors $\lambda - 1$ wie folgt:

$$(\lambda-1)^2 \underbrace{(1-\lambda)}_{-(\lambda-1)} + 4(\lambda-1) = -(\lambda-1)^3 + 4(\lambda-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

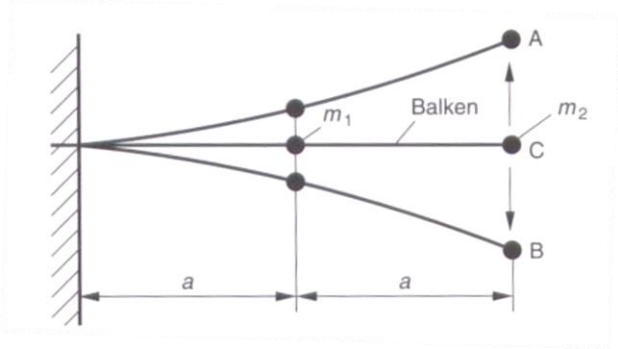
$$(\lambda-1)^3 - 4(\lambda-1) = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - 4\right] = 0 \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ (\lambda-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$(\lambda-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = 4 \Rightarrow \lambda - 1 = \pm 2 \Rightarrow \lambda = 1 \pm 2 \Rightarrow \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1$$

Lösung: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$

Aufgabe 57:

Der im Bild dargestellte elastische Balken der Länge l=2a ist am linken Ende fest eingespannt und trägt in der angegebenen Weise zwei gleiche Punktmassen m_1=m_2=m.



A, B: Umkehrpunkte der Biegespannung

C: Gleichgewichtslage des Balkens

Infolge seiner Elastizität ist er zu Biegeschwingungen fähig. Die Kreisfrequenz ω dieser sog. Eigenschwingungen lassen sich aus der Determinanten-Gleichung

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \omega^2) & -\frac{5}{2}\omega^2 \\ -\frac{5}{2}\omega^2 & (\alpha - 8\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad \left(mit\ \alpha = \frac{3EI}{ml^3}\right)$$

bestimmen (EI: Biegesteifigkeit des Balkens).

Berechnen Sie diese Eigenkreisfrequenzen.

Lösung:

Die Determinantengleichung führt zu einer *bi-quadratischen* Gleichung, die wir mit der *Substitution* $u = \omega^2$ wie folgt lösen:

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \omega^2) & -\frac{5}{2}\omega^2 \\ -\frac{5}{2}\omega^2 & (\alpha - 8\omega^2) \end{vmatrix} = (\alpha - \omega^2)(\alpha - 8\omega^2) - \frac{25}{4}\omega^4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha^2 - 8\alpha\omega^2 - \alpha\omega^2 + 8\omega^4 - \frac{25}{4}\omega^4 = \frac{7}{4}\omega^4 - 9\alpha\omega^2 + \alpha^2 = 0 \;\Big|\cdot\frac{4}{7} \quad \Rightarrow$$

$$\omega^4 - \frac{36}{7}\alpha\omega^2 + \frac{4}{7}\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{Substitution: } u = \omega^2) \quad u^2 - \frac{36}{7}\alpha u + \frac{4}{7}\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_{1/2} = \frac{18}{7}\alpha \pm \sqrt{\frac{324}{49}\alpha^2 - \frac{4}{7}\alpha^2} = \frac{18}{7}\alpha \pm \sqrt{\frac{324\,\alpha^2 - 28\,\alpha^2}{49}} = \frac{18}{7}\alpha \pm \sqrt{\frac{296\,\alpha^2}{49}} =$$

$$= \frac{18}{7}\alpha \pm \frac{\sqrt{296}\,\alpha}{7} = 2{,}5714\,\alpha \pm 2{,}4578\,\alpha \quad \Rightarrow \quad u_1 = 5{,}0292\,\alpha; \quad u_2 = 0{,}1136\,\alpha$$

Rücksubstitution unter Beachtung der Bedingung $\omega > 0$ führt zu den folgenden Lösungen:

$$\omega^2 = u_1 = 5{,}0292\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{5{,}0292\,\alpha} = 2{,}243\sqrt{\alpha}$$

$$\omega^2 = u_2 = 0{,}1136\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{0{,}1136\,\alpha} = 0{,}337\sqrt{\alpha}$$

Aufgabe 58:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

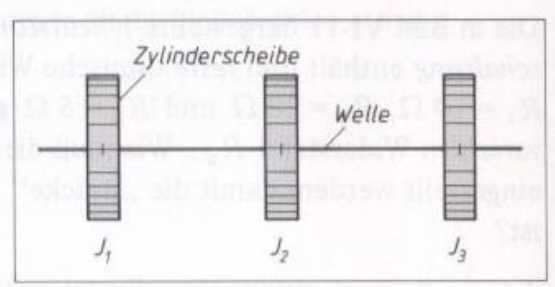
Lösung:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 89$$

Entwicklung nach der 5. Zeile — *Entwicklung nach der 4. Zeile*

Aufgabe 59:

Das Bild zeigt eine elastische Welle mit konstantem Durchmesser, die in symmetrischer Anordnung drei starre Zylinderscheiben vom gleichen Massenträgheitsmoment $J_1=J_2=J_3$ trägt.



Werden die Scheiben gegeneinander verdreht, so treten infolge der elastischen Rückstellmomente sog. Torsionsschwingungen um die Wellenachse auf. Die Kreisfrequenzen ω dieser Eigenschwingungen (auch Eigenkreisfrequenzen genannt) lassen sich dabei aus der Determinantengleichung

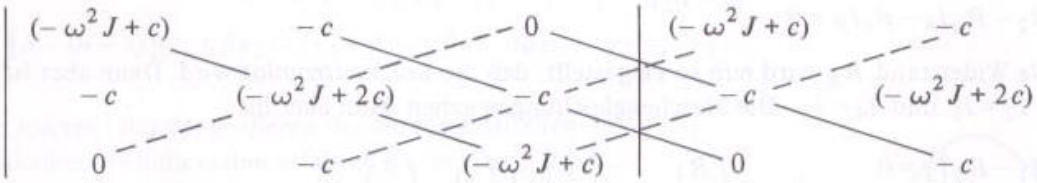
$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 J + c) & -c & 0 \\ -c & (-\omega^2 J + 2c) & -c \\ 0 & -c & (-\omega^2 J + c) \end{vmatrix} = 0$$

berechnen. Wie lauten diese Eigenkreisfrequenzen.

Lösung:

Lösung:

Zunächst berechnen wir die *3-reihige Determinante* nach der *Regel von Sarrus:*



$$D = (-\omega^2 J + c)^2 (-\omega^2 J + 2c) + 0 + 0 - [0 + c^2 (-\omega^2 J + c) + c^2 (-\omega^2 J + c)] =$$
$$= (-\omega^2 J + c)^2 (-\omega^2 J + 2c) - 2c^2 (-\omega^2 J + c) =$$
$$= (-\omega^2 J + c) [(-\omega^2 J + c) (-\omega^2 J + 2c) - 2c^2] =$$
$$= (-\omega^2 J + c) (\omega^4 J^2 - c\omega^2 J - 2c\omega^2 J + 2c^2 - 2c^2) =$$
$$= (-\omega^2 J + c) (\omega^4 J^2 - 3c\omega^2 J) = (-\omega^2 J + c) (\omega^2 J - 3c) \omega^2 J$$

Die gesuchten *Eigenkreisfrequenzen* genügen somit der Gleichung *6. Grades*

$$(-\omega^2 J + c) (\omega^2 J - 3c) \omega^2 J = 0$$

Aus *physikalischen* Gründen ist $\omega > 0$, so daß diese Gleichung nur erfüllt ist, wenn entweder der *erste* Faktor oder aber der *zweite* Faktor *verschwindet*. Wir erhalten daher *zwei* Lösungen. Sie lauten:

$$-\omega^2 J + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{J}}$$

$$\omega^2 J - 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3c}{J}}$$

Das System besitzt somit genau *zwei* Eigenschwingungen mit den *Kreisfrequenzen* $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{J}}$ und $\omega_2 = \sqrt{\frac{3c}{J}}$.

Aufgabe 60:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{vmatrix}$$

Vierte Spalte festsetzen.

Vierte Spalte mal (-5) und auf die zweite Spalte addieren.

$$\begin{vmatrix} 3 & -40 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & -60 & 3 & 12 \\ -2 & 54 & 3 & -10 \end{vmatrix}$$

Vierte Spalte mal (-1) und auf die erste Spalte addieren.

$$\begin{vmatrix} -5 & -40 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -6 & -60 & 3 & 12 \\ 8 & 54 & 3 & -10 \end{vmatrix}$$

Nach der Zweiten Zeile entwickeln.

$$= +(-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & -40 & 7 \\ -6 & -60 & 3 \\ 8 & 54 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & -40 \\ -6 & -60 \\ 8 & 54 \end{matrix}$$

$$= -1 \cdot (900 - 960 - 2268 + 3360 + 810 - 720) = -1122$$

Aufgabe 61:

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 6 & -2 & 5 & -6 \\ 6 & -9 & 3 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Berechnung der Determinante:					
2	-3	1	-2	4	
-4	6	-2	5	-6	
6	-9	3	-4	10	
2	-4	3	2	-3	
-2	5	-3	2	-1	
Erste Zeile mal (-2) und auf die zweite Zeile addieren					
Erste Zeile mal (-3) und auf die dritte Zeile addieren					
Erste Zeile mal (-1) und auf die vierte addieren					
Erste und fünfte Zeile addieren					
2	-3	1	-2	4	
0	0	0	1	2	
0	0	0	2	-2	
0	-1	2	4	-7	
0	2	-2	0	3	
Nach der ersten Spalte entwickeln.					
	0	0	1	2	
2	0	0	2	-2	
	-1	2	4	-7	
	2	-2	0	3	
Die dritte Spalte und die vierte Splate addieren					
	0	0	1	3	
2	0	0	2	0	
	-1	2	4	-3	
	2	-2	0	3	
Nach der zweiten Zeile entwickeln					
	0	0	3		
-4	-1	2	-3	=	**24**
	2	-2	3		

Aufgabe 62:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \\ \text{mit der Kästchenregel folgt} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) \cdot ((-2) \cdot 5 - 11 \cdot (-8)) \\ &= 78 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 63:

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Gleichungen mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) y=3x+22 und y=5x+14

b) y=3x+8 und y=0,5x+2

c) 4x+2y=18 und 7x-y=13

d) 8x-4y=-3 und 14x-2y=8,5

Lösung:

a)

y=3x+22 und y=5x+14

3x+22=5x+14 |-14

3x+8=5x |-3x

8=2x | :2

x=4

3 • 4+22=12+22=34

L={4; 34}

b)

y=3x+8 und y=0,5x+2

3x+8=0,5x+2 |-2

3x+6=0,5x |-3x

6=-2,5x | :(-2,5)

x=-2 2/5

3 • ($-2\frac{2}{5}$)+8= $-7\frac{1}{5}+8=\frac{4}{5}$

$L=\left\{-\frac{12}{5};\frac{4}{5}\right\}$

c)

4x+2y=18 und 7x-y=13

4x+2y=18 |-4x

2y=-4x+18 | :2

y=-2x+9

7x-y=13 |-7x

-y=-7x+13 | • (-1)

y=7x-13

-2x+9=7x-13 |+13

-2x+22=7x |+2x

22=9x | :9

x= $2\frac{4}{9}$

$-2 \bullet 2\frac{4}{9}+9=-4\frac{8}{9}+9=4\frac{1}{9}$

$L=\left\{-\frac{4}{9};\frac{37}{9}\right\}$

d)

8x-4y=-3 und 14x-2y=8,5

8x-4y=-3 |-8x

-4y=-8x-3 | :(-4)

y=2x+ ¾

14x-2y=8,5 |-14x

-2y=-14x+8,5 | :(-2)

y=7x-4,25

2x+ ¾ =7x- $\frac{17}{4}$ |- ¾

2x=7x-5 |-7x

-5x=-5 | :(-5)

x=1

2 • 1+ ¾ =2 ¾

$L=\left\{1;\frac{11}{4}\right\}$

Aufgabe 64:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Gleichungen nach dem Einsetzungsverfahren.

10x-7y+4=0 und 6x-5y=-2

Lösung:

1. Schritt: Auslösen der beiden Gleichungen nach y:

10x-7y+4=0 |-4

10x-7y=-4 |-10x

-7y=-10x-4 | :(-7)

$y=1\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}$

6x-5y=-2 |-6x

-5y=-6x-2 | :(-5)

$y=1\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$

2. Gleichsetzen von I und II und Auflösen der Gleichung nach x:

$1\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}=1\frac{1}{5}x+\frac{2}{5} \quad |-\frac{4}{7}$

$1\frac{3}{7}x=1\frac{1}{5}x-\frac{6}{35} \quad |-1\frac{1}{5}x$

$\frac{8}{35}x=-\frac{6}{35} \quad |:\frac{8}{35}$

$x=-\frac{3}{4}$

3. Einsetzen von x in I

$y=\frac{10}{7}\bullet(-\frac{3}{4})+\frac{4}{7}=-\frac{30}{28}+\frac{16}{28}=-\frac{14}{28}=-\frac{1}{2}$

4. Angabe der Lösungsmenge

$L=\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right\}$

Aufgabe 65:

Berechne den Schnittpunkt der beiden Gleichungen nach dem Additionsverfahren.

6y=9x-81 und 6x-4y=12

Lösung:

1. Schritt:

Rechnung:

6y=9x-81 |:6

y=1 ½ x-13 ½

6x-4y=12 |-6x

-4y=-6x+12 |:(-4)

y=-1 ½ x-3

2. Gleichsetzen von I und II

1 ½ x-13 ½ =1 ½ x-3 |+13 ½

1 ½ x=1 ½ x+10 ½ |-1 ½ x

10 ½=0

3. Angabe der Lösungsmenge

L={}

Aufgabe 66:

Bestimmen Sie die Lösung dieses LGS.

I x+y+z=6

II y+z=3

III z=1

Lösung:

III in II :

y+1=3 |-1

y=2

y=2 und z=1 in I

x+2+1=6 |-3

x=3

Angabe der Lösungsmenge

L={3; 2; 1}

Aufgabe 67:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

I x-3y+2z=-4

II -2y+5z=7

III -5y+4,5z=-6,5

Lösung:

I x-3y+2z=-4

II -2y+5z=7 | • 5

III -5y+4,5z=-6,5 | • 2

I x-3y+2z=-4

II -2y+5z=7

III 16z=48

16z=48 | :16

z=3

III in II :

-2y+5 • 3=7 |-15

$-2y=-8 \quad | :(-2)$

$y=4$

y=4 und z=3 in I

$x-3 \bullet 4+2 \bullet 3=-4$

$x-12+6=-4 \quad |+6$

$x=2$

Angabe der Lösungsmenge

$L=\{2; 4; 3\}$

Aufgabe 68:

Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems.

I 3x-y+4z=12

II x-2y+z=5

III 6x-4y+3z=16

Lösung:

I 3x-y+4z=12 | • (-2)

II x-2y+z=5 | • (-3)

III 6x-4y+3z=16

I 3x-y+4z=12

II 5y+z=-3 | • 2

III -2y-5z=-8 | • 5 +

I 3x-y+4z=12

II 5y+z=-3

III -23z=-46

-23z=-46 | :(-23)

z=2

III in II :

5y+2=-3 |-2

5y=-5 | :5

y=-1

y=-1 und z=2 in I

3x-(-1)+4 • 2=12 |-9

3x=3 |:3

x=1

Angabe der Lösungsmenge

L={1; -1; 2}

Aufgabe 69:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus und der Cramer'schen Regel.

a) I: 4x - 2y + z = 15

II: -x + 3y + 4z = 15

III: 5x - y + 3z = 26

b) I: 2x - 3y + z = 10

II: x + y - 2z = -6

III: 3x - y - 4z = -5

c) I: x + y + z = 1

II: 17x + y - 7z = 9

III: 4x + 2y + z = 3

d) I: 3y - z = 7

II: 2x - 3y + 2z = -21

III: 3x + y = -21

e) I: 2x + 7y - z = 13

II: 17x - 3y + 4z = -9

III: 3x - 2y + z = -5

f) I: 3x - 4y - 6z = 42

II: -x - 2y + 3z = -6

III: 7x + 10y + 6z = 0

Lösungen:

a) (2 / -1 / 5)

b) (0,7 / -2,1 / 2,3)

c) unendlich viele Lösungen

d)(-8 / 3 / 2)

e) L = { }

f) (6 / -3 / -2)

Aufgabe 70:

Bestimme die Lösungsmenge des Systems.

I x-y+z=4

II 3x-y+4z =12

III x-4y+5z=15

Lösung:

I x-y+z=4 | • (-3)

II 3x-y+4z =12

III x-4y+5z=15 | • (-3)

I $2y+z=0$

II $3x-y+4z=12$ +

III $x-4y+5z=15$ $|\bullet(-3)$

I $2y+z=0$ $|\bullet 11$

II $3x-y+4z=12$

III $11y-11z=-33$ $|\bullet(-2)$

III in I:

$2y+2=0 \quad |-2$

$2y=-2 \quad |:2$

$y=-1$

y=-1 und z=2 in II

$3x-(-1)+4\bullet 2=12 \quad |-9$

$3x=3 \quad |:3$

$x=1$

Aufgabe 71:

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichungssysteme.

a) I:4x + 3y = 14
II: 2x - y = 12

b) I: -4x - y = 40
II: x + 5y = 9

c) I: 2x - 6y = 6
II: 5x + 3y = 42

d) I: 4x + 2y = 4
II: -6x + 3y = 33

e) I: 12x + 11y = 18
II: 16x - 7y = -2

f) I: 3x - 10y = 3
II: -9x + 24y = -10

g) I: 14x - 8y = 10
II: -21x + 15y = 60

h) I: 18x + 24y = -132
II: 27x - 40y = 676

i) I: 11x - 10y = 13
II: -8x + 7y = -7

Lösungen:

a) (5 / -2)

b) (-11 / 4)

c) (7,5 / 1,5)

d) (-2,25 / 6,5)

e) (0,4 / 1,2)

f) ($^{14}/_{9}$ / $^{1}/_{6}$)

g) (15 / 25)

h) (8 / -11,5)

i) (-7 / -9)

Angabe der Lösungsmenge

Aufgabe 72:

Tick, Trick und Track sind zusammen 123 Jahre alt. Trick ist 32 Jahre älter als Tick, Track ist 26 Jahre älter als Trick.

Bestimme das jeweilige Alter der drei.

Lösung:

Gleichung:

x+(x+32)+(x+32)+26 = 123

<-> x+x+32+x+32+26 = 123

<-> 3x + 90 = 123

<-> 3x = 33

<-> x = 11

x+32 = 11+32=43

43+26 = 69

Aufgabe 73:

Bestimme die beiden Zahlen, die die Summe 32 ergeben und bei denen die Differenz doppelt so groß ist wie die kleiner der beiden Zahlen.

Lösung:

I: x+y=32 II: x-y=2y

L={24;8)}

Antwort: Die gesuchten Zahlen lauten 8 und 24.

Aufgabe 74:

Die absolut identischen Hansen-Zwillinge und die Schulz-Drillinge wiegen zusammen 348 kg 750 g. Stellt sich jedoch nur ein Hansen-Zwilling mit zwei der Schulz-Drillinge auf die Waage, so zeigt diese lediglich 210 kg an.

Fragestellung: Wie viel wiegen die einzelnen Zwillinge?

Lösung:

I: 2x+3y=348,75 kg II: x+2y=210 kg

L={(67,5 kg ; 71,25 kg)}

Antwort: Ein Hansen-Zwilling wiegt 67,5 kg, ein Schulz-Drilling wiegt 71,25 kg.

Aufgabe 75:

Lösen Sie lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ (a)\quad & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (b)\quad & 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ & x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ (c)\quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d)\quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ & 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \end{aligned}$$

Lösung:

a)

(a) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Zur Berechnung einer Zeilenstufenform subtrahieren wir das 4-fache der 1.Zeile von Zeile 2 und das 2-fache von Zeile 3. Die Matrix wird überführt in:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

Nun subtrahieren wir von Zeile 3 die Zeile 2 und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Die Matrix entspricht dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= -13 \\ 0x_4 &= 5 \Rightarrow 0 \neq 5 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

b)

(b) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array}\right)$$

Subtrahieren wir von Zeile 2 das 2-fache der Zeile 1 und von Zeile 3 die Zeile 1, so erhalten wir die Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Jedoch sehen wir, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Der Rang der erweiterten Systemmatrix ($r = 3$) stimmt nicht mit dem Rang der Systemmatrix ($r = 2$) überein.

c)

(c) Die zum linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Systemmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Von Zeile 2 ziehen wir das 2-fache der ersten Zeile ab und von Zeile 3 ziehen wir das 3 fache der Zeile 1 ab. Wir haben die Matrix überführt in:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \end{array}\right)$$

Von Zeile 3 subtrahieren wir das 4/3-fache der Zeile 2 und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist in Zeilenstufenform, sie entspricht dem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -3x_2 - 3x_3 &= -3 \\ -4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} x_3 &= -1/4 \\ -3x_2 - 3\cdot\left(-1/4\right) &= -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5/4 \\ x_1 + 2\cdot 5/4 + 3\cdot\left(-1/4\right) &= 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3/4 \end{aligned}$$

Als Vektor geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

d)

(d) Die zugehörige erweiterte Matrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Mit dem Gauß Algorithmus berechnet man analog zu Aufgabenteil a) – c) die Zeilenstufenform zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix hat den Rang r =2. Pivotvariablen sind x_1 und x_2, Variable x_3 kann als Parameter frei gewählt werden. Es existieren also unendlich viele Lösungen.

Man erhält die Lösungen:

$$-5x_2 + 11x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{5}x_3$$

$$x_1 + 2(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{5}x_3) - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \tfrac{2}{5} - \tfrac{7}{5}x_3$$

Aufgabe 76:

Christa und Julia haben sich verabredet. Sie starten beide um 15 Uhr mit ihren Fahrrädern in ihren 14 km voneinander entfernten Heimatorten. Christa schafft in jeder Stunde 12, Julia 16 km. Wie weit von Christas Heimatort entfernt treffen sie sich?

Lösung:

Gegeben:

$s = 14\text{km}$

$v_C = 12\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_J = 16\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Wenn die beiden Freundinnen sich treffen sind sie gleich lange unterwegs.

Es gilt:

$t_C = t_J$

Für die bis zum Treffpunkt zurückgelegten Strecken gilt:

$s_C = 14 - s_J$

Mit $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ erhält man:

$\frac{s_C}{v_C} = \frac{s_J}{v_J}$

$\frac{s_C}{12} = \frac{s_J}{16}$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
& \frac{s_C}{12} = \frac{s_J}{16} && \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow\ & 16s_C = 12s_J && \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow\ & s_C = \frac{3}{4}s_J && \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow\ & 14 - s_J = \frac{3}{4}s_J && \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow\ & 4 \cdot (14 - s_J) = 3s_J && \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow\ & 56 - 4s_J = 3s_J && \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow\ & 56 = 7s_J && \wedge\ s_C = 14 - s_J \\
\Leftrightarrow\ & s_J = 8 && \wedge\ s_C = 14 - 8 \\
\Leftrightarrow\ & s_J = 8 && \wedge\ s_C = 6 \\
& L=\{(6|8)\}
\end{aligned}$$

Die beiden Freundinnen treffen sich 8km von Julias bzw. 6 km von Christas Heimatort entfernt.

Aufgabe 77:

Zwei Autofahrer starten gleichzeitig in 55 km voneinander entfernten Ortschaften. Der erste legt 75, der zweite 90 km pro Stunde zurück. Wie weit vom Startort des ersten Fahrers entfernt treffen sie sich?

Lösung:

Gegeben:

$s = 55\text{km}$

$v_A = 75\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_B = 90\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Wenn die beiden Autofahrer sich treffen sind sie gleich lange unterwegs.

Es gilt:

$t_A = t_B$

Für die bis zum Treffpunkt zurückgelegten Strecken gilt:

$s_A = 55 - s_B$

Mit $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ erhält man:

$\frac{s_A}{v_A} = \frac{s_B}{v_B}$

$\frac{s_A}{75} = \frac{s_B}{90}$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
& \frac{s_A}{75} = \frac{s_B}{90} && \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow\ & 90s_A = 75s_B && \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow\ & s_A = \frac{5}{6}s_B && \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow\ & 55 - s_B = \frac{5}{6}s_B && \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow\ & 6 \cdot (55 - s_B) = 5s_B && \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow\ & 330 - 6s_B = 5s_B && \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow\ & 330 = 11s_B && \wedge\ s_A = 55 - s_B \\
\Leftrightarrow\ & s_B = 30 && \wedge\ s_A = 55 - 30 \\
\Leftrightarrow\ & s_B = 30 && \wedge\ s_A = 25 \\
& L=\{(30|25)\}
\end{aligned}$$

Die beiden Autofahrer treffen sich 30km bzw. 25 km von ihren Startorten entfernt.

Aufgabe 78:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Wählen Sie selbst einen Lösungsweg!

a) $4y-19 = y+20$
$5x+2y = 126$

b) $20x-50 = 29y$
$2x+5y = 8y$

c) $3x+50 = 6x+5y$
$2y+10 = 3x+2y$

d) $x = 8y-6$
$x = 3y+4$

e) $y = 2x-3y+4$
$x = 2x-3y+4$

f) $3(2y+3) = 2x+7y$
$4(x+2) = 5x-3y$

g) $\frac{25x-3}{12} - \frac{20y-1}{18} = 2x-y$
$\frac{x+4}{9} = \frac{y+3}{5}$

h) $\frac{x+y}{2} + \frac{4y}{3} = 10$
$5-y = \frac{x+y}{2}$

i) $\frac{7(x-y)}{11} + \frac{x}{4} = 4.8$
$\frac{7(x-y)}{11} - \frac{3x}{4} = 2.4$

Lösung:

a) (20/13), b) (75/50), c) (10/3 /8), d) (10/2), e) (2/2), f) (5/–1), g) (5/2), h) (–35/15), i) (2.4/–4.2).

Aufgabe 79:

a) Suchen Sie zwei Zahlen, deren Summe 34 und deren Differenz 16 ist.

b) Eine Zahl ist um 8 grösser als eine andere, aber nur halb so groß wie deren Dreifaches. Um welche beiden Zahlen handelt es sich?

c) Gibt es zwei natürliche Zahlen mit dem Mittelwert 17, von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere.

Lösung:

Aufgabe 80:

Ermitteln Sie die vierstellige Zahl mit folgenden Eigenschaften:

Die Quersumme beträgt 14.

Die Summe von Tausender- und Einerziffer ist gleich der Summe von Hunderter- und Zehnerziffer.

Die Summe von Tausender- und Hunderterziffer ist gleich der Summe von Zehner- und Einerziffer.

Die Tausenderziffer ist um 1 grösser als die Einerziffer.

Lösung:

4343

Aufgabe 81:

In einem mechanischen Uhrwerk wird ein großes Zahnrad von einem kleinen Zahnrad angetrieben. Wenn das kleine Rad 16 Umdrehungen gemacht hat, hat sich das große Rad nur 3-mal gedreht. Das kleine Rad hat 39 Zähne weniger als das große Zahnrad.

Berechne die Anzahl der Zähne von beiden Rädern.

Lösung:

$$I) \quad x = y - 39$$
$$II) \quad 16 \cdot x = 3 \cdot y$$

Lösung:

$$x = 9 \quad y = 48$$

Aufgabe 82:

Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $a \in R$ auf Lösbarkeit.

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 &+ x_2 &+ x_3 &= a \\ x_1 &+ a \cdot x_2 &+ x_3 &= 1 \\ x_1 &+ x_2 &+ a \cdot x_3 &= a \end{aligned}$$

a) Für welches a erhält man unendlich viele Lösungen?

b) Für welches a erhält man keine Lösung?

c) Für welches a erhält man eine eindeutige Lösung?

Lösung:

Lösung: Man vertauscht die Gleichungen (1) und (3), damit der Parameter in der ersten Spalte so weit wie möglich nach unten wandert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array}$$

Mit $(\text{II}') = (-1)\cdot(\text{I}) + (\text{II})$ und $(\text{III}') = (-a)\cdot(\text{I}) + (\text{III})$ folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a-a^2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II}') \\ \text{(III}') \end{array}$$

Durch Addition $(\text{III}'') = (\text{II}') + (\text{III}')$ erhält man schließlich die Zeilenstufenform (obere Dreiecksmatrix)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & -a^2+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II}') \\ \text{(III}'') \end{array} \Bigg\} \quad (*)$$

Nun muss man die Diagonalelemente auf Nullstellen untersuchen:

$$\begin{aligned} a - 1 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = 1 \\ -a^2 - a + 2 &= 0 \qquad \mid \cdot(-1) \\ a^2 + a - 2 &= 0 \\ a_{1;2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm 3}{2} \\ a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 &= -2 \end{aligned}$$

Fallunterscheidung

1.Fall: $a = 1$

Durch Einsetzen von $a = 1$ in das zuletzt erhaltene LGS $(*)$ bekommt man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses LGS hat unendlich viele Lösungen. Mit $x_2 = s$ und $x_3 = t$ erhält man

$$\begin{aligned} x_1 + s + t &= 1 \\ \Longrightarrow \quad x_1 &= 1 - s - t \end{aligned}$$

bzw. den allgemeinen Lösungsvektor (mit $s, t \in \mathbb{R}$)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.Fall: $a = -2$

Durch Einsetzen von $a = -2$ in das LGS $(*)$ bekommt man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Dieses LGS hat keine Lösung.

3.Fall: $a \in \mathbb{R} \backslash \{-2\,;\,1\}$

Aus $(*)$ folgt mit der Linearfaktorzerlegung über die Nullstellen

$$a^2 + a - 2 = (a-1) \cdot (a+2)$$

und damit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & (a-1)\cdot(a+2) & (a-1)\cdot(a+1) \end{array}\right)$$

Dividiert man die letzten beiden Zeilen durch $(a-1) \neq 0$, dann ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & a+1 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Gleichung folgt durch Division mit $a + 2 \neq 0$

$$x_3 = \frac{a+1}{a+2}$$

Einsetzen in die mittlere Gleichung liefert

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{a+1}{a+2} &= -1 \qquad | + \frac{a+1}{a+2} \\ x_2 &= -1 \cdot \frac{a+2}{a+2} + \frac{a+1}{a+2} \\ \Longrightarrow \quad x_2 &= \frac{-1}{a+2} \end{aligned}$$

und schließlich aus der ersten Zeile

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{-1}{a+2} + a \cdot \frac{a+1}{a+2} &= a \\ x_1 &= a \cdot \frac{a+2}{a+2} + \frac{1}{a+2} - \frac{a \cdot (a+1)}{a+2} \\ &= \frac{a^2 + 2a + 1 - a^2 - a}{a+2} \\ \Longrightarrow \quad x_1 &= \frac{a+1}{a+2} \end{aligned}$$

Der Lösungsvektor im Fall $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$ lautet daher

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{a+2} \\ \frac{-1}{a+2} \\ \frac{a+1}{a+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a+2} \cdot \begin{pmatrix} a+1 \\ -1 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 83:

Für welche Werte des Parameters a (a>0) hat das Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 2y & + & z = 1 \\ 2x & + & y & + & az = 0 \\ & & 4ay & + & z = 2a+1 \end{array}$$

unendlich viele Lösungen?

Welche Gestalt hat in diesem Fall die Lösungsmenge?

Lösung

Elimination der Unbekannten x und y liefert

$(12a^2 - 8a + 1)\, z = -6a + 1$

Unendliche viele Lösungen im Fall

$a = \frac{1}{6}$

Wird z beliebig gewählt, gilt

$x = \frac{2}{3}z - 1, y = -\frac{3}{2}z + 2$.

Aufgabe 84:

Im Maschinenbau werden Federn und Membranen oft aus Kupferlegierungen hergestellt, die 90% Kupfer, 5% Zink und 5% Zinn enthalten. Kupferhütten bieten verschiedene Legierungen an. Zur Auswahl stehen nun drei Legierungen A, B und C, die sich in

der Zusammensetzung unterscheiden. Der Anteil dieser Größen in diesen Legierungen ist der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

	A	B	C
Kupferanteil (in %)	80	95	80
Zinkanteil (in %)	20	0	10
Zinnanteil (in %)	0	5	10

Entscheiden Sie, ob sich die gewünschte Legierung aus den drei angebotenen zusammenschmelzen lässt. Wenn möglich berechnen Sie die Lösungsmenge, mit Hilfe des Cramer'schen Determinatenverfahrens.

Lösung:

	0,80	0,95	0,80		
D=	0,20	0,00	0,10	=	-0,015
	0,00	0,05	0,10		
	0,90	0,95	0,80		
D_1=	0,05	0,00	0,10	=	-0,0025
	0,05	0,05	0,10		
	0,80	0,90	0,80		
D_2	0,20	0,05	0,10	=	-0,01
	0,00	0,05	0,10		
	0,80	0,95	0,90		
D_3=	0,20	0,00	0,05	=	-0,0025
	0,00	0,05	0,05		
x_1=	0,167				
x_2=	0,667				
x_3=	0,167				

0,80a + 0,95b + 0,80c = 0,90

0,20a + 0,00b + 0,10c = 0,05

0,00a + 0,05b + 0,10c = 0,05

Aufgabe 85:

Lösen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem mit Hilde der Cramer'schen Regel.

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$
$$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

Lösung:

$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$

$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$

$$D := \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad D = 3 \quad \text{Es existiert eine eindeutige Lösung}$$

$$D1 := \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad D1 = 3 \quad x_1 := \frac{D1}{D} \quad x_1 = 1$$

$$D2 := \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -5 & -5 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D2 = 6 \quad x_2 := \frac{D2}{D} \quad x_2 = 2$$

$$D3 := \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad D3 = 9 \quad x_3 := \frac{D3}{D} \quad x_3 = 3$$

Aufgabe 86:

Welche Lösungsmenge hat das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x \quad &+ \quad z &= 1 \\ x + y \quad &&= a \\ cx + y + z &&= 2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für dieses Gleichungssystem die Parameter a und c so, dass es

a) eine Lösung

b) keine Lösung

c) unendlich viele Lösungen

gibt.

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ c & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ (1)*(-1)+(2) ; (1)*(-c)+(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1-c & 2-c \end{array}\right) \text{(2)*(-1)+(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2-c & 3-a-c \end{array}\right) \text{(2)*(-1)+(3)}$$

Für $c \neq 2$ gibt es immer genau eine Lösung. Ist $c = 2$ so gibt es für $a = 1$ unendlich viele Lösungen, für $a \neq 1$ keine Lösung.

Aufgabe 87:

Es ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$7x_1 - 3x_2 = 5$$
$$-28x_1 + ax_2 = b$$

a) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

b) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

c) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

Lösung:

Es ist folgendes Gleichungssystem gegeben.

$$7x_1 - 3x_2 = 5$$
$$-28x_1 + ax_2 = b$$

a) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. 5

b) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat. 5

c) Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung hat. 5

a)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 5 \\ -28 & a & b \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot 4 \end{matrix} \rightarrow + \quad \Rightarrow a = 12 \quad b = -20$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 5 \\ 0 & a-12 & b+20 \end{array}\right)$$

b) $a = 12;\ b \neq -20$ oder $a \neq 12;\ b = -20$

c) $a \neq 12$; b beliebig

Aufgabe 88:

Gegeben ist das von den reellen Parametern a abhängige lineare Gleichungssystem:

$$2x - a \cdot y + 3z = 11$$

$$x - a \cdot y + 2z = 3$$

$$-2x - 4y + z = 1$$

Für welche Werte von a erhält man keine Lösung?

Lösung:

$2x - a \cdot y + 3z = 11$ (I)

$x - a \cdot y + 2z = 3$ (II)

$-2x - 4y + z = 1$ (III)

(I)-2(II): $a \cdot y - z = 5$ (IV) 1P

2(II)+(III): $(-2a - 4) \cdot y + 5z = 7$ (V) 1P

5(IV)+(V): $(3a - 4) \cdot y = 32$ 1P

(1) Fall: $3a - 4 \neq 0$ $\quad y = \frac{32}{3a - 4}$ 2P

in (IV): $a \cdot \frac{32}{3a - 4} - z = 5 \quad z = \frac{32a - 15a + 20}{3a - 4} = \frac{17a + 20}{3a - 4}$ 2P

in (II): $x - a \cdot \frac{32}{3a - 4} + 2\frac{17a + 20}{3a - 4} = 3$

$$x = \frac{32a - 34a - 40 + 9a - 12}{3a - 4} = \frac{7a - 52}{3a - 4}$$ 2P

(2) Fall: $3a - 4 = 0$ => immer falsche Aussage, L = { } 1P

$a := -4$

$x := 5 \quad y := -2 \quad z := 3$

Aufgabe 89:

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$2x - 2y = -10$$

$$-4x - a \cdot y = 2$$

$$4x + 2y + 2z + 2u = -8$$

$$3x + y - z - 2u = 1$$

mit dem reellen Parameter a.

Welchen Wert muss a annehmen, dass keine Lösung existiert?

Lösung:

$2x - 2y = -10$ (I)

$-4x - a \cdot y = 2$ (II)

$4x + 2y + 2z + 2u = -8$ (III)

$3x + y - z - 2u = 1$ (IV)

2(I)+(II): $-4y - a \cdot y = -18$ => $(4 + a) \cdot y = 18$ => keine Lösung, falls a = -4

setze $a := 2$ => $y := 3$

in (I): $-4x - 6 = 2$ => $x := -2$ 2P

(III)+(IV): $7x + 3y + z = -7$

x,y einsetzen: $-5 + z = -7$ => $z := -2$ 2P

in (IV): $3x + y - z - 2u = 1$

einsetzen: $-1 - 2 \cdot u = 1$ => $u := -1$ 1P

Aufgabe 90:

Gegeben ist das Lineare Gleichungssystem

$3x - 2y - 2z = 16$

$-2x - c \cdot y + z = -5$

$5x + 7y - 4z = 8$

mit dem reellen Parameter c.

Welchen Wert muss c annehmen, dass keine Lösung existiert?

Lösung:

3.1

$x := 2 \quad y := -2 \quad z := -3 \quad c := 1$

11 P

$$3x - 2y - 2z = 16 \quad \text{I}$$
$$-2x - c \cdot y + z = -5 \quad \text{II}$$
$$5x + 7y - 4z = 8 \quad \text{III}$$

I+2II:

$$3x - 2y - 2z + 2 \cdot (-2x - c \cdot y + z) = 16 + 2 \cdot (-5)$$
$$-x - 2 \cdot y - 2 \cdot c \cdot y = 6 \quad \text{IV}$$

2I-III:

$$2 \cdot (3x - 2y - 2z) - (5x + 7y - 4z) = 2 \cdot 16 - 8$$
$$x - 11 \cdot y = 24 \quad \text{V}$$

IV+V:

$$-x - 2 \cdot y - 2 \cdot c \cdot y + x - 11 \cdot y = 6 + 24$$
$$-13 \cdot y - 2 \cdot c \cdot y = 30 \quad \text{VI}$$
$$-y \cdot (13 + 2 \cdot c) = 30$$
$$\Rightarrow \quad c \neq \frac{-13}{2}$$

=> VI: $c := 1$ $\quad$ V: $y := -2$ $\quad$ I: $x := 2$ $\quad$ $z := -3$

Aufgabe 91:

Stellt man in einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 9 die dritte Ziffer an den Anfang, so nimmt die Zahl um 135 zu.

Addiert man dagegen zur dritten Ziffer 3, so erhält man den fünften Teil der aus den ersten beiden Ziffern bestehenden Zahl.

Wie heißt die Zahl?

Lösung:

$100 \cdot x + 10 \cdot y + 1 \cdot z \quad \Rightarrow dreistelligeZahl:\ \text{x y z} \ \Rightarrow\ \text{mit}\ x + y + z = 9$

Die 3. Ziffer wird an den Anfang gestellt: z x y

$$100 \cdot x + 10 \cdot y + 1 \cdot z + 135 = 100 \cdot z + 10 \cdot x + y \quad \Rightarrow \quad 90x + 9y - 99z = -135$$

$$z + 3 = \frac{10 \cdot x + y}{5} \quad \Rightarrow \quad 10x + y - 5z = 15$$

$$\begin{array}{lrrrr} I. & x + & y + & z = & 9 \\ II. & 90x + & 9y - & 99z = & -135 \\ III. & 10x + & y - & 5z = & 15 \end{array}$$

$x = 4\ ;\ y = 0\ ;\ z = 5 \qquad L = \{(4 \mid 0 \mid 5)\}$

Die gesuchte Zahl heißt 405. Wird die dritte Ziffer an den Anfang gestellt, heißt sie 540.
Kontrolle: $540 - 405 = 135$

Aufgabe 92:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &= t^2 \\ 4x_1+3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Man schreibt das LGS in Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t^2 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

und formt es so um, dass eine Dreiecksmatrix entsteht.

Dazu ersetzt man die zweite Zeile durch 4.1.Zeile + (-1).2.Zeile und erhält:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t^2 \\ 0 & 5 & 4t^2-1 \end{array}\right)$$

Aus der zweiten Zeile folgt: $x_2 = \frac{1}{5}(4t^2-1)$. Dies eingesetzt in die erste Zeile ergibt:
$x_1 = t^2-2x_2 = t^2-\frac{2}{5}(4t^2-1) = \frac{1}{5}(2-3t^2)$.

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist damit eine Lösung $(x_1|x_2)$gefunden.

Aufgabe 93:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= t \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= t^2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 3t-1 \end{aligned}$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Man schreibt das LGS in Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t \\ 1 & 1 & -3 & t^2 \\ 2 & 4 & -4 & 3t-1 \end{array}\right)$$

und formt es so um, dass eine Dreiecksmatrix entsteht. Dazu ersetzen wir die zweite Zeile durch 1.Zeile + (-1).2.Zeile

und die dritte Zeile durch 2.1.Zeile + (-1).3.Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t^2 \\ 0 & 1 & 3 & (t-t^2) \\ 0 & 0 & 4 & (2t^2-3t+1) \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile folgt: $x_3 = \frac{1}{4}(2t^2-3t+1)$.

Dies eingesetzt in die zweite Zeile:
$x_2 = (t-t^2)-3x_3 = (t-t^2)-\frac{3}{4}(2t^2-3t+1) = -\frac{5}{2}t^2+\frac{13}{4}t-\frac{3}{4}$

und nun x3 und x2 eingesetzt in die erste Zeile:
$x_1 = t-2x_2 = t-(-\frac{5}{2}t^2+\frac{13}{4}t-\frac{3}{4}) = \frac{5}{2}t^2-\frac{9}{4}t+\frac{3}{4}$

d.h. für jedes $t \in \mathbb{R}$ erhält man eine Lösung $(x_1|x_2|x_3)$.

Aufgabe 94:

Für $k \in R$ ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$4x_1 + 2x_2 + (2k-4)x_3 = 2$

$12x_1 - 6x_2 + (3k-3)x_3 = 3k$

$(k^2-k-6)x_3 = k^2-4$

Untersuchen Sie, für welche Werte von k das lineare Gleichungssystem unlösbar, mehrdeutig lösbar bzw. eindeutig lösbar ist.

Geben Sie eine Lösung an, bei der $x_3 = 0$ ist.

Lösung:

Zunächst wird das LGS auf Stufenform gebracht.
Hierzu muss der Ausdruck $12x_1$ auf Null gebracht werden.

$$\begin{array}{llll} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = \quad 2 \quad |\cdot(-3) \\ 12x_1 & -6x_2 & +(3k-3)x_3 & = \quad 3k \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = \quad k^2-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = \quad 2 \\ & -12x_2 & +(-3k+9)x_3 & = \quad -6+3k \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = \quad k^2-4 \end{array}$$

Wenn $k^2-k-6 = 0$ ergibt, liegt ein Sonderfall (das heißt unlösbar oder mehrdeutig lösbar) vor.

$k^2-k-6=0 \Rightarrow k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$ und damit k = 3 oder k = -2.

Für k = 3 lautet die letzte Zeile: $0x_3 = 5$, was zu einem Widerspruch führt.
Daher besitzt das LGS für k = 3 keine Lösung.

Für k = -2 lautet die letzte Zeile $0x_3 = 0$, was zu einer wahren Aussage 0 = 0 führt.
Daher besitzt das LGS für k = -2 unendlich viele Lösungen.

Für alle anderen Werte von k besitzt das LGS eine eindeutige Lösung.

Eine Lösung für $x_3 = 0$ erhält man dadurch, dass man $x_3 = 0$ in das LGS direkt einsetzt:

$$\begin{array}{llll} 4x_1 & +2x_2 & = \quad 2 \\ & -12x_2 & = \quad -6+3k \\ & 0 & = \quad k^2-4 \end{array}$$

Aus der 3.Zeile ergeben sich zwei mögliche Lösungen: $k = \pm 2$

Für k =2 erhält man aus der 2.Zeile $x_2 = 0$ und aus der 1.Zeile $x_1 = 0{,}5$.
Eine Lösung lautet also (0,5/0/0).

Für k = -2 erhält man aus der 2.Zeile $x_2 = 1$ und aus der 1.Zeile $x_1 = 0$.
Eine andere Lösung lautet also (0/1/0).

Aufgabe 95:

Lösen Sie die folgenden *homogenen* linearen (m, n)-Systeme:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{array}{rrrrr} u & + & 3v & + & 2w & = & 0 \\ 2u & - & 18v & + & w & = & 0 \\ -6u & + & 2v & + & 3w & = & 0 \\ 3u & + & v & + & 5w & = & 0 \end{array}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -10 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

Ein *homogenes* lineares (m, n)-System $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist *stets* lösbar. Die Lösungsmenge hängt noch vom Rang r der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ab, wobei gilt:

$r = n \quad \Rightarrow$ genau *eine* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (sog. „triviale" Lösung, alle Unbekannten haben den Wert *Null*)

$r < n \quad \Rightarrow$ *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ voneinander unabhängigen *Parametern*

a) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ auf *Trapezform*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} : 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +Z_1 \\ -Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & -6 \\ 0 & -12 & -1 & 3 \end{pmatrix} : 2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -12 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*$$

$$r = \mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}^*) = 3\,, \quad n = 4$$

Es gibt *unendlich* viele Lösungen mit genau einem Parameter, da $n - r = 4 - 3 = 1$ ist (wir wählen $x_4 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ als Parameter). Das *gestaffelte* LGS $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lautet wie folgt (wir lösen es sukzessive von unten nach oben):

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 0 + 3\lambda - \lambda = 2x_1 + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\lambda$$

$$4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x_2 + 3\lambda - 3\lambda = 4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

$$2x_3 - 6\underbrace{x_4}_{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 - 6\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3\lambda$$

Lösung: $x_1 = -\lambda,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3\lambda,\ x_4 = \lambda$ (mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$)

Kontrolle (Einsetzen der gefundenen parameterabhängigen Werte in die drei Ausgangsgleichungen):

(I) $4x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4\lambda + 0 + 6\lambda - 2\lambda = 0$

(II) $-2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 2\lambda + 0 + 3\lambda - 5\lambda = 0$

(III) $2x_1 - 7x_2 + 2x_4 = -2\lambda - 0 + 2\lambda = 0$

b) In der Matrizendarstellung lautet dieses *homogene* $(4,3)$-System wie folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -18 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{0}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Wir bringen die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ zunächst auf *Trapezform* (mit Hilfe elementarer Umformungen in den Zeilen):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -18 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ 6Z_1 \\ -3Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -24 & -3 \\ 0 & 20 & 15 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :3 \\ :5 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2Z_2 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^* \leftarrow \text{Nullzeile}$$

$$r = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3\,, \quad n = 3$$

Das homogene LGS ist wegen $r = n = 3$ nur *trivial* lösbar, d. h. $u = v = w = 0$.

Lösung: $u = 0,\ v = 0,\ w = 0$.

c) Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ zunächst auf *Trapezform*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -10 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ -3Z_1 \\ -5Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 12 & 1 & -9 \\ 0 & -4 & 8 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ \\ :2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 12 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3Z_2 \\ +Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2Z_4 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^* \leftarrow \text{Nullzeile}$$

Anmerkung: Am Schluss wurden die Spalten 3 und 4 miteinander *vertauscht*. Auch diese Operation ist eine *äquivalente* Umformung, da sie lediglich eine *Umstellung* der Unbekannten bedeutet, hier also die Unbekannten x_3 und x_4 miteinander vertauscht.

$$r = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3\,, \quad n = 5$$

Es gibt somit *unendlich* viele Lösungen mit $n - r = 5 - 3 = 2$ voneinander unabhängigen Parametern. Wir lösen jetzt das erhaltene *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ von unten nach oben (Parameter sind $x_3 = \lambda$ und $x_5 = \mu$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2(2\lambda - \mu) - \lambda + 4\mu = x_1 + 4\lambda - 2\mu - \lambda + 4\mu =$$
$$= x_1 + 3\lambda + 2\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3\lambda - 2\mu$$

$$2x_2 + x_4 - 4x_3 - x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + 3\mu - 4\lambda - \mu = 2x_2 + 2\mu - 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2\lambda - \mu$$

$$2x_4 - 6x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_4 - 6\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 3\mu$$

Lösung: $x_1 = -3\lambda - 2\mu,\ x_2 = 2\lambda - \mu,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = 3\mu,\ x_5 = \mu$ (mit $\lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}$)

Kontrolle (Einsetzen der gefundenen parameterabhängigen Werte in die Ausgangsgleichungen):

(I) $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_5 = -3\lambda - 2\mu + 2(2\lambda - \mu) - \lambda + 4\mu =$
$$= -3\lambda - 2\mu + 4\lambda - 2\mu - \lambda + 4\mu = 0$$

(II) $2x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2(-3\lambda - 2\mu) + 8(2\lambda - \mu) - 10\lambda + 6\mu + 6\mu =$
$$= -6\lambda - 4\mu + 16\lambda - 8\mu - 10\lambda + 6\mu + 6\mu = 0$$

(III) $3x_1 + 9x_3 + x_4 + 3x_5 = 3(-3\lambda - 2\mu) + 9\lambda + 3\mu + 3\mu =$
$$= -9\lambda - 6\mu + 9\lambda + 3\mu + 3\mu = 0$$

(IV) $5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 5(-3\lambda - 2\mu) + 6(2\lambda - \mu) + 3\lambda + 6\mu + 10\mu =$
$$= -15\lambda - 10\mu + 12\lambda - 6\mu + 3\lambda + 6\mu + 10\mu = 0$$

Aufgabe 96:

Lösen Sie die folgenden *inhomogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der *Cramerschen Regel*:

a)
$$\begin{aligned} -x + 10y + 5z &= 3 \\ 3x - 6y - 2z &= -2 \\ -8x + 14y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Das LGS lautet in der *Matrizendarstellung* wie folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die benötigten 3-reihigen Determinanten $D = \det \mathbf{A}$, D_1, D_2 und D_3 nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 10 \\ 3 & -6 \\ -8 & 14 \end{matrix}}_{D = \det \mathbf{A}} \quad \Rightarrow \quad D = 24 + 160 + 210 - 240 - 28 - 120 = 6$$

„Hilfsdeterminanten" D_1, D_2 und D_3 (in D werden der Reihe nach die 1., 2. und 3. Spalte durch den Spaltenvektor der rechten Seite des LGS ersetzt):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 5 \\ -2 & -6 & -2 \\ 6 & 14 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 10 \\ -2 & -6 \\ 6 & 14 \end{matrix}}_{D_1} \quad \Rightarrow \quad D_1 = -72 - 120 - 140 + 180 + 84 + 80 = 12$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -2 \\ -8 & 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \\ -8 & 6 \end{matrix}}_{D_2} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 8 + 48 + 90 - 80 - 12 - 36 = 18$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 10 & 3 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 10 \\ 3 & -6 \\ -8 & 14 \end{matrix}}_{D_3} \quad \Rightarrow \quad D_3 = 36 + 160 + 126 - 144 - 28 - 180 = -30$$

Die *Cramersche Regel* liefert die folgende Lösung:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{6} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{18}{6} = 3, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-30}{6} = -5$$

Lösung: $x = 2,\ y = 3,\ z = -5$

b) Die Berechnung der Determinante $D = \det \mathrm{A}$ und der „Hilfsdeterminanten“ D_1, D_2 und D_3 erfolgt jeweils nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}}_{D = \det \mathrm{A}} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D = -50 - 6 - 12 + 5 + 16 + 45 = -2$$

Hilfsdeterminanten D_1, D_2 und D_3:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 12 & -4 & 5 \end{vmatrix}}_{D_1} \begin{matrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \\ 12 & -4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_1 = -25 - 72 - 12 + 60 + 8 + 45 = 4$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 12 & 5 \end{vmatrix}}_{D_2} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 12 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 30 + 2 + 36 - 3 - 48 - 15 = 2$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix}}_{D_3} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_3 = -120 - 9 - 12 + 5 + 24 + 108 = -4$$

Die *Cramersche Regel* führt zu der folgenden Lösung:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{-2} = -2\,, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1\,, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Lösung: $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 97:

Der in Bild I-3 skizzierte Balken der Länge $2a$ mit loser Einspannung am linken Ende und schrägem Loslager am rechten Ende wird in der Balkenmitte durch eine schräg unter dem Winkel $\alpha > 0$ angreifende konstante Kraft F belastet.

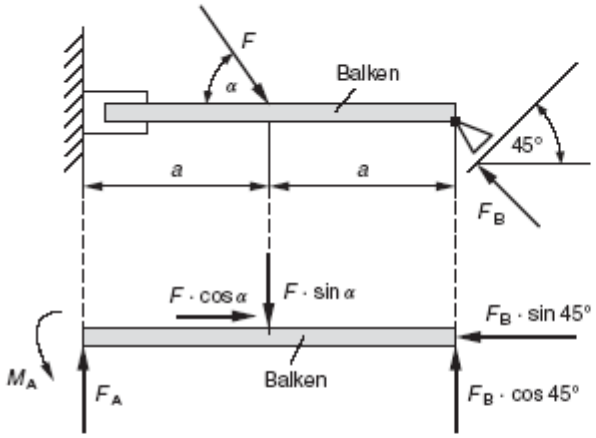


Bild I-3

Die beiden *Lagerkräfte* F_A und F_B sowie das *Moment* M_A genügen dabei dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F \cdot \sin\alpha \\ aF \cdot \sin\alpha \\ 2F \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Cramerschen Regel* die unbekannten Kräfte und Momente in Abhängigkeit vom Winkel α.

Lösung:

Für die Berechnung der drei Unbekannten F_A, F_B und M_A benötigen wir die Determinante $D = \det \mathrm{A}$ der Koeffizientenmatrix A sowie die aus D gewonnenen „Hilfsdeterminanten" D_1, D_2 und D_3 (in D wird der Reihe nach die erste, zweite bzw. dritte Spalte durch den Spaltenvektor c der rechten Seite des LGS ersetzt). Wir berechnen diese Determinanten jeweils nach *Laplace* durch Entwicklung nach möglichst günstigen Zeilen bzw. Spalten.

Koeffizientendeterminante $D = \det \mathrm{A}$

$$D = \det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der *1. Spalte*, wobei nur das Element $a_{11} = 2$ einen Beitrag leistet:

$$D = a_{11}A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = a_{11}D_{11} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 2\,(0 - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

Hilfsdeterminante D_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2F \cdot \sin\alpha & \sqrt{2} & 0 \\ aF \cdot \sin\alpha & a\sqrt{2} & 1 \\ 2F \cdot \cos\alpha & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der *3. Spalte*, wobei nur das Element $a_{23} = 1$ einen Beitrag leistet:

Aufgabe 98:

Das skizzierte Rollensystem enthalt in symmetrischer Anordnung drei *gleiche* Massen $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_3 = \mathrm{m}$ die durch ein über Rollen führendes Seil miteinander verbunden sind. Die noch unbekannten Beschleunigungen $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ und $\mathrm{a}_3$dieser Massen sowie die im Seil wirkende konstante Seilkraft Fs lassen sich mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ F_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot g \\ m \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen (wegen der Symmetrie gilt $a_1 = a_2$).

Welchen Wert besitzen diese Größen?

Anmerkung: Rolle und Seil werden als masselos angenommen, Reibungskräfte vernachlässigt (g: Erdbeschleunigung).

Lösung:

Wir bringen zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 1 & mg \\ 0 & m & 4 & mg \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 4 & mg \\ m & 0 & 1 & mg \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -m \cdot Z_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 4 & mg \\ 0 & -2m & 1 & mg \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2Z_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 4 & mg \\ 0 & 0 & 9 & 3mg \end{array}\right)$$

Da es *keine* Nullzeilen gibt, haben Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix den *gleichen* Rang $r = 3$. Das quadratische LGS ist somit *eindeutig* lösbar. Die Lösung erhalten wir wie folgt aus dem *gestaffelten* System (von unten nach oben gelöst):

$$a_1 + 2a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 - \frac{2}{3}g = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{2}{3}g$$

$$ma_3 + 4F_S = mg \quad \Rightarrow \quad ma_3 + \frac{4}{3}mg = mg \quad \Rightarrow \quad ma_3 = -\frac{1}{3}mg \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}g$$

$$9F_S = 3mg \quad \Rightarrow \quad F_S = \frac{1}{3}mg$$

Lösung: $a_1 = a_2 = \frac{2}{3}g, \quad a_3 = -\frac{1}{3}g, \quad F_S = \frac{1}{3}mg$

Physikalische Deutung: Die beiden äußeren Massen bewegen sich nach *unten*, die mittlere Masse mit *halb* so großer Beschleunigung nach *oben*.

$$D_1 = a_{23}A_{23} = a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = -a_{23}D_{23} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2F \cdot \sin\alpha & \sqrt{2} & 0 \\ aF \cdot \sin\alpha & a\sqrt{2} & 1 \\ 2F \cdot \cos\alpha & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2F \cdot \sin\alpha & \sqrt{2} \\ 2F \cdot \cos\alpha & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -(2\sqrt{2}F \cdot \sin\alpha - 2\sqrt{2}F \cdot \cos\alpha) = 2\sqrt{2}F(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Hilfsdeterminante D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2F \cdot \sin\alpha & 0 \\ 0 & aF \cdot \sin\alpha & 1 \\ 0 & 2F \cdot \cos\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der 1. Spalte
(nur das Element $a_{11} = 2$ liefert einen Beitrag):

$$D_2 = a_{11}A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = a_{11}D_{11} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2F \cdot \sin\alpha & 0 \\ 0 & aF \cdot \sin\alpha & 1 \\ 0 & 2F \cdot \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} aF \cdot \sin\alpha & 1 \\ 2F \cdot \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2(0 - 2F \cdot \cos\alpha) = -4F \cdot \cos\alpha$$

Hilfsdeterminante D_3

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 2F \cdot \sin\alpha \\ 0 & a\sqrt{2} & aF \cdot \sin\alpha \\ 0 & \sqrt{2} & 2F \cdot \cos\alpha \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der 1. Spalte
(nur das Element $a_{11} = 2$ liefert einen Beitrag):

$$D_3 = a_{11}A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = a_{11}D_{11} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 2F \cdot \sin\alpha \\ 0 & a\sqrt{2} & aF \cdot \sin\alpha \\ 0 & \sqrt{2} & 2F \cdot \cos\alpha \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a\sqrt{2} & aF \cdot \sin\alpha \\ \sqrt{2} & 2F \cdot \cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2\sqrt{2}aF \cdot \cos\alpha - \sqrt{2}aF \cdot \sin\alpha) = 2\sqrt{2}aF(2 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$$

Berechnung der drei Unbekannten nach der Cramerschen Regel

$$F_A = \frac{D_1}{D} = \frac{2\sqrt{2}F(\cos\alpha - \sin\alpha)}{-2\sqrt{2}} = -F(\cos\alpha - \sin\alpha) = F(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$F_B = \frac{D_2}{D} = \frac{-4F \cdot \cos\alpha}{-2\sqrt{2}} = \frac{2F \cdot \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}F \cdot \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}F \cdot \cos\alpha$$

$$M_A = \frac{D_3}{D} = \frac{2\sqrt{2}aF(2 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)}{-2\sqrt{2}} = -aF(2 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha) = aF(\sin\alpha - 2 \cdot \cos\alpha)$$

Lösung: $F_A = F(\sin\alpha - \cos\alpha)$, $F_B = \sqrt{2}F \cdot \cos\alpha$, $M_A = aF(\sin\alpha - 2 \cdot \cos\alpha)$

Aufgabe 99:

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem

a) unendlich viele Lösungen?

b) keine Lösung?

c) genau eine Lösung?

$x + \mathrm{a}y = 1$

$y + \mathrm{a}z = 1$

$x - \mathrm{z} = 2$

Lösung:

$x + \mathrm{a}y = 1$

$y + \mathrm{a}z = 1$

$x - \mathrm{z} = 2$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & +a & 0 & 1 \\ 0 & +1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Erste Zeile mal (-1) und auf die dritte Zeile addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & +a & 0 & 1 \\ 0 & +1 & a & 1 \\ 0 & -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zweite Zeile mal (a) und auf die dritte Zeile addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & +a & 0 & 1 \\ 0 & +1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a^2 - 1 & (a + 1 \end{pmatrix}$$

a) unendlich viele Lösungen:

$a = -1$

b) keine Lösung:

$a = 1$

c) genau eine Lösung:

$a \neq \pm 1$

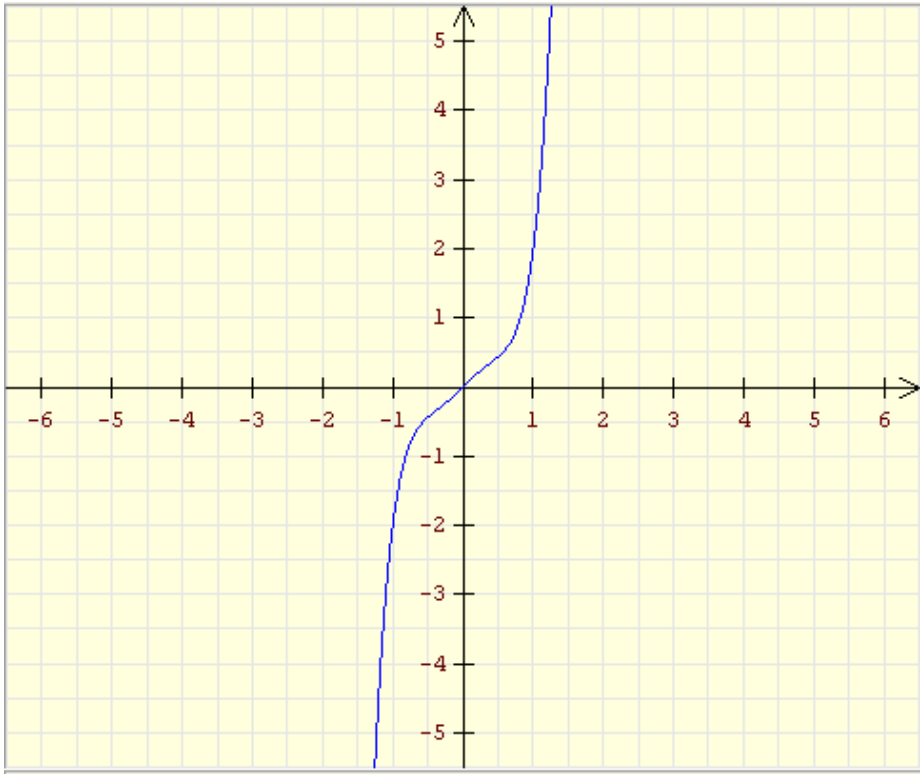
Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 100:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = 2x^5 - x^3 + x$$

Lösung:

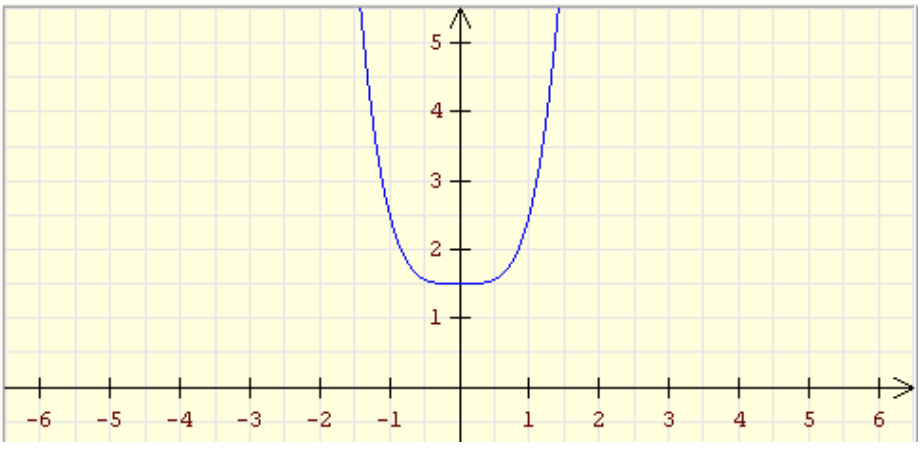


Aufgabe 101:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = x^4 + 1{,}5$$

Lösung:

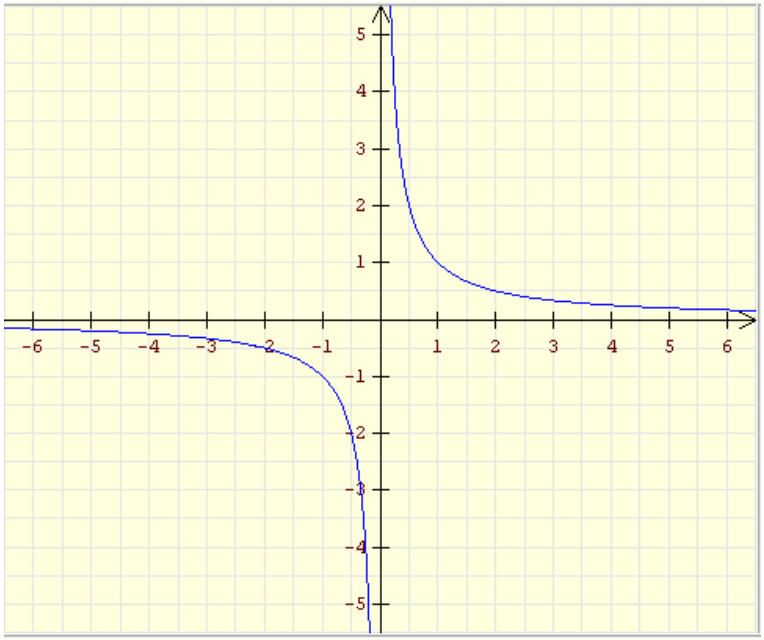


Aufgabe 102:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Lösung:

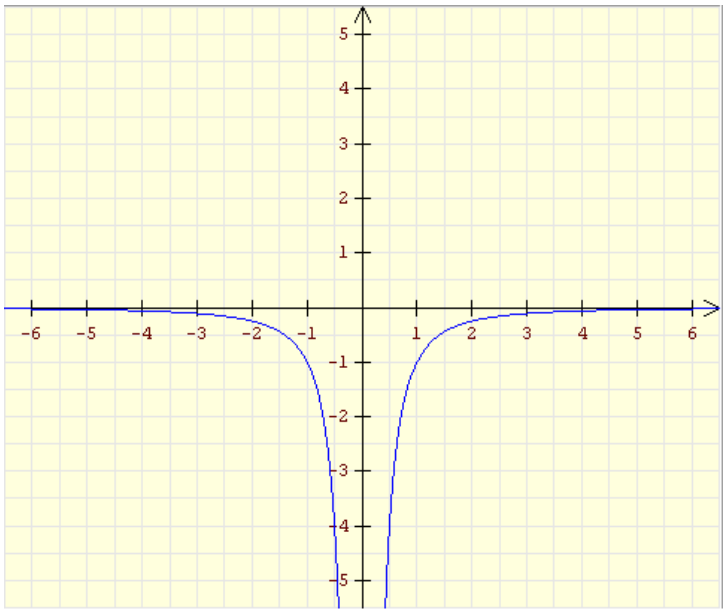


Aufgabe 103:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Lösung:

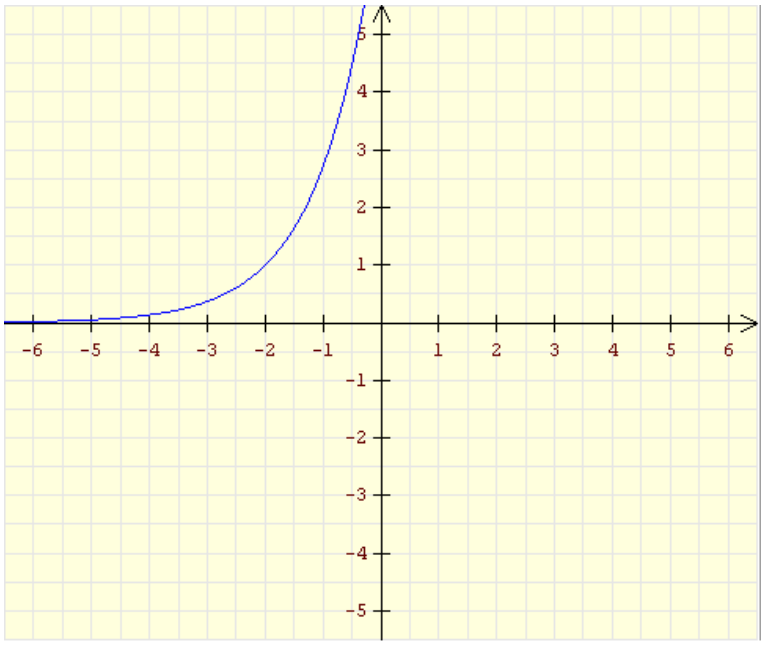


Aufgabe 104:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = e^{x+2}$$

Lösung:

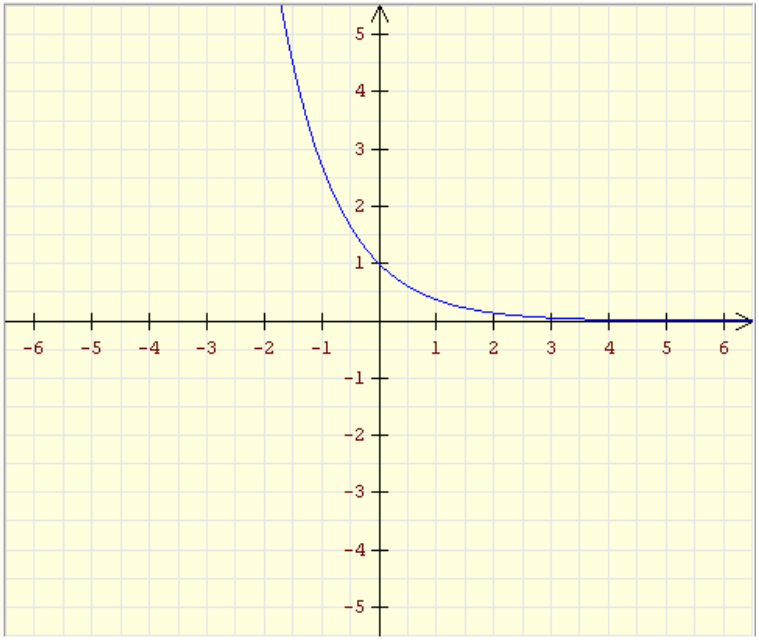


Aufgabe 105:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{e^x}$$

Lösung:

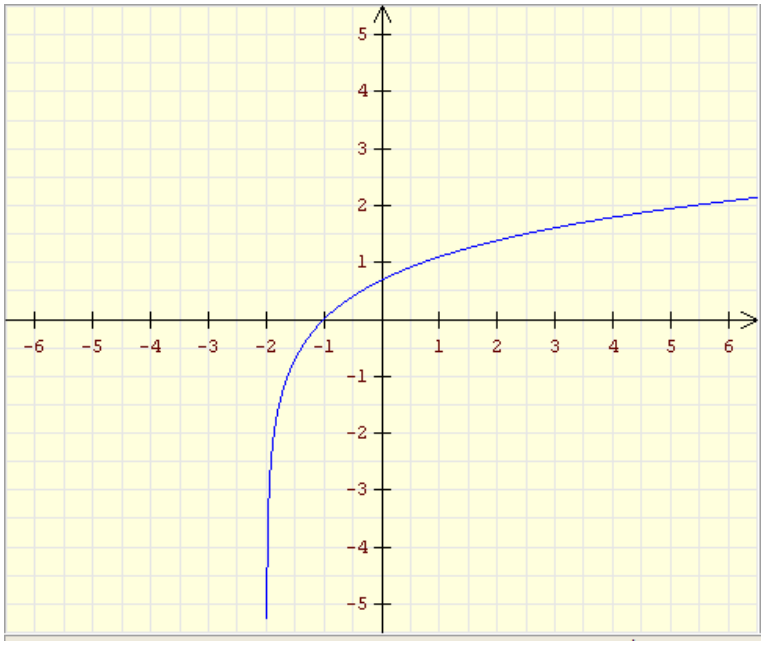


Aufgabe 106:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \ln(x + 2)$$

Lösung:

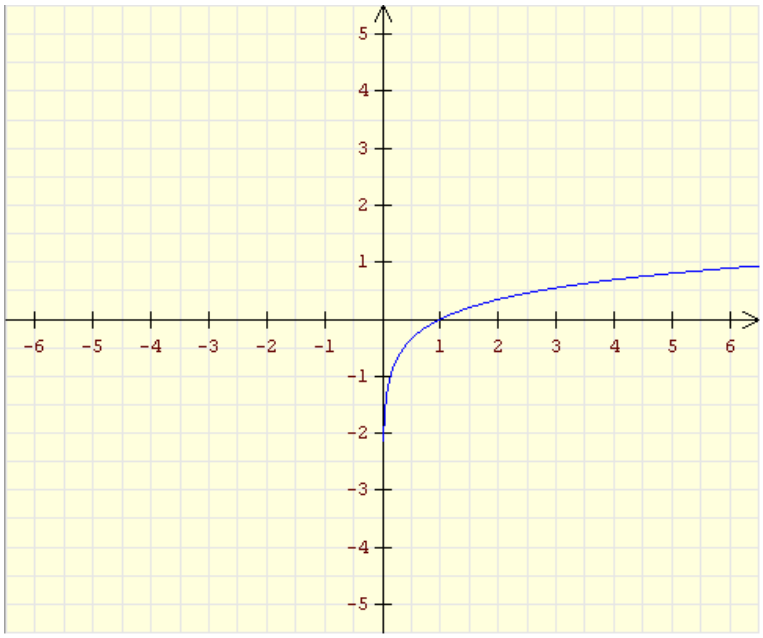


Aufgabe 107:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

Lösung:

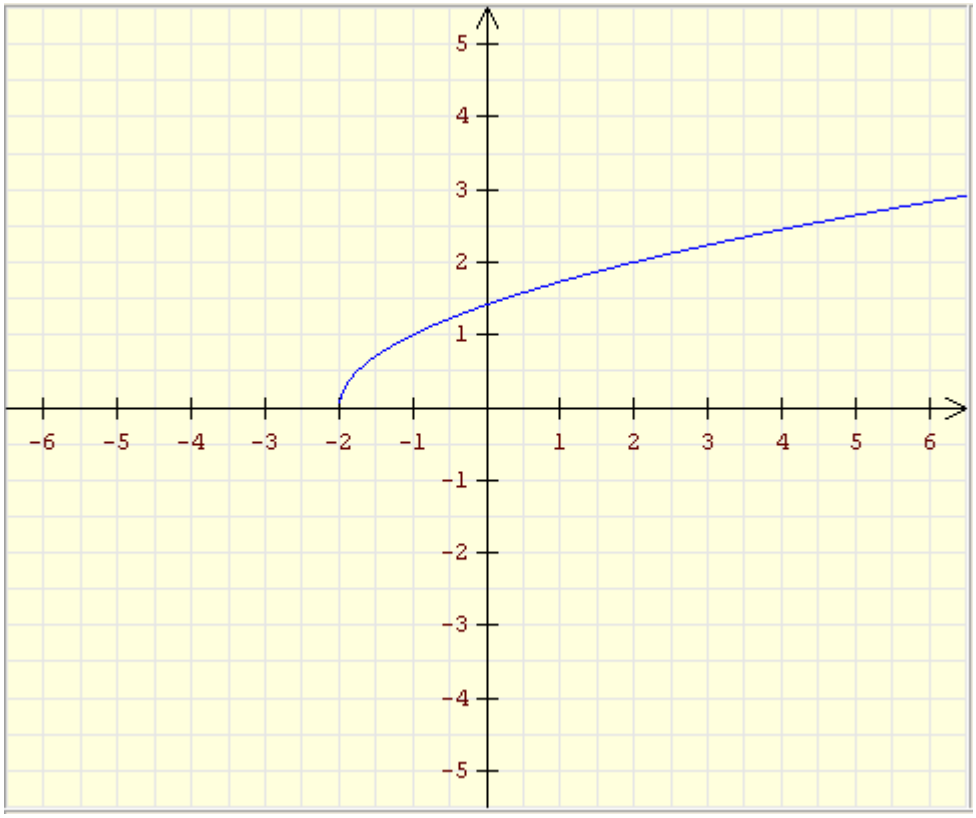


Aufgabe 108:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Lösung:

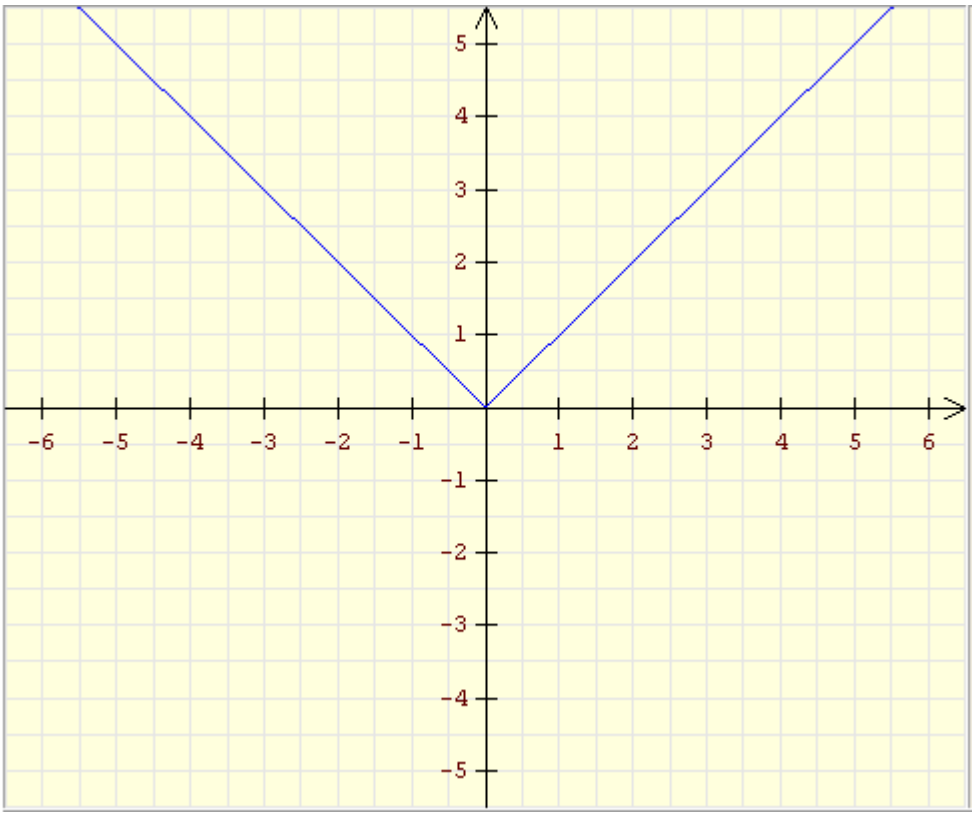


Aufgabe 109:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$

Lösung:

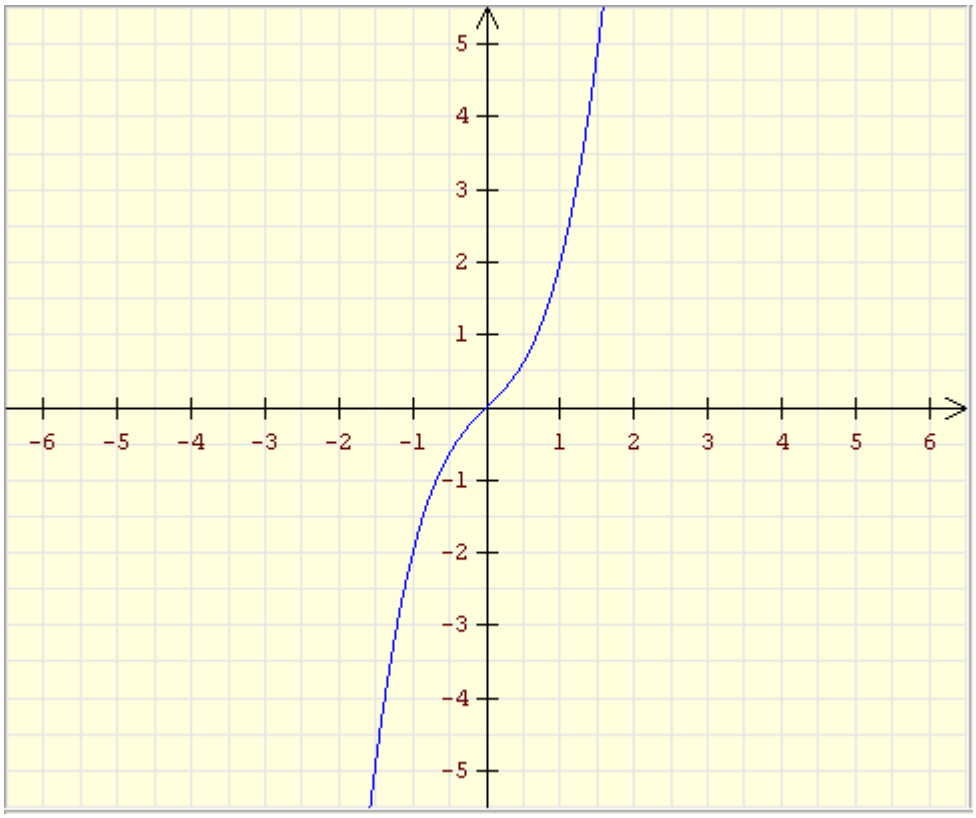


Aufgabe 110:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = x^3 + x$$

Lösung:

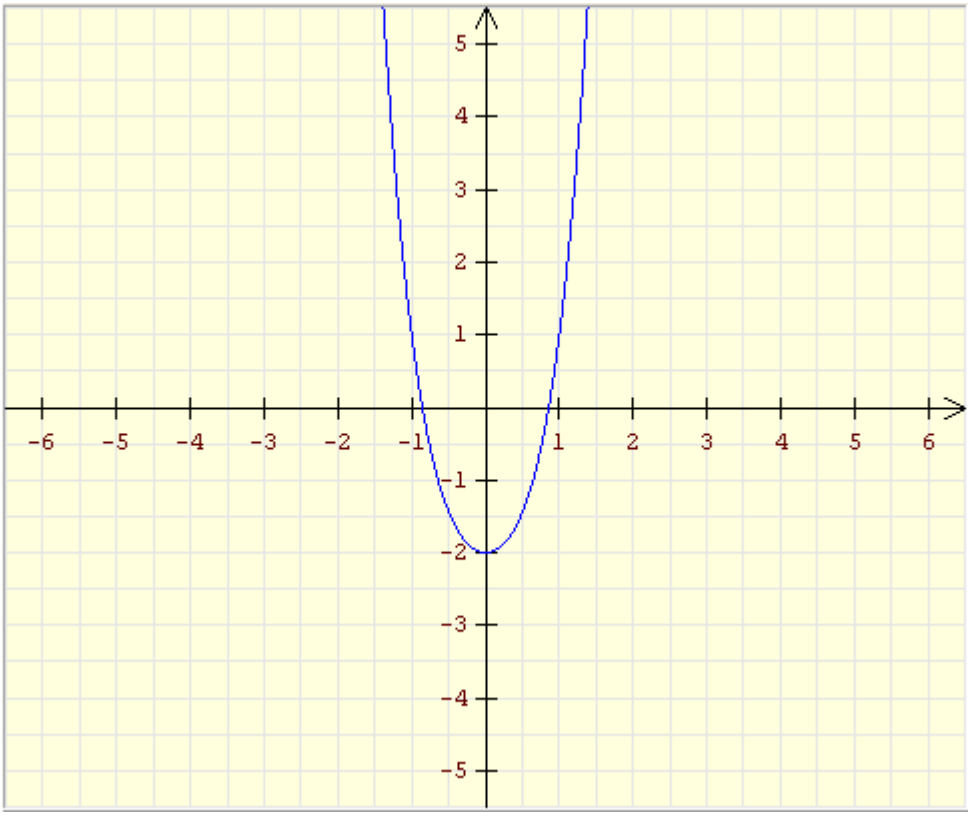


Aufgabe 111:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 2$$

Lösung:

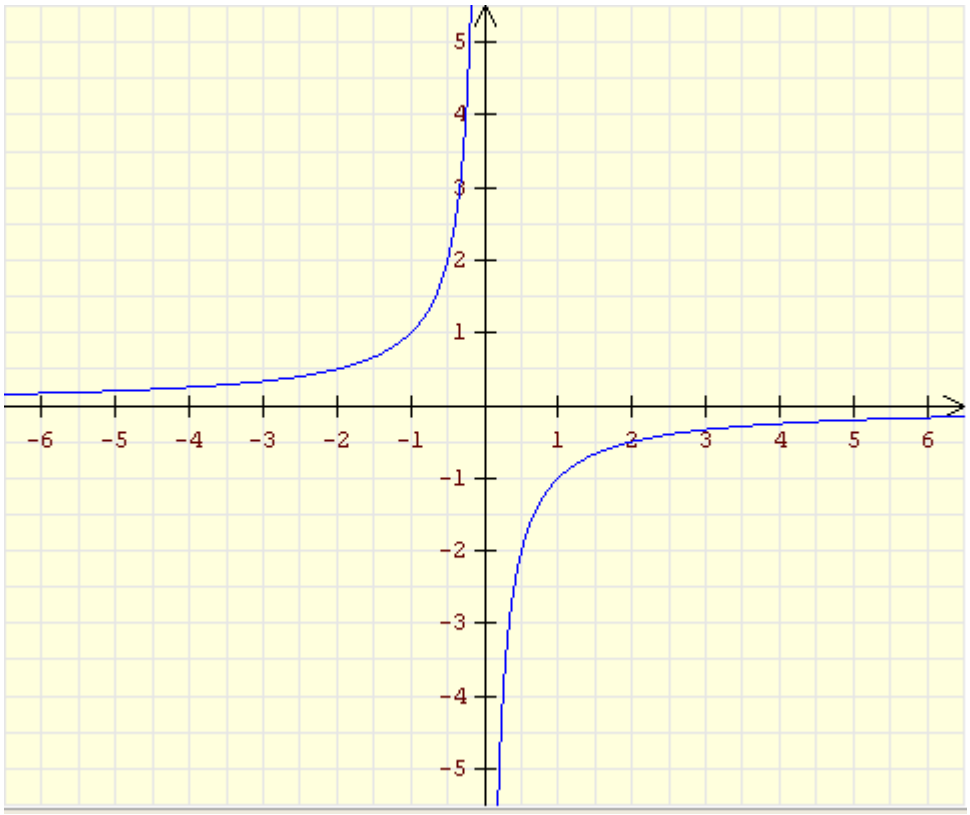


Aufgabe 112:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

Lösung:

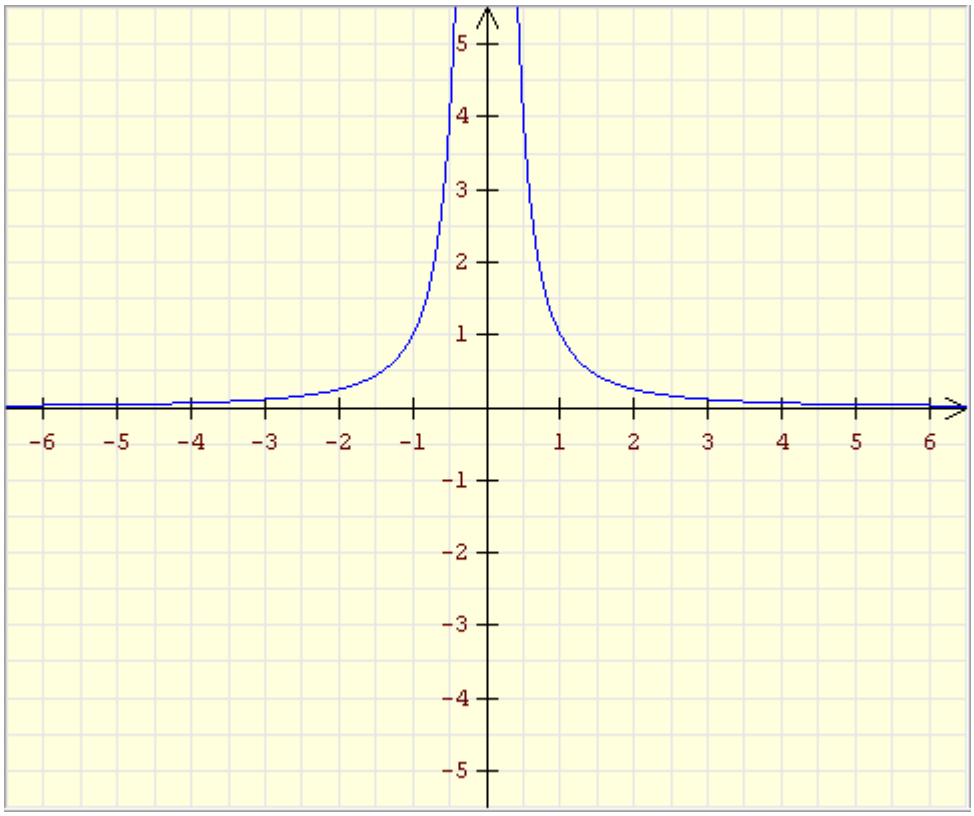


Aufgabe 113:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Lösung:

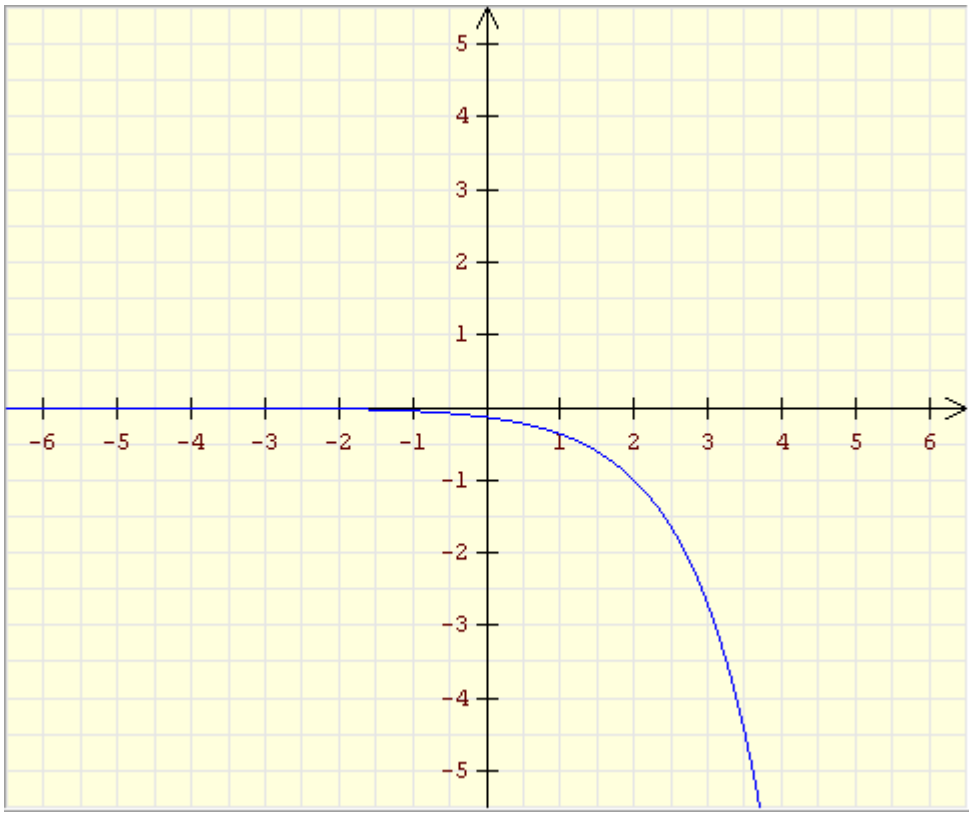


Aufgabe 114:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -e^{x-2}$$

Lösung:

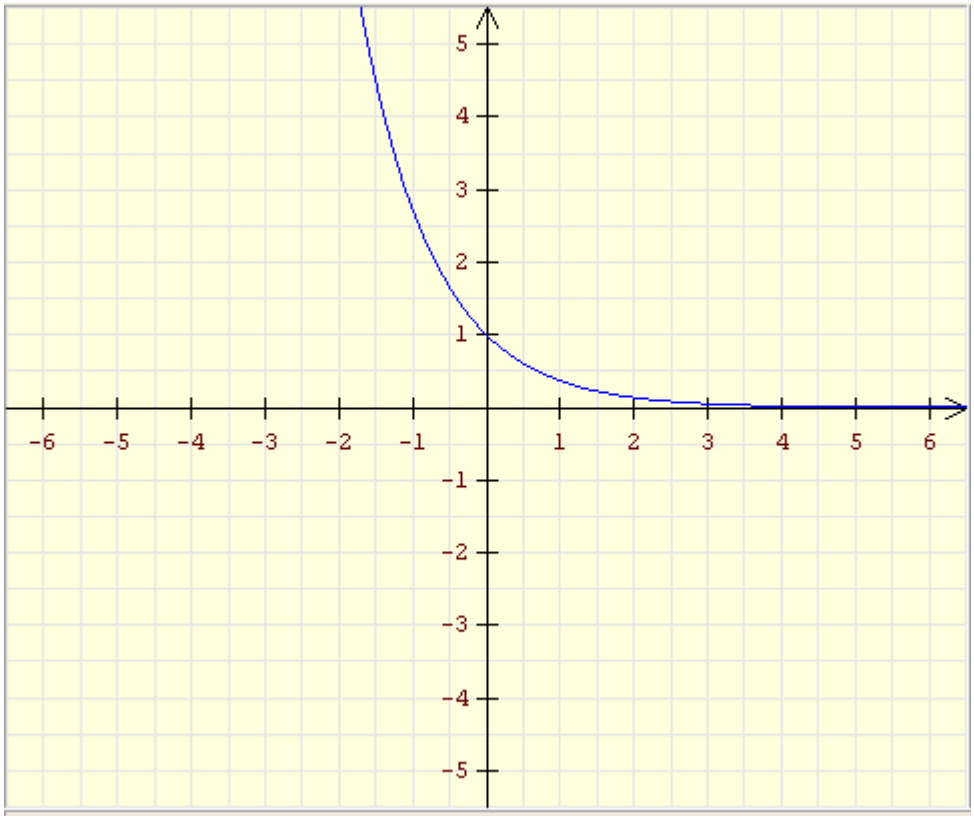


Aufgabe 115:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = e^{-x}$$

Lösung:

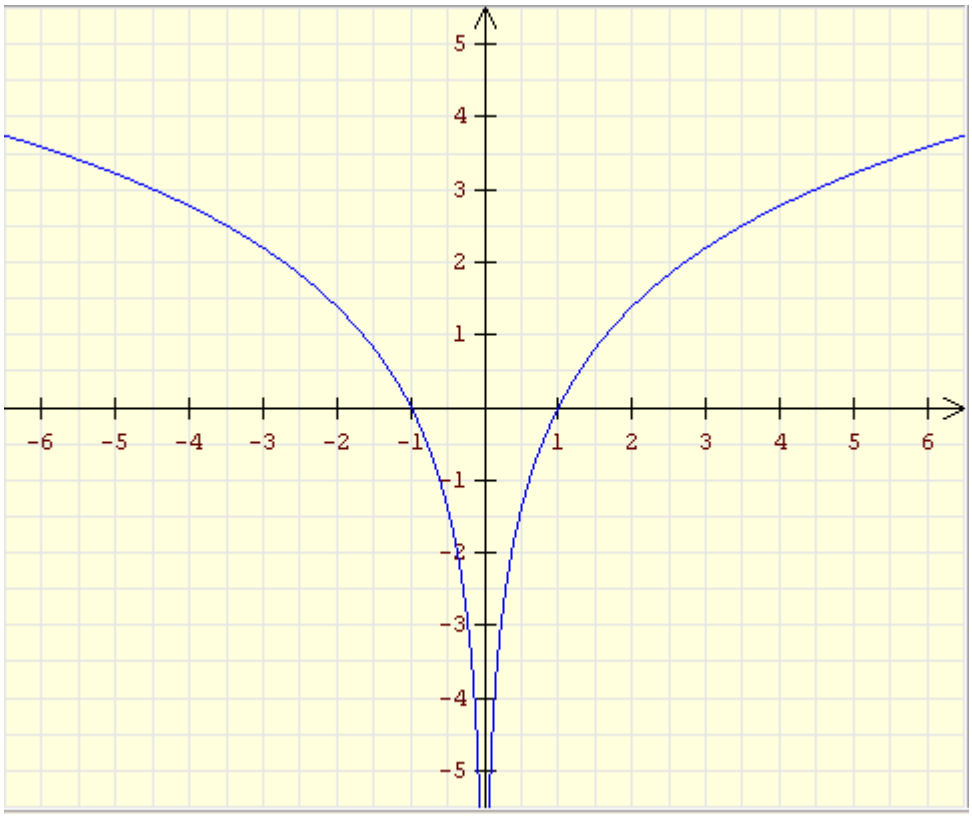


Aufgabe 116:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \ln(x^2)$$

Lösung:

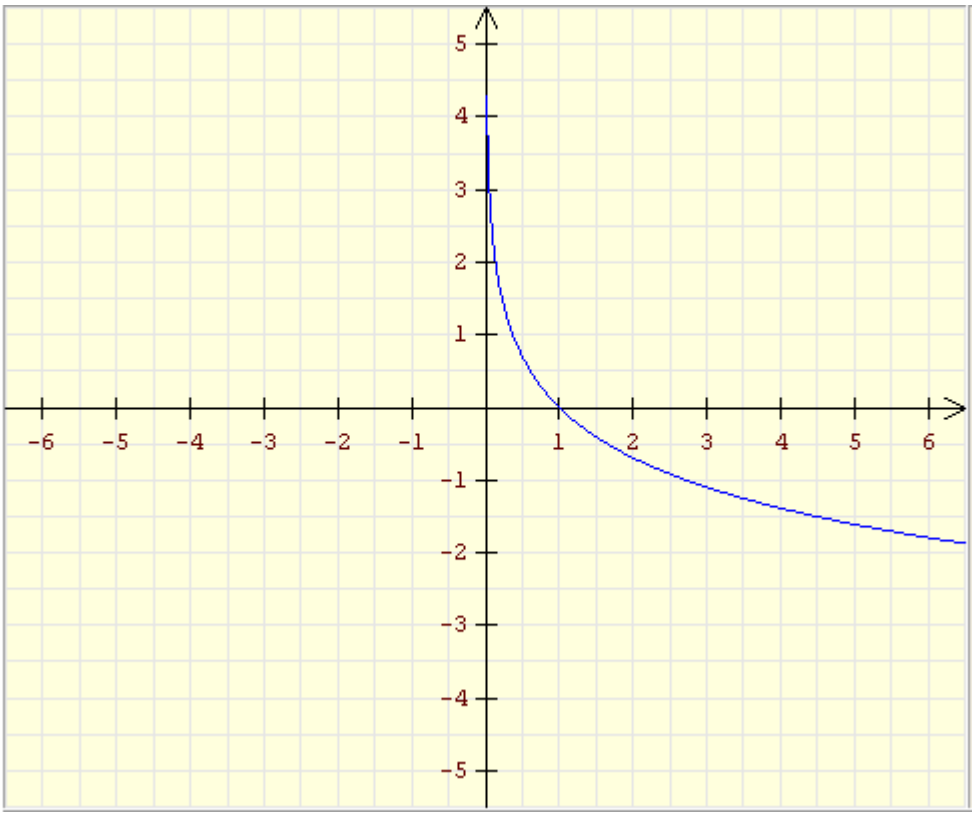


Aufgabe 117:

Skizzieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -\ln(x)$$

Lösung:

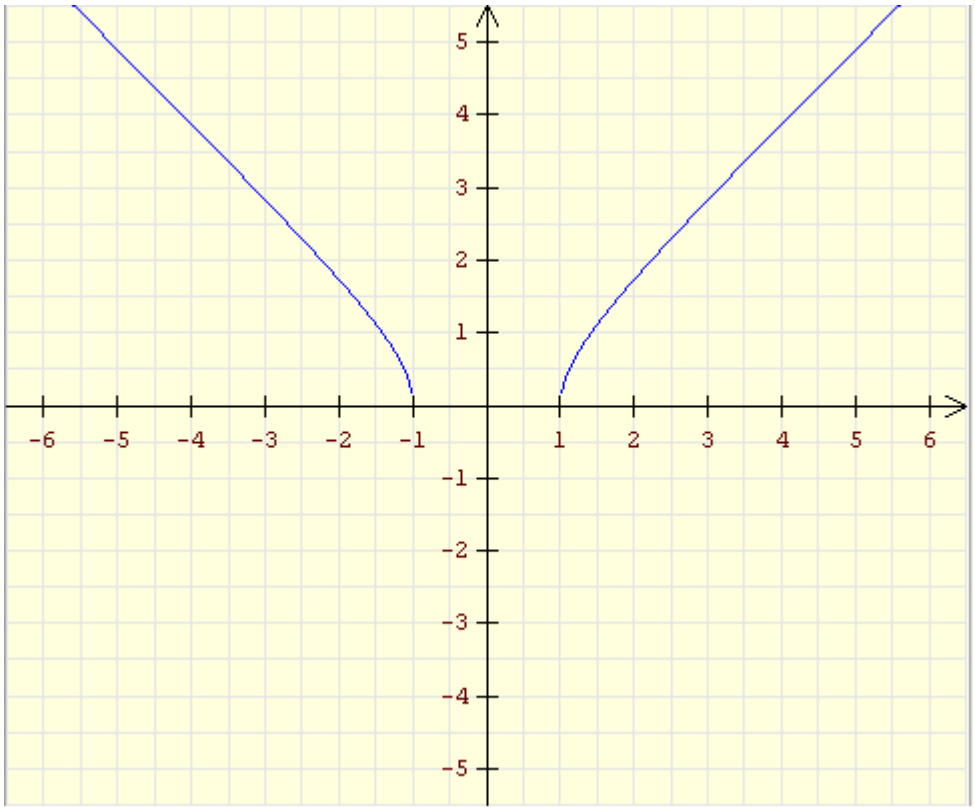


Aufgabe 118:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Lösung:

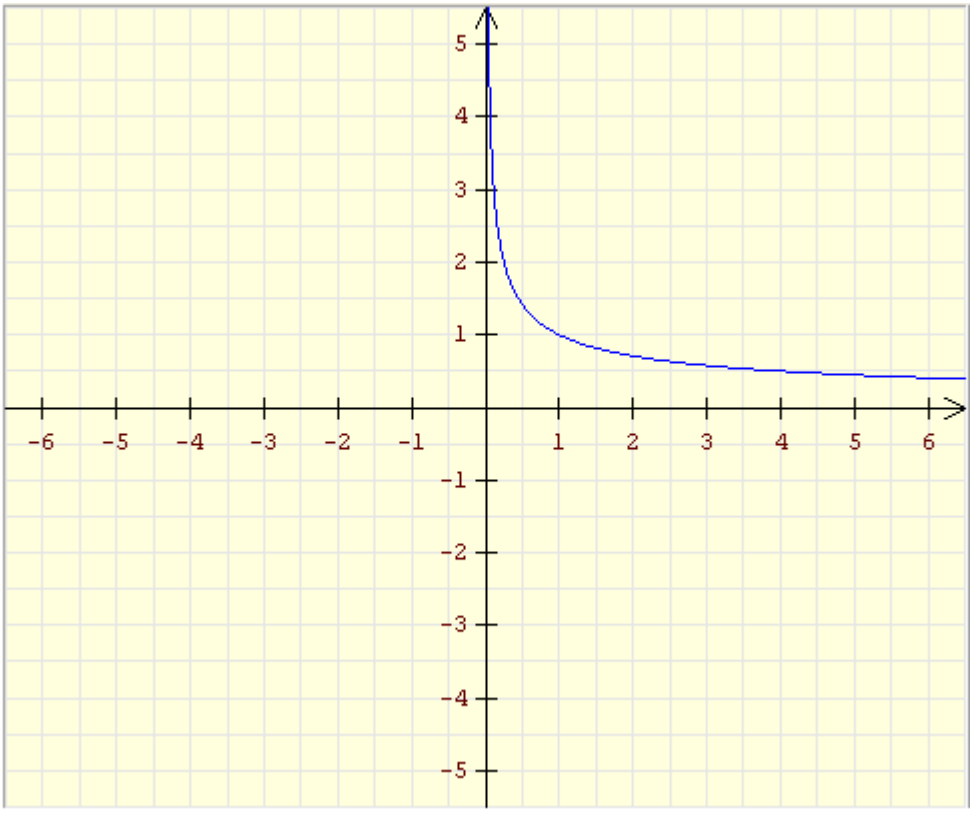


Aufgabe 119:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Lösung:


5
4
3
2
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4
-5

Trigonometrische Gleichungen

Aufgabe 120:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Lösung:

$$\sin(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Laut der Formelsammlung:

$$\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Daraus ergibt sich eine erste Lösung:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{1}{4}\pi$$

Im zweiten Feld ergibt sich eine weitere Lösung:

$$x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Im Definitionsbereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ ergeben sich weitere Lösungen:

$$x_3 = x_1 - 2\pi = \frac{1}{4}\pi - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$$

$$x_5 = x_1 + 2\pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$$

$$x_6 = x_2 + 2\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ \frac{1}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi;\ \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Aufgabe 121:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq 2\pi$.

Lösung:

Aus

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

folgt

$$x' = 30° = \frac{1}{6}\pi$$

Da der Sinus nur im 3. und 4. Feld negativ ist, ergeben sich folgende Lösungen:

$$x_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{6}\pi;\ \frac{11}{6}\pi\right\}$$

Aufgabe 122:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}3$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Lösung:

Der Taschenrechner liefert für das erste Feld:

$$x_1 = 1.266$$

Der Bereich geht von

$$-\pi \leq x \leq +\pi$$

Daraus ergibt sich die zweite Lösung:

$$x_2 = 0 - 1{,}266 = -1{,}266$$

$$\mathbb{L} = \{\pm 1{,}266\}$$

Aufgabe 123:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -0{,}5$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Laut der Tabelle aus der Formelsammlung ergibt sich für die Gleichung eine erste Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Da der Kosinus im zweiten und im dritten Feld negativ ist:

$$x_2 = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

Da der Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$ geht, existieren auch die entsprechenden negativen Lösungen.

$$\mathbb{L} = \left\{\pm\frac{2}{3}\pi; \pm\frac{4}{3}\pi\right\}$$

Aufgabe 124:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Lösung:

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

$$\sin(x) = \frac{4}{3}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, weil alle Sinuswerte in dem Intervall $[-1; 1]$ liegen.

$$\mathbb{L} = \{\quad\}$$

Aufgabe 125:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Der Kosinus ist laut Formelsammlung bei

$$x_1 = \frac{1}{2}\pi$$

und periodisch wieder bei

$$x_2 = \frac{3}{2}\pi$$

im vorgegebenen Bereich Null.

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right\}$$

Aufgabe 126:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}8$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Erste Lösung mit dem Taschenrechner berechnet:

$$x_1 = 0{,}644$$

Diese Lösung befindet sich im ersten Feld,

und periodisch wieder bei

$$x_2 = 2\pi - 0{,}644 = 5{,}639$$

$$\mathbb{L} = \{0{,}644; 5{,}639\}$$

Aufgabe 127:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Erste Lösung mit dem Taschenrechner berechnet:

$$x_1 = 2{,}186$$

Diese Lösung befindet sich im zweiten Feld,

und periodisch wieder bei

$$x' = \pi - 2{,}186 = 0{,}956$$

$$x_2 = \pi + 0{,}956 = 4{,}096$$

$$\mathbb{L} = \{0{,}956; 4{,}096\}$$

Aufgabe 128:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan(x) = -\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Aus der Formelsammlung der gibt sich die erste Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Geht man eine Periode zurück, so erhält man eine weiter Lösung:

$$x_2 = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi$$

Geht man von der x1-Lösung eine Periode vorwärts, so erhält man eine weitere Lösung:

$$x_3 = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Aufgabe 129:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

damit ergibt sich:

$$\cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus der Formelsammlung ergibt sich eine erste Lösung:

$$u_1 = \frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_1 = 1$$

Der Kosinus ist im vierten Feld positiv, also ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_2 = 11$$

Im positiven Bereich keine weiteren Lösung mehr.

Im negativen Bereich ergibt sich eine weiter Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$-\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_3 = -1$$

Im negativen Bereich auch keine weiteren Lösungen mehr.

$$\mathbb{L} = \{-1; 1; 11\}$$

Aufgabe 130:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +4\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

damit ergibt sich:

$$\sin(u) = -\frac{1}{2}$$

Aus der Tabelle ergibt sich:

$$u' = \frac{1}{6}\pi$$

Negative Werte nimmt der Sinus im dritten und vierten Feld an. Daraus ergeben sich die ersten Lösungen:

$$u_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{7}{6}\pi = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{14+3}{12}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{17}{12}\pi$$

$$x_1 = \frac{17}{6}\pi$$

Die zweite Lösung:

$$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{x}{2} = \frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{x}{2} = \frac{22+3}{12}\pi$$
$$\frac{x}{2} = \frac{25}{12}\pi$$
$$x_2 = \frac{25}{6}\pi$$

Keine gültige Lösung, da außerhalb des definierten Bereiches.

Weitere Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi$$
$$u_3 = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$
$$-\frac{1}{6}\pi = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{x}{2} = -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi$$
$$\frac{x}{2} = \frac{-2+3}{12}\pi$$
$$x_2 = \frac{1}{6}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi\right\}$$

Aufgabe 131:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u=x-\frac{\pi}{2}$$

damit ergibt sich:

$$\tan(u)=2$$

Mit Hilfe des Taschenrechners ergibt sich eine erste Lösung:

$$u_1=1{,}107$$

Rücksubstitution:

$$u=x-\frac{\pi}{2}$$

$$1{,}107=x-\frac{\pi}{2}$$

$$x=1{,}107+\frac{1}{2}\pi$$

$$x_1=2{,}678$$

Eine Periode in den positiven Bereich:

$$u_2=1{,}107+\pi=4{,}249$$

Rücksubstitution:

$$u=x-\frac{\pi}{2}$$

$$4{,}249=x-\frac{\pi}{2}$$

$$x=4{,}249+\frac{1}{2}\pi$$

$$x_2=5{,}820$$

Eine Periode in den negativen Bereich:

$$u_2 = 1{,}107 - \pi = -2{,}035$$

Rücksubstitution:

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

$$-2{,}035 = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x = -2{,}035 + \frac{1}{2}\pi$$

$$x_3 = -0{,}464$$

$$\mathbb{L} = \{-0{,}464; 2{,}678; 5{,}820\}$$

Aufgabe 132:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(3x) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = 3x$$

$$\sin(u) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

Mit dem Taschenrechner erhalten wir eine erste Lösung:

$$u_1 = 0{,}593$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$

$$0{,}593 = 3x$$

$$x_1 = 0{,}198$$

Im zweiten Feld haben wir eine weitere Lösung:

$$u_2 = \pi - 0{,}593 = 2{,}549$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$

$$2{,}549 = 3x$$

$$x_2 = 0{,}850$$

Da es sich im Original um eine gestauchte Funktion handelt, müssen wir hier unbedingt weitere Werte überprüfen:

$$u_3 = u_1 + 2\pi = 0{,}593 + 2\pi = 6{,}876$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$6{,}876 = 3x$$
$$x_3 = 2{,}292$$

$$u_4 = u_2 + 2\pi = 2{,}549 + 2\pi = 8{,}832$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$8{,}832 = 3x$$
$$x_4 = 2{,}944$$

$$u_5 = u_1 + 4\pi = 0{,}593 + 4\pi = 13{,}159$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$13{,}159 = 3x$$
$$x_4 = 4{,}386$$

$$u_6 = u_2 + 4\pi = 2{,}549 + 4\pi = 15{,}115$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$15{,}115 = 3x$$
$$x_5 = 5{,}038$$

$$u_5 = u_1 + 6\pi = 0{,}593 + 6\pi = 19{,}443$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$
$$19{,}443 = 3x$$
$$x_6 = 6{,}481$$

Liegt nicht mehr im vorgegebenen Bereich, also auch keine Lösung mehr.

$$\mathbb{L} = \{0{,}198; 0{,}850; 2{,}292; 2{,}944; 4{,}386; 5{,}038\}$$

Aufgabe 133:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +3\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{2}{3}x$$

$$\sin(u) = -\frac{1}{2}$$

Aus der Formelsammlung erhält man den positiven Wert:

$$u' = \frac{1}{6}\pi$$

Der Sinus ist im dritten und vierten Feld negativ, also ergeben sich folgende Lösungen:

$$u_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{7}{6}\pi = \frac{2}{3}x$$

$$x_1 = \frac{21}{12}\pi$$

$$x_1 = \frac{7}{4}\pi$$

$$u_1 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{2}{3}x$$

$$x_2 = \frac{33}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{11}{4}\pi$$

Im Bereich von 2π bis 3π gibt es keine weiteren Lösungen, da der Sinus dort positiv ist.

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Aufgabe 134:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x-1) = \frac{1}{4}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = x - 1$$

$$\cos(u) = \frac{1}{4}$$

Mit Hilfe des Taschenrechners erhält man:

$$u_1 = 1{,}318$$

Rücksubstitution:

$$u = x - 1$$

$$1{,}318 = x - 1$$

$$x_1 = 1{,}318 + 1 = 2{,}318$$

$$x_1 = 2{,}318$$

Die nächste Lösung in positiver Richtung ergibt sich aus:

$$u_2 = 2\pi - 1{,}318 = 4{,}965$$

Rücksubstitution:

$$u = x - 1$$

$$4{,}965 = x - 1$$

$$x_2 = 4{,}965 + 1 = 5{,}965$$

$$x_2 = 5{,}965$$

Im negativen Bereich ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_3 = 0 - 1{,}318 = -1{,}318$$

Rücksubstitution:

$$\mathrm{u} = \mathrm{x} - 1$$

$$-1{,}318 = \mathrm{x} - 1$$

$$x_3 = -1{,}318 + 1 = -0{,}318$$

$$x_3 = -0{,}318$$

$$\mathbb{L} = \{-0{,}318; 2{,}318; 5{,}965\}$$

Aufgabe 135:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$\mathrm{u} = \mathrm{x} + \frac{5}{6}\pi$$

$$\cos(\mathrm{u}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus der Formelsammlung können wir den positiven Wert ablesen:

$$\mathrm{u}' = \frac{1}{6}\pi$$

Der Kosinus ist im zweiten und dritten Bereich negativ, daraus ergeben sich folgende Lösungen:

$$\mathrm{u}_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$\mathrm{u} = \mathrm{x} + \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi = \mathrm{x} + \frac{5}{6}\pi$$

$$\mathrm{x}_1 = 0$$

$$\mathrm{u}_2 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_2 = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$\frac{7}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\pi$$

Weiter in positiver Richtung:

$$u_3 = u_1 + 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_2 = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$\frac{17}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$x_3 = \frac{12}{6}\pi = 2\pi$$
$$x_3 = 2\pi$$

In positiver Richtung gibt es keine weiteren Lösungen.

In negativer Richtung finden wir eine weitere Lösung:

$$u_4 = -\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi$$
$$u_4 = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_4 = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$-\frac{5}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$
$$x_4 = -\frac{10}{6}\pi$$

Liegt nicht mehr im gültigen Bereich, also keine Lösung.

$$\mathbb{L} = \left\{-\pi; 0; \frac{1}{3}\pi; 2\pi\right\}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 136:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$4 \cdot \sin^2(x) + 3 \cdot \cos(x) = 3 \quad \text{für} - \pi \leq x \leq +\pi$

Lösung:

$$4 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos x = 3 \qquad \text{für} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Wir ersetzen $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$4(1-\cos^2 x) + 3 \cdot \cos x = 3$$

$$4 - 4\cos^2 x + 3 \cdot \cos x = 3$$

$$1 - 4\cos^2 x + 3 \cdot \cos x = 0$$

$$4 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x + 1 = 0$$

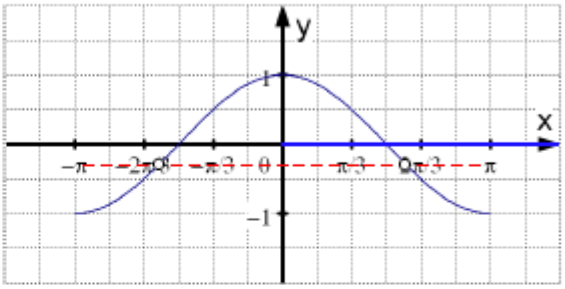
Dies ist eine quadratische Gleichung für cos x. Manche lösen dies, indem sie eine Substitution durchführen und u = cos x setzen. Dies ist unnötig. Ich wende einfach die allgemeine Lösungsformel für die quadratische Gleichung an und beachte, daß ich cos x statt x schreiben muß.

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat diese Lösung:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Also folgt hier:

$$\cos x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4 \cdot 1}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8} = \begin{cases} 1 \\ -0{,}25 \end{cases}$$



Aus $\cos x_1 = 1$ folgt in $-\pi \leq x \leq \pi$
$x_1 = 0$.

Aus cos x' = + 0,25 folgt x' = 1,32, Die Kosinusfunktion hat negative Werte im 2. und 3. Feld. Also folgt: $x_2 = \pi - x' = 1{,}82$ und $x_3 = \pi + x' = 4{,}46$ Doch diese Zahl liegt nicht mehr im Definitionsbereich. Daher gehen wir um eine Periode nach links und subtrahieren 2π: $x_3 = \pi + x' - 2\pi = x' - \pi = -1{,}82$.

Auf diesen Wert kommt man schneller, wenn man weiß, daß die Kosinuskurve symmetrisch zur y-Achse ist, also ist $x_3 = -x_2$!!!

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{0\,;\ \pm 1{,}82\}$

Aufgabe 137:

Lösen Sie folgende Gleichung und bestimmen Sie alle Lösungen.

$3 \cdot \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x) =$

Lösung:

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

1. Fall: $\cos x \neq 0$ d.h. $x \neq \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$: Dann kann man durch cos x dividieren:

$$3\tan x + \sqrt{3} = 0$$
$$3\tan x = -\sqrt{3}$$
$$\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Die Gleichung $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ hat im 1. Feld die Lösung $x' = \frac{1}{6}\pi$

Die Tangensfunktion hat negative Werte

im 2. Feld: $x_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

im 4. Feld: $x_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$

2. Fall $x = \frac{1}{2}\pi$ Dann stimmt die Probe nicht: $3\underbrace{\sin\tfrac{1}{2}\pi}_{1} + \sqrt{3}\underbrace{\cos\tfrac{1}{2}\pi}_{0} = 3 \neq 0$

$x = \frac{3}{2}\pi$ Dann stimmt die Probe nicht: $3\underbrace{\sin\tfrac{3}{2}\pi}_{-1} + \sqrt{3}\underbrace{\cos\tfrac{3}{2}\pi}_{0} = -3 \neq 0$

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{\frac{5}{6}\pi\,;\,\frac{11}{6}\pi\right\}$

Vektorrechnung

Aufgabe 138:

Gegeben ist die Ebene E durch ihre Koordinatengleichung Bestimmen Sie eine Parameterform sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

a) $E: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$ (Nach x_3 auflösen)

b) $E: \ 15x - 24y + 20z = 120$ (Nach z auflösen)

c) $E: \ 2x_1 + 9x_2 + 20x_3 = 15$ (Nach x_1 auflösen)

d) $E: \ 2x_1 + 5x_3 = 20$ (Nach x_1 auflösen)

e) $E: \ 4x_1 + 5x_2 + 20 = 0$ (Nach x_1 auflösen)

f) $E: \ x_2 + 4x_3 = 10$ (Nach x_2 auflösen)

Lösung:

a) $E: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

Parametergleichung:

Auflösen nach x_3 : $x_3 = 12 - 2x_1 - 2x_2$

Wähle daher $x_1 = r, \ r \in \mathbf{R}$ und $x_2 = s, s \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow x_3 = 12 - 2r - 2s$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 12 - 2r - 2s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Achsenabschnittsform: $E: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{12} = 1$$

Schnittpunkt mit der x_1 - Achse: $S_1(6|0|0)$,

Schnittpunkt mit der x_2 - Achse: $S_2(0|6|0)$,

Schnittpunkt mit der x_3 - Achse: $S_3(0|0|12)$.

b) $E: 15x - 24y + 20z = 120$
(Jetzt einmal mit der Bezeichnung x, y, z statt x_1, x_2, x_3 !)

Parametergleichung:
Auflösen z.B. nach z: $20z = 120 - 15x + 24y \mid :20$

$$z = 6 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{6}{5}y$$

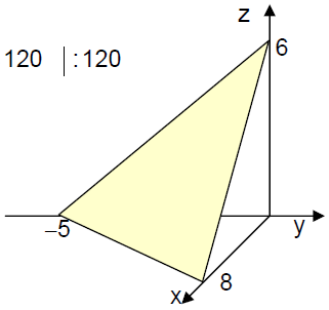
Wähle daher $x = 4r, r \in \mathbf{R}$ und $y = 5s, s \in \mathbf{R} \Rightarrow z = 6 - 3r + 6s$
Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4r \\ 5s \\ 6 - 3r + 6s \end{pmatrix} \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Achsenabschnittsform: $E: 15x - 24y + 20z = 120 \mid :120$

$$\frac{x}{8} - \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 1$$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(8|0|0)$,
Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|-5|0)$,
Schnittpunkt mit der z-Achse: $S_z(0|0|6)$.



c) $E: 2x_1 + 9x_2 + 20x_3 = 15$

Parametergleichung:
Auflösen nach x_1: $2x_1 = 15 - 9x_2 - 20x_3$

$$x_1 = \tfrac{15}{2} - \tfrac{9}{2}x_2 - 10x_3$$

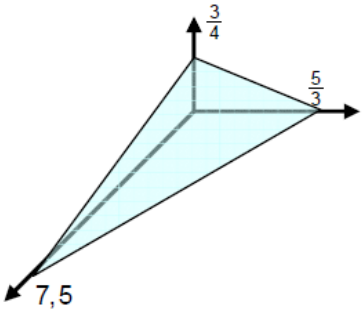
Wähle daher $x_2 = 2r, r \in \mathbf{R}$ und $x_3 = s, s \in \mathbf{R} \Rightarrow x_1 = 7{,}5 - 9r - 10s$.
Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}5 - 9r - 10s \\ 2r \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Achsenabschnittsform: $E: 2x_1 + 9x_2 + 20x_3 = 15$

$$\frac{2x_1}{15} + \frac{9x_2}{15} + \frac{20x_3}{15} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{\frac{15}{2}} + \frac{x_2}{\frac{5}{3}} + \frac{x_3}{\frac{3}{4}} = 1$$

Schnittpunkt mit der x_1 - Achse: $S_1(7{,}5|0|0)$,
Schnittpunkt mit der x_2 - Achse: $S_2(0|\tfrac{5}{3}|0)$,
Schnittpunkt mit der x_3 - Achse: $S_3(0|0|\tfrac{3}{4})$.



d) $E: \; 2x_1 + 5x_3 = 20$

Parametergleichung:

Auflösen nach x_1: $2x_1 = 20 - 5x_3 \Rightarrow x_1 = 10 - \frac{5}{2}x_3$

Wähle daher $x_3 = 2r,\ r \in \mathbf{R}$ und $x_2 = s,\ s \in \mathbf{R} \Rightarrow x_1 = 10 - 5r$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

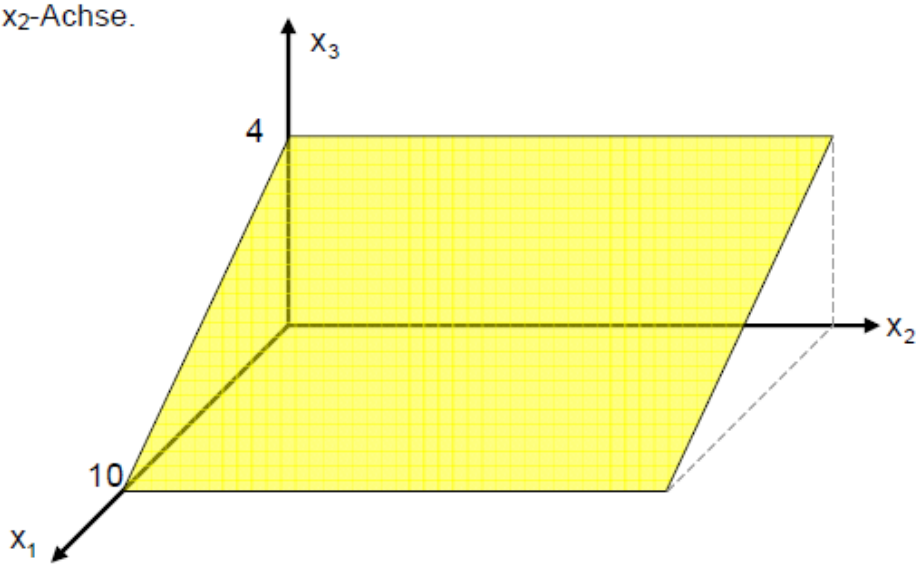
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10-5r \\ s \\ 2r \end{pmatrix} \Rightarrow E: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Achsenabschnittsform: $E: \; 2x_1 + 5x_3 = 20$ also $\frac{x_1}{10} + \frac{x_3}{4} = 1$

Schnittpunkt mit der x_1 - Achse: $S_1(10|0|0)$,

Schnittpunkt mit der x_3 - Achse: $S_3(0|0|4)$.

Ein Schnittpunkt mit der x_2 – Achse ist nicht vorhanden: E ist parallel zur x_2-Achse.



e) $E: \; 4x_1 + 5x_2 + 20 = 0$

Parametergleichung:

Auflösen nach x_1: $4x_1 = -20 - 5x_2 \Rightarrow x_1 = -5 - \frac{5}{4}x_2$

Wähle daher $x_2 = 4r,\ r \in \mathbf{R}$ und $x_3 = s,\ s \in \mathbf{R} \Rightarrow x_1 = -5 - 5r$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

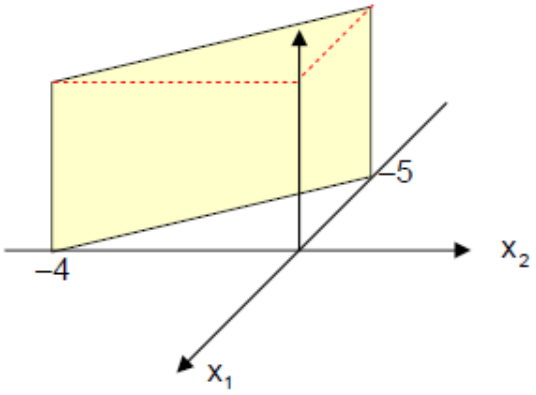
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5-5r \\ 4r \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Achsenabschnittsform: $E: \; 4x_1 + 5x_2 = -20$ also $-\frac{x_1}{5} - \frac{x_2}{4} = 1$

Schnittpunkt mit der x_1 - Achse: $S_1(-5|0|0)$,

Schnittpunkt mit der x_2 - Achse: $S_2(0|-4|0)$.

Ein Schnittpunkt mit der x_3 – Achse ist nicht vorhanden: E ist parallel zur x_3-Achse.



f) $E: \; x_2 + 4x_3 = 10$

Parametergleichung:

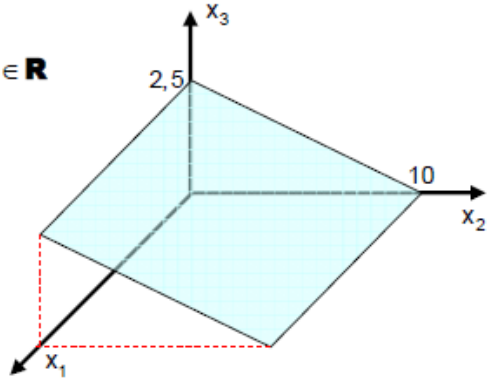
Auflösen nach x_2: $x_2 = 10 - 4x_3$

Wähle daher $x_3 = r,\ r \in \mathbf{R}$ und $x_1 = s,\ s \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow x_2 = 10 - 4r$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ 10-4r \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Achsenabschnittsform:

$E: \; x_2 + 4x_3 = 10$

Also $\frac{x_2}{10} + \frac{4x_3}{10} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{2,5} = 1$

Schnittpunkt mit der x_2 - Achse: $S_2(0|10|0)$,

Schnittpunkt mit der x_3 - Achse: $S_3(0|0|2,5)$.

Ein Schnittpunkt mit der x_1 – Achse ist nicht vorhanden: E ist parallel zur x_1-Achse.

Aufgabe 139:

Stellen Sie eine Koordinatengleichung von der Ebene E auf.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ (r und s aus (2) und (3) berechnen)

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ (r und s aus (2) und (3) berechnen)

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\12\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$ (r und s aus (2) und (3) berechnen)

e) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\4\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

f) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

g) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

h) $E: \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (Ohne Anleitung !)

Lösung:

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x_1 = 1 + r + 2s & (1)\\ x_2 = \quad r + s & (2)\\ x_3 = 1 + 2r - s & (3)\end{array}\right\}$

$(2)+(3)$: $x_2 + x_3 = 1 + 3r \Rightarrow r = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}$

In (2): $s = x_2 - r = x_2 - \left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}$

r und s in (1): $x_1 = 1 + \left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}\right)$

$x_1 = 1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}$

$x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \quad | \cdot 3$

$E: \quad 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 4$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2+3r+3s & (1)\\ x_2 = 2+2s & (2)\\ x_3 = 2r+s & (3)\end{cases}$

Da (2) kein r enthält, muß nicht mehr eliminiert werden !!!

Aus (2): $2s = x_2 - 2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}x_2 - 1$

In (3): $x_3 = 2r + \left(\frac{1}{2}x_2 - 1\right) \Rightarrow 2r = x_3 - \frac{1}{2}x_2 + 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}$

r und s in (1): $x_1 = -2 + 3\left(\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}x_2 - 1\right)$

$x_1 = -2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 - 3$

$x_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -\frac{7}{2} \quad |\cdot 4$

$E: \; 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -14$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & (1)\\ x_2 = 1+r+2s & (2)\\ x_3 = 3+5r-s & (3)\end{cases}$

Besonders wichtige Aufgabe !

(2)+2(3): $x_2 + 2x_3 = 7 + 11r \Rightarrow 11r = x_2 + 2x_3 - 7 \Rightarrow r = \frac{1}{11}x_2 + \frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}$

In (3): $x_3 = 3 + 5\left(\frac{1}{11}x_2 + \frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}\right) - s \Rightarrow s = 3 + \frac{5}{11}x_2 + \frac{10}{11}x_3 - \frac{35}{11} - x_3$

$s = -\frac{2}{11} + \frac{5}{11}x_2 - \frac{1}{11}x_3$ -

Nach den bisherigen Beispielen sollten wir nun r und s in (1) einsetzen. Doch dies geht nicht, da Gleichung (1) nur $x_1 = -1$ lautet und somit weder r noch s enthält.
Im Grunde hätten wir **überhaupt nichts rechnen** müssen, denn die Gleichung (1) ist bereits die Koordinatenform:

$E: \; x_1 = -1$

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\12\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1+3r+5s & (1)\\ x_2 = 12+2r+3s & (2)\\ x_3 = 1-5r+2s & (3)\end{cases}$

Eine algebraisch schwere Aufgabe !!!

5(2) + 2(3): $5x_2 + 2x_3 = 62 + 19s \Rightarrow 19s = 5x_2 + 2x_3 - 62$

$\Rightarrow s = \frac{5}{19}x_2 + \frac{2}{19}x_3 - \frac{62}{19}$

In (3): $x_3 = 1 - 5r + 2\left(\frac{5}{19}x_2 + \frac{2}{19}x_3 - \frac{62}{19}\right) \Rightarrow 5r = 1 + \frac{10}{19}x_2 + \frac{4}{19}x_3 - \frac{124}{19} - x_3$

$5r = -\frac{105}{19} + \frac{10}{19}x_2 - \frac{15}{19}x_3 \Rightarrow r = -\frac{21}{19} + \frac{2}{19}x_2 - \frac{3}{19}x_3$

r und s in (1): $x_1 = 1 + 3\left(-\frac{21}{19} + \frac{2}{19}x_2 - \frac{3}{19}x_3\right) + 5\left(\frac{5}{19}x_2 + \frac{2}{19}x_3 - \frac{62}{19}\right)$

$x_1 = 1 - \frac{63}{19} + \frac{6}{19}x_2 - \frac{9}{19}x_3 + \frac{25}{19}x_2 + \frac{10}{19}x_3 - \frac{310}{19} \quad |\cdot 19$

$19x_1 = 19 - 63 + 6x_2 - 9x_3 + 25x_2 + 10x_3 - 310$

$E: \; 19x_1 - 31x_2 - x_3 = -354$

e) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\4\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 10 + r & (1)\\ x_2 = 4 + s & (2)\\ x_3 = 6 + 2r + 5s & (3)\end{array}\right\}$

So einfach sollten die Aufgaben immer sein !

Aus (1): $r = x_1 - 10$,

Aus (2): $s = x_2 - 4$

In (3): $x_3 = 6 + 2(x_1 - 10) + 5(x_2 - 4)$

$x_3 = 6 + 2x_1 - 20 + 5x_2 - 20$

$x_3 - 2x_1 - 5x_2 = -34$

$$E: \quad 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 34$$

---

f) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 2 + 2r & (1)\\ x_2 = 2 & (2)\\ x_3 = 3 - s & (3)\end{array}\right\}$

Diese Aufgabe erfordert die Erinnerung an die Aufgabe c) oder etwas Wissen bzw. Nachdenken, aber keine Rechnung !
An solchen Aufgaben scheitert man eher, als an Aufgaben wie d) !! MERKEN !

$$E: \quad x_2 = 2$$

g) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 1 + 3r + 3s & (1)\\ x_2 = 4 + r + s & (2)\\ x_3 = -7 + 2r - s & (3)\end{array}\right\}$

Auch diese Aufgabe ist ein Spezialfall. Daher ist sie besonders wichtig und sollte öfters angeschaut werden !!!

(1) – 3(2): $E: \quad x_1 - 3x_2 = -11$

So, dies ist bereits die Koordinatenform. Hier gibt es nichts zum Eliminieren:
Die Ebene ist parallel zur x_3 – Achse.

h) $E: \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = r & (1)\\ x_2 = r & (2)\\ x_3 = s & (3)\end{array}\right\}$

Hier kann man nur diese Rechnung durchführen:

(1) – (2): $E: \quad x_1 - x_2 = 0$

Und dies ist bereits die Koordinatengleichung der Ebene.
Sie ist parallel zur x_3 – Achse und geht durch den Ursprung, also enthält sie die x_3-Achse.

Aufgabe 140:

Welche Gleichung hat die Lotgerade von P(-2|3|8) auf die Ebene?

a) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$

b) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}x_1=1+2r+s & (1)\\ x_2=5-r+3s & (2)\\ x_3=5+2r-3s & (3)\end{Bmatrix}$

(2) + (3): $x_2+x_3=10+r \Rightarrow r=x_2+x_3-10$

In (2): $x_2=5-(x_2+x_3-10)+3s \Rightarrow 3s=2x_2+x_3-15 \Rightarrow s=\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3-5$

r und s in (1): $x_1=1+2(x_2+x_3-10)+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3-5$

$x_1=1+2x_2+2x_3-20+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3-5$

$x_1-\frac{8}{3}x_2-\frac{7}{3}x_3=-24 \quad |\cdot(-3)$

$E:\ -3x_1+8x_2+7x_3=72$

Der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\8\\7\end{pmatrix}$ ist also Normalenvektor von E. Er wird zum Richtungsvektor der Lotgeraden L. Damit erhält L diese Gleichung:

$$L:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\8\\7\end{pmatrix}$$

b) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}x_1=1-r+2s & (1)\\ x_2=2+s & (2)\\ x_3=12+2r-s & (3)\end{Bmatrix}$

Aus (2) folgt $s=x_2-2$

In (´1): $x_1=1-r+2x_2-4 \Rightarrow r=-x_1+2x_2-3$

r und s in (3): $x_3=12+2(-x_1+2x_2-3)-(x_2-2)$

$x_3=12-2x_1+4x_2-6-x_2+2$

$E:\ 2x_1-3x_2+x_3=8$

Der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ist also Normalenvektor von E. Er wird zum Richtungsvektor der Lotgeraden L. Damit erhält L diese Gleichung:

$$L:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 141:

Zeige, dass g und h in einer Ebene liegen und stelle deren Koordinatengleichung auf.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ keine Vielfachen voneinander sind, sind sie nicht kollinear und die Geraden sind nicht parallel.

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -9 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0$$

Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ komplanar. Die Geraden g und h liegen somit in einer Ebene (und weil sie nicht parallel sind, schneiden sie sich).

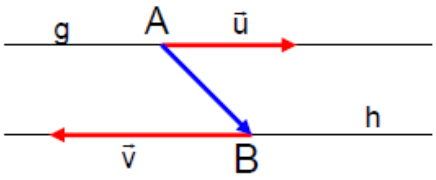
Für die Ebenengleichung kann man A oder B aus Aufpunkt nehmen und natürlich $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Richtungsvektoren:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 1 + 2r + s & (1) \\ x_2 = 4 - r + 4s & (2) \\ x_3 = -2 + 2r + s & (3) \end{array}\right\}$$

(1) – (3) liefert: $x_1 - x_3 = 3$. Dies ist bereits die Koordinatengleichung.

Wer umständlicher vorgeht und aus (2) und (3) r und s berechnet, um diese in (1) einzusetzen, kommt nach vielen Zeilen auf dasselbe Ergebnis !

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$



Es seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Da $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ ist, sind die Richtungsvektoren kollinear,
d.h. g und h sind parallel und liegen somit in einer Ebene.
Nun muß man noch klären, ob die Geraden nicht sogar identisch sind, denn sonst ist die Ebene auch nicht eindeutig bestimmt.

Dazu berechnet man den Vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da dieser jedoch nicht zu $\vec{u}$ bzw. $\vec{v}$ kollinear ist, hat er eine andere Richtung als diese Richtungsvektoren (siehe Abbildung). Die Geraden sind also nicht identisch.

Für die Gleichung der Ebene darf man jedoch nicht die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nehmen, da sie kollinear sind. Daher verwendet man zum Beispiel $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AB}$ und erhält $E: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\overrightarrow{AB}$, d.h.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist nun ein typisches Beispiel dafür, daß es sich lohnt, Richtungsvektoren durch Vielfache zu ersetzen: Statt $\vec{u}$ nehme ich jetzt $\frac{1}{4}\vec{u}$ und statt $\overrightarrow{AB}$

$-\frac{1}{9}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnung der Koordinatengleichung:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 1 + r & (1) \\ x_2 = 4 - 2r + s & (2) \\ x_3 = -2 + 3r & (3) \end{array}\right\}$$

Auch hier erhält man durch (3) – 3(1) sofort eine parameterfreie Gleichung:

$x_3 - 3x_1 = -5 \quad \left|\cdot(-1)\right.$ $\qquad$ ergibt $\qquad E: 3x_1 - x_3 = 5$.

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ keine Vielfachen voneinander sind, sind sie nicht kollinear und die Geraden sind nicht parallel.

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ komplanar. Die Geraden g und h liegen somit in einer Ebene (und weil sie nicht parallel sind, schneiden sie sich).

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 1 + 2r - 4s & (1) \\ x_2 = 1 - r + s & (2) \\ x_3 = -2 + 3s & (3) \end{array}\right\}$$

Aus (3) folgt: $3s = x_3 + 2 \Rightarrow s = \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}$

In (2): $x_2 = 1 - r + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{5}{3} - x_2 + \frac{1}{3}x_3$

r und s in (1): $x_1 = 1 + 2\left(\frac{5}{3} - x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) - 4\left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}\right)$

$x_1 = 1 + \frac{10}{3} - 2x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{8}{3}$

$x_1 + 2x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \quad |\cdot 3$

$E: \ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 5$

Aufgabe 142:

Zeige, dass A, B, C ein Dreieck bilden. Welche Gleichung hat die Lotgerade im Schwerpunkt des Dreiecks?

a) $A(1|1|0), B(2|0|1), C(-1|2|3)$

b) $A(1|1|1), B(-5|-2|-5), C(0|0|0)$

Lösung:

a) $A(1|1|0), B(2|0|1), C(-1|2|3)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind nicht kollinear, also liegen A,B und nicht auf einer Geraden sondern bilden ein Dreieck.

Gleichung der Dreiecksebene in Parameterform:

$$\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{d.h.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Umwandlung in Koordinatenform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 1 + r - 2s & (1) \\ x_2 = 1 - r + s & (2) \\ x_3 = \quad r + 3s & (3) \end{array} \right\}$$

(1) + (2) liefert: $x_1 + x_2 = 2 - s \Rightarrow s = 2 - x_1 - x_2$

In (2): $x_2 = 1 - r + 2 - x_1 - x_2 \Rightarrow r = 3 - x_1 - 2x_2$

r und s in (3): $x_3 = 3 - x_1 - 2x_2 + 3(2 - x_1 - x_2)$

$x_3 = 3 - x_1 - 2x_2 + 6 - 3x_1 - 3x_2$

$E: \quad 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$

Schwerpunkt des Dreiecks ABC:

$$\vec{x}_S = \tfrac{1}{3}\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right] = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\tfrac{2}{3}|\tfrac{2}{3}|1\right)$$

Lotgerade im Schwerpunkt:

Für die Lotgerade verwenden wir den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E als Richtungsvektor. Damit erhält die Lotgerade diese Gleichung:

$$L: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $A(1|1|1), B(-5|-2|-5), C(0|0|0)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind nicht kollinear, also liegen A,B und nicht auf einer Geraden sondern bilden ein Dreieck.

Gleichung der Dreiecksebene in Parameterform:

Ich verwende als Richtungsvektoren $\vec{u} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = -\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{d.h.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umwandlung in Koordinatenform:

$$\vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x_1 = 2r + s & (1) \\ x_2 = \ r + s & (2) \\ x_3 = 2r + s & (3) \end{array} \right\}$$

(1) - (3) liefert: $x_1 - x_3 = 0$

Dies ist bereits die Gleichung der Dreiecksebene.

Wer ungläubig dreinschaut, mache die Punktprobe und setze A, B und C ein !

Schwerpunkt des Dreiecks ABC:

$$\vec{x}_S = \frac{1}{3}\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(-\frac{4}{3}\middle|-\frac{1}{3}\middle|-\frac{4}{3}\right)$$

Lotgerade im Schwerpunkt:

Für die Lotgerade verwenden wir den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Ebene E als Richtungsvektor. Damit erhält die Lotgerade diese Gleichung:

$$L: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 143:

Überprüfe die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandeln Sie die Ebene nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechnen Sie ihn.

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\quad g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}11\\5\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Lösung:

a) $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}11\\5\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\5\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r+3s-2t=11 & (1)\\ -r\quad -t=4 & (2)\\ r+2s+3t=-6 & (3)\end{cases}$

Nennerdeterminante: $D=\begin{vmatrix}1&3&-2\\-1&0&-1\\1&2&3\end{vmatrix}\begin{matrix}1&3\\-1&0\\1&2\end{matrix}=-3+4+2+9=12$

Da diese Determinante ungleich 0 ist, existiert eine eindeutige Lösung, also ein Schnittpunkt von Gerade und Ebene. Um diesen berechnen zu können genügt die Kenntnis des Wertes von t.

Zählerdeterminante für t: $D_t=\begin{vmatrix}1&3&11\\-1&0&4\\1&2&-6\end{vmatrix}\begin{matrix}1&3\\-1&0\\1&2\end{matrix}=12-22-8-18=-36$

Also gilt: $t=\frac{D_t}{D}=\frac{-36}{12}=-3$

Setzt man dies in die Geradengleichung ein, folgt:

$\vec{x}_S=\begin{pmatrix}11\\5\\-7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-6\\5-3\\-7+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow S(5|2|2)$

b) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r+3s-2t=1 & (1) \\ -r \quad -t=-5 & (2) \\ r+2s-t=3 & (3) \end{Bmatrix}$

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -3+4+2-3 = 0$

Da diese Determinante den Wert 0 hat, existiert keine eindeutige Lösung, also sind Gerade und Ebene parallel.
Nun muß überprüft werden, ob g_2 sogar in E liegt.

$$D^* = \left| \vec{u} \ \vec{v} \ \overrightarrow{AB} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -15-2+10+9 \neq 0$$

Weil D* ungleich 0 ist, liegt B (Aufpunkt von g_2) nicht in E, also auch nicht g_2 .

c) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r+3s-2t=-1 & (1) \\ -r \quad -t=-2 & (2) \\ r+2s-t=0 & (3) \end{Bmatrix}$

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -3+4+2-3 = 0$

Da diese Determinante den Wert 0 hat, existiert keine eindeutige Lösung, also sind Gerade und Ebene parallel.
Nun muß überprüft werden, ob g_3 sogar in E liegt.

$$D^* = \left| \vec{u} \ \vec{v} \ \overrightarrow{AB} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -6+2+4 = 0$$

Weil D* gleich 0 ist, liegt B (Aufpunkt von g_3) in E, also auch g_3 .

Aufgabe 144:

Überprüfe die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandle die Ebene nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechne ihn.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad g_3: \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} r + s - t = -1 & (1) \\ -s - 2t = 3 & (2) \\ r + 2s + t = 8 & (3) \end{array} \right\}$

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 1 + 4 = 0$

Da diese Determinante den Wert 0 hat, existiert keine eindeutige Lösung, also sind Gerade und Ebene parallel.
Nun muß überprüft werden, ob g_1 sogar in E liegt.

$$D^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 3 - 1 - 6 = -12 \neq 0$$

Weil D* ungleich 0 ist, liegt B (Aufpunkt von g_1) nicht in E, also auch nicht g_1 .

b) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} r + s + 2t = -2 & (1) \\ -s - t = 1 & (2) \\ r + 2s + 3t = -3 & (3) \end{array} \right\}$

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 1 + 2 + 2 = 0$

Da diese Determinante den Wert 0 hat, existiert keine eindeutige Lösung, also sind Gerade und Ebene parallel.
Nun muß überprüft werden, ob g_1 sogar in E liegt.

$$D^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 2 - 2 = 0$$

Weil D* gleich 0 ist, liegt B (Aufpunkt von g_1) in E, also auch g_1 .

c) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittgleichung: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} r+s+t=0 & (1) \\ -s-3t=0 & (2) \\ r+2s-2t=6 & (3) \end{array} \right\}$

Nennerdeterminante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 2-3+1+6 = 6 \neq 0$

Da diese Determinante ungleich 0 ist, existiert eine eindeutige Lösung, also ein Schnittpunkt von Gerade und Ebene. Um diesen berechnen zu können genügt die Kenntnis des Wertes von t.

Zählerdeterminante für t: $D_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -6$

Also gilt: $t = \frac{D_t}{D} = \frac{-6}{6} = -1$

Setzt man dies in die Geradengleichung ein, folgt:

$$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S(4|-2|3)$$

Aufgabe 145:

Überprüfe die Lage folgender Geraden – Ebenen. Wandle die Ebene nicht in eine andere Form um. Wenn ein Schnittpunkt existiert, berechne ihn.

$E: 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$, und

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ -4-r \\ 6+r \end{pmatrix}$

Einsetzungsverfahren:

$$2(2r)-(-4-r)+6(6+r)=18$$
$$4r+4+r+36+6r=18$$
$$11r=-22$$
$$r=-2$$

Eingesetzt in g_1: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-4|-2|4)$

b) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ d.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+r \\ 1-4r \\ -2-r \end{pmatrix}$

Einsetzungsverfahren:

$$2(3+r)-(1-4r)+6(-2-r)=18$$
$$6+2r-1+4r-12-6r=18$$
$$-7=18$$

Dieser Widerspruch besagt, daß es keine Lösungen für r gibt, also auch keine gemeinsamen Punkte von g_2 und E: g_2 und E sind echt parallel.

c) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-5r \\ 2+2r \\ 4+2r \end{pmatrix}$

Einsetzungsverfahren:

$$2(-2-5r)-(2+2r)+6(4+2r)=18$$
$$-4-10r-2-2r+24+12r=18$$
$$18=18$$

Diese allgemeingültige Gleichung sagt, daß sie von jedem beliebigen Wert von r gelöst wird, d.h. **jeder Punkt von g_3 liegt in E,**
also liegt die Gerade g_3 in der Ebene E.

Aufgabe 146:

Fälle von $A(7|6|1)$ das Lot auf die Ebene E: $x+2y+z=8$:
Berechne den Lotfußpunkt.

Lösung:

Die Ebene hat den Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ als Normalenvektor (die Koeffizienten der Ebenengleichung). Ihn verwendet man als Richtungsvektor der Lotgeraden:

$L:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\6\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Diese Gerade schneidet man (mittels Einsetzen) mit der Ebene:

$$(7+t)+2(6+2t)+(1+t)=8$$

6t +20 = 8 ergibt 6t = - 12 also t = - 2.

Eingesetzt in L: $\vec{x}_F=\begin{pmatrix}7\\6\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow F(5|2|-1)$

Aufgabe 147:

Fälle von $P(-2|-6|13)$ das Lot auf die Ebene E: $2x_1+x_2-5x_3=15$

Lösung:

Lotgerade: $L:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-6\\13\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$ Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$2(-2+2t)+(-6+t)-5(13-5t)=15$$
$$-4+4t-6+t-65+25t=15$$
$$30\,t=90 \text{ also } t=3.$$

Eingesetzt in L: $\vec{x}_F=\begin{pmatrix}-2\\-6\\13\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow F(4|-3|-2)$

Aufgabe 148:

Eine Pyramide hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit
$A(8|5|1),\ B(0|-3|-4),\ C(28|4|3),\ D(10|-6|16)$.

Beweise; Die Spitze S steht von der Ebene aus senkrecht über dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Lösung:

Beweise; Die Spitze S steht von der Ebene aus senkrecht über dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

1. Aufstellen der Gleichung der Ebene durch A,B und C:

Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A sei der Aufpunkt. Dann folgt

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 8 - 8r + 20s & (1) \\ x_2 = 5 - 8r - s & (2) \\ x_3 = 1 - 5r + 2s & (3) \end{array} \right\}$$

(1) – (2) liefert $x_1 - x_2 = 3 + 21s \Rightarrow 21s = x_1 - x_2 - 3 \Rightarrow s = \frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}$

In (2): $x_2 = 5 - 8r - \left(\frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}\right) = \frac{36}{7} - 8r - \frac{1}{21}x_1 + \frac{1}{21}x_2$

$8r = \frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2 \Rightarrow r = \left(\frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2\right)\cdot\frac{1}{8}$

Eingesetzt in (3): $x_3 = 1 - 5\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2\right) + 2\left(\frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}\right) \mid \cdot 8\cdot 21$

$$168x_3 = 168 - 5\cdot 21\cdot\left(\frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2\right) + 2\cdot 8\cdot 21\left(\frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}\right)$$

$$168x_3 = 168 - 5\cdot 21\cdot\left(\frac{36}{7} - \frac{1}{21}x_1 - \frac{20}{21}x_2\right) + 2\cdot 8\cdot 21\left(\frac{1}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{7}\right)$$

$$168x_3 = 168 - 5\cdot(36\cdot 3 - x_1 - 20x_2) + 16\cdot(x_1 - x_2 - 3)$$

$$168x_3 = 168 - 540 + 5x_1 + 100x_2 + 16x_1 - 16x_2 - 48$$

$$21x_1 + 84x_2 - 168x_3 = 420 \mid :21$$

$$\mathbf{E:\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 20}$$

(Sie erinnern sich, wie man die hier sicher nützliche Probe machen kann ?
Also: 1. Links den Aufpunkt einsetzen, das muß 20 ergeben,
2. Links beide Richtungsvektoren einsetzen, das muß jedoch beides mal 0 ergeben)

2. Lot von D auf die Dreiecksebene fällen:

Dazu nimmt man den aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung gebildeten Normalenvektor und verwendet ihn als Richtungsvektor. Die Gleichung der Lotgeraden wird dann Koordinatenweise in die Gleichung der Ebene eingesetzt:

$$L:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow (10 + r) + 4(-6 + 4r) - 8(16 - 8r) = 20$$

$$10 + r - 24 + 16r - 128 + 64r = 20$$

$$81r = 162 \Rightarrow r = 2$$

Eingesetzt in L: $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F(12|2|0)$ Lotfußpunkt.

Zum Vergleich: Schwerpunkt des Dreiecks: $\vec{x}_S = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$

Ergibt $S(12|2|0)$ Also ist der Lotfußpunkt zugleich der Schwerpunkt !

Aufgabe 149:

Eine Pyramide hat die Grundfläche ABC und die Spitze S mit
$A(1|5|3),\ B(-2|5|1),\ C(0|0|4),\ S(1|-2|-4)$.
Überprüfe, ob diese Pyramide „überhängt" (Dies ist dann der Fall, wenn das Lot von der Spitze auf die Grundfläche außerhalb des Dreiecks schneidet.

Lösung:

1. Aufstellen der Gleichung der Ebene durch A,B und C:

Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. A sei der Aufpunkt. Dann folgt

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 1 - 3r - s & (1) \\ x_2 = 5 \quad -5s & (2) \\ x_3 = 3 - 2r + s & (3) \end{Bmatrix}$$

Aus (2) folgt: $5s = 5 - x_2 \Rightarrow s = 1 - \frac{1}{5}x_2$

In (1): $x_1 = 1 - 3r - \left(1 - \frac{1}{5}x_2\right) \Rightarrow 3r = \frac{1}{5}x_2 - x_1 \Rightarrow r = \frac{1}{15}x_2 - \frac{1}{3}x_1$

r und s in (3); $x_3 = 3 - 2\left(\frac{1}{15}x_2 - \frac{1}{3}x_1\right) + \left(1 - \frac{1}{5}x_2\right) \quad |\cdot 15$

$$15x_3 = 45 - 2x_2 + 10x_1 + 15 - 3x_2$$

$$-10x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 60 \quad |:5$$

$$\mathbf{E:\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12}$$

2. Lot von S auf die Dreiecksebene fällen:

$L:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ eingesetzt in E: $-2(1-2t) + (-2+t) + 3(-4+3t) = 12$

$$-2 + 4t - 2 + t - 12 + 9t = 12$$

$$14t = 28 \Rightarrow t = 2$$

Eingesetzt in L ergibt dies den Lotfußpunkt:

$$\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-3|0|2)$$

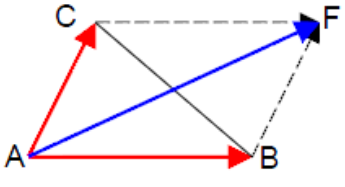
3. Lage des Punktes F bezüglich des Dreiecks ABC.

Ansatz: $\overrightarrow{AF} = r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3r - s = -4 & (1) \\ -5s = -5 & (2) \\ -2r + s = -1 & (3) \end{Bmatrix}$

Aus (2) folgt: s = 1, in (3) ; $-2r + 1 = -1 \Rightarrow -2r = -2 \Rightarrow r = 1$

Probe in (1): $-3 - 1 = -4$ ist eine wahre Aussage.

Ergebnis: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, d.h. F liegt außerhalb des Dreiecks und ergänzt ABC zu einem Parallelogramm.



Aufgabe 150:

Gegeben sind diese zwei Ebenen und ein Punkt P. Lege durch P die Lotgerade zu beiden Ebenen und berechne die Schnittpunkte mit den Ebenen. Stelle an Hand der Ergebnisse fest, ob P zwischen den Ebenen liegt oder wo sonst ? $E_1: x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 27$, $E_2: x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -36$, $P(1|3|-2)$

Lösung:

Zunächst einmal wollen wir festhalten, daß die Ebenen parallel sind, weil sie denselben Normalenvektor haben: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir legen nun eine Senkrechte zu E_1 und E_2 durch P und schneiden diese Lotgerade mit beiden Ebenen.

$$L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in E_1 :

$$(1+r) - 4(3-4r) + 2(-2+2r) = 27$$
$$1 + r - 12 + 16r - 4 + 4r = 27$$
$$21r = 42 \Rightarrow r = 2$$

Schnittpunkt mit E_1:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(3|-5|2)$$

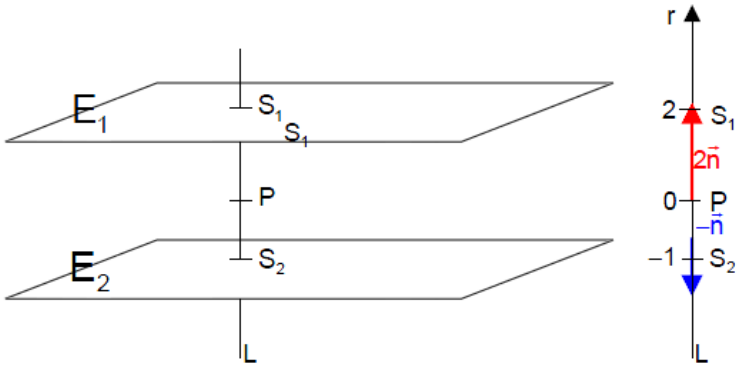
Eingesetzt in E_2 :

$$(1+r) - 4(3-4r) + 2(-2+2r) = -36$$
$$1 + r - 12 + 16r - 4 + 4r = -36$$
$$21r = -21 \Rightarrow r = -1$$

Schnittpunkt mit E_2 :

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(0|7|-4)$$

Übersicht:



Die eigentlich wichtige Abbildung ist die rechte. Dort ist die Lotgerade L als r-Achse dargestellt. Ganz klar gehört der Aufpunkt P der Lotgeraden zum Wert r = 0. Aus den Schnittrechnungen folgt, daß der Schnittpunkt S_1 mit E_1 zur r = - 2 und S_2 mit E_2 zu r = - 1 gehört. ***Also liegt P zwischen E_1 und E_2 !***

Aufgabe 151:

Gegeben: $E_1: 2x+y-5z=17$, $E_2: 2x+y-5z=77$, $P(3|1|4)$
Bestimme die Lage von P relativ zu den beiden Ebenen E_1 und E_2.

Lösung:

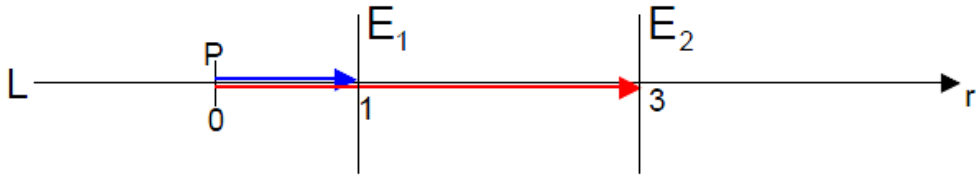
Lot L von P auf die parallelen Ebenen E_1 und E_2:

$$L: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Schnitt der Lotgeraden mit E_1: $2(3+2r)+(1+r)-5(4-5r)=17$
führt auf 30 r = 30, also r = 1

Schnitt der Lotgeraden mit E_2: $2(3+2r)+(1+r)-5(4-5r)=77$
führt auf 20 r = 90, also r = 3.

Veranschaulichung der Lage der Punkte auf der Lotgeraden L:



Aufgabe 152:

Untersuche die gegenseitige Lage, wenn eine Schnittgerade existiert, berechne deren Gleichung.

a) $E_1: 2x_1+2x_2-3x_3=12$ und $E_2: 4x_1-x_2+2x_3=20$

b) $E_1: 2x_1+2x_2-3x_3=12$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $E_1: -2x_1+8x_2-6x_3=9$ und $E_2: 3x_1-12x_2+9x_3=12$

d) $E_1: x+y-2z=8$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) E_1: $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12$ und E_2: $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$

Gleichungssystem für die Schnittmenge:

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12 \quad (1)$$
$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \quad (2)$$

Elimination von x_2 durch $(1) + 2 \cdot (2)$: $10x_1 + x_3 = 52$

Daraus folgt: $x_3 = 52 - 10x_1$

Wähle $x_1 = r,\ r \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x_3 = 52 - 10r$

eingesetzt in (2): $x_2 = 4x_1 + 2x_3 - 20 = 4r + 2(53 - 10r) - 20 = -16r + 84$

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -16r + 84 \\ 52 - 10r \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 84 \\ 52 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ -10 \end{pmatrix}$$

b) E_1: $2x_1+2x_2-3x_3=12$ und $E_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$

Aus E_2 folgt: $\left\{\begin{array}{lll} x_1=1+2r+s & (1)\\ x_2=-1-r+4s & (2)\\ x_3=1\quad\quad -s & (3)\end{array}\right\}$, eingesetzt in E_1:

$$2[1+2r+s]+2[-1-r+4s]-3[1-s]=12$$
$$2+4r+2s-2-2r+8s-3+3s=12$$
$$2r+13s=15$$

Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden im r-s-Koordinatensystem der Ebene E_2.
Ich löse z.B. nach r auf und setze ein: $r=\frac{15}{2}-\frac{13}{2}s$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\left(\tfrac{15}{2}-\tfrac{13}{2}s\right)\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\tfrac{15}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}-\tfrac{13}{2}s\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+15\\-1-\frac{15}{2}\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1-13\\4+\frac{13}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

Schnittgerade: $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}16\\-\frac{17}{2}\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-12\\\frac{21}{2}\\-1\end{pmatrix}$

c) $E_1: -2x_1+8x_2-6x_3=9$ und $E_2: 3x_1-12x_2+9x_3=12$

Gleichungssystem für die Schnittmenge:

$$E_1: -2x_1+8x_2-6x_3=9 \quad (1)$$
$$E_2: 3x_1-12x_2+9x_3=12 \quad (2)$$

Es sollte auffallen, daß die linke Seite der Gleichung (1) durch 2 teilbar ist und die ganze Gleichung (2) durch (3). Das führt zu

$$-x_1+4x_2-3x_3=4{,}5 \quad (3)$$
$$x_1-4x_2+3x_3=4 \quad (4)$$

Wir addieren (3) und (4) und erhalten den Widerspruch $0 = 8{,}5$.
Es gibt also keine gemeinsamen Punkte, die Schnittmenge ist leer, weil die Ebenen parallel sind.

d) $E_1: x+y-2z=8$ und $E_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\9\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Aus E_2 folgt: $\left\{\begin{array}{ll} x_1=3+r+s & (1)\\ x_2=9+r-s & (2)\\ x_3=2r & (3)\end{array}\right\}$, eingesetzt in E_1:

$$(3+r+s)+(9+r-s)-2(2r)=8$$
$$-2r+0s=-4 \Rightarrow r=2$$

Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden im r-s-Koordinatensystem der Ebene E_2. Da der Koeffizient von s Null ist, liegt diese Gerade parallel zur s-Achse (vgl: $x = 2$ ist im x-a-Achsenkreuz die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse !). Die Schnittgerade ist also parallel zum Vektor $\vec{v}$ der Ebene E_2.
Durch Einsetzen erhält man die Vektorgleichung der Schnittgeraden:

$$g: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\9\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\11\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

e) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$

Hier lohnt es sich, die Determinanten-Voruntersuchung zu machen.

$$D_1 = |\vec{u}_1\ \vec{v}_1\ \vec{u}_2| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 2 \neq 0$$

Da diese Determinante ungleich Null ist, sind die Vektoren $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2$ nicht komplanar, d.h. es gibt keinen Pfeil des Vektors $\vec{u}_2$, der in der Ebene E_1 liegt oder zu ihr parallel ist. Daher sind die Ebenen nicht parallel, sie schneiden sich.

Berechnung der Schnittgerade:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1+r+s = 1-2b & (1)\\ r+2s = 2+a-3b & (2)\\ 2-r = -4-a+b & (3)\end{array}\right\}$$

Durch (2) + (3) verschwindet der Parameter a ganz aus dem System:

$$2 + 2s = -2 - 2b \quad (4)$$

Dazu gehört noch $1 + r + s = 1 - 2b \quad (1)$

Durch Subtraktion (4)-(1): $1 - r + s = -3 \Rightarrow s = r - 4$

Dies ist schon die Gleichung der Schnittgeraden im r-s-System der Ebene E_1. Ersetzen wir damit s, folgt die Vektorgleichung der Schnittgeraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + (r-4)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-8\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

f) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir beginnen wieder mit der Determinanten-Voruntersuchung:

$$D_1 = |\vec{u}_1\ \vec{v}_1\ \vec{u}_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5-3-3+1=0$$

$$D_2 = |\vec{u}_1\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5+1+2-10+1+1=0$$

Da alle vier Richtungsvektoren komplanar sind, liegen parallele Ebenen vor.

$$D_3 = |\vec{u}_1\ \vec{v}_1\ \overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20-6+30-4=0$$

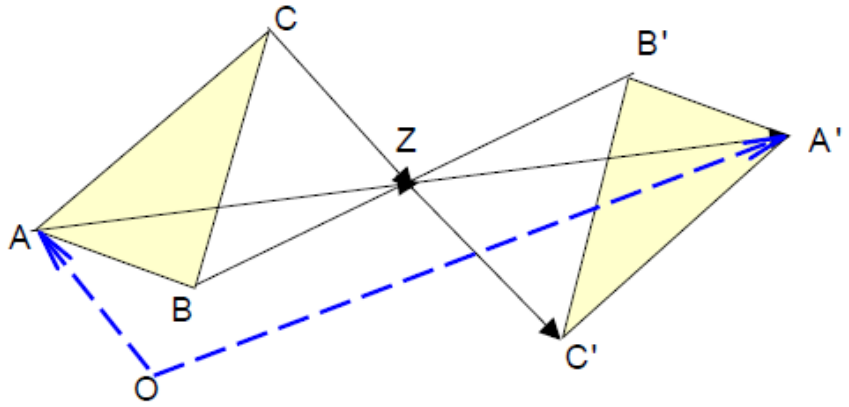
Also liegt der ***Pfeil*** $\overrightarrow{AB}$ ganz in E_1, also liegt auch B in E_1 also sind die parallelen Ebenen sogar identisch !

Aufgabe 153:

Spiegele das Dreieck $A(1|0|0)$, $B(3|1|0)$, $C(-1|2|1)$ an $Z(4|2|-3)$

Lösung:

Lösung:



Spiegelungsgleichung: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$ d.h. $\vec{x}' = \vec{x} + 2(\vec{z} - \vec{x}) \Rightarrow \mathbf{\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x}}$

Abbildung von A: $\vec{a}' = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(7|4|-6)$

Abbildung von B: $\vec{b}' = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(5|3|-6)$

Abbildung von C: $\vec{c}' = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(9|2|-7)$

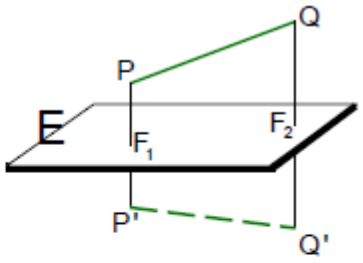
Aufgabe 154:

Spiegle die Punkte $P(5|-12|25)$ und $Q(-4|1|-11)$ an der Ebene

E: $4x - 3y + 12z = 18$

Lösung:

Lot L_1 von P auf E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$



Lotfußpunkt auf E:

$$4(5+4r)-3(-12-3r)+12(25+12r)=18$$
$$20+16r+36+9r+300+144r=18 \Leftrightarrow 169r=-338 \Leftrightarrow r=-2$$

Eingesetzt in L_1 : $F_1(-3|-6|1)$.

Spiegelbild: $\vec{x}' = 2\vec{f} - \vec{x}$ also $\vec{p}' = 2\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -23 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-11|0|-23)$

Lot L_2 von Q auf E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt auf E:

$$4(-4+4r)-3(1-3r)+12(-11+12r)=18$$
$$-16+16r-3+9r-132+144r=18 \Leftrightarrow 169r=169 \Leftrightarrow r=1$$

Eingesetzt in L_2 : $F_2(0|-2|1)$

Spiegelbild: $\vec{x}' = 2\vec{f} - \vec{x}$ also $\vec{q}' = 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(4|-5|13)$

Aufgabe 155:

Spiegle den Punkt $R(11|11|-11)$ an E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Zuerst muß man die Koordinatenform von E herstellen.

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x_1=5+2r-s & (1)\\ x_2=2\quad\quad+2s & (2)\\ x_3=1+\ r+\ s & (3)\end{Bmatrix}$$

Aus (2) folgt $\quad 2s=x_2-2\ \Rightarrow\ s=\frac{1}{2}x_2-1$

In (3) eingesetzt: $\quad x_3=1+r+\frac{1}{2}x_2-1=r+\frac{1}{2}x_2\ \Rightarrow\ r=x_3-\frac{1}{2}x_2$

r und s in (1): $\quad x_1=5+2\left(x_3-\frac{1}{2}x_2\right)-\left(\frac{1}{2}x_2-1\right)$

$$x_1=5+2x_3-x_2-\frac{1}{2}x_2+1$$

$$x_1+\frac{3}{2}x_2-2x_3=6\quad|\cdot 2$$

E: $\quad \mathbf{2x_1+3x_2-4x_3=12}$

Lot von $R(11|11|-11)$ auf E: $\quad L:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}11\\11\\-11\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

Lotfußpunkt F auf E: $\quad 2(11+2r)+3(11+3r)-4(-11-4r)=12$

$$22+4r+33+9r+44+16r=12$$

$$29r=-87\ \Rightarrow\ r=-3$$

Eingesetzt in die Lotgerade:

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}11\\11\\-11\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\20\\-23\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ F(17|20|-23)$$

Spiegelgleichung: $\quad \mathbf{\vec{x}'=2\vec{f}-\vec{x}}$

$$\vec{r}\,'=2\begin{pmatrix}17\\20\\-23\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11\\11\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\29\\-35\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ R'(23|29|-35)$$

Aufgabe 156:

Spiegle die Geraden g an der Ebene E: $x_1-3x_2+2x_3=4$

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}$ c) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Lösung:

a) Schnitt von g und E: $(-6+2r)-3(4)+2(-3+r)=4$

$-6+2r-12-6+2r=4 \Leftrightarrow 4r=28 \Rightarrow r=7$

Schnittpunkt $\vec{s}=\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} \Rightarrow S(8|4|4)$

Lot von $A(-6|4|-3)$ auf E: $L:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

Lot mit E schneiden: $(-6+s)-3(4-3s)+2(-3+2s)=4$

$-6+s-12+9s-6+4s=4 \Leftrightarrow 14s=28 \Leftrightarrow s=1$

Lotfußpunkt: $\vec{f}=\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow F(-4|-2|1)$

Spiegelung von A an E d.h. an F:

$$\vec{a}'=\vec{a}+2\overrightarrow{AF}=\vec{a}+2\left(\vec{f}-\vec{a}\right)=2\vec{f}-\vec{a}$$

$$\vec{a}'=2\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\-8\\5\end{pmatrix} \Rightarrow A'(-14|-8|5)$$

Bildgerade: $g'=(A'S)$, denn S ist Fixpunkt dieser Spiegelung:

$$\overrightarrow{A'S}=\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-14\\-8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\12\\-1\end{pmatrix}$$

also: $g':\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-14\\-8\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}22\\12\\-1\end{pmatrix}$

Man kann statt S auch A' als Aufpunkt nehmen:

$$g':\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$.

Schnittgleichung: $(-3+10r) - 3(1+r) + 2(-5-r) = 4$

$-3+10r-3-3r-10-2r = 4 \Leftrightarrow 5r = 20 \Leftrightarrow r = 4$

Schnittpunkt: $\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow S(37|5|-9)$

Lot von $A(-3|1|-5)$ auf E: $L: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$L \cap E = \{F\}$: $(-3+s) - 3(1-3s) + 2(-5+2s) = 4$

$-3+s-3+9s-10+4s = 4$

$14s = 20 \Rightarrow s = \frac{10}{7}$

Lotfußpunkt: $F\left(-\frac{11}{7}|-\frac{23}{7}|-\frac{15}{7}\right)$

Spiegelung von A an E d.h. an F:

$$\vec{a}' = \vec{a} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{a} + 2\left(\vec{f} - \vec{a}\right) = 2\vec{f} - \vec{a}$$

$$\vec{a}' = 2\begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{23}{7} \\ -\frac{15}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{7} \\ -\frac{53}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow A'\left(\frac{43}{7}|-\frac{53}{7}|\frac{5}{7}\right)$$

Bildgerade: $g' = (A'S)$, denn S ist Fixpunkt dieser Spiegelung:

$$\overrightarrow{A'S} = \begin{pmatrix} 37 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{43}{7} \\ -\frac{53}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{216}{7} \\ \frac{88}{7} \\ -\frac{68}{7} \end{pmatrix}$$

Da man bei einem Richtungsvektor auch ein beliebiges Vielfaches nehmen darf, wähle ich hier das 7-fache und erhalte die Gleichung der Bildgeraden:

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 37 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 216 \\ 88 \\ 68 \end{pmatrix}$$

Oder vom Richtungsvektor noch ein Viertel:

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 37 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 54 \\ 22 \\ 17 \end{pmatrix}$$

c) Spiegle die $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an der Ebene $E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$

Schnittgleichung: $(3-2r) - 3(3) + 2(3+r) = 4 \Leftrightarrow 0 = 4$

Dieser Widerspruch besagt, daß kein Schnittpunkt existiert, also ist $g \parallel E$.

Lot vom Aufpunkt $A(3|3|3)$ auf E: $L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$L \cap E = \{F\}$: $(3+s) - 3(3-3s) + 2(3-2s) = 4 \Leftrightarrow 6s = 4 \Leftrightarrow s = \frac{2}{3}$

Lotfußpunkt: $F\left(\frac{11}{3}|7|\frac{13}{3}\right)$

Spiegelung des Aufpunktes A an E (d.h. an F): $\vec{a}' = \vec{a} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{a} + 2\left(\vec{f} - \vec{a}\right) = 2\vec{f} - \vec{a}$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{22}{3} \\ 14 \\ \frac{26}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 11 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow A'\left(\frac{13}{3}|11|\frac{17}{3}\right)$$

Wenn g parallel zu E ist, dann auch g'. d.h. für g' kann der Richtungsvektor von g verwendet werden:

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 11 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 157:

Spiegle die Geraden am Zentrum $Z(5|3|-4)$:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Spiegelgleichung: $\vec{x}' = 2\vec{z} - \vec{x}$

a) $\vec{x}' = 2\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\right] \Rightarrow g': \vec{x}' = \begin{pmatrix}8\\4\\-7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$

b) $\vec{x}' = 2\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow g': \vec{x}' = \begin{pmatrix}12\\5\\-13\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-10\\-1\\1\end{pmatrix}$

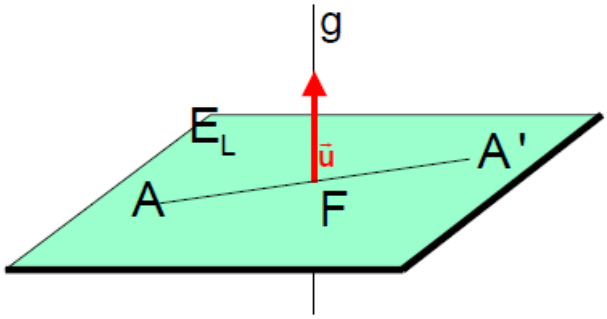
c) $\vec{x}' = 2\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow g': \vec{x}' = \begin{pmatrix}7\\3\\-11\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 158:

Spiegle den Punkt $A(2|5|-3)$ an der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$

Lösung:

(6) Spiegle den Punkt $A(2|5|-3)$ an der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$



*Diese Methode muß man lernen und dann bei Bedarf einfach **wissen** !*
Um den Fußpunktes des Lotes von A auf g zu erhalten, muß man eine Ebene senkrecht zu g durch A legen (die Lotebene E_L) und diese mit g schneiden. Diese Lotebene hat den Richtungsvektor von g als Normalenvektor ! Dann spiegelt man A am Lotfußpunkt F.

Normalenvektor von E_L : $\vec{n} = \vec{u}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow E_L : 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = k$

K erhält man, indem man einen Punkt von E_L einsetzt. Dies muß A sein:

$$k = 4 - 10 - 15 = -21$$

Damit folgt: $E_L : 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -21$

Schnitt von L und E_L : $2(2+2r) - 2(-4-2r) + 5(5r) = -21$

$$4 + 4r + 8 + 4r + 25r = -21 \Leftrightarrow 33r = -33 \Leftrightarrow r = -1$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow F(0|-2|-5)$

Spiegelung von A an F: $\vec{a}' = \vec{a} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{a} + 2(\vec{f} - \vec{a}) = 2\vec{f} - \vec{a}$

$$\vec{a}' = 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(-2|-9|-7)$$

Aufgabe 159:

Spiegle die Ebene E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an E_2: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$.

Lösung:

1. Schritt: Schnitt beider Ebenen: $(5+2r-s)+(2+2s)-2(1+r)=4$

ergibt $s=-1$

Dies ist die r-s-Gleichung der Schnittgeraden in der Ebene E_1. Weil r fehlt, ist diese Schnittgerade in E_1 parallel zur r-Achse, also zum Richtungsvektor $\vec{u}$.

Eingesetzt folgt die Parametergleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Diese Gerade liegt zudem in der x_1x_3-Ebene, denn $x_2 = 0$!

2. Schritt: Spiegelung des Aufpunktes $A(5|2|1)$ an E_2:

Lot von A auf E_2: $L:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Lot und Ebene E_2 schneiden: $(5+t)+(2+t)-2(1-2t)=4 \Leftrightarrow 6t=-1 \Rightarrow t=-\frac{1}{6}$

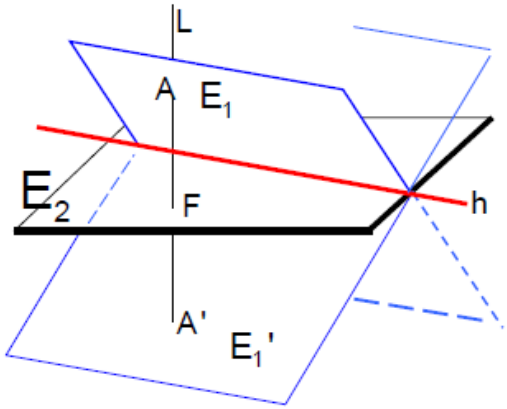
Lotfußpunkt: $\vec{f}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{29}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{6}\end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\frac{29}{6}|\frac{11}{6}|\frac{4}{6}\right)$

Spiegelung von A an F: $\vec{a}'=\vec{a}+2\overrightarrow{AF}=\vec{a}+2(\vec{f}-\vec{a})=2\vec{f}-\vec{a}$

$$\vec{a}'=2\begin{pmatrix}\frac{29}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{6}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{14}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow A'\left(\frac{14}{3}|\frac{5}{3}|\frac{1}{3}\right)$$

Die Bildebene E_1' geht durch die Schnittgerade (die aus lauter Fixpunkten besteht) und den Punkt A'. Es sei $B(6|0|0)$ der Aufpunkt der Schnittgeraden, dann kann man $\vec{w}=3\cdot\overrightarrow{BA'}=3\cdot\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}$ als weiteren Richtungsvektor für E_1' nehmen:

$$E_1':\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}.$$



Aufgabe 160:

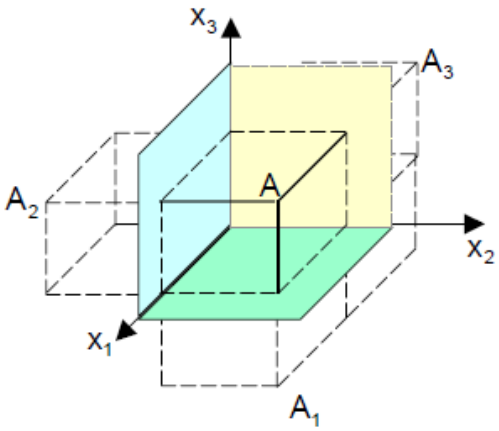
Spiegle die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ an den drei Koordinatenebenen.

Lösung:

a) Spiegelung an der x_1x_2 - Ebene : $x_3 = 0$:
Die Abbildung soll anschaulich machen, daß bei der Spiegelung an der x_1x_2-Ebene x_1 und x_2 unverändert bleiben, aber x_3 das Vorzeichen wechselt.

Daher folgt für die Punkte auf g:

g_3': $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$



Die Abbildung zeigt die Spiegelung eines Punktes an den drei Koordinatenebenen. Bei der Spiegelung an der x_1x_2-Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0$ ändert sich nur die x_3-Koordinate: Sie wechselt das Vorzeichen. Usw.

b) Spiegelung an der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$:

g_2' : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) Spiegelung an der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$:

g_1' $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 161:

Eine Pyramide hat die Ecken $A(2|0|2)$, $B(4|2|1)$, $C(5|-2|-2)$ und $D(8|-2|4)$. Spiegelt man die Spitze D an der Grundebene (ABC), dann entsteht eine Doppelpyramide.
Hängt die Spitze der Pyramide ABCD über ?

Lösung:

1. Zuerst muß man die Parametergleichung der von E herstellen:

Wir verwenden A als Aufpunkt, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$

als Richtungsvektoren für die Parametergleichung, die wir sofort in die Koordinatengleichung umrechnen:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2r + 3s & (1)\\ x_2 = \quad 2r - 2s & (2)\\ x_3 = 2 - \ r - 4s & (3)\end{cases}$$

(1) – (2): $x_1 - x_2 = 2 + 5s \Rightarrow 5s = x_1 - x_2 - 2 \Rightarrow s = \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}$

In (2) eingesetzt: $x_1 = 2 + 2r + \frac{3}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{6}{5} \Leftrightarrow 2r = \frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - \frac{4}{5}$

ergibt $r = \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 - \frac{2}{5}$.

r und s in (3): $x_3 = 2 - \left(\frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 - \frac{2}{5}\right) - 4\left(\frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}\right)$

$x_3 = 2 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{3}{10}x_2 + \frac{2}{5} - \frac{4}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{8}{5}$

$x_3 = 4 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 \Leftrightarrow x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 4 \Leftrightarrow \mathbf{2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8}$

2. Lot von D auf die Grundebene E durch ABC:

$$L: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Schnitt von L und E: $2(8 + 2t) - (-2 - t) + 2(4 + 2t) = 8$

$16 + 4t + 2 + t + 8 + 4t = 8$

$9t + 26 = 8 \Rightarrow 9t = -18 \Rightarrow t = -2$

Lotfußpunkt: $F(4|0|0)$.

Spiegelung von D an E: $\vec{d}' = 2\vec{f} - d = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow D'(0|2|-4)$

Lage des Lotfußpunktes bezüglich der Grundfläche ABC:

Ansatz: $\overrightarrow{AF} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 2 & (1)\\ 2x - 2y = 0 & (2)\\ -x - 4y = -2 & (3)\end{cases}$

(1)-(2) ergibt $5y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{5}$. Aus (2) folgt: x = y also ist auch $x = \frac{2}{5}$.

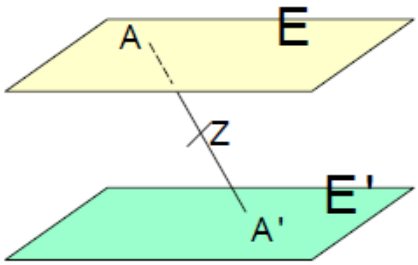
Auswertung: Da x und y aus dem Intervall $]0;1[$ sind und x+y<1 ist, liegt F im Innern des Dreiecks ABC. Die Spitze hängt also nicht über !

Aufgabe 162:

Spiegle die Ebene $x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$ an $Z(1|-1|5)$.

Lösung:

Lösung:



a) *Methode: Man berechnet einen beliebigen Punkt aus A und spiegelt ihn an Z. Da der Punktspiegelung die Bildgerade parallel zum Urbild ist, muß auch jede Bildebene parallel zum Urbild sein. Parallele Ebenen haben aber gleiche Normalenvektoren, also gleiche linke Seiten in der Koordinatengleichung !*

Berechnung eines Punktes in E:

Wähle $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ folgt aus der Ebenengleichung $x_1 = 4$.
Also ist $A(4|0|0)$ ein Punkt von E.

Spiegelung von A an Z:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AZ} \quad \text{d.h.} \quad \vec{a}' = \vec{a} + 2\cdot(\vec{z} - \vec{a}) \Leftrightarrow \mathbf{\vec{a}' = 2\vec{z} - \vec{a}}$$

$$\vec{a}' = 2\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\10\end{pmatrix} \Rightarrow A'(-2|-2|10)$$

Gleichung einer zu E parallelen Ebene E': $x_1 + x_2 - 2x_3 = k$

Die Ebene soll durch A' gehen, also folgt $k = -2 - 2 - 20 = -24$

Ergebnis: E': $x_1 + x_2 - 2x_3 = -24$

Aufgabe 163:

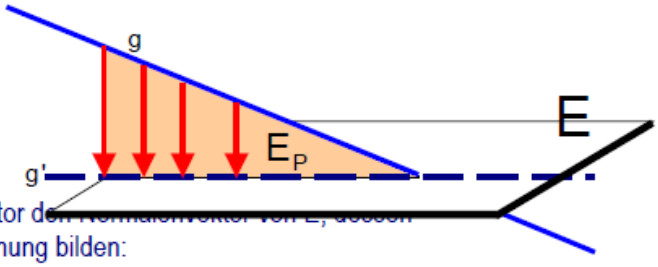
Projizieren Sie die unten genannten Geraden senkrecht auf die Ebenen.

(a) E: $x - y + 2z = 10$ (b) E: $2x_1 + x_3 = 0$

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$ b) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}$ c) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Lösung:

Ausführliche Lösung für a) und g_1:



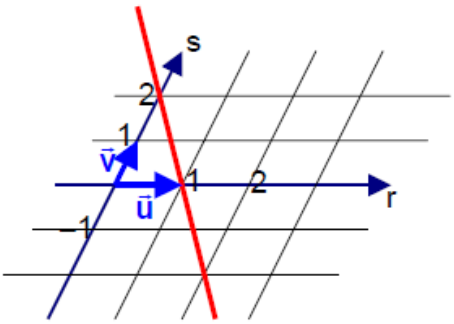
Wir erzeugen eine Projektionsebene E_P, in der alle Projektionslinien von den Punkten auf g senkrecht zu E liegen. Diese Ebene E_P erhält den Aufpunkt von g, deren Richtungsvektor und als zweiten Richtungsvektor den Normalenvektor von E, dessen Koordinaten die Koeffizienten der Ebenengleichung bilden:

$$E_P:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Diese Ebene schneidet man mit E, indem man für die Koordinaten x, y, z die aus E_P folgenden Terme einsetzt::

$$(2+s)-(2-2r-s)+2(-1+5r+2s)=10$$
$$2+s-2+2r+s-2+10r+4s=10$$
$$12r+6s=12$$

Dies ist die Gleichung der Bildgeraden im r-s-System der Ebene E_P. Löst man sie nach s auf, folgt $s=-2r+2$ wie sie in der Abbildung dargestellt ist.
Setzt man dies in die Parametergleichung ein, folg die Parametergleichung von g_1':



$$g_1':\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}+(-2r+2)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$g_1':\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Diese Gerade liegt übrigens ganz in der x_1x_3 - Ebene.

Kurzlösung für a) und g_2: Projektionsebene E_P: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene E: $(-2+10r+s)-(1+r-s)+2(5-r+2s)=10$

$$-2+10r+s-1-r+s+19-2r+4s=10 \ \Leftrightarrow\ 7r+6s=-6 \ \Leftrightarrow\ s=-\tfrac{7}{6}r-1$$

Projektionsgerade:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}+\left(-\tfrac{7}{6}r-1\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-\frac{7}{6}\\\frac{7}{6}\\-\frac{14}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}\frac{53}{6}\\\frac{13}{6}\\-\frac{20}{6}\end{pmatrix}$$

bzw. $g_2':\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}53\\13\\-20\end{pmatrix}$ mit dem 6-fachen Richtungsvektor.

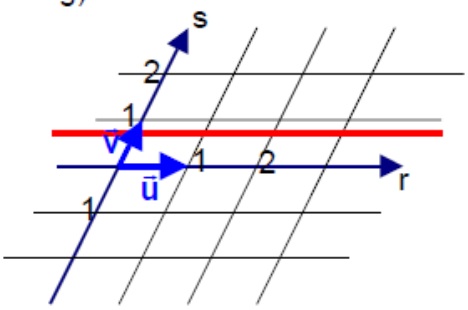
Kurzlösung für a) und g_3: $E: x-y+2z=10$ und $g_3: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Projektionsebene E_P: $E_P: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $E: (3-2r+s)-(3-s)+2(3+r+2s)=10$

$3-2r+s-3+s+6+2r+4s=10 \Leftrightarrow 6s=4 \Leftrightarrow s=\frac{2}{3}$

Diese Schnittgerade liegt parallel zur r-Achse (Abbildung).
Projektionsgerade:



$g_3': \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$

bzw. $g_3': \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4\\-2\\7\end{pmatrix}$

Kurzlösung für b) und g_1: $E: 2x_1+x_3=0$ $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$

Projektionsebene: $E_P: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2(2+2s)+(-1+5r+s)=0 \Leftrightarrow 5r+5s=-3 \Leftrightarrow s=-r-\frac{3}{5}$

Projektionsgerade: $g_1'': \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}+\left(-r-\frac{3}{5}\right)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\frac{4}{5}\\2\\-1-\frac{3}{5}\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0-2\\-2\\5-1\end{pmatrix}$

Ergebnis: $g_1'': \vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\2\\-\frac{8}{6}\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$

Kurzlösung für b) und g_2: $E: 2x_1 + x_3 = 0$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Projektionsebene: $E_P: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2(-2+10r+2s)+(5-r+s)=0$

$-4+20r+4s+5-r+s=0 \Leftrightarrow 19r+5s=-1 \Leftrightarrow s=-\frac{19}{5}r-\frac{1}{5}$

Projektionsgerade: $g_2'': \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{19}{5}r-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\frac{2}{5} \\ 1 \\ 5-\frac{1}{5} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10-\frac{38}{5} \\ 1 \\ -1-\frac{19}{5} \end{pmatrix}$

Ergebnis: $g_2'': \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ 1 \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ 1 \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ 1 \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ -24 \end{pmatrix}$

Kurzlösung für b) und g_3: $E: 2x_1 + x_3 = 0$ und $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Projektionsebene: $E_P: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2(3-2r+2s)+(2+r+s)=0 \Leftrightarrow -3r+5s=-8 \Leftrightarrow s=\frac{3}{5}r-\frac{8}{5}$

Projektionsgerade: $g_3'': \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{5}r-\frac{8}{5}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\frac{16}{5} \\ 3 \\ 3-\frac{8}{5} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2+\frac{6}{5} \\ 0 \\ 1+\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Ergebnis: $g_3'': \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 3 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 3 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 164:

Projiziere die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ von $Z(2|3|-1)$ auf die Ebene

$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 30$. Welcher Geradenpunkt erhält dabei keinen Bildpunkt?

Lösung:

Zentralprojektion: Für die Projektionsebene verwende ich den Aufpunkt $A(2|2|-1)$

und die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Projektionsebene: $E_P: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2(2) + (2 - 2r + s) - 2(-1 + 5r) = 30 \Leftrightarrow s - 12r = 22$

$s = 12 + 22$

Parametergleichung der Schnittgeraden = Projektionsgeraden:

$$g': \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + (12r + 22)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Verläuft ein Projektionsstrahl parallel zur Ebene E, dann erhält der entsprechende Punkt auf g keinen Bildpunkt. Dazu legte man durch Z eine zu E parallele Ebene E' und schneidet diese mit g:

E': $\quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = k$

$Z \in E'$: $\quad k = 4 + 3 + 2 = 9$ also:

E': $\quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 9$

Schnitt mit g: $\quad 2(2) + (2 - 2r) - 2(-1 + 5r) = 9$

$4 + 2 - 2r + 2 - 10r = 9$

$-12r = 1 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{12}$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + \frac{1}{6} \\ -1 - \frac{5}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{13}{6} \\ -\frac{17}{12} \end{pmatrix} \Rightarrow Q\left(2|\tfrac{13}{6}|-\tfrac{17}{6}\right)$$

Dies ist der Punkt ohne Bildpunkt !

Aufgabe 165:

Ergänze das Dreieck $A(2|0|2)$, $B(4|2|1)$, $C(5|-2|-2)$ zu einem Parallelogramm ABCD. Projiziere es von $Z(3|1|6)$ aus auf die Ebene E: $5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$. Ist die Bildfigur auch wieder ein Parallelogramm ?

Lösung:

Parallelogramm-Bedingung: $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$

Dies ergibt $D(3|-4|-1)$

Projektionsgeraden (ZA): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, (ZB): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

(ZC): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$ (ZD) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Schnitt dieser Geraden mit E ergibt die Bildpunkte:

$(ZA) \cap E = \{A'\}$:

$5(3-r) - 2(1-r) + 4(6-4r) = 12$

$15 - 5r - 2 + 2r + 24 - 16r = 12$

$-19r = -25 \Leftrightarrow r = \frac{25}{19}$

$A'\left(\frac{32}{19}|-\frac{6}{19}|\frac{14}{19}\right)$

$(ZB) \cap E = \{B'\}$:

$5(3+s) - 2(1+s) + 4(6-5s) = 12$

$15 + 5s - 2 - 2s + 24 - 20s = 12$

$-17s = -25 \Leftrightarrow s = \frac{25}{17}$

$B\left(\frac{79}{17}|-\frac{42}{17}|-\frac{23}{17}\right)$

$(ZC)\cap E=\{C'\}$:

$5(3+2a)-2(1-3a)+4(6-8a)=12$

$15+10a-2+6a+24-32a=12$

$-16a=-25 \Rightarrow a=\frac{25}{16}$

$C'\left(\frac{98}{16}\middle|-\frac{59}{16}\middle|-\frac{104}{16}\right)$

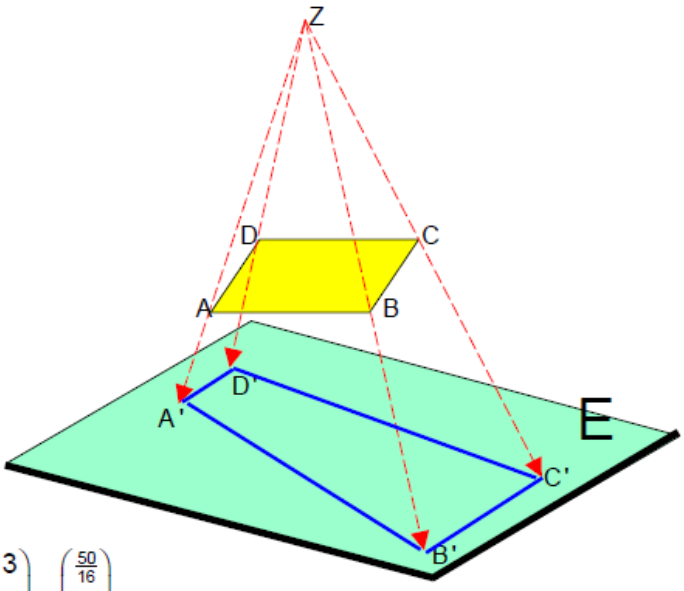
$(ZD)\cap E=\{D'\}$:

$5(3)-2(1-5b)+4(6-7b)=12$

$15-2+10b+24-28b=12$

$-18b=-25 \Leftrightarrow b=\frac{25}{18}$

$D'\left(3\middle|-\frac{107}{18}\middle|-\frac{67}{18}\right)$



Liegt ein Parallelogramm vor ?

$\overrightarrow{A'B'}=\begin{pmatrix}\frac{79}{19}-\frac{26}{17}\\ \dots\\ \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{849}{323}\\ \dots\\ \dots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{D'C'}=\begin{pmatrix}\frac{98}{16}-3\\ \dots\\ \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{50}{16}\\ \\ \end{pmatrix}$

Da schon die 1. Koordinate verschieden ist, folgt $\overrightarrow{A'B'}\neq\overrightarrow{D'C'}$, also ist das Bild-Viereck kein Parallelogramm !

Aufgabe 166:

Stelle die gegenseitige Lage der Geraden g und h fest:
Wenn sich die Geraden schneiden, dann berechne den Schnittpunkt.

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\8\\-11\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\5\\-6\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-7\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7\\0\\-3\end{pmatrix}$

b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\-4\\7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\4\\-3\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\16\\-9\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$

c) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-9\\25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\9\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\-6\\0\end{pmatrix}$

d) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\-1\\4\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\5\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-12\\2\\8\end{pmatrix}$

e) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}14\\-8\\-6\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}13\\-4\\-10\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7\\4\\3\end{pmatrix}$

f) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\12\\-15\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\16\\-16\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-8\\10\end{pmatrix}$

Lösung:

1) Stelle die gegenseitige Lage der Geraden g und h fest:
Wenn sich die Geraden schneiden, dann berechne den Schnittpunkt.

Ich bezeichne für diese Aufgaben die Vektoren der Geraden g und h so:

$$\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \vec{b} + s\vec{v}$$

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ von g und h keine Vielfachen voneinander sind, (man sagt besser: nicht kollinear sind), sind g und h nicht parallel.

Die folgende Determinante überprüft nun, ob sie in einer Ebene liegen:

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} -1 & -7 & 3 \\ 5 & 0 & -15 \\ -6 & -3 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

d.h. g und h liegen in einer Ebene. Da sie nicht parallel sind, schneiden sie sich

Berechnung des Schnittpunkts:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -r + 7s = 3 & (1) \\ 5r = -15 & (2) \\ -6r + 3s = 18 & (3) \end{cases}$$

Aus (2) folgt r = - 3, eingesetzt in (1) ergibt das s = 0. Die Probe in (3) ist nicht notwendig, weil bereits gezeigt worden ist, daß sich g und h schneiden !!!

Berechnung mit g: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + -3\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow S(6|-7|7)$

Oder mit h: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow S(6|-7|7)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren von g und h nicht kollinear sind, sind g und h nicht parallel.

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 20 \\ -3 & -3 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 20 \\ 0 & -3 & -16 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ich habe die 2. Spalte von der ersten subtrahiert, so entstehen zwei Nullen. Dann wird die Determinante nach der ersten Spalte entwickelt: $= 7 \cdot (-64 + 60) \neq 0$

Diese Geraden liegen nicht in einer Ebene, also sind sie **windschief**.

Da sie dann auch nicht parallel sein können, war die vorausgegangene Überlegung zur Parallelität **hier** überflüssig.

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

g und h sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind.

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 18 & 0 & -6 \\ -5 & 0 & -20 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 120 - 450 - 60 \neq 0$$

Die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind also linear unabhängig (nicht komplanar), daher liegen g und h nicht in einer Ebene, sind also windschief.

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

g und h sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind.

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} 6 & -12 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Denn die 3. Spalte ist identisch zur 1. Spalte.

Die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind also linear abhängig (komplanar), daher liegen g und h in einer Ebene, und weil sie nicht parallel sind, schneiden sie sich.

Berechnung des Schnittpunkts:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 6r + 12s = 6 \\ -r - 2s = -1 \\ 4r - 8s = 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} r + 2s = 1 & (1) \\ r + 2s = 1 & (2) \\ r - 2s = 1 & (3) \end{matrix}$$

(1) und (2) sind identisch.
Aus (1) + (2) folgt r = 1 und s = 0.
Die Probe ist nicht notwendig, weil wir schon wissen, daß sich g und h schneiden !

Nun setzt man r = 1 in g ein oder s = 0 in h: $S(10|5|7)$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Da $\vec{u} = -2\vec{v}$, sind die Geraden parallel. Nun muß man überprüfen, ob sie sogar identisch sind. Dazu gibt es 3 Methoden:

Man überprüft, ob $A \in h$, $B \in g$ oder ob $\overrightarrow{AB} = k \cdot u$ gilt

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$ ist nicht kollinear zu $\vec{u}$ oder $\vec{v}$.

Also sind die Geraden nicht identisch.

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$

Da $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{v}$ gilt, sind g und h parallel.

Da $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix} = \vec{u}$ gilt sogar: g = h

Aufgabe 167:

Prüfe, ob die Punkte $P(5|-6|4{,}5)$ und $Q(3|-4{,}5|3{,}5)$ auf der Geraden g liegen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Es sei $A(-3|0|2)$ und $\vec{u}$ der Richtungsvektor von g.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 2,5 \end{pmatrix} \neq k\vec{u} \qquad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \vec{u}$$

d.h. $A \notin g$ aber $Q \in g$.

Aufgabe 168:

Wie heißt die Gleichung der Geraden g durch den Punkt $B(2|1|-3)$,

die parallel zu h verläuft: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Sind g und h identisch ?

Lösung:

Wie heißt die Gleichung der Geraden g durch den Punkt $B(2|1|-3)$,

die parallel zu h verläuft: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Sind g und h identisch ?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}. \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq k\vec{u} \quad \text{also} \quad g \neq h.$$

Aufgabe 169:

Zeige, daß g, h und k kein Dreieck bilden. Berechne die Schnittpunkte.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Welche der Geraden sind offenbar windschief ?

Lösung:

Schnitt von g und h:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-12\\8\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}13\\-7\\5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}-12r-13s=7 & (1)\\ 8r+7s=-3 & (2)\\ -8r-5s=1 & (3)\end{array}\right\}$$

Aus g oder h folgt durch Einsetzen: $R(-8|5|-1)$

Aus (2) + (3) folgt $s = -1$, in (2): $r = \frac{1}{2}$. Die Probe in (1) liefert eine wahre Aussage. Also schneiden sich g und h !

Schnitt von h und k:

$$\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}13\\-7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}13s+t=-1 & (1)\\ -7s+t=-1 & (2)\\ 5s-9t=3 & (3)\end{array}\right\}$$

Aus (1) - (2) folgt $s = 0$, in (2): $t = -1$. Die Probe in (3) liefert eine falsche Aussage. Also schneiden sich g und h nicht sondern sind windschief, weil sie auch nicht parallel sind.

Schnitt von g und k:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-12\\8\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}-12r+t=6 & (1)\\ 8r+t=-4 & (2)\\ -8r-9t=4 & (3)\end{array}\right\}$$

Durch Einsetzen folg: $S(4|-3|7)$

Aus (2) - (1) folgt $r = -\frac{1}{2}$, in (2): $t = 0$. Die Probe in (3) liefert eine wahre Aussage. Also schneiden sich g und k !

Aufgabe 170:

Welche Gleichung hat die Gerade g durch $A(2|-3|4)$ und $B(-2|-10|-1)$?

Zeige, daß sich g und h schneiden: $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$.

Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S.
In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AB ? Was folgt daraus über die Lage von A oder B?

Lösung:

Richtungsvektor der Geraden g und dann Gleichung von g:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ z.B. } \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Da jedes beliebige Vielfache eines Richtungsvektors (außer dem 0-fachen) auch wieder Richtungsvektor ist, habe ich $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ gewählt !

Berechnung des Schnittpunktes:

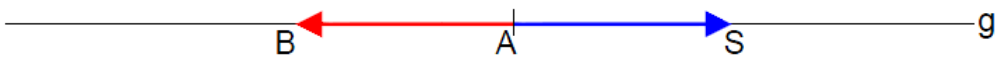
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4r - 2s = 2 & (1) \\ 7r - s = 6 & (2) \\ 5r - 4s = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) - 2(2) liefert – 10r = - 10 also r = 1, In (2) folgt s = 1.
Die Probe in (3) stimmt, also gibt es einen Schnittpunkt:
S (6 I 4 I 9).

Untersuchung des Teilverhältnisses:

Ansatz: $\overrightarrow{AS} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AB}$

Da k keine Zahl zwischen 0 und 1 ist, liegt mit S kein innerer Teilpunkt von AB vor.
Wohl aber ist A Mittelpunkt von AS:



Aufgabe 171:

Berechne die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen) von

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

c) der Geraden durch $A\left(\frac{3}{2} \middle| -4 \middle| 3\right)$ und $B\left(-2 \middle| \frac{16}{3} \middle| -4\right)$

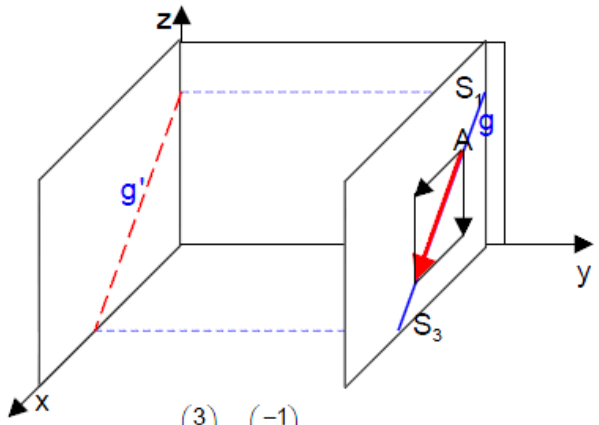
Lösung:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der xy-Ebene: z = 0 d.h. $2 - 3r = 0$ $r = \frac{2}{3}$, $\Rightarrow S_3(5\frac{1}{3}|6|0)$

Schnitt mit der xz-Ebene: y = 0 d.h. $6 + 0r = 0$ Widerspruch:

Schnitt mit der yz-Ebene: x = 0 d.h. $4 + 2r = 0$ $r = -2$, $\Rightarrow S_1(0|6|3)$



Da der Richtungsvektor die zweite Koordinate $u_2 = 0$ hat, besitzt er nur Komponenten 2 in x- und –3 in z-Richtung, also verläuft er und somit die ganze Gerade in einer Ebene E, die parallel zur xz-Ebene ist. Für alle Punkte der Geraden liefert die Geradengleichung y = 6. Dies ist der Abstand dieser Ebene zur xz-Ebene. Nebenstehende Abbildung zeigt (nicht ganz maßstabsgetreu) diese Situation. g' ist die zu g parallele Projektion in die xz-Ebene !

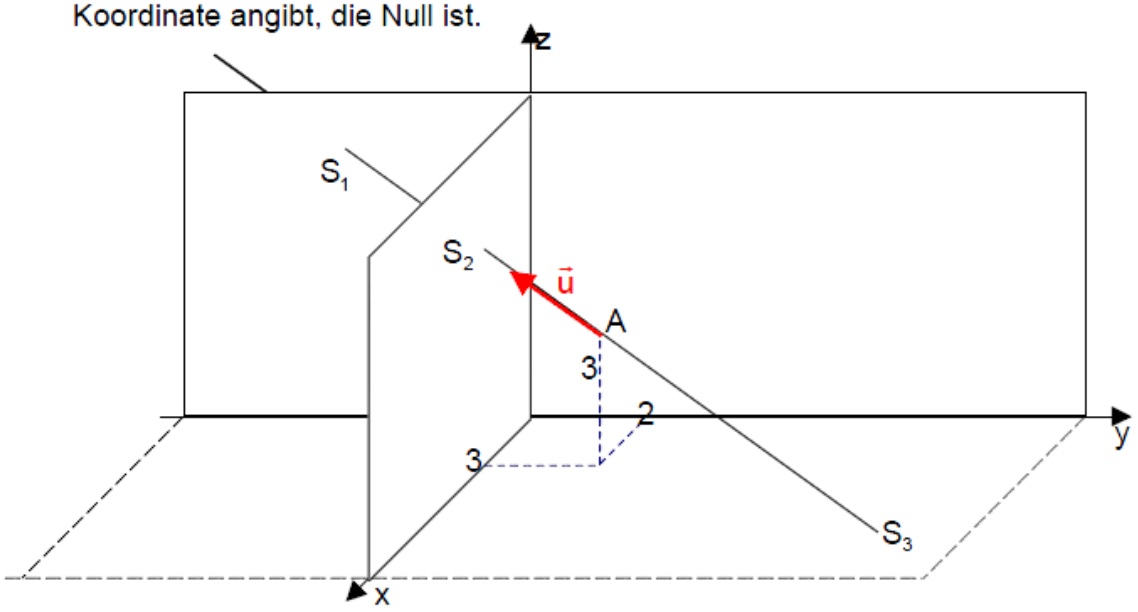
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der xy-Ebene: z = 0 d.h. $3 + r = 0$ $r = -3$ $\Rightarrow S_3(6|8|0)$

Schnitt mit der xz-Ebene: y = 0 d.h. $2 - 2r = 0$ $r = 1$ $\Rightarrow S_2(2|0|4)$

Schnitt mit der yz-Ebene: x = 0 d.h. $3 - r = 0$ $r = 3$, $\Rightarrow S_1(0|-4|6)$

Die Numerierung der Spurpunkte ist so gewählt, daß der Index die Koordinate angibt, die Null ist.



c) Berechne die Spurpunkte der Geraden durch $A\left(\frac{3}{2}|-4|3\right)$ und $B\left(-2|\frac{16}{3}|-4\right)$

Wir berechnen zuerst den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und wählen dann einen geeigneten Richtungsvektor für die Geraden (AB):

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{16}{3} \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{28}{3} \\ .7 \end{pmatrix}$$

ACHTUNG: Dieser Vektor ist als Richtungsvektor algebraisch nicht gut geeignet, da er Brüche enthält. Man muß nun erkennen, daß seine Koordinaten auch den Faktor 7 enthalten. Also dividieren wir durch 7 und multiplizieren mit 6 (damit die Brüche verschwinden) und wählen dann als Richtungsvektor:

$$\vec{u} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{28}{3} \\ .7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Spurpunkte:

Schnitt mit der xy-Ebene: $z = 0$ d.h. $3 - 6r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

Dies ergibt als ersten Spurpunkt: $S(0|0|0)$

Jetzt liegt eine große Besonderheit vor. Diese Gerade geht durch den Ursprung. Und weil dieser in allen drei Koordinatenebenen liegt, sind schon alle Spurpunkte bekannt und identisch.

Wenn eine Gerade durch den Ursprung geht, kann man natürlich diesen als Aufpunkt nehmen, wodurch die Geradengleichung sehr einfach wird:

$$g: \quad \vec{x} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 172:

Gegeben ist ein Dreieck $A(5|1|3)$, $B(6|4|-2)$, $C(3|-6|2)$.

Bestimme die Spurpunkte der Geraden, die durch je zwei Dreieckspunkte gehen auf der x_1x_2-Ebene und zeigt, daß diese drei Spurpunkte auf einer Geraden liegen.

Lösung:

Berechnung der Seitenvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gerade (AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$
Folgt $3 - 5r = 0 \quad r = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{AB}\left(\frac{28}{5} \middle| \frac{14}{5} \middle| 0\right)$

Gerade (BC): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$:
$-2 + 4s = 0 \quad s = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{BC}\left(\frac{9}{2} \middle| -1 \middle| 0\right)$

Gerade (AC): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$:
$2 + t = 0 \quad t = -2 \Rightarrow S_{AC}\left(-1 \middle| -20 \middle| 0\right)$

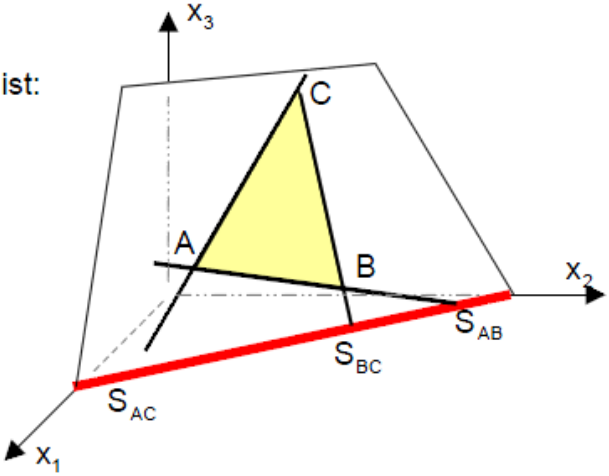
Hinweis: Man kann jeden Richtungsvektor durch ein Vielfaches von ihm ersetzen. Daher wurde nicht der Vektor $\overrightarrow{AC}$ sondern $-\overrightarrow{AC}$ verwendet. Der Nachweis, daß die drei Spurpunkte auf einer Geraden liegen geschieht, daß man zeigt, daß die Vektoren $\overrightarrow{S_{AB}S_{BC}}$ und $\overrightarrow{S_{AB}S_{AC}}$ kollinear sind:

$$\vec{d}_1 = \overrightarrow{S_{AB}S_{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{28}{5} \\ \frac{14}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ -\frac{19}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d}_2 = \overrightarrow{S_{AB}S_{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{28}{5} \\ \frac{14}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{5} \\ -\frac{114}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{66}{10} \\ -\frac{114}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{d}_1$$

Also liegen die Spurpunkte auf einer Geraden. Dies ist übrigens die Schnittgerade der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt, mit der x_1x_2.- Ebene !

Diese Abbildung zeigt eine Situation wie sie in Aufgabe 9 besprochen worden ist:

Ein Dreieck liegt in einer Ebene. Die verlängerten Dreiecksseiten schneiden die x_1x_2-Ebene in ihren drei Spurpunkten, die natürlich auf der Schnittgeraden (dick rot) der Dreiecksebene mit der Grundebene liegen.



Aufgabe 173:

Untersuche die Lage dieser Geraden in Abhängigkeit von t. Wenn sie sich schneiden, berechne den Schnittpunkt:

a) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ $\quad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$!!!!!

d) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$

g_t und h_t sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren kollinear sind (d.h. Vielfache voneinander):

$$\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \lambda & (1) \\ -1 = \lambda t & (2) \\ 1 = -\lambda & (3) \end{cases}$$

Aus (3) folgt $\lambda = -1$, aus (1) folgt dann t = - 1, die Probe in (2) liefert $-1 = (-1) \cdot (-1)$. Diese Aussage ist falsch, d.h. das System hat keine Lösung. Also sind die Vektoren nicht kollinear, die Geraden nie parallel !

Untersuchung, ob sie dennoch in einer Ebene liegen (dann würden sie sich schneiden, sonst wären sie windschief):

$$D = \left| \vec{u} \ \vec{v} \ \overrightarrow{AB} \right| = \begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ -1 & t & 2-t \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} t & 1 \\ -1 & t \\ 1 & -1 \end{matrix} = -t^2 + 2 - t - 1 + t + t(2-t) - 1 = -2t^2 + 2t$$

Die Geraden liegen in einer Ebene, wenn diese Determinante 0 ist, also wenn $-2t^2 + 2t = 0 \ | : (-2) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(t-1) = 0$ also wenn t = 0 oder t = 1 ist.

Im Falle t = 0 : $g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $h_0: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

liegt also ein Schnittpunkt vor:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1 = 1\\ -r = 2\\ r = -1-s\end{array}\right\}$$

Wenn wir über die Determinante schon wissen, daß sich die Geraden schneiden, müssen wir keine Probe mehr machen, und somit genügt die Erkenntnis: r = - 2.
Es folgt: $S_0(1|2|-2)$.

Im Falle t = 1 : $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

liegt ebenfalls ein Schnittpunkt vor:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}r - s = -1 & (1)\\ -r - s = 1 & (2)\\ r + s = -1 & (3)\end{array}\right\}$$

Auch hier müssen wir keine Probe mehr machen.
Aus (1) + (3) folgt 2r = - 2 , also r = - 1 und somit
$S_1(0|2|-1)$.

In jedem anderen Falle sind g_t und h_t windschief !

Erinnern wir uns noch einmal an das Vorgehen: Zuerst haben wir festgestellt, daß es keine Parallelen unter diesen Geraden gibt, dann haben wir herausgefunden, daß für t = 0 und für t = 1 die Geraden in einer Ebene liegen. Also müssen die sich schneiden. In der nächsten Aufgabe währen wir die umgekehrte Reihenfolge:

b) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}t\\5\\1\end{pmatrix}$

Zuerst untersuchen wir, für welches t die Geraden g_t und h_t in einer Ebene liegen:

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix}2 & t & -1 & 2 & t\\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5\\ -1 & 1 & 3-t & -1 & 1\end{vmatrix} = 10(3-t) - t - 4 - 5 - 2 - 4t(3-t)$$

$$D = 30 - 10t - t - 11 - 12t + 4t^2 = 4t^2 - 23t^2 + 19$$

Nullstellen von D: $4t^2 - 23t^2 + 19 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 4\cdot 4\cdot 19}}{8} = \frac{23 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{23 \pm 15}{8} = \begin{cases}\frac{38}{8} = \frac{19}{4}\\ 1\end{cases}$$

Zwischenergebnis:

(1) Die Geraden $g_{\frac{19}{4}}$ und $h_{\frac{19}{4}}$ liegen in einer Ebene:

$$g_{\frac{19}{4}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{19}{4} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind, schneiden sie sich.

(2) Die Geraden g_1 und h_1 liegen ebenfalls in einer Ebene:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind, schneiden sie sich.

<u>Berechnung der Schnittpunkte</u>:

(1): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{19}{4} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r + \frac{19}{4}s = -1 & (1) \\ 4r - 5s = 1 & (2) \\ -r - s = -\frac{7}{4} & (3) \end{cases}$

Wir eliminieren r aus (2) und (3) durch:
$(2) + 4 \cdot (3): \; -9s = -6 \Rightarrow s = \frac{2}{3}$.
Eingesetzt: $S_{\frac{19}{4}}\left(\frac{19}{6} \middle| \frac{13}{3} \middle| \frac{11}{3}\right)$

Die Berechnung von r und die Probe waren unnötig, da schon fest stand, daß sich diese Geraden schneiden

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r - s = -1 & (1) \\ 4r - 5s = 1 & (2) \\ -r - s = 2 & (3) \end{cases}$

Wir eliminieren s aus (1) und (3) durch:
$(1) - (3): \; 3r = -3 \Rightarrow r = -1$.
Eingesetzt: $S_1(-1|-4|2)$

c) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -t \end{pmatrix} \qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zuerst untersuchen wir, für welches t die Geraden g_t und h_t in einer Ebene liegen:

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} 4 & -t & -4 & 4 & -t \\ 2 & -1 & -1-t & 2 & -1 \\ -t & 1 & 1 & -t & 1 \end{vmatrix} = -4 + t^2(-1-t) - 8 + 4t - 4(-1-t) + 2t$$

$$D = -4 - t^2 - t^3 - 8 + 4t + 4 + 4t + 2t = -t^3 - t^2 + 10t - 8$$

Nullstellen von D: $-t^3 - t^2 + 10t - 8 = 0.$

Probierlösung: t = 2: D(2) = -8 – 4 +20 – 8 = 0

Ausklammern des Linearfaktors (t – 2) durch Polynomdivision oder Hornerschema:

Hornerschema:

	-1	-1	10	-8
	0	-2	-6	8
x=2				
	-1	-3	4	0

Ergebnis: $D = (t - 2)(- t^2 - 3t + 4)$

Polynomdivision:

$$(-t^3 - t^2 + 10t - 8) : (t - 2) = -t^2 - 3t + 4$$
$$-(-t^3 + 2t^2)$$
$$-3t^2 + 10t$$
$$-(-3t^2 + 6t)$$
$$4t - 8$$
$$-(4t - 8)$$
$$0$$

Die zweite Klammer liefert weitere Nullstellen: $-t^2 - 3t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Zwischenergebnis:
Für t = 1, t = 2 und t = - 4 liegen die Geraden g_t und h_t in einer Ebene, d.h. sie müssen entweder parallel sein, oder sie schneiden sich.

1. Fall: t = 1:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, liegt keine Parallelität vor, also muß es einen Schnittpunkt S_1 geben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4r + s = -4 \\ 2r + s = -2 \\ -r - s = 1 \end{cases}$$

Addition von (2) und (3) liefert r = - 1.
Dies genügt bereits, weil wir keine Probe mehr machen müssen. Also folgt: $S_1(-3|-1|4)$

2. Fall: t = 2:

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Da die Richtungsvektoren kollinear sind $(\vec{u}_2 = -2 \cdot \vec{v}_2)$ sind die Geraden parallel. Um herauszufinden, ob sie dann sogar identisch sind, muß man überprüfen, ob der Aufpunkt $A(1|2|3)$ von g_2 auch auf h_2 liegt. Dies geschieht **entweder** durch Einsetzen des Ortsvektors von A in die Gleichung von h_1:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}4 = -2s\\3 = -s\\-1 = s\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}s = -2\\s = -3\\s = -1\end{Bmatrix}$$

Da es keinen einheitlichen Wert für s gibt, liegt A nicht auf h_1, d.h. es gilt $g_2 \neq h_2$.

Oder man prüft nach, ob der Vektor $\overrightarrow{AB}$ dieselbe Richtung wie $\vec{u}$ hat (wozu man besser sagt: ob $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{u}$ kollinear sind):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

Man erkennt, daß $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{u}$ nicht kollinear sind, also gilt $g_2 \neq h_2$.

3. Fall: t = -4:

$$g_{-4}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \qquad h_{-4}: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Da die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, liegt keine Parallelität vor, also muß es einen Schnittpunkt S_{-4} geben:

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}4r - 4s = -4 & (1)\\2r + s = 3 & (2)\\4r - s = 1 & (3)\end{Bmatrix}$$

Addition von (2) und (3) liefert $6r = 4$. $r = \frac{2}{3}$

Also folgt: $S_{-4}\left(\frac{11}{3}\middle|-\frac{8}{3}\middle|\frac{17}{3}\right)$

4. Fall: $t \in \mathbb{R} \setminus \{1;2;-4\}$

In diesen Fällen ist die Determinante $D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| \neq 0$, also liegen die Geraden g_t und h_t nicht in einer Ebene, sie sind also windschief.

ERGEBNIS: Für t = 1 schneiden sich die Geraden,
für t = 2 sind sie parallel aber nicht identisch,
für t = 4 schneiden sich die Geraden,
in allen anderen Fällen sind sie windschief.

d) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \\ 4 \end{pmatrix}$

Zuerst untersuchen wir, für welches t die Geraden g_t und h_t in einer Ebene liegen:

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} t & -1 & t \\ 2 & -2t & -2 \\ -4 & 4 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} t & -1 \\ 2 & -2t \\ -4 & 4 \end{matrix} = 8t^2 - 8 + 8t - 8t^2 + 8t - 8 = 16t - 16$$

oder durch Umformung:

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix} t & -1 & t \\ 2 & -2t & -2 \\ -4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 2 & -2t & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = +4 \cdot (4t - 4) = 16(t - 1)$$

Dabei wurde die 1. Spalte von der 3. subtrahiert und dann nach der 3. Spalte entwickelt.

Für $t = 1$ wird $D = 0$. Dann liegen diese Geraden vor:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Da die Richtungsvektoren kollinear sind $(\vec{v} = -\vec{u})$, sind diese Geraden parallel.

Um herauszufinden, ob sie dann sogar identisch sind, muß man überprüfen, ob der Aufpunkt $A(0|3|2)$ von g_1 auch auf h_1 liegt. Dies geschieht entweder durch Einsetzen des Ortsvektors von A in die Gleichung von h_1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -1 = -s \\ 2 = -2s \\ 4 = 4s \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} s = 1 \\ s = -1 \\ s = 1 \end{Bmatrix}$$

Da es keinen einheitlichen Wert für s gibt, liegt A nicht auf h_1, d.h. es gilt $g_1 \neq h_1$.

Oder man prüft nach, ob der Vektor $\overrightarrow{AB}$ dieselbe Richtung wie $\vec{u}$ hat (wozu man besser sagt: ob $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{u}$ kollinear sind):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

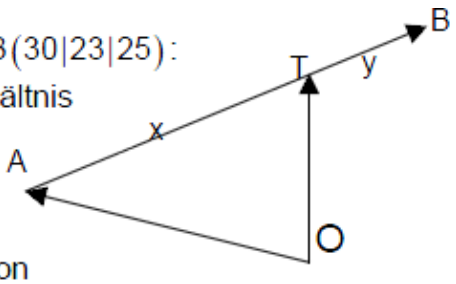
Man erkennt, daß $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{u}$ kollinear sind, also gilt $g_1 \neq h_1$.

Aufgabe 174:

Gegeben sind die Punkte $A(2|-5|-3)$, $B(30|23|25)$:
Bestimme die Teilpunkte, die AB im Verhältnis
a) 2:5 b) 3:1 c) 2:3 teilen.

Lösung:

11) Gegeben sind die Punkte $A(2|-5|-3)$, $B(30|23|25)$:
Bestimme die **Teilpunkte**, die AB im Verhältnis
a) 2:5 b) 3:1 c) 2:3 teilen.



Lösung:

a) Beim Teilverhältnis 2:5 fallen 7 Teile an, davon 2 auf die Strecke AT und 5 auf die Strecke TB.

Daher gilt:

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{t} - \vec{a} = \frac{2}{7}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \Leftrightarrow \vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} - \frac{2}{7}\vec{a} = \frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} = \frac{5}{7}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix}30\\23\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\3\\5\end{pmatrix}$$

Ergebnis: $T(10|3|5)$

b) Teilverhältnis 3:1 also

$$\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{4}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \Leftrightarrow \vec{t} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}30\\23\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23\\16\\18\end{pmatrix}$$

Ergebnis: $T(23|16|18)$

x) Teilverhältnis 2:3 also

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{t} - \vec{a} = \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \Leftrightarrow \vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}30\\23\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\frac{2}{3}\\13\frac{2}{3}\\15\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Ergebnis: $T\left(60\frac{2}{3}|13\frac{2}{3}|15\frac{2}{3}\right)$

Im Theorieteil wird auch gerne eine Formel verwendet. Ich rate davon ab, sie zu verwenden, denn dazu müßte man sie auswendig wissen. Es ist sinnvoller, diese Ansatz hier zu lernen, denn ihn kann man sich wieder anhand einer Skizze selbst erarbeiten.

Aufgabe 175:

Gegeben sind die Geraden g und h_k für $k \in \mathbf{R}$ durch

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h_k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

a) Welche dieser Punkte liegen auf g und h_k : $R(4\,|\,3\,|\,-9)$, $S(-8\,|\,5\,|\,1)$?

b) Überprüfe die Lage der Geraden g und h_k .Wenn sie sich schneiden, berechne den Schnittpunkt.

c) Was kann man über die Lage der Geraden der Schar h_k aussagen? Berechne die Ortskurve der Aufpunkte $B_k(4\,|\,k\,|\,7)$.

d) Berechne die Durchstoßpunkte (Spurpunkte) der Geraden g mit den Koordinatenebenen.

Lösung:

Wir führen folgende Bezeichnungen ein : $g:\ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ und $h_k:\ \vec{x} = \vec{b}_k + s\vec{v}$.
Dann ist $A(-2|1|3)$ der Aufpunkt von g und $B_k(4|k|7)$ der von h_k .

a) $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} \neq k\vec{u}$ · $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -2\vec{u}$ FAL SCH

also liegt R nicht auf g, wohl aber S.

$$\overrightarrow{B_kR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3-k \\ -16 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_kS} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5-k \\ -8 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

also liegen R und S auf keiner der Geraden h_k .

b) Da $\vec{u} \neq \lambda\vec{v}$ sind die Geraden nicht parallel.

Ob sie sich nun schneiden, kann man auf 2 Arten untersuchen: Mit der Determinantenmethode. Ist die Determinante $D = |\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB_k}| = 0$, dann liegen sie in einer Ebene, und weil wir schon gezeigt haben, daß sie nicht parallel sind, schneiden sie sich. Ist aber $D \neq 0$, dann sind g und h_k windschief. Da aber zugleich nach dem Schnittpunkt gefragt ist, wählen wir nicht die Determinantenmethode sondern berechnen einen möglichen Schnittpunkt. Dann entscheidet eben die Probe, ob er existiert oder nicht !

Schnittgleichung:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\k\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}3r-s=6 & (1)\\-2r-s=k-1 & (2)\\2r+9s=4 & (3)\end{array}\right\}$$

Wir berechnen r und s aus (1) und (2) und sehen dann nach, für welches k die Probe in (3) stimmt. $(3)+9\cdot(1)$: $29r=58 \Rightarrow r=2$

In (1): $s=3r-6=0$. Probe in (2): $-4=k-1 \Rightarrow k=-3$.

Ergebnis: g und h_{-3} schneiden sich im Punkt $S(4|-3|7)$, alle anderen sind zueinander windschief.

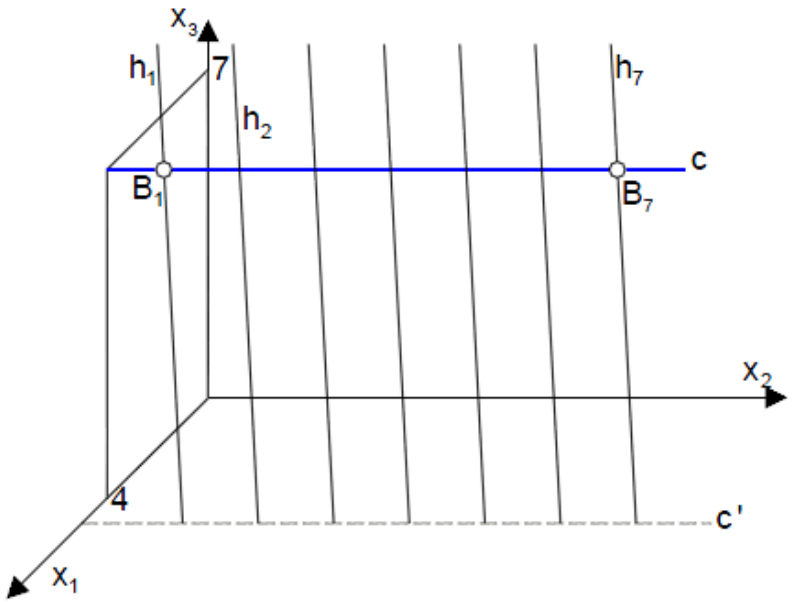
c) $h_k: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\k\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-9\end{pmatrix}$

Die Geraden h_k haben alle denselben Richtungsvektor, sie sind also zueinander parallel.

Die Aufpunkte dieser Geraden $B_k(4|k|7)$ liegen auf einer Ortskurve, deren Gleichung man so erhält:

$$c: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\k\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Wie man erkennt, ist die Ortskurve c eine Parallele zur x_2-Achse.



Die Abbildung zeigt ungefähr die Geradenschar h_k. Ihre Aufpunkte liegen auf der Geraden c. Der Richtungsvektor zeigt um 1 nach vorne, um 1 nach rechts und um 9 nach unten. Die parallelen Geraden h_k liegen in einer Ebene, welche die x_1x_2 – Ebene in c' schneidet.

d) Bleiben noch die Spurpunkte der Geraden g:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit der x_1x_2 – Ebene: $x_3 = 0$ ergibt $0 = 3 + 2r \Rightarrow r = -\frac{3}{2} \Rightarrow S_3\left(-\frac{13}{2}|4|0\right)$

Schnitt mit der x_1x_3 – Ebene: $x_2 = 0$ ergibt $0 = 1 - 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow S_3\left(-\frac{1}{2}|0|4\right)$

Schnitt mit der x_2x_3 – Ebene: $x_1 = 0$ ergibt $0 = -2 + 3r \Rightarrow r = \frac{2}{3} \Rightarrow S_3\left(0|-\frac{1}{3}|\frac{13}{3}\right)$

Aufgabe 176:

Die Punkte $A(3|3|1),\ B(-2|-5|2),\ C(2|0|5)$

a) Berechne die Gleichungen der Seitengeraden

b) Berechne den Schwerpunkt S.

c) Berechne die Gleichungen der drei Seitenhalbierenden und deren Schnittpunkt. Zeige, daß er mit S identisch ist.

Lösung:

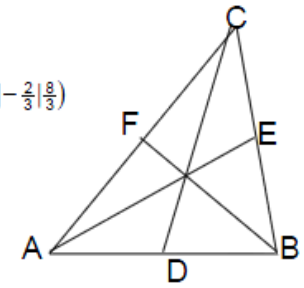
a) Seitenvektoren des Dreiecks:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-8\\1\end{pmatrix} \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix} \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}$$

$$(AB):\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-5\\-8\\1\end{pmatrix} \quad (AC):\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix} \quad (BC):\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}$$

b) Schwerpunktsformel:

$$\overline{OS} = \tfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \tfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix} \Rightarrow S\left(1|-\tfrac{2}{3}|\tfrac{8}{3}\right)$$



c) Seitenmittelpunkte:

$M_{AB} = D\left(\tfrac{1}{2}|-1|\tfrac{3}{2}\right),\quad M_{BC} = E\left(0|-\tfrac{5}{2}|\tfrac{7}{2}\right),\quad M_{AC} = F\left(\tfrac{5}{2}|\tfrac{3}{2}|3\right)$

Richtungsvektoren für die Seitenhalbierenden:

$$\overline{CD} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-1\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix} \quad \overline{AE} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{5}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-\frac{11}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix} \quad \overline{BF} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{13}{2}\\1\end{pmatrix}$$

Um Brüche zu verhindern, verwende ich Vielfache dieser Vektoren als Richtungsvektoren:

$$(CD):\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix} \quad (AE):\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\11\\-5\end{pmatrix} \quad (BF):\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}9\\13\\2\end{pmatrix}$$

Schnitt von (CD) und (AE):

$$\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\11\\-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}3r-6s=1 & (1)\\2r-11s=3 & (2)\\7r+5s=-4 & (3)\end{array}\right\}$$

2(1) – 3(2) ergibt: $-12s+33s = 2-9$ d.h. 21 s = - 7 also $s = -\frac{1}{3}$.

Setzt man dies in (AE) ein, folgt $S\left(1|-\frac{2}{3}|\frac{8}{3}\right)$ wie oben.

Aufgabe 177:

Gegeben sind $A(3|7|4)$, $B(1|5|0)$, $C(4|1|6)$, $D(6|6|2)$

a) Ist das Viereck eben ?

b) Zeige, daß das Viereck, das aus den Mittelpunkten von ABCD gebildet wird, ein Parallelogramm ist.

Lösung:

a) Wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ komplanar sind, dann ist das Viereck eben. Wir überprüfen dies **hier** mit der Determinante:

$$D = \left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & -1 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -24 + 4 - 12 - 72 - 4 - 4 \neq 0$$

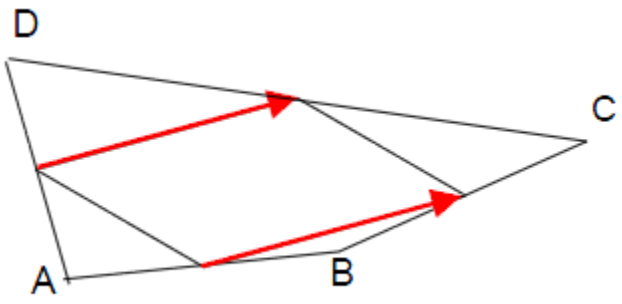
Weil $D \neq 0$ ist, sind diese Vektoren linear unabhängig, das heißt geometrisch gesprochen nicht komplanar. Das Viereck paßt also in keine Ebene..

b) Mittelpunkte der Viereckseiten:

$M_{AB}(2|6|2)$, $M_{BC}(\frac{5}{2}|3|3)$, $M_{CD}(5|\frac{7}{2}|4)$, $M_{AD}(\frac{9}{2}|\frac{13}{2}|3)$

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{M_{AD}M_{DC}} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{13}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{DC}}$, liegt ein Parallelogramm vor!



Aufgabe 178:

Berechnen Sie folgende Skalarprodukte:

a) $\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}=?$ b) $\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}=?$ c) $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=?$

d) $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=?$ e) $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=?$ f) $\begin{pmatrix}t\\1\\2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t+1\\2\\-3\end{pmatrix}=?$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}=12+4+0=16$ b) $\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}=24-12-12=0$

c) $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=16+4+1=21$ d) $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x+3y+5z$

e) $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-3x_1+x_2+2x_3$ f) $\begin{pmatrix}t\\1\\2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t+1\\2\\-3\end{pmatrix}=t^2+t+2-6t=t^2-5t+2$

Aufgabe 179:

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\t\\2t\end{pmatrix}=16$ b) $\begin{pmatrix}k\\2k\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k+1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$ c) $\begin{pmatrix}3k\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\2k\\-1\end{pmatrix}=0$

d) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right]=0$ e) $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right]^2=16$ (nur umformen)

Lösung:

a) $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\t\\2t\end{pmatrix}=16 \Leftrightarrow 6+3t+2t=16 \Leftrightarrow 5t=10 \Leftrightarrow t=2$

b) $\begin{pmatrix}k\\2k\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k+1\\1\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow k^2+k+2k-4=0 \Leftrightarrow k^2+3k-4=0$

Die allgemeine Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ lautet $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Sie liefert hier:

$$k_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}=\begin{cases}1\\-4\end{cases}$$

c) $\begin{pmatrix}3k\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\2k\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 3k^2+4k-3=0$

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+36}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{52}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{4\cdot13}}{6}=\frac{-4\pm2\sqrt{13}}{6}=-\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$$

d) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right]=0 \Leftrightarrow (2+2+6)+r(5+0+2)=0 \Leftrightarrow 7r=-10 \Leftrightarrow r=-\frac{10}{7}$

e) $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right]^2=16 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}^2=16$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1-8x_2+6x_3=16-29=-13$

Aufgabe 180:

Welche Vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ das Produkt 0 ?

a) $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Welche Vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ **und** mit $\vec{v}$ das Produkt 0 ?

d) $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e) $\vec{u}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_1 + n_2 + 2n_3 = 0$

Wähle z.B. $n_2 = r, r \in \mathbb{R}$ und $n_3 = s, s \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = -r - 2s$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -r-2s \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erg.: Alle Vektoren, die eine Linearkombination aus $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 2n_1 - 5n_2 + 3n_3 = 0$

Wähle z.B. $n_2 = r,\ r \in \mathbb{R},\ n_3 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow 2n_1 = 5r - 3s \Rightarrow n_1 = \frac{5}{2}r - \frac{3}{2}s$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}r - \frac{3}{2}s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}s \begin{pmatrix} -3s \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d.h. alle Linearkombinationen aus $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 5n_2 - n_3 = 0$

Wähle z.B. $n_1 = r,\ r \in \mathbb{R},\ n_2 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow n_3 = 5s$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 5s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d.h. alle Linearkombinationen aus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Welche Vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ **und** mit $\vec{v}$ das Produkt 0 ?

d) $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bed.: $\vec{u}\cdot\vec{n}=2n_1+5n_2+n_3=0$ (1)
und $\vec{v}\cdot\vec{n}=n_1-n_2+n_3=0$ (2)

(1) – (2) liefert: $n_1+6n_2=0$
Wähle $n_2=r,\ r\in\mathbb{R} \Rightarrow n_1=-6r$
Aus (2) folgt $n_3=-n_1+n_2=6r+r=7r$

Ergebnis: $\vec{n}=\begin{pmatrix} -6r \\ r \\ 7r \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bed.: $\vec{u}\cdot\vec{n}=3n_1+n_2=0$ (1)
und $\vec{v}\cdot\vec{n}=2n_1-2n_2+3n_3=0$ (2)

Achtung: Da (1) bereits nur noch 2 Unbekannte enthält, wird nicht mehr eliminiert!

Wähle $n_1=r,\ r\in\mathbb{R} \Rightarrow n_2=-3n_1=-3r$
Aus (2) folgt damit $3n_3=-2n_1+2n_2=-2r-6r=-8r \Rightarrow n_3=-\frac{8}{3}r$

Ergebnis: $\vec{n}=\begin{pmatrix} r \\ -3r \\ -\frac{8}{3}r \end{pmatrix}=\frac{1}{3}r\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$ d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 181:

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist eine Ebene in Parametergleichung, senkrecht zu g, die durch
a) $R(4|17|3)$ b) $S(-2|0|11)$ geht.

Lösung:

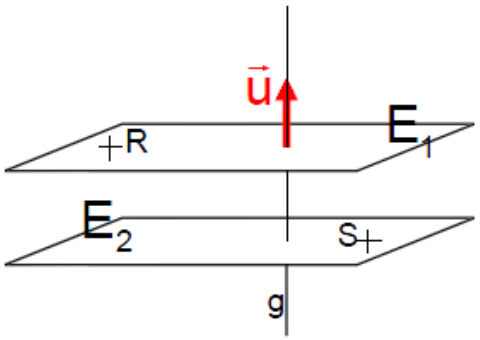
Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist eine Ebene in Parametergleichung, senkrecht zu g, die durch

a) $R(4|17|3)$ b) $S(-2|0|11)$ geht.

Lösung:

Wir verwenden den Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor von E und haben somit die linke Seite der Koordinatengleichung von E:



$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = k$$

Setzt man R ein, der ja in der Ebene liegen soll, folgt

$$k = 8 - 85 + 6 = -71$$

Also lautet die Koordinatengleichung: $2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -71$

bzw. $-2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 71$

Für die Parameterform erzeugen wir zwei zu $\vec{n}$ orthogonale Richtungsvektoren, z.B.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und verwenden R als Aufpunkt: $E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Für die Ebene durch S müssen wir nur S als Aufpunkt verwenden, denn diese Ebene ist zu E_1 parallel:

$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

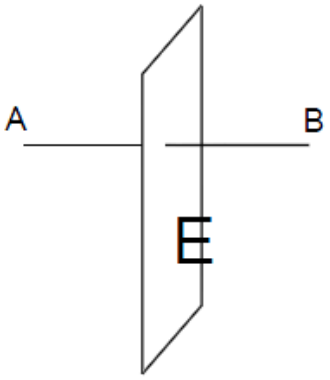
Aufgabe 182:

Gegeben sind zwei Punkte $A(3|6|-2)$, $B(-5|2|10)$: Bestimme die Gleichung der Ebene, die als Symmetrieebene von A und B bezeichnet werden kann.

Lösung:

Gegeben sind zwei Punkte $A(3|6|-2)$, $B(-5|2|10)$: Bestimme die Gleichung der Ebene, die als Symmetrieebene von A und B bezeichnet werden kann.

Lösung:



Die Ebene steht senkrecht zur Geraden (AB) und geht durch den Mittelpunkt M von AB: $M(-1|4|4)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$. Wir können $\overrightarrow{AB}$ oder auch nur $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ als Normalenvektor für die Symmetrieebene nehmen:

E: $-2x_1 - x_2 + 3x_3 = k$

M wird eingesetzt: $k = 2 - 4 + 12 = 10$

Ergebnis: E: $-2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$

Die Parametergleichung dazu ist z.B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 183:

Schreibe eine Parametergleichung zu dieser Ebene auf:

a) $2x + 4y - 6z = 5$ b) $2x_1 - 7x_2 + x_3 = 21$

c) $x_2 + 5x_3 = 12$ d) $x_1 = 3$

Lösung:

Schreibe eine Parametergleichung zu dieser Ebene auf:

a) $2x+4y-6z=5$; Aufpunkt z.B. $A\left(\frac{5}{2}|0|0\right)$,

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$$

b) $2x_1-7x_2+x_3=21$; Aufpunkt z.B. $A(0|-3|0)$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}$$

c) $x_2+5x_3=12$; Aufpunkt z.B. $A(0|12|0)$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$$

d) $x_1=3$ Aufpunkt z.B. $A(3|99|135)$ (Nur $x_1=3$ ist wichtig !)

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\99\\135\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 184:

Gegeben sind die Geraden g und h. Zeige daß sie windschief sind.
Ermittle einen Vektor, der zu beiden orthogonal ist.

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\-8\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-8\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-8\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & -1\\-8 & 1 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\1 & 2\\-8 & 1\end{matrix} = -8+1+16+1 \neq 0$$

Also sind g und h windschief.

Gesucht ist nun ein zu g und h orthogonaler Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$.

Bedingungen: (1) $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow n_1 + n_2 - 8n_3 = 0$

(2) $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2n_2 + n_3 = 0$

Wähle $n_2 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow n_3 = -2r$

In (1): $n_1 = -n_2 + 8n_3 = -r - 16r = -17r$

Es folgt: $\vec{n} = \begin{pmatrix}-17r\\r\\-2r\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-17\\1\\-2\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}$

Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}$

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AB}\right| = \begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\2 & -1 & 1\\-4 & 6 & -7\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 3\\2 & -1\\-4 & 6\end{matrix} = 14-12+24-8-12+42 \neq 0$$

g und h sind also windschief. Bedingungen für $\vec{n}$:

(1) $2n_1 + 2n_2 - 4n_3 = 0$

(2) $3n_1 - n_2 + 6n_3 = 0$

Hier nur noch das Ergebnis: $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-3r\\-r\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\-3\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 185:

Berechne die Normalengleichung zu diesen Ebenen:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$ d) $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ f) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Normalengleichungen werden jetzt mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet:

Ohne viel text zu schreiben sei A stets der Aufpunkt und $\vec{u}, \vec{v}$ die Richtungsvektoren.
Die Bedingungen für den Normalenvektor sind dann
(1) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ und (2) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Dies ergibt dann ...

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & n_1 - 2n_2 + n_3 = 0 \\ (2) & n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0 \end{array}}$$

(1) + (2): $2n_1 + 4n_3 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -2n_3$

Wähle $n_3 = a,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = -2a.$

Aus (2): $2n_2 = -n_1 - 3n_3 = 2a - 3a = -a \Rightarrow n_2 = -\frac{1}{2}a$

Normalenveklor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2a \\ -\frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir nehmen a = 2 und bilden

$$E: \vec{n}\vec{x} = k \Leftrightarrow -4x_1 - x_2 + 2x_3 = k$$

Mit $A(2|5|1) \in E$ folgt $k = -8 - 5 + 2 = -11$

Also ist $E: -4x_1 - x_2 + 2x_3 = -11$

oder besser: $E: 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 11$

1. mit $A(2|5|1) \in E$: $4 \cdot 2 + 5 - 2 \cdot 1 = 8 + 5 - 2 = 11$ wahre Aussage.

2. $\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$

3. $\vec{v} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 2 - 6 = 0$

Dabei wurde der Normalenvektor verwendet, der im Ergebnis steht, der also die Koeffizienten der Koordinatengleichung bildet.

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) $n_1 + n_2 = 0$
(2) $n_1 + n_3 = 0$
Keine Elimination !

Wähle $n_1 = a$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow n_2 = -a$ und $n_3 = -a$ also $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

E; $x_1 - x_2 - x_3 = k$. $A(0|1|-1) \in E \Rightarrow k = 0 - 1 + 1 = 0$

Ergebnis: E: $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Diese Ebene geht durch den Ursprung.

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$

(1) $12n_1 + 8n_2 + 2n_3 = 0$
(2) $2n_1 + 7n_2 - 11n_3 = 0$

$(1) - 6 \cdot (2)$: $(8 - 42)n_2 + (2 + 66)n_3 = 0 \Rightarrow -34n_2 + 68n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = 2n_3$

Wähle $n_3 = a \Rightarrow n_2 = 2a$ -

Aus (2) $2n_1 = 11n_3 - 7n_2 = 11a - 14a = -3a \Rightarrow n_1 = -\frac{3}{2}a$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}a \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Für a = 2 folgt:

$E: -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = k$

Mit $A(4|8|1) \in E \Rightarrow k = -12 + 32 + 2 = 22$

Ergebnis: $E: -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 22$

d) $\vec{x} = r\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}12\\-3\\8\end{pmatrix}$

(1) $5n_1 + 3n_2 = 0$
(2) $12n_1 - 3n_2 + 8n_3 = 0$
Keine Elimination !

Aus (1) folgt $5n_1 = -3n_2 \Rightarrow n_1 = -\frac{3}{5}n_2$

Wähle $n_2 = 5a,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = -3a$

Aus (2) folgt $8n_3 = 3n_2 - 12n_1 = 15a + 36a = 51a$

$n_3 = \frac{51}{8}a$ (trotz der „günstigen" Wahl von n_2 !)

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}-3a\\5a\\\frac{51}{8}a\end{pmatrix} = \frac{1}{8}a\begin{pmatrix}-24\\40\\51\end{pmatrix}$. Für a = 8 erhält man dann

$E: -24x_1 + 40x_2 + 51x_3 = k$ Und weil der Aufpunkt der Ursprung ist:

$E: -24x_1 + 40x_2 + 51x_3 = 0$

f) $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

(1) $2n_1 + n_2 = 0$
(2) $-n_1 + 2n_2 = 0$

Da n_3 nicht in den Bedingungsgleichungen auftritt, ist diese Koordinate keiner Bedingung unterworfen, also frei wählbar: $n_3 = a$.

$(1) + 2 \cdot (2)$: $5n_2 = 0$ also $n_2 = 0$.

In (1): $n_1 = 0$.

Der Normalenvektor ist also $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Für a = 1 folgt

E: $x_3 = k$

Und wegen $A(3|1|1) \in E$ erhält man k = 1.

Ergebnis: $E: x_3 = 1$

Bemerkung: Eine solche Aufgabe ist verwirrend. Diese Methode ist für diese Ebene einfach zu kompliziert. Man sollte mit einem Blick sehen, daß die dritte Koordinatengleichung diese Parametergleichung $x_3 = 1$ lautet. Und dann ist man schon fertig.

Dazu allerdings braucht man etwas Erfahrung und Wissen.

Und man lernt etwas dazu, wenn man sich dieses Beispiel gut einprägt. Wenn eine Gleichung für eine Koordinate so einfach ist, dann ist man doch schon fertig !

Aufgabe 186:

Bestimme die Hessesche Normalform, $\vec{n}^\circ$, den Abstand des Ursprungs von E und den Fußpunkt des Lotes von O auf E.

a) $2x-2y+z=16$ b) $3x+4y-12z=26$ c) $2x_1+6x_2+3x_3=35$

d) $4x_1+4x_2+7x_2=18$ e) $x=5$ f) $8x-12y+9z=-34$

g) $2x+10y-11z=75$ h) $3x_1+x_2-7x_3=59$ i) $8x_1-15x_3=85$

Lösung:

a) $2x-2y+z=16 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{4+4+1}=3\right. \qquad \text{HNF:} \quad \dfrac{2x-2y+z-16}{3}=0$

mit $\vec{n}^\circ=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $d(O;E)=\frac{16}{3}$ also $\overrightarrow{OF}=d\cdot\vec{n}^\circ=\frac{16}{3}\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(\frac{32}{9}\middle|\frac{-32}{9}\middle|\frac{16}{9}\right)$

b) $3x+4y-12z=26 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{9+16+144}=13\right., \quad \text{HNF:} \quad \dfrac{3x+4y-12z-26}{13}=0$

mit $\vec{n}^\circ=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$ und $d(O;E)=2 \Rightarrow \overrightarrow{OF}=d\cdot\vec{n}^\circ=\frac{2}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(\frac{6}{13}\middle|\frac{8}{13}\middle|-\frac{24}{13}\right)$

c) $2x_1+6x_2+3x_3=35 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{4+36+9}=7\right., \quad \text{HNF:} \quad \dfrac{2x_1+6x_2+3x_3-35}{7}=0$

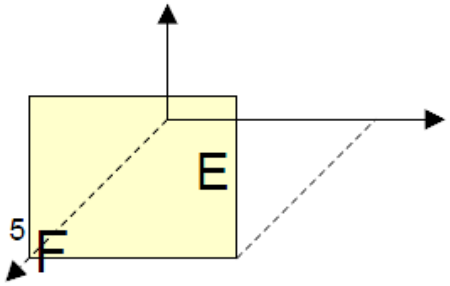
mit $\vec{n}^\circ=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ und $d(O;E)=5$ folgt $\overrightarrow{OF}=d\cdot\vec{n}^\circ=5\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(\frac{10}{7}\middle|\frac{30}{7}\middle|\frac{15}{7}\right)$

d) $4x_1+4x_2+7x_2=18 \;\Big|:|\vec{n}|=\sqrt{16+16+49}=9$, HNF: $\dfrac{4x_1+4x_2+7x_2-18}{9}=0$

mit $\vec{n}^o=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}$ und d(O;E) = 2 folgt $\overrightarrow{OF}=d\cdot\vec{n}^o=2\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(\frac{8}{9}\middle|\frac{8}{9}\middle|\frac{14}{9}\right)$

e) x = 5 Der Normalenvektor ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, er ist bereits ein Einheitsvektor, also

ist x – 5 = 0 bereits die HNF. d(O;E) = 5 und $\overrightarrow{OF}=d\cdot\vec{n}^o=5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow F(5|0|0)$



f) $8x-12y+9z=-34 \;\Big|:|\vec{n}|=\sqrt{64+144+91}=17$ HNF: $\dfrac{-8x+12y-9z-34}{17}=0$

Mit $\vec{n}^o=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}8\\-12\\9\end{pmatrix}$ und d(O;E) = 2 folgt $\overrightarrow{OF}=d\cdot\vec{n}^o=\frac{2}{17}\begin{pmatrix}8\\-12\\9\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(\frac{16}{17}\middle|-\frac{24}{17}\middle|\frac{18}{17}\right)$

g) $2x+10y-11z=75 \;\Big|:|\vec{n}|=\sqrt{4+100+121}=15$ HNF: $\dfrac{2x+10y-11z-75}{15}=0$

Mit $\vec{n}^o=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\10\\11\end{pmatrix}$ und d(O;E) = 5 folgt $\overrightarrow{OF}=d\cdot\vec{n}^o=\frac{5}{15}\begin{pmatrix}2\\10\\11\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{10}{3}\middle|\frac{11}{3}\right)$

h) $3x_1+x_2-7x_3=59 \;\Big|:|\vec{n}|=\sqrt{9+1+49}=\sqrt{59}$ HNF: $\dfrac{3x_1+x_2-7x_3-59}{\sqrt{59}}=0$

Mit $\vec{n}^o=\frac{1}{\sqrt{59}}\begin{pmatrix}3\\1\\-7\end{pmatrix}$ und d(O;E) = $\sqrt{59}$ folgt

$$\overrightarrow{OF} = d \cdot \vec{n}^{\circ} = \sqrt{59} \cdot \frac{1}{\sqrt{59}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow F(3|1|-7)$$

i) $8x_1 - 15x_3 = 85 \quad \left| : |\vec{n}| = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17 \right.$. HNF: $\frac{8x_1 - 15x_3 - 85}{17} = 0$

Mit $\vec{n}^{\circ} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$ und d(O;E) = 5 folgt $\overrightarrow{OF} = d \cdot \vec{n}^{\circ} = \frac{5}{17} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\frac{40}{17}|0|-\frac{75}{17}\right)$

Aufgabe 187:

Berechne den Abstand des Punktes P von E und den Fußpunkt des Lotes von P auf E sowie das Spiegelbild von P an E.

a)	$4x+8y-z=36$	$P(3\|2\|5)$	b)	$12y+5z=26$	$P(-1\|5\|-7)$
c)	$-6x_1+18x_2-x_3=38$	$P(-5\|20\|-9)$	d)	$12x_1-9x_3=120$	$P(15\|-2\|-5)$
e)	$5x-3y+5z=11$	$P(3\|6\|-9)$	f)	$12x_1+9x_2=150$	$P(-10\|5\|4)$

Lösung:

a) $4x+8y-z=36$ $\quad P(3|2|5)$ $\quad |\vec{n}|=\sqrt{16+64+1}=9$

HNF: $\dfrac{4x+8y-z-36}{9}=0$ $\quad \vec{n}^o=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}$

$d(P;E)=\left|\dfrac{12+16-5-36}{9}\right|=\left|\dfrac{-13}{9}\right|=\dfrac{13}{9}$. Weil hier der Betrag notwendig war:

O und P liegen auf derselben Seite von E. Daher folgt für das Lot von P auf E:

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OP}+d\cdot\vec{n}^o=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}+\frac{13}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{295}{81}\\\frac{266}{81}\\\frac{392}{81}\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(\tfrac{295}{81}\middle|\tfrac{266}{81}\middle|\tfrac{392}{81}\right)$$

Das Spiegelbild P' von P:

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2d\cdot\vec{n}^o=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}+\frac{26}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{347}{81}\\\frac{370}{81}\\\frac{379}{81}\end{pmatrix}\Rightarrow P'\left(\tfrac{347}{81}\middle|\tfrac{370}{81}\middle|\tfrac{379}{81}\right)$$

b) $12y+5z=26$ $\quad P(-1|5|-7)$ $\quad |\vec{n}|=\sqrt{144+25}=13$

HNF: $\dfrac{12y+5z-26}{13}=0$ $\quad \vec{n}^o=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}$

$d(P;E)=\left|\dfrac{60-35-26}{13}\right|=\left|\dfrac{-1}{13}\right|=\dfrac{1}{13}$. Weil hier der Betrag notwendig war:

O und P liegen auf derselben Seite von E. Daher folgt für das Lot von P auf E:

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OP}+d\cdot\vec{n}^o=\begin{pmatrix}-1\\5\\-7\end{pmatrix}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{857}{169}\\-\frac{1178}{169}\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(-1\middle|\tfrac{857}{169}\middle|-\tfrac{1178}{169}\right)$$

Das Spiegelbild P' von P:

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OP}+2d\cdot\vec{n}^o=\begin{pmatrix}-1\\5\\-7\end{pmatrix}+\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{869}{169}\\-\frac{1173}{169}\end{pmatrix}\Rightarrow F\left(-1\middle|\tfrac{869}{169}\middle|-\tfrac{1173}{169}\right)$$

c) $-6x_1+18x_2-x_3=38 \quad P(-5|20|-9) \quad |\vec{n}|=\sqrt{36+324+1}=19$

HNF: $\dfrac{-6x_1+18x_2-x_3-38}{19}=0 \qquad \vec{n}^o=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-6\\18\\-1\end{pmatrix}$

$d(P;E)=\left|\dfrac{30+360+9-38}{19}\right|=\left|\dfrac{361}{19}\right|=19$. Weil hier der Betrag nicht notwendig war, liegen O und P liegen verschiedenen Seiten von E.

Daher folgt für das Lot von P auf E:

$$\vec{f}=\vec{p}+d\cdot(-\vec{n}^o)=\begin{pmatrix}-5\\20\\-9\end{pmatrix}-19\cdot\frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix}-6\\18\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\20\\-9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\18\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix}\Rightarrow F(1|2|-8)$$

Das Spiegelbild P' von P:

$$\overrightarrow{p'}=\vec{p}-2d\cdot\vec{n}^o=\begin{pmatrix}-5\\20\\-9\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-6\\18\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-16\\-7\end{pmatrix}\Rightarrow P'(7|-16|-7)$$

d) $12x_1-9x_3=120 \qquad P(15|-2|-5) \qquad |\vec{n}|=\sqrt{144+81}=15$

HNF: $\dfrac{12x_1-9x_3-120}{15}=0$. $\qquad \vec{n}^o=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}12\\0\\9\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$

$d(P;E)=\left|\dfrac{180+45-120}{15}\right|=\left|\dfrac{105}{15}\right|=7$ Weil hier der Betrag nicht notwendig war, liegen O und P liegen verschiedenen Seiten von E.

Daher folgt für das Lot von P auf E:

$$\vec{f}=\vec{p}+d\cdot(-\vec{n}^o)=\begin{pmatrix}15\\-2\\-5\end{pmatrix}-7\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9,4\\-2\\-9,2\end{pmatrix}\Rightarrow F(9,4|-2|-9,2)$$

Das Spiegelbild P' von P:

$$\overrightarrow{p'}=\vec{p}-2d\cdot\vec{n}^o=\begin{pmatrix}15\\-2\\-5\end{pmatrix}-14\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,8\\-2\\-13,4\end{pmatrix}\Rightarrow P'(3,8|-2|-13,4)$$

e) $5x-3y+5z=11 \qquad P(3|6|-9) \qquad |\vec{n}|=\sqrt{25+9+25}=\sqrt{59}$

HNF: $\dfrac{5x-3y+5z-11}{\sqrt{59}}=0 \qquad \vec{n}^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{59}}\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix}$

$$d(P;E)=\frac{|15-18-45-11|}{\sqrt{59}}=\frac{|-59|}{\sqrt{59}}=\sqrt{59}$$

Da die Betragsstriche notwendig waren, liegen O und P auf derselben Seite von E. Daher folgt für das Lot von P auf E:

$$\vec{f}=\vec{p}+d\cdot\vec{n}^\circ=\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}+\sqrt{59}\cdot\frac{1}{\sqrt{59}}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow F(8|3|-4)$$

Für das Spiegelbild P' folgt:

$$\vec{p'}=\vec{p}+2d\cdot\vec{n}^\circ=\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow F(13|0|1)$$

f) $12x_1+9x_2=150 \qquad P(-10|5|4) \qquad |\vec{n}|=\sqrt{144+81}=15$

HNF: $\dfrac{12x_1+9x_2-150}{15}=0 \qquad \vec{n}^\circ=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$

$$d(P;E)=\frac{|-120+45-150|}{15}=\frac{|-225|}{15}=15$$

Da die Betragsstiche nötig waren, liegen O und P auf derselben Seite von E.

Daher folgt für das Lot von P auf E:

$$\vec{f}=\vec{p}+d\cdot\vec{n}^\circ=\begin{pmatrix}-10\\5\\4\end{pmatrix}+15\cdot\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\14\\4\end{pmatrix}\Rightarrow F(2|14|4)$$

Für das Spiegelbild P' folgt:

$$\vec{f}=\vec{p}+2d\cdot\vec{n}^\circ=\begin{pmatrix}-10\\5\\4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\23\\4\end{pmatrix}\Rightarrow F(14|23|4)$$

Aufgabe 188:

Prüfe nach, ob g zu E parallel ist. Wenn ja, berechne d(g;E).

a) $2x-2y+z=15$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

b) $4x-8y-z=36$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$

c) $7x_1+2x_2+13x_3=9$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\10\\-3\end{pmatrix}$

d) $x_1-12x_2-12x_3=17$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\10\\-12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}12\\10\\-9\end{pmatrix}$

e) $4x+5y-20z=17$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $2x-2y+z=15$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=-2+2=0$

also ist der Normalenvektor der Ebene orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden, d.h. die gerade ist parallel zur Ebene.

$2x-2y+z=15 \;\left|:|\vec{n}|=\sqrt{4+4+1}=3\right.$ $\quad$ HNF: $\dfrac{2x-2y+z-15}{3}=0$

Der Abstand der Geraden zur Ebene ist so groß wie der Abstand des Aufpunktes $A(1|3|-2)$ von E:

$$d(g;E)=d(A;E)=\frac{|2-6-2-15|}{3}=7$$

Weil Betragsstriche nötig waren, liegen die Gerade und der Ursprung auf verschiedenen Seiten von E.

b) $4x-8y-z=36$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$. Da $\vec{u}\cdot\vec{n}=20-24+4=0$ gilt $g\parallel E$.

$4x-8y-z=36 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{16+64+1}=0\right. \quad$ HNF: $\dfrac{4x-8y-z-36}{9}=0$

$d(g;E)=d(A;E)=\dfrac{|16-1-36|}{9}=\dfrac{7}{3}$

Weil Betragsstriche nötig waren, liegen die Gerade und der Ursprung auf verschiedenen Seiten von E.

c) $7x_1+2x_2+13x_3=9$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\10\\-3\end{pmatrix}$

Da $\vec{u}\cdot\vec{n}=21+20-39\neq 0$ sind g und E nicht parallel.

d) $x_1-12x_2-12x_3=17$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\10\\-12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}12\\10\\-9\end{pmatrix}$ $\vec{u}\cdot\vec{n}=12-120+108=0 \Rightarrow g\parallel E$

$x_1-12x_2-12x_3=17 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{1+144+144}=17\right. \quad$ HNF: $\dfrac{x_1-12x_2-12x_3-17}{17}=0$

$d(g;E)=d(A;E)=\dfrac{|3-120+144-17|}{17}=\dfrac{10}{17}$

g und O liegen auf derselben Seite von E, weil die Betragsstriche unnötig waren.

e) $4x+5y-20z=17$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$ Da $\vec{u}\cdot\vec{n}=20+20-40=0 \Rightarrow g\parallel E$

$4x+5y-20z=17 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{16+25+400}=21\right. \quad$ HNF $\dfrac{4x+5y-20z-17}{21}=0$

$d(g;E)=d(A;E)=\dfrac{|100-17|}{21}=\dfrac{83}{21}$

g und O liegen auf derselben Seite der Ebene.

Aufgabe 189:

Prüfe nach, ob $E_1 \parallel E_2$. Wenn ja, berechne ihren Abstand.

a) $4x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 14$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $2x + 14y + 5z + 100 = 0$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $3x - 7y + 11z = 14$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $8x_1 + 16x_2 - 11x_3 = 124$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$

e) $x + y + 2z = 14$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) $12x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 7$ $\quad -9x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 12$

g) $x - y + 12z = 8$ $\quad 2x + 2y - 24z = 7$

h) $\frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 5$ $\quad -2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2$

Lösung:

a) $4x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 14$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Genau wie in Aufgabe (3) überprüft man die Parallelität dadurch, daß man nachrechnet, ob die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ von E_2 orthogonal sind zum Normalenvektor von E_1:

$\vec{u} \cdot \vec{n} = -12 - 12 + 24 = 0$; $\quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 36 - 36 = 0$ $\quad$ d.h. $\quad E_1 \parallel E_2$.

$4x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 14 \;\Big|: |\vec{n}| = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13$

HNF von E_1: $\quad \dfrac{4x_1 - 3x_2 + 12x_3 - 14}{13} = 0$

$$d(E_1; E_2) = d(A; E_1) = \frac{|4 - 3 - 12 - 14|}{13} = \frac{25}{13}$$

b) $2x+14y+5z+100=0$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\17\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=4-14+10=0\,;\quad \vec{v}\cdot\vec{n}=6+14-20=0 \quad \Rightarrow E_1 \parallel E_2$

$2x+14y+5z+100=0 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{4+196+25}=15\right.$

HNF von E_1: $\quad \dfrac{-2x-14y-5z-100}{15}=0$

(Achtung hier mußten alle Vorzeichen gedreht werden, da das Absolutglied 100 links mit negativem Vorzeichen stehen soll.

$d(E_1;E_2)=d(A;E_1)=\dfrac{|0-70-85-100|}{15}=\dfrac{225}{15}=17$

c) $3x-7y+11z=14$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=12-7+11\neq 0$ also können E_1 und E_2 nicht parallel sein !

d) $8x_1+16x_2-11x_3=124$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\11\\16\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=-16+16=0$ und $\vec{v}\cdot\vec{n}=16\cdot 11-11\cdot 16=0 \Rightarrow E_1 \parallel E_2$

$8x_1+16x_2-11x_3=124 \quad \left|:|\vec{n}|=\sqrt{64+256+121}=21\right.$

HNF von E_1: $\quad \dfrac{8x_1+16x_2-11x_3-124}{21}=0$

$d(E_1;E_2)=d(A;E_1)=\dfrac{|8+11-124|}{15}=5$

e) $x+y+2z=14$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\14\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=5+1-6=0$ aber $\vec{v}\cdot\vec{n}=3+4+8\neq 0$

Also sind diese Ebenen nicht parallel.

f) $E_1: \; 12x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 7$ und $E_2: \; -9x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 12$

Diese Ebenen sind genau dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren kollinear sind:

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$. Da $\vec{n}_1 = -\frac{4}{3} \cdot \vec{n}_2$ oder $\vec{n}_2 = -\frac{3}{4} \cdot \vec{n}_1$ ist $\Rightarrow E_1 \parallel E_2$.

$12x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 7 \;\; \left| : |\vec{n}_1| = \sqrt{144 + 64 + 144} = \sqrt{352} \right.$

HNF von E_1: $\dfrac{12x_1 - 8x_2 + 12x_3 - 7}{\sqrt{352}} = 0$.

Wähle A auf E_2 z.B. so: $x_1 = x_3 = 0$ folgt $x_2 = 2$, also $A(0|2|0) \in E_2$!

$$d(E_1; E_2) = d(A; E_1) = \frac{|-16 - 7|}{\sqrt{352}} = \frac{23}{\sqrt{352}}$$

g) $x - y + 12z = 8$ $\qquad$ $2x + 2y - 24z = 7$

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}$ Da $\vec{n}_2$ kein Vielfaches von $\vec{n}_1$ ist, sind diese Normalen-Vektoren nicht kollinear und die Ebenen nicht parallel.

h) $\frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 5$ und $-2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2$ Da $\vec{n}_2 = -6\vec{n}_1 \Rightarrow E_1 \parallel E_2$.

HNF von E_2: $\dfrac{-2x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2}{\sqrt{56}} = 0$, $A(0|5|0) \in E_1$!

$$d(E_1; E_2) = d(A; E_1) = \frac{|-30 - 2|}{\sqrt{56}} = \frac{32}{2\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

Aufgabe 190:

Welche Punkte der Geraden g haben von E den angegebenen Abstand e ?

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $2x + y + 2z = -5$ $\qquad$ $e = 5$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 20 = 0$ $\qquad$ $e = \frac{13}{9}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ Ebene E durch $A(-1|-5|2), B(-1|1|-2), C(9|3|0)$, $e = \sqrt{14}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 3$ $\qquad$ $e = \sqrt{2}$.

Lösung:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2x + y + 2z = -5$ $\qquad e = 5$

Beliebiger Punkt von g: $P(3-r|-2+r|4+r)$

HNF von E: $\dfrac{-2x - y - 2z - 5}{3} = 0$

$$d(P;E) = \frac{|-2(3-r) - (-2+r) - 2(4+r) - 5|}{3} = \frac{|-6+2r+2-r-8-2r-5|}{3} = \frac{|-r-17|}{3}$$

Bedingung für P: $d(P;E) = 5$

d.h. $\dfrac{|-r-17|}{3} = 5 \Leftrightarrow |-r-17| = 15$

$$-r - 17 = \pm 15 \Rightarrow r_{1,2} = -17 \pm 15 = \begin{cases} -2 \\ -32 \end{cases}$$

Zu $r_1 = -2$ gehört $P_1(5|-4|2)$ und zu $r_2 = -32$ gehört $P_2(35|-34|-28)$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 20 = 0$ $\qquad e = \dfrac{13}{9}$

Beliebiger Punkt von g: $P(1-4r|-1-r|2-r)$

HNF von E: $\dfrac{-7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 20}{9} = 0$

$$d(P;E) = \frac{|-7(1+4r) - 4(-1-r) + 4(2-r) - 20|}{9} = \frac{|-7-28r+4+4r+8-4r-20|}{9}$$

$$d(P;E) = \frac{|-28r-15|}{9}.$$

Bedingung für P:

$$d(P;E) = \frac{13}{9} \Leftrightarrow \frac{|-28r-15|}{9} = \frac{13}{9} \Leftrightarrow |-28r-15| = 13 \Leftrightarrow -28r - 15 = \pm 13$$

d.h. $28r = -15 \pm 13 = \begin{cases} -2 \\ -28 \end{cases}$ also $r_1 = -\dfrac{1}{14}$, $r_2 = -1$

Zu $r_1 = -\dfrac{1}{14}$ gehört $P_1\left(\frac{10}{14}|-\frac{13}{14}|\frac{29}{14}\right)$, zu $r_2 = -1$ gehört $P_2(-3|0|3)$.

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-8\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$ Ebene E durch $A(-1|-5|2), B(-1|1|-2), C(9|3|0)$, $e=\sqrt{14}$

Zuerst: Aufstellen der Normalengleichung von E.
Bedingungen für den Normalenvektor $\vec{n}$:

(1) $\overline{AB}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=6n_2-4n_3=0$ (1)

(2) $\overline{AC}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}10\\8\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=10n_1+8n_2-2n_3=0$ (2)

2 Gleichungen mit 3 Unbekannten bedeutet eine freie Wahl.
Aus (1) folgt: $4n_3=6n_2$ d.h. $n_3=\frac{3}{2}n_2$.
Wähle daher $n_2=2r,\ r\in\mathbb{R} \Rightarrow n_3=3r$
Aus (2) folgt: $10n_1=2n_3-8n_2=6r-16r=-10r \Rightarrow n_1=-r$

Normalenvektor von E: $\vec{n}=\begin{pmatrix}-r\\2r\\3r\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

Ebene E: $-x_1+2x_2+3x_3=k$
Mit $A(-1|-5|2)\in E \Rightarrow k=1-10+6=-3$
Daher hat E diese Gleichung: $-x_1+2x_2+3x_3=-3$
bzw. $x_1-2x_2-3x_3=3$

Wegen $|\vec{n}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ lautet die HNF: $\dfrac{x_1-2x_2-3x_3-3}{\sqrt{14}}=0$

Beliebiger Punkt von g: $P(1+r|-3+r|-8+5r)$

$$d(P;E)=\frac{|1+r-2(-3+r)-3(-8-5r)-3|}{\sqrt{14}}=\frac{|1+r+6-2r+24+15r-3|}{\sqrt{14}}=\frac{|14r+28|}{\sqrt{14}}$$

Bedingung für P: $d(P;E)=\sqrt{14}$

d.h. $\dfrac{|14r+28|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14} \Leftrightarrow |14r+28|=14 \Leftrightarrow 14r+28=\pm 14$

$14r=-28\pm 14=\begin{cases}-14\\-42\end{cases} \Rightarrow r_1=-1$ mit $P_1(0|-4|-3)$, $r_2=-3$ mit $P_3(-2|-6|76)$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 4 \qquad$ $e = \sqrt{2}$.

Beliebiger Punkt von g: $\quad P(1+5r\,|\,1+2r\,|\,-1-r)$

HNF von E: $\quad \dfrac{2x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 4}{\sqrt{72}} = 0$

$$d(P;E) = \frac{|2(1+5r) - 2(1+2r) + 8(-1-r) - 4|}{\sqrt{72}} = \frac{|-2r-12|}{\sqrt{72}}$$

Bed.: $\dfrac{|-2r-12|}{\sqrt{72}} = \sqrt{2}$ ergibt $|-2r-12| = \sqrt{144} = 12 \Leftrightarrow -2r-12 = \pm 12$

Also ist $\quad 2r = -12 \pm 12 = \begin{cases} 0 \\ -24 \end{cases}$

Zu $r_1 = 0$ gehört $P_1(1|1|-1)$,

zu $r_2 = -12$ gehört $P_2(-59|-23|11)$.

Aufgabe 191:

Gegeben ist eine Ebene E. Gesucht sind 2 Ebenen E_1 und E_2, die beide zu E parallel sind und zu E den angegebenen Abstand e haben.

a) $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 12 \qquad e = 7$

b) $4x + 12y + 3z = 18 \qquad e = 5$

c) $6x_1 + 18x_2 - x_3 = 4 \qquad e = 1$

Lösung:

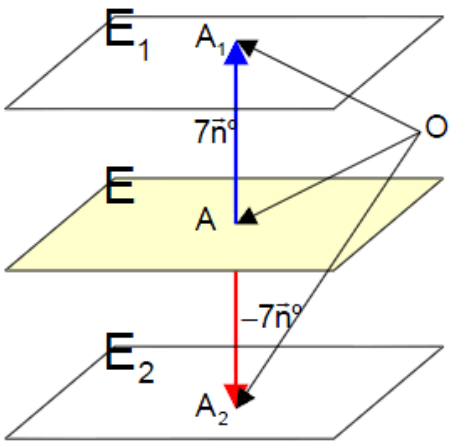
a) $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 12$ e = 7

Es gibt unterschiedliche Lösungswege.

1. Weg:

Jede zu E parallele Ebene hat diese Form: $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = k$
k erhält man durch einsetzen eines Punktes der betreffenden Ebene.
Solche punkte gewinnt man, indem man von einem Punkt A der gegebenen Ebene aus um 7 „nach oben“ oder um 7 „nach unten“ geht.
Zunächst wähle ich einen Punkt A mittels $x_1 = x_3 = 0$, was zu $x_2 = 3$ führt, also ist $A(0|3|0)$. Dann errechnen wir den Einheits-Normalenvektor:

$\vec{n}^\circ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ Mit ihm berechnen wir:



$\overrightarrow{OA_1} = \vec{a} + 7\vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

ergibt $A_1\left(\frac{49}{9}|\frac{55}{9}|-\frac{28}{9}\right)$ und mit

$\overrightarrow{OA_2} = \vec{a} - 7\vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

erhält man $A_2\left(-\frac{49}{9}|-\frac{1}{9}|\frac{28}{9}\right)$.

Setzt man diese Punkte ein, erhält man das jeweils passende k:
$k_1 = \frac{1}{9}(49 \cdot 7 + 55 \cdot 4 + 28 \cdot 4) = 75$ und
$k_2 = \frac{1}{9}(-49 \cdot 7 - 4 - 28 \cdot 4) = -51$
Damit erhält man die zu E parallelen Ebenen im Abstand 7 durch
E_1: $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 75$ und E_2: $7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -51$.

2. Lösungsweg

In der Hesseschen Normalform gibt das Absolutglied d den Abstand des Ursprungs zur Ebene an. Addiert bzw. subtrahiert man dort 7, dann hat man ganz schnell die gesuchten Ebenen.

HNF von E: $\dfrac{7x_1+4x_2-4x_3-12}{9}=0$ d.h. $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\4\\-4\end{pmatrix}\vec{x}-\dfrac{12}{9}=0$

HNE von E_1: $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\4\\-4\end{pmatrix}\vec{x}-\dfrac{12}{9}-7=0 \quad |\cdot 9$

$$\begin{pmatrix}7\\4\\-4\end{pmatrix}\vec{x}-12-63=0 \Leftrightarrow 7x_1+4x_2-4x_3=75$$

HNE von E_2: $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\4\\-4\end{pmatrix}\vec{x}-\dfrac{12}{9}+7=0 \quad |\cdot 9$

$$\begin{pmatrix}7\\4\\-4\end{pmatrix}\vec{x}-12+63=0 \Leftrightarrow 7x_1+4x_2-4x_3=-51$$

b) $4x+12y+3z=18$ e = 5

HNF von E: $\dfrac{4x+12y+3z-18}{13}=0$ d.h.

HNF von E_1: $\dfrac{4x+12y+3z-18}{13}-5=0 \Rightarrow 4x+12y+3z=18+65=83$

HNF von E_2: $\dfrac{4x+12y+3z-18}{13}+5=0 \Rightarrow 4x+12y+3z=18-65=-47$

c) $6x_1+18x_2-x_3=4$ e = 1

HNF von E: $\dfrac{6x_1+18x_2-x_3-4}{19}=0$

HNF von E_1: $\dfrac{6x_1+18x_2-x_3-4}{19}-1=0 \Leftrightarrow 6x_1+18x_2-x_3=19+4=23$

HNF von E_2: $\dfrac{6x_1+18x_2-x_3-4}{19}+1=0 \Leftrightarrow 6x_1+18x_2-x_3=-19+4=-15$

Aufgabe 192:

Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugel.

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 - 2x_2 - 15 = 0$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_1 - x_2 + 8x_3 = \frac{5}{2}$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2 + 3x_3 = 0$

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 2x_2 + 9x_3 = k$ Welche k sind zugelassen ?

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + kx_1 + (k-2)x_2 + 4x_3 = \frac{1}{2}k^2 + k$
Welche k sind zugelassen, und auf welcher Geraden liegen die Mittelpunkte der Kugelschar ?

f) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 8tx_2 - 6tx_3 = 20t$
Welche t sind zugelassen, und auf welcher Geraden liegen die Mittelpunkte der Kugelschar ?

g) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (2t-2)x_1 + 4tx_2 - 4tx_3 + 34t - 35 = 0$
Welche t sind zugelassen, und auf welcher Geraden liegen die Mittelpunkte der Kugelschar ?

Lösung:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 - 2x_2 - 15 = 0$

$(x_1^2 + 4x_1) + (x_2^2 - 2x_2) + x_3^2 = 15$

$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 15 + 4 + 1$

$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 20 \Rightarrow M(-2|1|0)$ und $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_1 - x_2 + 8x_3 = \frac{5}{2}$

$(x_1^2 + 5x_1) + (x_2^2 - x_2) + (x_3^2 + 8x_3) = \frac{5}{2}$

$(x_1 + \frac{5}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 + (x_3 + 4)^2 = \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + \frac{1}{4} + 16$

$(x_1 + \frac{5}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 + (x_3 + 4)^2 = 5 \Rightarrow M(-\frac{5}{2}|\frac{1}{2}|-4)$ und $r = 5$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2 + 3x_3 = 0$

$x_1^2 + (x_2^2 + 4x_2) + (x_3^2 + 3x_3) = 0$

$x_1^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 + \frac{3}{2})^2 = 4 + \frac{9}{4}$

$x_1^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow M(0|-2|-\frac{3}{2})$ und $r = \frac{5}{2} = 2{,}5$

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 2x_2 + 9x_3 = k$

$(x_1^2 + x_1) + (x_2^2 - 2x_2) + (x_3^2 + 9x_3) = k$

$(x_1 + \frac{1}{2})^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + \frac{9}{2})^2 = k + \frac{1}{4} + 1 + \frac{81}{4}$

$(x_1 + \frac{1}{2})^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + \frac{9}{2})^2 = k + \frac{43}{2}$

Es liegt nur dann eine Kugel vor, wenn die rechte Seite (r^2) positiv ist, also für $k > -\frac{43}{2}$. Dann ist $M(-\frac{1}{2}|1|\frac{9}{2})$ und $r = \sqrt{k + \frac{43}{2}}$.

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + kx_1 + (k-2)x_2 + 4x_3 = \frac{1}{2}k^2 + k$

$(x_1^2 + kx_1) + (x_2^2 + (k-2)x_2) + (x_3^2 + 4x_3) = \frac{1}{2}k^2 + k$

$(x_1 + \frac{k}{2})^2 + (x_2 + \frac{k-2}{2})^2 + (x_3 + 2)^2 = \frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4}(k-2)^2 + 4$

$(x_1 + \frac{k}{2})^2 + (x_2 + \frac{k-2}{2})^2 + (x_3 + 2)^2 = \frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4}k^2 - k + 1 + 4$

$(x_1 + \frac{k}{2})^2 + (x_2 + \frac{k-2}{2})^2 + (x_3 + 2)^2 = k^2 + 5$

Da $k^2 + 5$ stets positiv ist, stellt die Gleichung für jedes $k \in \mathbf{R}$ eine Kugel dar. $M(-\frac{1}{2}k|-\frac{1}{2}(k-2)|-2)$ und $r = \sqrt{k^2 + 5}$

Die Mittelpunkte liegen auf dieser Geraden:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k + 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

f) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 8tx_2 - 6tx_3 = 20t$

$(x_1^2 - 4x_1) + (x_2^2 + 8tx_2) + (x_3^2 - 6tx_3) = 20t$

$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4t)^2 + (x_3 - 3t)^2 = 20t + 4 + 16t^2 + 9t^2$

$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4t)^2 + (x_3 - 3t)^2 = 25t^2 + 20t + 4$

$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4t)^2 + (x_3 - 3t)^2 = (5t - 2)^2$

Die Umformung der rechten Seite in ein Klammer-Quadrat miß man erahnen: $25t^2$ ist das Quadrat von 5t, 4 ist das Quadrat von 2. Und dann probiert man das doppelte Produkt aus: $2 \cdot 5t \cdot 2 = 20t$ und genau das wartet auf uns in der Gleichung !

Es liegt nun eine Kugelschar vor, aber nur dann, wenn die rechte Seite positiv ist. Nun muß man wissen, daß jedes Quadrat nicht negativ ist, aber es kann 0 werden: Für $5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$ wird die rechte Seite 0. Dann liegt keine Kugel mehr vor, sondern nur noch die auf den Mittelpunkt zusammengeschrumpfte Null-Kugel, also ein Punkt.

Ergebnis: Für $t \neq \frac{5}{2}$ liegt eine Kugel vor mit $M(2|-4t|3t)$ und dem Radius $r = \sqrt{(5t-2)^2} = |5t - 2|$.
(Wer den Betrag vergißt, erhält schon für $t = 0$ den Radius - 2 !!!)

Die Mittelpunkte liegen auch hier wieder auf einer Geraden:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

g) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (2t-2)x_1 + 4tx_2 - 4tx_3 + 34t - 35 = 0$

$(x_1^2 + (2t-2)x_1) + (x_2^2 + 4tx_2) + (x_3^2 - 4tx_3) = -34t + 35$

$(x_1 + (t-1))^2 + (x_2 + 2t)^2 + (x_3 - 2t)^2 = -34t + 35 + (t-1)^2 + 4t^2 + 4t^2$

$(x_1 + (t-1))^2 + (x_2 + 2t)^2 + (x_3 - 2t)^2 = -34t + 35 + t^2 - 2t + 1 + 8t^2$

$(x_1 + (t-1))^2 + (x_2 + 2t)^2 + (x_3 - 2t)^2 = 9t^2 - 36t + 36$

$(x_1 + (t-1))^2 + (x_2 + 2t)^2 + (x_3 - 2t)^2 = (3t-6)^2$

Ergebnis: Für jedes $t \neq 2$ stellt diese Gleichung eine Kugel dar.
Ihr Mittelpunkt ist $M(t-1|2t|2t)$ und ihr Radius $r = |3t-6|$.
Die Mittelpunkte liegen auf der Geraden mit der Gleichung

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für $t = 2$ entartet die Kugel zum Punkt $M^*(1|4|4)$.

Aufgabe 193:

Bestimme Mittelpunkt und Radius für diese Kugeln:

a) $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{x} - 12 = 0$

b) $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{x} + 1 = 0$

Lösung:

a) $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{x} - 12 = 0$

$$\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{x} = 12$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 12 + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^2 = 12 + 4 + 4 = 20$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 20$$

Ergebnis: $M(-2|-2|0)$ und $r = \sqrt{20}$

b) $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{3}{2} = 0$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 4$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 4$$

Ergebnis: $M(\frac{3}{2}|\frac{1}{2}|-1)$ und $r = 2$.

Aufgabe 194:

Gegeben ist eine Kugel durch $M(2|5|-1)$ und $r = 7$

Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(6|-1|4)$, $B(8|3|2)$, $C(0|8|2)$

Lösung:

Gegeben ist eine Kugel durch $M(2|5|-1)$ und $r = 7$

Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(6|-1|4)$, $B(8|3|2)$, $C(0|8|2)$

$$d(M,A) = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\-1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\-6\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+36+25} = \sqrt{77} > r(=7)$$

A liegt außerhalb der Kugel.

$$d(M,B) = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7 = r$$

B liegt auf der Kugel

$$d(M,C) = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22} < r$$

C liegt innerhalb der Kugel.

Aufgabe 195:

Gegeben ist ein Kreis durch $M(-3|10)$ und $r = 15$.

Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(4|5)$, $B(10|1)$, $C(6|-2)$

Lösung:

Gegeben ist ein Kreis durch $M(-3|10)$ und $r = 15$.

Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(4|5)$, $B(10|1)$, $C(6|-2)$

$$d(M,A) = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+25} = \sqrt{74} < r$$

A liegt innerhalb der Kugel.

$$d(M,B) = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}13\\-9\end{pmatrix}\right| = \sqrt{169+81} = \sqrt{250} > r$$

B liegt außerhalb der Kugel

$$d(M,C) = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}9\\-12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15 = r$$

C liegt innerhalb der Kugel.

Aufgabe 196:

Gegeben ist die Kugel K durch $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\-2\\14\end{pmatrix}\right]=289$.

Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(-5|-10|1),\ B(3|2|10),\ C(11|-11|2)$

Lösung:

Die Kugel K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\-2\\14\end{pmatrix}\right]=289$ hat $M(3|-2|14)$ und $r = 17$

Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(-5|-10|1),\ B(3|2|10),\ C(11|-11|2)$.

$$d(M,A)=\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\begin{pmatrix}-5\\-10\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\14\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-8\\-8\\-13\end{pmatrix}\right|=\sqrt{64+64+169}=\sqrt{297}>r$$

A liegt außerhalb der Kugel.

$$d(M,B)=\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\2\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\14\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}<r$$

B liegt in der Kugel

$$d(M,C)=\left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\begin{pmatrix}11\\-11\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\14\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}8\\-9\\-12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{64+81+144}=\sqrt{289}=r$$

C liegt auf der Kugel.

Aufgabe 197:

Gegeben ist die Kugel K durch $(x_1+5)^2+(x_2-7)^2+(x_3+1)^2=225$.
Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(-3|-3|10),\ B(10|0|8),\ C(0|-7|-1)$

Lösung:

Gegeben ist die Kugel K durch $(x_1+5)^2+(x_2-7)^2+(x_3+1)^2=225$.
Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(-3|-3|10)$, $B(10|0|8)$, $C(0|-7|-1)$
Der Kugelmittelpunkt ist $M(-5|7|-1)$ und ihr Radius $r = 15$.

$$d(M,A)=\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\-3\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\7\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\-10\\11\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+100+121}=\sqrt{225}=15=r$$

A liegt auf der Kugel.

$$d(M,B)=\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\begin{pmatrix}10\\0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\7\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}15\\-7\\9\end{pmatrix}\right|=\sqrt{225+49+81}=\sqrt{355}>r$$

B liegt außerhalb der Kugel

$$d(M,C)=\left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-7\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\7\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}5\\-14\\-4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{25+196}=\sqrt{221}<r$$

C liegt innerhalb der Kugel.

Aufgabe 198:

Gegeben ist eine Kugel durch ihren Mittelpunkt $M(2|-2|-3)$ und einen Kugelpunkt $Q(5|2|9)$.

Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(-10|1|0)$, $B(6|1|-15)$, $C(13|6|3)$

Lösung:

Gegeben ist eine Kugel durch ihren Mittelpunkt $M(2|-2|-3)$ und einen Kugelpunkt $Q(5|2|9)$.
Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(-10|1|0)$, $B(6|1|-15)$, $C(13|6|3)$

Jetzt muß zuerst der Kugelradius berechnet werden. Er ist der ABSTAND der Punkte M und Q:

$$r=\left|\overrightarrow{MQ}\right|=\left|\begin{pmatrix}5\\2\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

Nun kann die eigentliche Aufgabe gelöst werden:

$$d(M,A) = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\begin{pmatrix}-10\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-12\\3\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{144+9+9} = \sqrt{162} < r$$

A liegt im Innern der Kugel.

$$d(M,B) = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\1\\-15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\3\\-12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13 = r$$

B liegt auf der Kugel

$$d(M,C) = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\begin{pmatrix}13\\6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}11\\8\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{121+64+36} = \sqrt{221} > r$$

C liegt außerhalb der Kugel.

Aufgabe 199:

Gegeben ist die Kugel K durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10x_1 + 2x_2 - 20x_3 = 198$.
Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(9|-3|18),\ B(7|7|-7),\ C(-3|13|2)$

Lösung:

Gegeben ist die Kugel K durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10x_1 + 2x_2 - 20x_3 = 198$.
Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(9|-3|18),\ B(7|7|-7),\ C(-3|13|2)$

Zunächst wird durch quadratische Ergänzung der Mittelpunkt und der Radius berechnet:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10x_1 + 2x_2 - 20x_3 = 198$$
$$(x_1^2 - 10x_1) + (x_2^2 + 2x_2) + (x_3^2 - 20x_3) = 198$$
$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 10)^2 = 198 + 25 + 1 + 100$$
$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 10)^2 = 324$$

Mittelpunkt: $M(5|-1|10)$ und $r = 18$.

$$d(M,A) = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\begin{pmatrix}9\\-3\\18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-1\\10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+4+64} = \sqrt{84} < r$$

A liegt im Innern der Kugel.

$$d(M,B) = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix}7\\7\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-1\\10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\8\\-17\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+64+289} = \sqrt{357} > r$$

B liegt außerhalb der Kugel

$$d(M,C) = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\13\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-1\\10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-8\\14\\-8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+196+64} = \sqrt{324} = 18 = r$$

C liegt auf der Kugel.

Aufgabe 200:

Gegeben ist die Kugel K durch $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \vec{x} - 35 = 0$.

Bestimme die Lage dieser Punkte:

$A(3|5|1),\ B(-3|1|4),\ C(5|-2|4)$

Lösung:

Gegeben ist die Kugel K durch $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \vec{x} - 35 = 0$.

Bestimme die Lage dieser Punkte: $A(3|5|1),\ B(-3|1|4),\ C(5|-2|4)$

Zunächst wird durch quadratische Ergänzung der Mittelpunkt und der Radius berechnet:

$$\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \vec{x} - 35 = 0$$

$$\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \vec{x} = 35$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]^2 = 35 + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}^2 = 35 + 9 + 4 + 16$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]^2 = 64$$

Kugelmittelpunkt: $M(-3|-2|4)$ und Kugelradius $r = 8$

$$d(M,A) = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\7\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+49+9} = \sqrt{94} > r$$

A liegt außerhalb der Kugel.

$$d(M,B) = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right| = 3 < r$$

B liegt innerhalb der Kugel

$$d(M,C) = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 8 = r$$

C liegt auf der Kugel.

Aufgabe 201:

Untersuche die Lage der Ebene zur Kugel.

(a) E: $2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2 = 0$, $M(7|-4|-3)$, $r = 7$

(b) E: $4x_1 + 8x_2 - x_3 = 25$, $M(14|14|1)$, $r = 18$

(c) E: $6x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 27$ $M(-4|7|-4)$ $r = 11$

(d) E: $-3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 0$ $M(1|8|15)$, $r = 13$

(e) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ $M(5|11|2)$, $r = 9$

(f) E: $4x_1 - 3x_3 = 8$ K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}\right]^2 = 25$

Lösung:

(1) Untersuche die Lage der Ebene zur Kugel.

(a) E: $2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2 = 0$, $M(7|-4|-3)$, $r = 7$

Zuerst ist es wichtig, die Gleichung so umzuformen, daß das Absolutglied links mit negativem Vorzeichen steht. Nur dann ist garantiert, daß der in der Gleichung in den Koeffizienten stehende Normalenvektor vom Ursprung zur Ebene hin zeigt: E: $-2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \boxed{-} 2 = 0$.

Dieser Normalenvektor hat den Betrag $|\vec{n}| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$.

Dies ergibt diese Hessesche Normalform: $\dfrac{-2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \boxed{-} 2}{7} = 0$

Abstand des Mittelpunktes von E: $d(M;E) = \dfrac{|-14-24-9-2|}{7} = \dfrac{|-49|}{7} = 7 = r$

Da diese Abstand gleich dem Radius ist, berührt die Ebene die Kugel, ist also eine Tangentialebene.

(b) E: $4x_1 + 8x_2 - x_3 = 25$, $M(14|14|1)$, $r = 18$

(ab jetzt: Lösungen in Kurzform)

HNF: $\dfrac{4x_1 + 8x_2 - x_3 - 25}{9} = 0$. $d(M;E) = \dfrac{56+112-1-25}{9} = \dfrac{142}{9} \approx 15{,}9 < r$

Ebene und Kugel schneiden sich in einem Kreis.

(c) E: $6x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 27$ $M(-4|7|-4)$ $r = 11$

HNF: $\dfrac{6x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 27}{11} = 0$; $d(M;E) = \dfrac{|-24-42-28-27|}{11} = \dfrac{121}{11} = 11 = r$

Tangentialebene !

(d) E: $-3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 0$ $M(1|8|15)$, $r = 13$

HNF: $\dfrac{-3x_1 + 4x_2 + 12x_3}{13} = 0$ $d(M;E) = \dfrac{-3+32+180}{13} = \dfrac{209}{13} \approx 16{,}\ldots > r$

Die Ebene ist eine Passante zur Kugel.

(e) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ $M(5|11|2)$, $r = 9$

HNF: $\dfrac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2}{3} = 0$ $d(M;E) = \dfrac{|10-11+4-2|}{3} = \dfrac{1}{3} < r$ Schnittkreis

(f) E: $4x_1 - 3x_3 = 8$ K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}\right]^2 = 25 \Rightarrow M(1|0|7);\ r = 5$

HNF: $\dfrac{4x_1 - 3x_3 - 8}{5} = 0$; $d(M;E) = \dfrac{|4-21-8|}{5} = 5 = r \Rightarrow$ Tangentialebene

Aufgabe 202:

Zeige, daß die gegebene Ebene Tangentialebene an die jeweilige Kugel ist. Berechne den Berührpunkt.

a) E: $2x_1+10x_2-11x_3$, M(5|−12|9), r = 15

b) E: $4x_1+3x_2-x_1=13$, M(9|9|−2), $r=\sqrt{104}$

c) E: $4x_1+20x_2-5x_3=25$ K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}9\\19\\-10\end{pmatrix}\right]^2=441$

d) E: $x_1-x_2-x_3=5$ K: $(x_1-9)^2+x_2{}^2+(x_3+8)^2=48$

Lösung:

(2) Zeige, daß die gegebene Ebene Tangentialebene an die jeweilige Kugel ist. Berechne den Berührpunkt.

a) E: $2x_1+10x_2-11x_3=16$, M(5|−12|9), r = 15

Ausführliche Lösung:

1. Lage der Ebene:

Betrag des Normalenvektors: $|\vec{n}|=\left|\begin{pmatrix}2\\10\\-11\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+100+121}=\sqrt{225}=15$

Hessesche Normalform der Ebenengleichung: $\frac{2x_1+10x_2-11x_3-16}{15}=0$

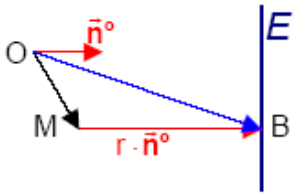
Abstand des Mittelpunktes von E: $d(M;E)=\frac{|10-120-99-16|}{15}=\frac{|-225|}{15}=15$

Weil der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene gleich groß ist wie der Radius, berührt die Ebene die Kugel, ist also Tangentialebene.

2. Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: Mit dem Einheits-Normalenvektor.

WISSEN: Wenn in der HNF links das Absolutglied negativ ist, zeigt der in der Ebenengleichung stehende Normalenvektor von O zur Ebene hin.
Werden bei der Berechnung des Abstandes des Mittelpunkts zur Ebene Betragsstriche benötigt, liegen O und M auf der gleichen Seite der Ebene. Dann zeigt der Normalenvektor von M in Richtung Berührpunkt.
Werden keine Betragsstriche benötigt, liegen M und O auf verschiedenen Seiten der Ebene. Dann zeigt $-\vec{n}$ von M zum Berührpunkt.



Hier liegen also O und M auf derselben Seite der Ebene E, daher gilt:

$\overrightarrow{MB} = r \cdot \vec{n}°$ denn $\vec{n}°$ hat den Betrag 1, daher hat $r \cdot \vec{n}°$ genau den Betrag r, d.h. der Pfeil $r \cdot \vec{n}°$ reicht genau von M bis B !

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \vec{m} + r \cdot \vec{n}° = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B(7|-2|-2).$$

2. *Methode*: *Mit dem Lot von M auf E.*
Man verwendet den Normalenvektor von E als Richtungsvektor der Lotgeraden:

L: $\vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix}$. Schnitt mit E durch Einsetzen:

$2(5+2t) + 10(-12+10t) - 11(9-11t) = 16$ führt auf $t = 1$

Eingesetzt in die Gleichung von L erhält man den Berührpunkt $B(7|-2|-2)$.
(Die 1. Methode erfordert deutlich weniger Arbeit!)

b) E: $4x_1 + 3x_2 - x_1 = 13$, M(9|9|−2), $r = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

Kurzlösung:

$$\text{HNF: } \frac{4x_1 + 3x_2 - x_1 - 13}{\sqrt{26}} = 0,$$

$$d(M;E) = \frac{36 + 27 + 2 - 13}{\sqrt{26}} = \frac{52}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{52 \cdot \sqrt{26}}{26} = 2\sqrt{26} = 5$$

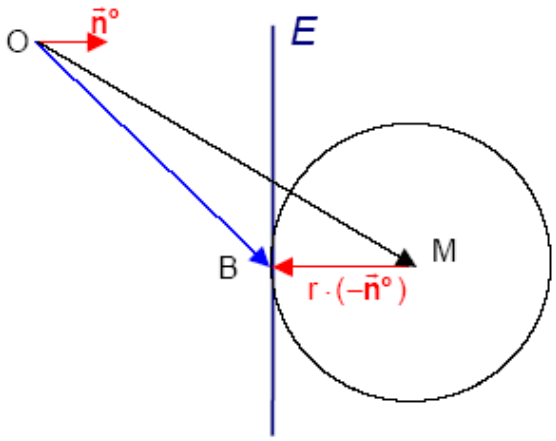
E ist also Tangentialebene an K.

Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: *Mit dem Einheits-Normalenvektor.*

Weil bei der Abstandsberechnung keine Betragsstriche benötigt worden sind, liegen M und O auf verschiedenen Seiten von E, also gilt:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \vec{m} - r \cdot \vec{n}° = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\sqrt{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(1|3|0)$$



2. *Methode*: *Mit dem Lot von M auf E.*

Man verwendet den Normalenvektor von E als Richtungsvektor der Lotgeraden:

L: $\vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Schnitt mit E durch Einsetzen:

$4(9+4t)+3(9+3t)-(-2-t)=13$ führt auf $t = -2$.

Eingesetzt in L: $B(1|3|0)$

Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: *Mit dem Einheits-Normalenvektor.*
Weil bei der Abstandsberechnung keine Betragsstriche benötigt worden sind, liegen M und O auf verschiedenen Seiten von E, also gilt:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \vec{m} - r \cdot \vec{n}° = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} - 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B(5|4|-4)$$

2. *Methode*: *Mit dem Lot von M auf E.*

L: $\vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Schnitt mit E durch Einsetzen:

$9+t-(-t)-(-8-t)=5$ ergibt $t = -4$ und damit $B(5|4|-4)$.

c) E: $4x_1+20x_2-5x_3=25$ K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}9\\19\\-10\end{pmatrix}\right]^2=441$

Kugelmittelpunkt: $M(9|19|-10)$ und $r=21$.

HNF: $\frac{4x_1+20x_2-5x_3-25}{21}=0$ $d(M;E)=\frac{36+280+50-25}{21}=\frac{441}{21}=21=r$

Also ist E Tangentialebene an K.

Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: Mit dem Einheits-Normalenvektor.

Weil bei der Abstandsberechnung keine Betragsstriche benötigt worden sind, liegen M und O auf verschiedenen Seiten von E, also gilt:

$$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=\vec{m}-r\cdot\vec{n}^\circ=\begin{pmatrix}9\\19\\-10\end{pmatrix}-21\cdot\frac{1}{21}\begin{pmatrix}4\\20\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\19\\-10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\20\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow B(5|-1|-5)$$

2. *Methode: Mit dem Lot von M auf E.*

L: $\vec{x}=\vec{m}+t\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}9\\19\\-10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\20\\-5\end{pmatrix}$. Schnitt mit E durch Einsetzen:

$4(9+4t)+20(19+20t)-5(-10-5t)=25$ ergibt $441\,t=-441$ also $t=-1$

Eingesetzt in L ergibt dies $B(5|-1|-5)$

d) E: $x_1-x_2-x_3=5$ K: $(x_1-9)^2+x_2^2+(x_3+8)^2=48$ $M(9|0|-8)$

HNF: $\frac{x_1-x_2-x_3-5}{\sqrt{3}}=0$, $d(M;E)=\frac{|9-0+8-5|}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{12}{3}\sqrt{3}=4\sqrt{3}=r$

Aufgabe 203:

Die gegebene Ebene ist Tangentialebene an eine Kugel mit dem Mittelpunkt M. Berechne den Kugelradius r und den Berührpunkt B.

a) E: $x_1+x_2+2x_3=0$, $M(12|8|5)$

b) E: $18x_1+6x_2-x_3+28=0$ $M(7|6|9{,}5)$

c) E: $3x_1+5x_2-10x_3=20$ $M(-1|-9|20)$

Lösung:

Die gegebene Ebene ist Tangentialebene an eine Kugel mit dem Mittelpunkt M. Berechne den Kugelradius r und den Berührpunkt B.

Ausführliche Lösung:

Der Normalenvektor der Ebene hat diesen Betrag: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

Somit lautet die Hessesche Normalform von E: $\dfrac{x_1 + x_2 + 2x_3}{\sqrt{6}} = 0$

Wenn die Ebene die Kugel berührt, dann ist der Abstand des Mittelpunktes von der Ebene so groß wie der Radius:

$$r = d(M;E) = \frac{12+8+10}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{30}{6}\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: Mit dem Einheits-Normalenvektor.

Weil bei der Abstandsberechnung keine Betragsstriche benötigt worden sind, liegen M und O auf verschiedenen Seiten von E, also gilt:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \vec{m} - r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix}12\\8\\5\end{pmatrix} - 5\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\8\\5\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow B(7|3|-5)$$

2. *Methode: Mit dem Lot von M auf E.*

Man verwendet den Normalenvektor von E als Richtungsvektor der Lotgeraden:

L: $\vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}12\\8\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. Schnitt mit E durch Einsetzen:

$$12 + t + 8 + t + 2(5 + 2t) = 0$$
$$6t = -30$$
$$t = -5$$

Eingesetzt in die Gleichung der Lotgeraden:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}12\\8\\5\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow B(7|3|-5)$$

b) E: $18x_1 + 6x_2 - x_3 + 28 = 0$ M(7|6|9,5)

Kurzlösung:

HNF: $\dfrac{-18x_1 - 6x_2 + x_3 \boxed{-} 28}{19} = 0$ folgt

$r = d(M;E) = \dfrac{|-126 - 36 + 9{,}5 - 28|}{19} = \dfrac{|-180{,}5|}{19} = 9{,}5$

Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: Mit dem Einheits-Normalenvektor.
Weil bei der Abstandsberechnung Betragsstriche benötigt worden sind, liegen M und O auf der gleichen Seite von E, also gilt:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \vec{m} \boxed{+} r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + 9{,}5 \cdot \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B(-2|3|5)$$

2. *Methode: Mit dem Lot von M auf E.*

Man verwendet den Normalenvektor von E als Richtungsvektor der Lotgeraden:

L: $\vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Schnitt mit E durch Einsetzen:

$18(7 + 18t) + 6(6 + 6t) - (9{,}5 - t) + 28 = 0$ ergibt $361\,t = -180{,}5$ also $t = -\frac{1}{2}$

und aus L folgt dann $B(-2|3|5)$

c) E: $3x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 20$ M(−1|−9|20)

HNF: $\dfrac{3x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 20}{\sqrt{134}} = 0$

$r = d(M;E) = \dfrac{|-3 - 45 - 200 - 18|}{\sqrt{134}} = \dfrac{268}{\sqrt{134}} \cdot \dfrac{\sqrt{134}}{\sqrt{134}} = 2\sqrt{134}$

Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: Mit dem Einheits-Normalenvektor.
Weil bei der Abstandsberechnung Betragsstriche benötigt worden sind, liegen M und O auf der gleichen Seite von E, also gilt:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \vec{m} \boxed{+} r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 20 \end{pmatrix} + 2\sqrt{134} \cdot \frac{1}{\sqrt{134}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 20 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(-5|1|0)$$

2. *Methode: Mit dem Lot von M auf E.* L: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ *ergibt t = 2 usw.*

Aufgabe 204:

Gegeben ist eine Kugelschar. Welche der Kugeln der Schar berührt die gegebene Ebene E ? Berechne den Berührpunkt.

a) E: $x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -14$ $\quad K_t: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}\right]^2 = t \;;\; t > 0$

b) E: $4x_1 - 8x_2 + x_3 = 16$ $\quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4-t \\ 29 \\ t+1 \end{pmatrix}\right]^2 = 729, \quad t \in \mathbf{R}$

Lösung:

Gegeben ist eine Kugelschar. Welche der Kugeln der Schar berührt die gegebene Ebene E ? Berechne den Berührpunkt.

a) E: $x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -14$ $\quad K_t: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \end{pmatrix}\right] = t \;;\; t > 0$

HNF: $\dfrac{-x_1 + 5x_2 - 6x_3 \boxed{-} 14}{\sqrt{62}} = 0$

$$r = d(M;E) = \frac{|-5 - 45 - 60 - 14|}{\sqrt{62}} = \frac{124}{\sqrt{62}} \cdot \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{62}} = \frac{124}{62} \cdot \sqrt{62} = 2\sqrt{62}$$

Also ist $t = r^2 = (2\sqrt{62})^2 = 4 \cdot 62 = 248$.

Berechnung des Berührpunktes:

1. Methode: *Mit dem Einheits-Normalenvektor.*
Weil bei der Abstandsberechnung Betragsstriche benötigt worden sind, liegen M und O auf der gleichen Seite von E, also gilt:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \vec{m} \boxed{+} r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} + 2\sqrt{62} \cdot \frac{1}{\sqrt{62}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3|1|-2)$$

2. *Methode*: *Mit dem Lot von M auf E.*

Man verwendet den Normalenvektor von E als Richtungsvektor der Lotgeraden:

L: $\vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Schnitt mit E durch Einsetzen:

$$5 + t - 5(-9 - 5t) + 6(10 + 6t) = -14$$
$$62\,t = -\,124$$
$$t = -\,2$$

Eingesetzt in die Gleichung der Lotgeraden erhält man:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3|1|-2).$$

b) E: $4x_1 - 8x_2 + x_3 = 16$ $\qquad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4-t \\ 29 \\ t+1 \end{pmatrix}\right]^2 = 729 \qquad t \in \mathbf{R}$

HNF: $\dfrac{4x_1 - 8x_2 + x_3 - 16}{9} = 0$

Der Abstand des Mittelpunktes $M(4-t|29|t+1)$ von E muß gleich groß wie der Radius $r = \sqrt{729} = 27$ sein.

$$d(M;E) = \frac{|4(4-t) - 8 \cdot 29 + t + 1 - 16|}{9} = \frac{|-3t - 231|}{9}$$

Bedingung daher $\dfrac{|-3t-231|}{9} = 27 \Leftrightarrow |-3t-231| = 9 \cdot 27$

$$-3t - 231 = \pm 9 \cdot 27$$
$$-3t = 231 \pm 9 \cdot 27$$
$$t = \frac{231 \pm 9 \cdot 27}{-3} = -77 \mp 81 = \begin{cases} -158 \\ 4 \end{cases}$$

Wir müssen nachsehen: Für $t_1 = -\,158$ werden für die Abstandberechnung keine Betragsstriche benötigt, wohl aber für $t_2 = 4$.

1. Fall: $t_1 = -158$ ergibt $M_1(-162|29|-157)$.
M und O liegen auf verschiedenen Seiten von E. Daher gilt:

$$\overrightarrow{b_1} = \vec{m} - r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 162 \\ 29 \\ -157 \end{pmatrix} - 27 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 \\ 29 \\ -157 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 53 \\ -160 \end{pmatrix}$$

d.h. $B_1(150|53|-160)$

2. Fall: $t_2 = 4$ ergibt $M_2(0|29|5)$.
M und O liegen auf der selben Seite von E. Daher gilt

$$\overrightarrow{b_2} = \vec{m} + r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix} + 27 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

d.h. $B_2(12|5|8)$

Auf die Lösung mit der Lotgeraden wir hier verzichtet.

Aufgabe 205:

Gegeben ist eine Kugel und eine Ebenenschar.
Welche Ebene ist Tangentialebene an K und wo liegt der Berührpunkt ?

a) $E_t: \quad 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = t \quad K: \quad M(-1|-16|5)$ und $r = 21, \quad t \in \mathbf{R}$

Warum gibt es 2 Lösungen ? Berechne beide Berührpunkte.

b) $E_t: \quad tx_1 - x_2 - 2tx_3 = 5 \quad K: \quad M(-6|7|17)$ und $r = 18; \quad t \in \mathbf{R}$

(Ergebnis: $t_1 = 4$ und $t_2 = 1485$). Berechne für $t_1 = 4$ den Berührpunkt.

Lösung:

Gegeben ist eine Kugel und eine Ebenenschar. Welche Ebene ist Tangentialebene an K und wo liegt der Berührpunkt ?

a) $E_t: \quad 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = t \quad M(-1|-16|5)$ und $r = 21, \quad t \in \mathbf{R}$

$$\text{HNF}: \quad \frac{2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - t}{7} = 0$$

(Hier ist nicht mehr klar, ob das Absolutglied links ein negatives Vorzeichen hat, da t sowohl positiv wie negativ sein kann !)

$$d(M;E) = \frac{|-2 - 96 - 15 - t|}{7} = \frac{|-t - 113|}{7}$$

Bedingung für die Tangentialebene: $d(M;E) = r \Leftrightarrow \frac{|-t-113|}{7} = 21$

$$|-t - 113| = 147$$
$$-t - 113 = \pm 147$$
$$t = -113 \mp 147 = \begin{cases} -260 \\ 34 \end{cases}$$

Die Ebenenschar besteht aus lauter zueinander parallelen Ebenen, also enthält sie genau 2 Tangentialebenen an K, die einander gegenüber liegen.

Berechnung der beiden Berührpunkte:

$$\vec{b}_{1,2} = \vec{m} \pm r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ 5 \end{pmatrix} \pm 21 \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ 5 \end{pmatrix} \pm 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $B_1(5|2|-4)$ und $B_2(-7|-34|14)$.

b) $E_t: \quad 2tx_1 + 9x_2 - 3tx_3 = 9 \qquad M(-5|-4|17) \quad \text{und} \quad r = 17$

HNF: $\dfrac{2tx_1 + 9x_2 - 3tx_3 - 9}{17} = 0$

$$d(M;E) = \frac{|-10t - 36 - 51t - 9|}{\sqrt{13t^2 + 81}} = \frac{|-61t - 45|}{\sqrt{13t^2 + 81}}$$

Bedingung dafür, daß E_t Tangentialebene wird: $d(M;E) = r$ d.h.

$$\frac{|-61t - 45|}{\sqrt{13t^2 + 81}} = 17$$

$$|61t - 45| = 17 \cdot \sqrt{13t^2 + 81}$$

Quadrieren: $\qquad 3721t^2 + 5490\,t + 2025 = 289 \cdot (13t^2 + 81)$

$$3721t^2 + 5490\,t + 2025 = 3757\,t^2 + 23409$$

$$0 = 36t^2 - 5490t + 21384 = 0$$

Alle Koeffizienten haben eine durch 9 teilbare Quersumme und sind gerade, also kann man durch 18 dividieren:

$$2t^2 - 305t + 1188 = 0$$

Lösung mit der Formel $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ergibt:

$$t_{1,2} = \frac{305 \pm \sqrt{305^2 - 8 \cdot 1188}}{4} = \frac{305 \pm 289}{4} = \begin{cases} 1485 \\ 4 \end{cases}$$

Berechnung der Berührpunkte.

Da beide t-Werte positiv sind, benötigt man (wenn man nachschaut !) beides Mal Betragsstriche bei der Abstandsberechnung. Daher folgt:

für $t_2 = 4$ lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{64 + 81 + 144} = \sqrt{289} = 17$

$$\vec{b} = \vec{m} + r \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix} + 17 \cdot \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: In diesem Fall ist der Berührpunkt $B(3|5|5)$.

Aufgabe 206:

Gegeben ist die Kugel und der Berührpunkt. Welche Gleichung hat die Tangentialebene ?

a) $M(2|-2|8)$ und $B(5|-3|1) \in K$

b) $M(5|-1|0)$ und $B(0|1|1) \in K$

Lösung:

Gegeben ist die Kugel und der Berührpunkt.
Welche Gleichung hat die Tangentialebene ?

a) $M(2|-2|8)$ und $B(5|-3|1) \in K$

$$\vec{n} = \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \ \vec{n} \cdot \vec{x} = k: \ 3x_1 - x_2 - 7x_3 = k$$

$B \in E \Rightarrow k = 15 + 3 - 7 = 11$

Ergebnis: $E: \ 3x_1 - x_2 - 7x_3 = 11$

b) $M(5|-1|0)$ und $B(0|1|1) \in K$

$$\vec{n} = \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \ -5x_1 + 2x_2 - x_3 = k$$

$B \in E \Rightarrow k = 2 - 1 = 1 \Rightarrow E: \ -5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$

Aufgabe 207:

Für welche Werte von a liegt B auf der Kugel K ?
Erstelle die Tangentialgleichungen der beiden Ebenen.
Ermittle deren Schnittgerade und Schnittwinkel.

a) K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\right]^2=9, \quad B(a|-3|5)$

b) K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}\right]^2=81, \quad B(-6|4|a)$

Lösung:

Für welche Werte von a liegt B auf der Kugel K ?
Erstelle die Tangentialgleichungen der beiden Ebenen.
Ermittle deren Schnittgerade und Schnittwinkel.

a) K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\right]^2=9, \quad B(a|-3|5)$

B einsetzen (oder die Bedingung $|\overline{MB}|=r$ anwenden):

$$\left[\begin{pmatrix}a\\-3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\right]^2=9 \Leftrightarrow (a-1)^2+(-2)^2+1^2=9$$

ergibt $(a-1)^2=4 \Leftrightarrow a-1=\pm 2 \Leftrightarrow a=1\pm 2=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Tangentialebene T_1 in $B_1(3|-3|5)$: $\vec{n}_1=\overline{MB_1}=\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$T_1: \quad 2x_1-2x_2+x_3=k_1; \quad B_1\in T_1 \Rightarrow k_1=6+6+5=17$

$T_1: \quad 2x_1-2x_2+x_3=17$

Tangentialebene T_2 in $B_2(-1|-3|5)$: $n_2=\overline{MB_2}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$T_2: \quad -2x_1-2x_2+x_3=k_2. \quad B_2\in T_2 \Rightarrow k_2=-4+4+1=1$

$T_2: \quad -2x_1-2x_2+x_3=1$

Schnittgerade g dieser Ebenen:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 17 \quad (1)$$
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \quad (2)$$

(1) – (2): $4x_1 = 16 \Rightarrow x_1 = 4$

in (2): $-2x_2 + x_3 = 9$

Wähle $x_2 = s;\ s \in \mathbf{R} \Rightarrow x_3 = 6 + 2s$

Ortsvektor des beliebigen Punktes auf g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ s \\ 6+2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Schnittwinkel dieser Ebenen:

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-4+4+1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \Rightarrow \gamma_1 \approx 83{,}6°;\ \gamma_2 = 180° - \gamma_1 \approx 96{,}4°.$$

b) K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 81, \quad B(-6|4|a)$

B eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 81 \Leftrightarrow 64 + 16 + (a+3)^2 = 81$

führt auf $(a+3)^2 = 1 \Leftrightarrow a + 3 = \pm 1 \Leftrightarrow a_{1,2} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

Tangentialebene in $B_1(-6|4|-2)$: $\vec{n}_1 = \overrightarrow{MB_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_1: \quad -8x_1 + 4x_2 + x_3 = k_1.$ Mit $B_1 \in T_1 \Rightarrow k_1 = 48 + 16 - 2 = 62$

Ergebnis: $T_1: \quad -8x_1 + 4x_2 + x_3 = 62$

Tangentialebene in $B_2(-6|4|-4)$: $\vec{n}_2 = \overrightarrow{MB_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$T_2: \quad -8x_1 + 4x_2 - x_3 = k_2.$ Mit $B_2 \in T_2 \Rightarrow k_2 = 48 + 16 + 4 = 68$

Ergebnis: $T_1: \quad -8x_1 + 4x_2 - x_3 = 74$

Schnittgerade g dieser Ebenen:

$$-8x_1 + 4x_2 + x_3 = 62 \qquad (1)$$
$$-8x_1 + 4x_2 - x_3 = 74 \qquad (2)$$

(1) - (2) ergibt $2x_3 = -12$ also $x_3 = -6$.
Eingesetzt in (1): $-8x_1 + 4x_2 = 68 \quad | : 4$
$$-2x_1 + x_2 = 17$$
Wähle $x_1 = s; s \in \mathbf{R} \Rightarrow x_2 = 17 + 2s$

Ortsvektor des beliebigen Punktes auf g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ 17+2s \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Schnittwinkel dieser Ebenen:

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{64 + 16 - 1}{9 \cdot 9} = \frac{79}{81} \Rightarrow \gamma_1 \approx 12{,}8°; \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1 \approx 167{,}2°.$$

Aufgabe 208:

Welche Ebenen parallel zu E sind Tangentialebenen an die Kugel K ?

a) E: $2x_1+14x_2-5x_3=50$ K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\13\\-11\end{pmatrix}\right]^2=225$

b) E: $4x_1+3x_2-12x_5=3879$ K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\-10\\19\end{pmatrix}\right]^2=676$

Lösung:

Welche Ebenen parallel zu E sind Tangentialebenen an die Kugel K?

a) E: $2x_1+14x_2-5x_3=50$ K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\13\\-11\end{pmatrix}\right]^2=225$

1. Lösung mit dem Einheits-Normalenvektor:

Die Ebenen haben die Gleichung $E: 2x_1+14x_2-5x_3=t$.
Berechnung der beiden Berührpunkte:

$$\vec{b}=\vec{m}\pm r\cdot\vec{n}^\circ=\begin{pmatrix}5\\13\\-11\end{pmatrix}\pm 15\cdot\frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\14\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\13\\-11\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}2\\14\\-5\end{pmatrix}$$

$B_1(7|27|-16)$, $B_2(3|-1|-6)$.

Einsetzt in die Gleichung von E :

$B_1(7|27|-16)$ ergibt $t_1=14+14\cdot 27+80=472$: $E_1: 2x_1+14x_2-5x_3=472$

$B_2(3|-1|-6)$ ergibt $t_2=6-14+30=22$ also $E_2: 2x_1+14x_2-5x_3=22$.

2. Lösung mit der Lotgeraden:

Die Ebenen haben die Gleichung $E: 2x_1 + 14x_2 - 5x_3 = t$.

HNF: $\dfrac{2x_1 + 14x_2 - 5x_3 - t}{15} = 0$

Bedingung: $d(M;E) = r$ d.h. $\dfrac{|10 + 182 + 55 - t|}{15} = 15 \Leftrightarrow |247 - t| = 225$

$$247 - t = \pm 225$$

$$t = 247 \pm 225 = \begin{cases} 472 \\ 22 \end{cases}$$

Nun kennt man die beiden Tangentialebenen:

$E_1: 2x_1 + 14x_2 - 5x_3 = 472$ und $E_2: 2x_1 + 14x_2 - 5x_3 = 22$.

Beide schneidet man mit der Lotgeraden von M auf E:

$$L: \vec{x} = \vec{m} + s \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit E_1:

$$2(5 + 2s) + 14(13 + 14s) - 5(-11 - 5s) = 472$$
$$10 + 4s + 182 + 196s + 55 + 25s = 472$$
$$225s = 225$$
$$\text{also } s = 1$$

eingesetzt in L: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 27 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1(7|27|-16)$

Schnitt mit E_2:

$$2(5 + 2s) + 14(13 + 14s) - 5(-11 - 5s) = 22$$
$$10 + 4s + 182 + 196s + 55 + 25s = 22$$
$$225s = -225$$
$$s = -1$$

eingesetzt in L: $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1(3|-1|-6)$

Vergleicht man beide Lösungen, so stellt man erneut fest, wie effektiv das Arbeiten mit dem Einheits-Normalenvektor ist.

b) E: $4x_1+3x_2-12x_5=3879$ K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\-10\\19\end{pmatrix}\right]^2=676$

Lösung mit dem Einheits-Normalenvektor.

Die Ebenen haben die Gleichung $E: 4x_1+3x_2-12x_5=t$.
Berechnung der beiden Berührpunkte:

$$\vec{b}=\vec{m}\pm r\cdot\vec{n}^\circ=\begin{pmatrix}5\\-10\\19\end{pmatrix}\pm 26\cdot\frac{1}{13}\begin{pmatrix}4\\3\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-10\\19\end{pmatrix}\pm 2\begin{pmatrix}4\\3\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-10\\19\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}8\\6\\-24\end{pmatrix}$$

$B_1(13|-4|-5)$, $B_2(-3|-16|43)$.

Einsetzt in die Gleichung von E :

$B_1(13|-4|-5)$ ergibt $t_1=52-12+60=100$: $E_1: 4x_1+3x_2-12x_5=100$

$B_2(-3|-16|43)$ ergibt $t_2=-12-48-516=-576$ $E_2: 2x_1+14x_2-5x_3=-576$.

Aufgabe 209:

Gegeben ist die Kugel K durch $(x_1-1)^2+(x_2-13)^2+(x_3-5)^2=250$
und die Ebene E durch $2x_1-14x_2-5x_3=20$

Zeige, daß ein Schnittkreis existiert. Berechne Radius und Mittelpunkt.

Lösung:

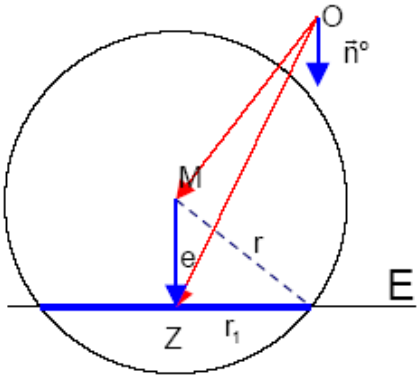
Gegeben ist die Kugel K durch $(x_1-1)^2+(x_2-13)^2+(x_3-5)^2=250$ und die Ebene E durch $2x_1-14x_2-5x_3=20$. Zeige, daß ein Schnittkreis existiert. Berechne Radius und Mittelpunkt.

Es ist $M(1|13|5)$ und $r = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$

HNF von E: $\dfrac{2x_1 - 14x_2 - 5x_3 - 20}{15} = 0$

$e = d(M;E) = \dfrac{|2 - 182 - 25 - 20|}{15} = \dfrac{225}{15} = 15 < r$

also liegt ein Schnittkreis vor.



Berechnung des Radius (Pythagoras):

$r_1^2 = r^2 - e^2 = 250 - 225 = 25$ ergibt $r_1 = 5$.

Berechnung des Mittelpunktes Z:

Da bei der Berechnung von e Betragsstriche benötigt worden sind, liegen O und M auf derselben Seite von E. Daher gilt:

$$\vec{z} = \vec{m} + e \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z(3|-1|0).$$

Aufgabe 210:

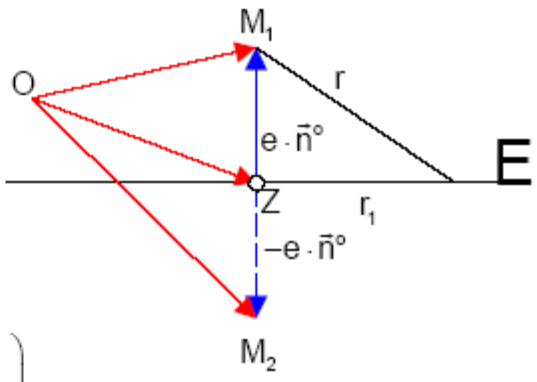
In der Ebene E: $2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 30$ liegt der Punkt $Z(6|5|4)$.
Diese Ebene schneidet eine Kugel K mit Radius 12 so, daß Z der Mittelpunkt des Schnittkreises wird, der den Radius $\sqrt{95}$ hat.
Berechne den Kugelmittelpunkt.

Lösung:

In der Ebene E: $2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 30$ liegt der Punkt $Z(6|5|4)$.
Diese Ebene schneidet eine Kugel K mit Radius 12 so, daß Z der Mittelpunkt des Schnittkreises wird, der den Radius $\sqrt{95}$ hat.
Berechne den Kugelmittelpunkt.

Berechnung des Abstandes der Ebene E von den Mittelpunkten:

$$e^2 = r^2 - r_1^2 = 144 - 95 = 49$$
$$e = 7$$



Berechnung der Mittelpunkte:

$$\vec{m}_{1,2} = \vec{z} \pm e \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \pm 7 \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$M_1(8|11|1)$, $M_2(4|-1|7)$

Aufgabe 211:

Schneide die Kugel um $M(3|0|-4)$ mit $r = 9$ mit diesen Ebenen:

a) die x_1x_3 – Ebene

b) die x_2x_3 – Ebene

c) $x_1 = 8$

d) $x_2 = -6$

e) $x_1 = -6$

f) $x_3 = 14$!

Lösung:

Schneide die Kugel um $M(3|0|-4)$ mit $r = 9$ mit diesen Ebenen:

a) die x_1x_3 – Ebene

K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]^2=81$ E: $x_2=0$

eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]^2=81 \Leftrightarrow (x_1-3)^2+(x_3+4)^2=81$

Schnittkreis: $\begin{cases}(x_1-3)^2+(x_3+4)^2=81\\ x_2=0\end{cases}$ Mittelpunkt $Z(3|0|-4);\ r=9$

b) die x_2x_3 – Ebene: $x_1 = 0$:

eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix}0\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]^2=81 \Leftrightarrow 9+x_2^2+(x_3+4)^2=81$

Schnittkreis: $\begin{cases}x_2^2+(x_3+4)^2=72\\ x_1=0\end{cases}$ Mittelpunkt $Z(0|0|-4);\ r=\sqrt{72}$

c) $x_1 = 8$ eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix}8\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]^2=81 \Leftrightarrow 25+x_2^2+(x_3+4)^2=81$

Schnittkreis: $\begin{cases}x_2^2+(x_3+4)^2=56\\ x_1=8\end{cases}$ Mittelpunkt $Z(8|0|-4);\ r=\sqrt{56}$

d) $x_2 = -6$ eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix}x_1\\-6\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]^2=81 \Leftrightarrow 36+(x_1-3)^2+(x_3+4)^2=81$

Schnittkreis: $\begin{cases}(x_1-3)^2+(x_3+4)^2=45\\ x_2=-6\end{cases}$ Mittelpunkt $Z(3|-6|-4);\ r=-6$

e) $x_1 = -6$ eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix}-6\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]^2=81 \Leftrightarrow 81+x_2^2+(x_3+4)^2=81$

Schnittkreis: $\begin{cases} x_2^2 + (x_3 + 4)^2 = 0 \\ x_1 = -6 \end{cases}$

Da der sogenannte Schnittkreis nur noch den Radius 0 hat, besteht er nur aus dem Mittelpunkt $Z(-6|0|-4)$. Die Ebene E: $x_1 = -6$ berührt also die Kugel.

f) $x_3 = 14$ eingesetzt: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right]^2 = 81 \Leftrightarrow 196 + x_2^2 + (x_3 + 4)^2 = 81$

Dies ergibt die unerfüllbare Gleichung $x_2^2 + (x_3 + 4)^2 = --115$.

Die Ebene E: $x_3 = 14$ ist eine Passante zur Kugel.

Aufgabe 212:

Gegeben ist die Kugel K durch $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\4\\12\end{pmatrix}\right]^2=64$

Gib die Gleichungen aller 6 Tangentialebenen an, die zu einer der drei Koordinatenebenen parallel sind und deren Berührpunkte.

Lösung:

Gegeben ist die Kugel K durch $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\4\\12\end{pmatrix}\right]^2=64$

Gib die Gleichungen aller 6 Tangentialebenen an, die zu einer der drei Koordinatenebenen parallel sind und deren Berührpunkte.

Der Kugelmittelpunkt ist M(-3|4|2) und der Kugelradius ist 8.

Die Abbildung zeigt dem Kugelmittelpunkt ohne Achsenkreuz und die 6 Tangentialebenen samt Berührpunkten..

Tangentialebenen parallel zur x_2x_3-Ebene:

$B_{11}(\underbrace{-3+8}_{5}|4|2)$ – M(–3|4|2) – $B_{12}(\underbrace{-3-8}_{-11}|4|2)$

T_{11}: $x_1 = 5$ und T_{12}: $x_1 = -11$

Tangentialebenen parallel zur x_1x_3-Ebene:

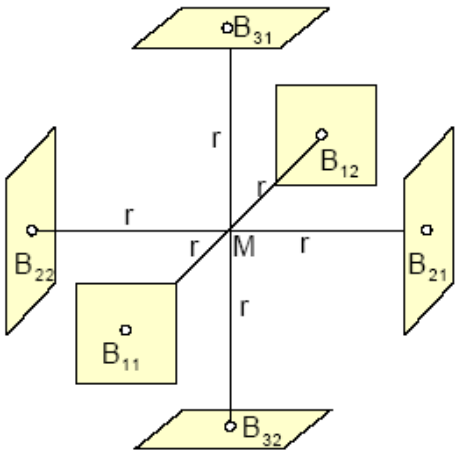
$B_{21}(-3|\underbrace{4+8}_{12}|2)$ – M(–3|4|2) – $B_{22}(-3|\underbrace{4-8}_{-4}|2)$

T_{21}: $x_2 = 12$ und T_{22}: $x_2 = -4$

Tangentialebenen parallel zur x_1x_2-Ebene:

$B_{31}(-3|4|\underbrace{2+8}_{10})$ – M(–3|4|2) – $B_{32}(-3|4|\underbrace{2-8}_{-6})$

T_{31}: $x_3 = 10$ und T_{32}: $x_3 = --6$.



Aufgabe 213:

Durch die Punkte A(1|-2|3) und B(2|-6|5) wird eine Gerade g festgelegt.

Die Gleichung $2tx_1 - tx_2 + x_3 = -2$ beschreibt für jedes $t \in R$ die Ebene E_t. Es gibt einen Wert t, für den die Gerade g die Ebene E_t in der x_2x_3-Ebene durchstößt.

a) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt und den zugehörigen Wert von t.

b) Die Punkte P_1 und P_2liegen auf der Geraden g und haben vom Punkt Q(0|2|1) den Abstand $3\sqrt{21}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

Lösung:

a)

Die Gleichung der Gerade g lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Da der gesuchte Schnittpunkt in der x_2x_3-Ebene liegen soll, wird zunächst der Punkt auf g ermittelt, der in dieser Ebene liegt.
Bedingung: $x_1 = 0 \Rightarrow 1 + r = 0 \Rightarrow r = -1$.

Der Punkt auf g, der in der x_2x_3-Ebene liegt, lautet P(0/2/1) (r = -1 in g einsetzen)

Nun muss der Parameter t der Ebene E_t so gewählt werden, dass der Punkt P(0/2/1) auf der Ebene liegt.
Einsetzen des Punktes P in die Ebene ergibt: $2t \cdot 0 - t \cdot 2 + 1 = -2 \Rightarrow -2t = -3 \Rightarrow t = 1{,}5$

Der Durchstoßpunkt ist der Punkt P.

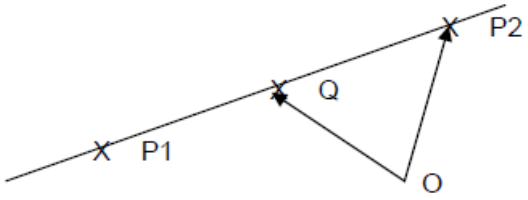
b)

Aus Aufgabe 2.2.1: Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Länge des Richtungsvektors von g beträgt $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

Die Punkte P1 und P2 sind somit 3 Richtungsvektorlängen vom Geradenpunkt Q entfernt.

Um die Koordinaten von P1 und P2 zu bestimmen, werden die Ortsvektoren der Punkte berechnet.



Berechnung von P2: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OQ} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$ also P2(3/-10/7)

Berechnung von P1: $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$ also P1(-3/14/-5)

Aufgabe 214:

Gegeben sind die beiden Punkte A(3|5|4) und A*(1|-1|0). Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, die zu A und A* symmetrisch liegt.

Lösung:

Die gesuchte Ebene E liegt orthogonal zur Verbindungslinie AA^* und geht durch deren Mittelpunkt M.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M(2/2/2)$$

Der NV der Ebene ist $\vec{n} = \overrightarrow{AA^*} = \vec{a}^* - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Mit der Normalenform der Ebene $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot \vec{n} = 0$ folgt
$E: -2x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -24$ oder nach kürzen
$E: x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

Aufgabe 215:

Im Anschauungsraum sind die Punkte A(0|0|-1), B($3\sqrt{3}$|3|-1), C(0|6|-1) und D($\sqrt{3}$|3|5) gegeben.

Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte einer Pyramide mit dem gleichseitigen Dreieck ABC als Grundfläche.

a) Zeigen Sie, dass die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen hat.

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. $\left(V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h\right)$

c) Bestimmen Sie den Punkt, der von allen vier Ecken der Pyramide gleich weit entfernt

Lösung:

a)

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei der drei Dreiecksseiten die gleiche Länge besitzen.

Es gilt $\overline{AC} = 6$.
Da das Dreieck ABC gemäß der Aufgabenstellung gleichseitig ist, gilt $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 6$.

Für die Länge der Seitenkanten gilt:

$$\overline{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3+9+36} = \sqrt{48}$$

$$\overline{BD} = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12+0+36} = \sqrt{48}$$

$$\overline{CD} = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3+9+36} = \sqrt{48}$$

Damit sind alle drei Seitenkanten der Pyramide gleich lang und die Seitendreiecks sind alle gleichschenklig.

b)

Für das Volumen einer Pyramide gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Die Grundfläche ist das gleichseitige Dreieck ABC mit der Kantenlänge 6.

Für die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks gilt: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, also $G = A = \frac{36}{4}\sqrt{3} = 9 \cdot \sqrt{3}$

Die Höhe der Pyramide beträgt h = 6.
(Begründung: Die Grundfläche ABC liegt auf der Höhe $x_3 = -1$ (da alle Punkte ABC diese x_3-Koordinate besitzen).
Der Punkt D besitzt die x_3-Koordinate 5, somit ist der senkrechte Abstand von der Grundfläche bis zur Spitze D gleich 6.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 = 18 \cdot \sqrt{3}$$

c)

Der Punkt D hat von allen Punkten A, B und C den gleichen Abstand , wie in Teilaufgabe 2.2 bereits gezeigt wurde.

Die Menge aller Punkte, die von A, B und C gleich weit entfernt liegt, liegen auf einer Gerade, die den Punkt D enthält und orthogonal auf der Grundfläche ABC steht.

Die Gleichung dieser Gerade lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein allgemeiner Punkt auf g lautet $P(\sqrt{3} / 3 / 5 + r)$.

Damit der Punkt P von A, B, C und D die gleiche Entfernung hat, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\overline{PA} = \overline{PD}$$

Es gilt $\overline{PA} = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \\ -6 - r \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3 + 9 + (-6 - r)^2} = \sqrt{12 + 36 + 12r + r^2} = \sqrt{r^2 + 12r + 48}$

und $\overline{PD} = \left|\overrightarrow{PD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2}$

Es muss also gelten: $\sqrt{r^2 + 12r + 48} = \sqrt{r^2}$
$\Rightarrow r^2 + 12r + 48 = r^2 \Rightarrow 12r = -48 \Rightarrow r = -4$

Somit lautet der gesuchte Punkt $P(\sqrt{3} / 3 / 1)$.

Aufgabe 216:

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad E: \quad 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7$$

Prüfen Sie nach, ob der Punkt $A(1|5|-1)$ auf der Gerade g liegt.

Zeigen Sie: Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.

Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat. (4 VP)

Lösung:

Überprüfung, ob A auf g liegt

Dazu setzt man die Koordinaten von $A(1|5|-1)$ in die Gleichung von g ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcll} 1 & = & 2 & + & t & (1) \\ 5 & = & 3 & - & 2t & (2) \\ -1 & = & & & t & (3) \end{array} \right.$$

Aus Gleichung (3) folgt sofort $t = -1$. Mit diesem Wert für t sind die Gleichungen (1) und (2) ebenfalls erfüllt, wie man leicht durch Einsetzen nachprüft.

Daraus folgt, dass der Punkt A auf der Gerade g liegt.

Beweis, dass g orthogonal zu E ist

Für den Richtungsvektor $\vec{u}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Gerade g

und den Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Ebene E gilt offenbar

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad 2 \cdot \vec{u}_g = \vec{n}_E$$

Diese Vektoren sind also linear abhängig (sie sind Vielfache voneinander).

Daher ist g orthogonal zu E.

Punkt P auf E mit kleinstem Abstand zu A

Der gesuchte Punkt P liegt auf derjenigen Gerade durch den Punkt A, die orthogonal zu E ist. Dies ist die Gerade g, wie durch die vorangehenden Aufgabenteile hervorgeht. Zur Bestimmung des Punktes P muss man also lediglich die Gerade g mit der Ebene E schneiden. Dazu werden die Koordinaten

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 2 & + & t \\ x_2 & = & 3 & - & 2t \\ x_3 & = & & & t \end{array}$$

der Gerade g in die Ebenengleichung $E:\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7$ eingesetzt:

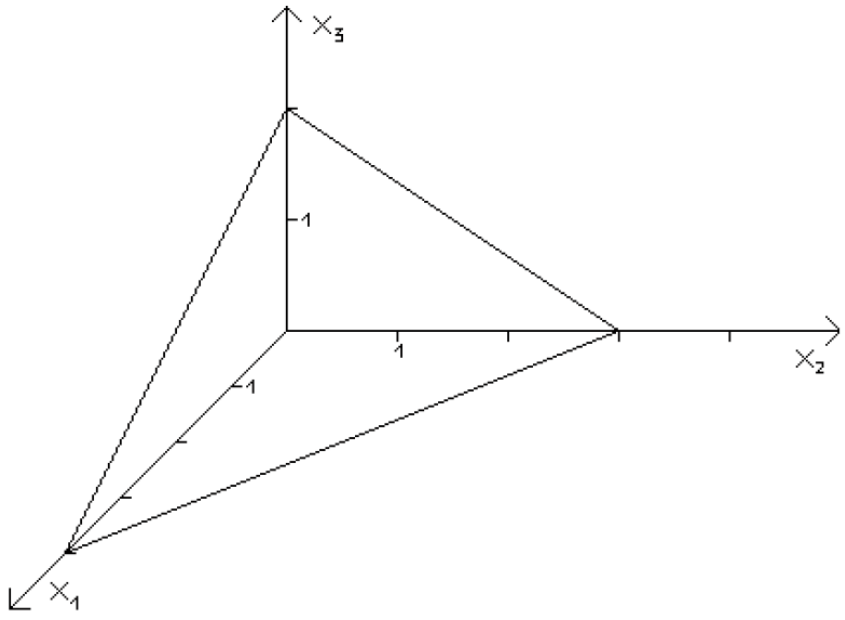
$$\begin{array}{rcll} 2\cdot(2+t) - 4\cdot(3-2t) + 2\cdot t & = & 7 & \\ 4 + 2t - 12 + 8t + 2t & = & 7 & \\ 12t - 8 & = & 7 & \mid +8 \\ 12t & = & 15 & \mid :12 \\ t & = & \frac{15}{12} & \\ \Longrightarrow\quad t & = & \frac{5}{4} & \end{array}$$

Setzt man diesen Wert für t wieder in g ein, dann erhält man

$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad P(\frac{13}{4}|\frac{1}{2}|\frac{5}{4}) \end{array}$$

Aufgabe 217:

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der dargestellten Ebene. (3 VP)



Lösung:

1.Möglichkeit – über die Parameterform

Die Ebene geht durch die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen)

$$A(4|0|0) \quad , \quad B(0|3|0) \quad , \quad C(0|0|2)$$

wie man aus der Zeichnung abliest.
Mit den Richtungsvektoren

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad \overrightarrow{AC} &= \vec{c}-\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhält man mit dem Aufpunkt A die Parameterform

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 &=& 4 &-& 4s &-& 4t \quad (1) \\ x_2 &=& & & 3s & & \quad (2) \\ x_3 &=& & & & 2t & \quad (3) \end{array} \right.$$

Nun elimiert man z.B. den Parameter s aus den Gleichungen (1) und (2) durch Additionsverfahren.
Mit $3 \cdot (1) + 4 \cdot (2)$ erhält man

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 12 - 12t \quad (4) \\ x_3 &= 2t \quad (3) \end{aligned}$$

2006 by Rainer Müller - **http://www.eMath.de**

Aus $(4) + 6 \cdot (3)$ folgt schließlich eine parameterfreie Gleichung, also die gesuchte Koordinatengleichung

$$E: \quad 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$$

2.Möglichkeit – über die Koordinatenabschnittsform

Hat eine Ebene die Spurpunkte $A(a|0|0)$, $B(0|b|0)$, $C(0|0|c)$ mit $a, b, c \neq 0$, dann hat die Koordinatengleichung die Koordinatenabschnittsform

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$$

wie man jeweils durch Einsetzen der Koordinaten von A, B und C leicht einsieht.

Im vorliegenden Fall erhält man mit $a = 4$, $b = 3$ und $c = 2$ die Gleichung

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1 \quad | \cdot 12$$

$$\Longrightarrow \quad E: \quad 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$$

Aufgabe 218:

Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}$ die Geradenschar

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} \quad ; \, t \in \mathbb{R}$$

sowie die Ebene $E: \; -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$.

Zeigen Sie, dass jede Gerade der Schar g_a in der Ebene E liegt.

Lösung:

Durch Einsetzen der Koordinaten von g_a, also von

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 1 + t \cdot (1-a) \\ x_3 = 1 + t \cdot a \end{cases}$$

in die Koordinatengleichung von E erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} -(1+2t) + 2 \cdot \big(1 + t \cdot (1-a)\big) + 2 \cdot (1 + ta) &= 3 \\ -1 - 2t + 2 + 2t \cdot (1-a) + 2 + 2ta &= 3 \\ -1 - 2t + 2 + 2t - 2ta + 2 + 2ta &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Daher liegt jeder Punkt jeder Geraden g_a in der Ebene E.

Aufgabe 219:

Gegeben sind die Punkte

$$A(3|-1|2) \;, \quad B(-4|2|4) \;, \quad C(-2|1|0)$$

Zeigen Sie, dass diese drei Punkte nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen und ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die diese drei Punkte enthält. (4 VP)

Lösung:

Die gesuchte Ebene E hat z.B. die Richtungsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad \vec{v} &= \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus diesen Vektoren ermittelt man einen Normalenvektor der Ebene E,
z.B. mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) & - & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-5) & - & (-7) \cdot (-2) \\ -7 \cdot 2 & - & 3 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -24 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{o}$ nicht den Nullvektor $\vec{o}$ ergibt, sind die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ linear unabhängig; genau dann liegen aber die drei Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden.

Für einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene erhält man zudem $\vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Mit $A(3|-1|2) \in E$ und der Normalform $\vec{n} \bullet \left[\vec{x} - \vec{a}\right] = 0$ erhält man so eine Koordinatengleichung von E:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] &= 0 \\ 10x_1 + 24x_2 - x_3 - \left(10 \cdot 3 + 24 \cdot (-1) - 1 \cdot 2\right) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad E: \quad 10x_1 + 24x_2 - x_3 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 220:

Gegeben sind die beiden Ebenen E und F durch

$$\begin{aligned} E: \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -9 \\ \text{und} \quad F: \quad & \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \; s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bestimmen sie eine Gleichung der Schnittgerade s dieser beiden Ebenen.

Lösung:

Durch Einsetzen der Koordinaten von

$$F: \quad \begin{cases} x_1 &= 1 &+ 2s &+ t \\ x_2 &= &- s &- 2t \\ x_3 &= 3 &+ s &+ 2t \end{cases}$$

in die Koordinatengleichung von E erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 3\cdot(1+2s+t)-(-s-2t)+2\cdot(3+s+2t) &= -9 \\ 3+6s+3t+s+2t+6+2s+4t &= -9 \\ 9+9s+9t &= -9 \quad |-9 \\ 9s+9t &= -18 \quad |:9 \\ s+t &= -2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird nach t (oder nach s) aufgelöst und in F eingesetzt.
Mit $t=-2-s$ in F erhält man die Schnittgerade s:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + (-2-s)\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad s: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad ;\ s\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Aufgabe 221:

Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad ;\ s,t\in\mathbb{R}$$

und $\quad F: \quad x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$

Wie liegen diese Ebenen zueinander? Bestimmen Sie ihren Abstand.

Lösung:

Lagebeziehung der Ebenen

Die Richtungsvektoren der Ebene E sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene F ist $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mit dem Skalarprodukt erhält man

$$\vec{u} \bullet \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\vec{v} \bullet \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 1 + 1 - 2 = 0$$

Daher ist $\vec{n}_F$ auch ein Normalenvektor der Ebene E: die Ebenen sind daher parallel.

Abstand

Der Abstand der gegebenen parallelen Ebenen wird mit Hilfe der Hesseschen Normalform (HNF) der Ebene F bestimmt.
Der Normalenvektor $\vec{n}_F$ hat die Länge

$$|\vec{n}_F| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Damit erhält man eine

$$\text{HNF von } F: \quad \frac{x_1 - x_2 + x_3 + 1}{\sqrt{3}} = 0 \qquad (*)$$

Der Abstand der Ebene E von der zu ihr parallelen Ebene F entspricht dem Abstand irgendeines Punktes von E zu F.
Man wählt z.B. den Punkt $A(1|2|3) \in E$ und erhält durch Einsetzen seiner Koordinaten in die HNF $(*)$

$$d = d(E,F) = d(A,F) = \frac{|1 - 2 + 3 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Ergebnis: Die Ebenen haben den Abstand $d = \sqrt{3}$ voneinander.

Aufgabe 222:

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E durch

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \; r \in \mathbb{R}$$

$$\text{und} \qquad E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \; s, t \in \mathbb{R}$$

a) Geben sie eine Koordinatengleichung (oder Normalform) der Ebene E an.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E.

c) Geben Sie eine Gleichung derjenigen Ebene F an, welche die Gerade g enthält und orthogonal zur Ebene E ist (Parameterform oder Koordinatengleichung). (6 VP)

Lösung:

a) Das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

der Ebene E ergibt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) & - & 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 & - & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 & - & 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E erhält man also z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Mit $A(3|1|1) \in E$ und der Normalform $\vec{n} \bullet \left[\vec{x} - \vec{a}\right] = 0$ erhält man so eine Koordinatengleichung von E:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - \left(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1\right) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad E: \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3 &= 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

b) Dazu werden die Koordinaten von

$$g: \quad \left\{ \begin{array}{lcrcll} x_1 & = & 2 & - & r & (1) \\ x_2 & = & -1 & + & 3r & (2) \\ x_3 & = & 3 & + & 4r & (3) \end{array} \right.$$

in die Koordinatengleichung $(*)$ von E eingesetzt. Man erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} 2 - r - 2 \cdot (-1 + 3r) + 2 \cdot (3 + 4r) - 3 &= 0 \\ 2 - r + 2 - 6r + 6 + 8r - 3 &= 0 \quad | -7 \\ r &= -7 \end{aligned}$$

Setzt man $r = -7$ wieder in die Koordinaten (1), (2) und (3) von g ein, dann ergibt sich der

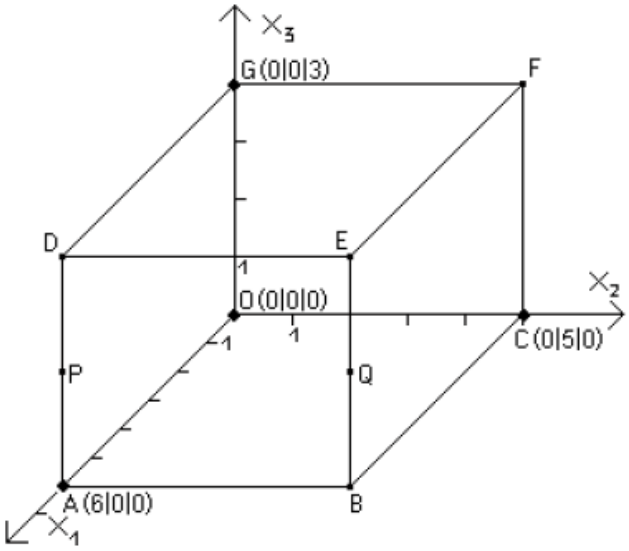
$$\text{Schnittpunkt} \quad S(9|-22|-25)$$

Die Ebene F enthält g und hat als weiteren Richtungsvektor den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E.
Man erhält damit sofort eine Parameterform für die gesuchte Ebene

$$F: \quad \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{g} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{n}} \quad ; \; r, s \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 223:

In der folgenden Abbildung ist ein Quader abgebildet.
Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. BE.



a) Begründen Sie durch geometrische Überlegungen, welche Lage die Geraden $g = (GQ)$ und $h = (FP)$ zueinander haben.

b) Geben Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Ebene E an, die durch die Punkte B, C und Q verläuft. (3 VP)

Lösung:

a) Die Vektoren $\overrightarrow{GF}$ und $\overrightarrow{PQ}$ sind gleichlang, denn es gilt $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diese Vektoren sind auch jeweils senkrecht zur x_1x_3-Koordinatenebene $x_2 = 0$.
Das Viereck $FGPQ$ ist daher ein Rechteck.

Also schneiden sich die Geraden $g = (GQ)$ und $h = (FP)$,
denn sie sind die Diagonalen dieses Rechtecks.

b) Die Punkte B, C und Q haben jeweils die x_2-Koordinate $x_2 = 5$.
Daher liegen diese Punkte in der Ebene

$$E: \quad x_2 = 5$$

Aufgabe 224:

Gegeben sind die vier Ebenen E, F, G und H durch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{rrcl} E: & 3x_1 - 4x_3 & = & 0 \\ F: & 3x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 2 \\ G: & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \end{array}$$

$$\text{sowie} \quad H: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad ; \; s, t \in \mathbb{R}$$

a) Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem?

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade s der Ebenen F und G.

c) Welche besondere Lage haben die Ebenen G und H zueinander?

Wie kann man die rechte Seite der Ebene H zu einer Ebene H' abändern, damit G und H' identische Ebenen werden?

Lösung:

zu a) Der Normalenvektor der Ebene E ist der Vektor

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist wegen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der x_2-Achse.
Außerdem liegt der Ursprung $O(0|0|0)$ auf der Ebene E.
Daher liegt die x_2-Achse in dieser Ebene.

zu b) Durch Subtraktion der Ebenengleichungen von

$$\begin{array}{lrcrcrcll} F: & 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 2 & \text{und} \\ G: & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 & \end{array}$$

erhält man

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 - 6x_2 & = & -2 & |+6x_2 \\ 2x_1 & = & -2+6x_2 & |:2 \\ x_1 & = & -1+3x_2 & \end{array}$$

Einsetzen von $x_1 = -1+3x_2$ in die Ebene $G:\ x_1+2x_2+x_3=4$ führt auf

$$\begin{array}{rcll} -1+3x_2+2x_2+x_3 & = & 4 & |+1-5x_2 \\ x_3 & = & 5-5x_2 & \end{array}$$

Wählt man $x_2 = r \in \mathbb{R}$, dann erhält man die Schnittgerade s mit

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x_1 & = & -1 & + & 3r & \\ x_2 & = & & & r & \\ x_3 & = & 5 & - & 5r & \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad s: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ;\ r \in \mathbb{R}$$

zu c) Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

der Ebene H mit dem Normalenvektor $\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene G liefert jeweils

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{n}_G = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{n}_G = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-6) \cdot 1 = 4 + 2 - 6 = 0$$

Daher sind die Ebenen G und H parallel.

Der Punkt $P(4|0|0)$ liegt auf der Ebene G.
Daher beschreibt

$$H' : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad ; \; s, t \in \mathbb{R}$$

eine Ebene, die mit G identisch ist.

Aufgabe 225:

Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Gerade

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass die gesamte Geradenschar in der Ebene

$$E : \; -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

liegt.

Lösung:

Zu zeigen ist, dass die Koordinatengleichung von E für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Dazu werden die Koordinaten von g_a in E eingesetzt:

$$\begin{aligned} -(1 + 2t) + 2\big(1 + t \cdot (1 - a)\big) + 2 \cdot (1 + ta) - 3 &= 0 \\ -1 - 2t + 2 + 2t - 2at + 2 + 2ta - 3 &= 0 \\ 3 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Daher liegt jeder Punkt jeder Geraden g_a in der Ebene E, also liegt die gesamte Geradenschar in E.

Aufgabe 226:

Die Gerade g geht durch die Punkte $A(5|3|2)$ und $B(3|-1|2)$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x_1x_3-Ebene.

Begründen Sie, dass S zwischen A und B liegt.

Lösung:

Zur Ermittlung des Schnittpunktes S mit der x_1x_3-Koordinatenebene $x_2 = 0$ werden die Koordinaten der Gerade $g = (AB)$ in die Koordinatenebene eingesetzt.
Das liefert den Wert für den Parameter aus der Parameterform der Gerade, mit dem man den Schnittpunkt S berechnen kann und mit dem man auch nachweisen kann, dass dieser Punkt zwischen den Punkten A und B liegt.

Die Gerade $g = (AB)$ hat den Richtungsvektor

$$\vec{u} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Aufpunkt $A(5|3|2)$ erhält man für g die Parameterform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$$

Setzt man nun die x_2-Koordinate von g in $x_2 = 0$ ein, dann ergibt sich

$$\begin{array}{rrcl} & 3 - 4s & = & 0 \quad | + 4s \\ & 4s & = & 3 \quad | : 4 \\ \Longrightarrow & s & = & \frac{3}{4} \end{array}$$

In g eingesetzt erhält man

$$\vec{x} = \vec{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit den Schnittpunkt $S(\frac{7}{2}|0|2)$.

Da für die Parameterwerte $s \in [0;1]$ von g genau die Punkte zwischen A und B durchlaufen werden (je einschließlich) und $s = \frac{3}{4} \in [0;1]$ gilt, liegt S zwischen A und B.

Aufgabe 227:

Gegeben sind die Ebenen E und F mit

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$F: \quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \,.$$

Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind.

Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen.

Lösung:

Um zu zeigen, dass die Ebenen E und F parallel sind, genügt es zu zeigen, dass die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Ebene E zum Normalenvektor $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Ebene F orthogonal sind.
Dies wird mit dem Skalarprodukt nachgewiesen, denn zwei Vektoren sind genau dann orthogonal zueinander, wenn deren Skalarprodukt den Wert 0 ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \quad : \text{orthogonal}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 0 \quad : \text{orthogonal}$$

Damit ist die Parallelität der Ebenen E und F nachgewiesen.

Um den Abstand der Ebenen zu bestimmen, setzt man einen Punkt der einen Ebene in eine Hessesche Normalform (HNF) der anderen Ebene ein und nimmt den Betrag davon.
Am besten bestimmt man dazu eine HNF der Ebene F, denn diese liegt bereits in Normalform vor:

$$F: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - \left(2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)\right) = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - 8 = 0 \qquad (*)$$

Dazu wird die Länge des Normalenvektors $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, also
$|\vec{n}_F| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ bestimmt und die Gleichung $(*)$ damit dividiert:

$$\frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 8}{3} = 0$$

Setzt man nun den Stützpunkt $P(1|1|0)$ aus der Ebenengleichung von E ein und nimmt den Betrag davon, dann erhält man den Abstand der Ebenen E und F zu

$$d(E;F) = d(P;F) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 0 - 8|}{3}$$

$$= \frac{|-4|}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad d(E;F) = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 228:

Die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt.

Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein 80 m hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene.
(1 LE entspricht 10 m)

a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.

Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.

Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.

Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.

(6 VP)

b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.

Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.

(3 VP)

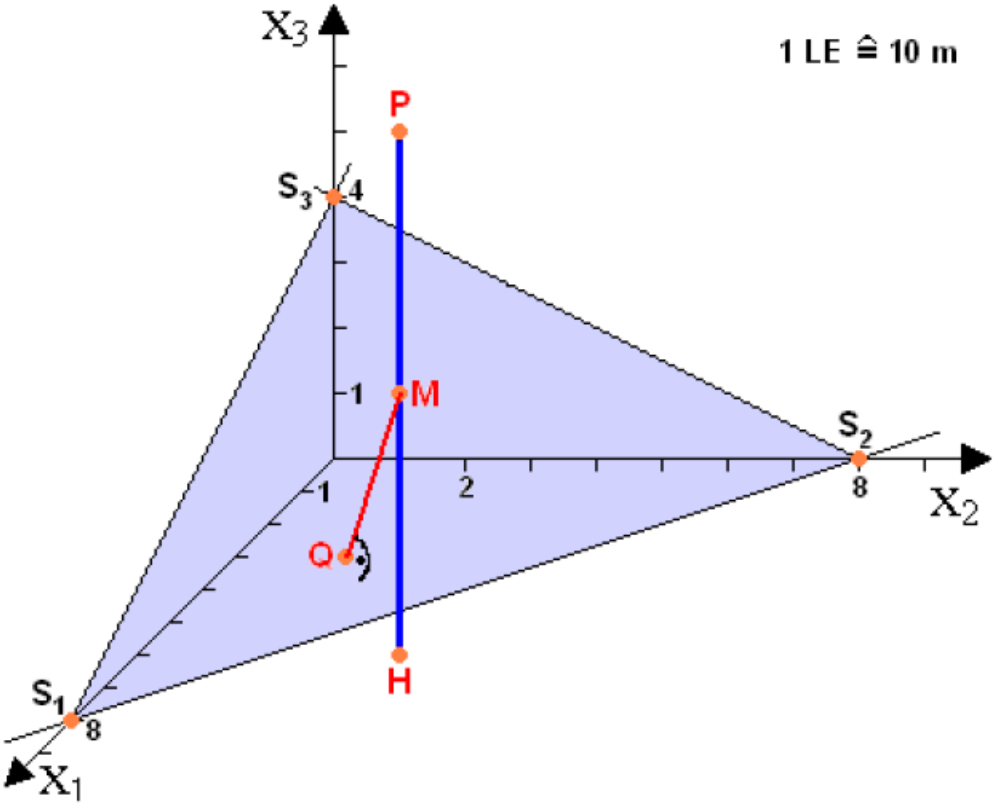
c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6|4|k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4|0|2)$.

Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist. (3 VP)

Lösung:

Die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt.
Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein 80 m hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene.
(1 LE entspricht 10 m)

a) Darstellung von Hang und Sendemast in einem Koordinatensystem



Neigungswinkel α des Hangs

Der Neigungswinkel α des Hangs entspricht dem Winkel, den die Ebene E und die x_1x_2-Ebene $x_3 = 0$ miteinander einschließen.

Mit dem Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\vec{n}_E| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ der Ebene E

und dem Normalenvektor $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\vec{e}_3| = 1$ der x_1x_2-Ebene erhält man

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \bullet \vec{e}_3|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{e}_3|}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6}\cdot 1} \\
&= \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1|}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{6}} \\
\Longrightarrow \quad \alpha &\approx 35{,}26^\circ
\end{aligned}$$

Koordinaten des Verankerungspunktes Q am Hang

Der 80 m hohe Sendemast beginnt in $H(6|4|0)$. Außerdem entsprechen einer Längeneinheit LE laut Aufgabe 10 m, also entsprechen 80 m Höhe 8 LE in x_3-Richtung.
Daher wird die x_3-Koordinate von H um 8 vergrößert, um den Endpunkt $P(6|4|8)$ des Sendemastes zu erhalten.
Da der Sendemast in halber Höhe verankert wird, entspricht dies dem Mittelpunkt $M(6|4|4)$ von H und P. Damit das Stahlseil mit einem möglichst kurzen Stahlseil verankert wird, ist nun der Lotfußpunkt Q der Mitte M auf die Ebene E gesucht, siehe Skizze oben.

Diesen gesuchten Punkt Q erhält man als Schnittpunkt der Ebene E mit der Lotgeraden (senkrechten/orthogonalen Geraden) g durch M zur Ebene E, also durch Schnitt der Ebene E mit der Geraden durch M, die den Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ der Ebene E als Richtungsvektor hat:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x_1 = 6 + t \\ x_2 = 4 + t \\ x_3 = 4 + 2t \end{cases}$$

Setzt man die Koordinaten von g in $E: x_1 + x_2 + 2x_2 = 8$ ein, dann erhält man

$$\begin{aligned}
6 + t + 4 + t + 2\cdot(4 + 2t) &= 8 \\
6 + t + 4 + t + 8 + 4t &= 8 \\
6t + 18 &= 8 \qquad |-18 \\
6t &= -10 \qquad |:6 \\
t &= -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $t = -\frac{5}{3}$ in die Gleichung von g ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{18}{3}\\\frac{12}{3}\\\frac{12}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\-\frac{5}{3}\\-\frac{10}{3}\end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\\frac{7}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der gesuchte Verankerungspunkt ist damit der Punkt $Q\left(\frac{13}{3}\middle|\frac{7}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$.

Länge d des Stahlseils

Die Länge des Stahlseils MQ entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{MQ}$ bzw. dem Abstand des Punktes M zur Ebene E.

1. Möglichkeit: über die Länge des Vektors $\overrightarrow{MQ}$

Mit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MQ} &= \vec{q} - \vec{m} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{13}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{13}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{18}{3} \\ \frac{12}{3} \\ \frac{12}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

erhält man die Länge d des Stahlseils zu

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{MQ}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{9} + \frac{100}{9}} = \sqrt{\frac{150}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9} \cdot 6} \\ \Longrightarrow \quad d &= \frac{5}{3} \cdot \sqrt{6} \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: über die Hessesche Normalform (HNF) der Ebene E

Den Abstand des Punktes M zur Ebene E erhält man auch durch Einsetzen der Koordinaten von M in die Hessesche Normalform der Ebene E. Dazu wird zunächst die Gleichung $x_1 + x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ der Ebene E durch die Länge $|\vec{n}_E| = \sqrt{6}$ des Normalenvektors geteilt:

$$\text{HNF von } E: \quad \frac{x_1 + x_2 + 2x_3 - 8}{\sqrt{6}} = 0$$

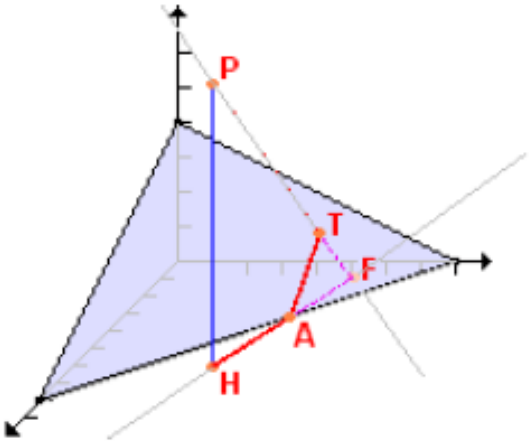
Setzt man hier die Koordinaten von $M(6|4|4)$ ein und nimmt den Betrag davon, dann ergibt sich die Länge des Stahlseils zu

$$\begin{aligned} d &= \frac{|6 + 4 + 2 \cdot 4 - 8|}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{6} \\ \Longrightarrow \quad d &= \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.

Beschreibung, wie man die Gesamtlänge l des Schattens bestimmen kann

Der Schatten des Sendemastes besteht aus zwei geradlinigen Teilen: einem Teil HA in der x_1x_2-Ebene $x_3 = 0$ und einem Teil AT in der Hangebene E, siehe folgende Skizze:



Die Gerade (PT) durch P und T schneidet die x_1x_2-Ebene im Punkt F. Dorthin würde der Schatten fallen, wenn es keinen Hang gäbe. Schneidet man nun noch die Gerade (HF) mit der Hangebene E, dann ergibt sich der Schattenpunkt A, der sich am Anfang des Hangs auf der x_1x_2-Ebene befindet.

Die Länge des Schattens l ergibt sich dann durch

$$l = \overline{HA} + \overline{AT} = |\vec{HA}| + |\vec{AT}|$$

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6|4|k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4|0|2)$.

Bestimmung der Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist

Die Länge des Mastes beträgt 8 LE. Wenn der Mast im Punkt $K(6|4|k)$, also in der Höhe k abknickt, dann bleiben $8 - k$ Längeneinheiten für die Entfernung der Punkte $R(4|0|2)$ und $K(6|4|k)$, also gilt

$$\begin{aligned}
|\vec{RK}| &= 8 - k \\
|\vec{k} - \vec{r}| &= 8 - k \\
\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| &= 8 - k \\
\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ k-2 \end{pmatrix}\right| &= 8 - k \\
\sqrt{2^2 + 4^2 + (k-2)^2} &= 8 - k \qquad |(\ldots)^2 \\
4 + 16 + (k-2)^2 &= (8-k)^2 \\
4 + 16 + k^2 - 4k + 4 &= 64 - 16k + k^2 \qquad | - k^2 + 16k - 24 \\
12k &= 40 \qquad | : 12 \\
k &= \frac{40}{12} = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Beachtet man, dass eine Längeneinheit 10 m enstpricht, dann erhält man, dass der Sendemast in der Höhe $\frac{10}{3} \cdot 10 = \frac{100}{3} \approx 33$ Meter abgeknickt ist.

Aufgabe 229:

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt $A(2|-1|-2)$ und die Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

enthält. (3 VP)

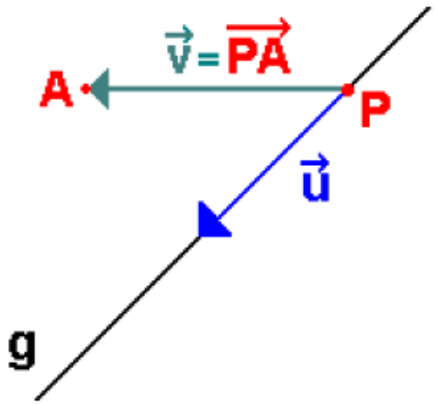
Lösung:

Die Ebene E, welche den Punkt A und die Gerade g enthält, hat z.B. den Aufpunkt $P(3|3|1)$. Der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist gleichzeitig ein Richtungsvektor der gesuchten Ebene. Zudem ist der Vektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{PA} = \vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ebenfalls ein Richtungsvektor der Ebene, siehe folgende Skizze:

Skizze



Für eine Parameterform der Ebene E erhält man daher z.B.

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= g} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{= -\vec{v}} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Nun schreibt man die Parameterform koordinatenweise:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 3t + 3s \qquad (1) \\ x_2 &= 3 \quad\;\; + 4s \qquad (2) \\ x_3 &= 1 + t + 3s \qquad (3) \end{aligned}$$

und eliminiert die Parameter s und t durch Additionsverfahren (eine andere Möglichkeit ist die Bestimmung des Normalenvektors mit Hilfe des Skalarprodukts bzw. über das Kreuzprodukt/Vektorprodukt).

Da der Parameter t in Gleichung (2) bereits fehlt, eliminiert man mittels $(1) + (-3) \cdot (3)$ den Parameter t aus diesen beiden Gleichungen, um eine zweite Gleichung zu erhalten, die ebenfalls nur noch den Parameter s enthält:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 + 4s & (2) \\ x_1 - 3x_3 &= -8s & (4) \end{aligned}$$

Mit $2 \cdot (2) + (4)$ erhält man schließlich eine parameterfreie Darstellung und damit eine Koordinatengleichung der Ebene

$$E: \; x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$

Bemerkung: Es empfiehlt sich, die Probe zu machen, indem man $A(2|-1|-2)$ und $P(3|3|1)$ in die Ebene einsetzt und mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ die Orthogonalität von $\vec{n}$ und $\vec{u}$ durch den Nachweis von $\vec{n} \bullet \vec{u} = 0$ überprüft.

Aufgabe 230:

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt $A(2|-1|-2)$ und die Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{OP}} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

enthält.

Lösung:

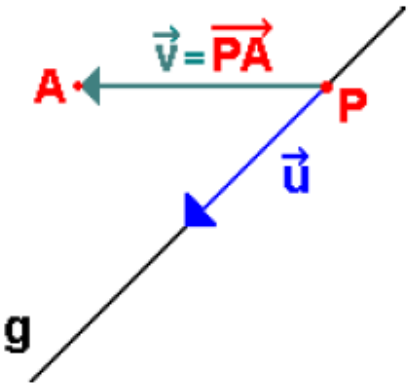
Lösung:

Die Ebene E, welche den Punkt A und die Gerade g enthält, hat z.B. den Aufpunkt $P(3|3|1)$. Der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist gleichzeitig ein Richtungsvektor der gesuchten Ebene. Zudem ist der Vektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{PA} = \vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ebenfalls ein Richtungsvektor der Ebene, siehe folgende Skizze:

Skizze



Für eine Parameterform der Ebene E erhält man daher z.B.

$$E:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}}_{=\,g} + s\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}}_{=\,-\vec{v}}\quad;\ r,s\in\mathbb{R}$$

Nun schreibt man die Parameterform koordinatenweise:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 3t + 3s && (1)\\ x_2 &= 3 \quad\ + 4s && (2)\\ x_3 &= 1 + t + 3s && (3)\end{aligned}$$

und eliminiert die Parameter s und t durch Additionsverfahren (eine andere Möglichkeit ist die Bestimmung des Normalenvektors mit Hilfe des Skalarprodukts bzw. über das Kreuzprodukt/Vektorprodukt).

Da der Parameter t in Gleichung (2) bereits fehlt, eliminiert man mittels $(1) + (-3)\cdot(3)$ den Parameter t aus diesen beiden Gleichungen, um eine zweite Gleichung zu erhalten, die ebenfalls nur noch den Parameter s enthält:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 + 4s && (2)\\ x_1 - 3x_3 &= -8s && (4)\end{aligned}$$

Mit $2\cdot(2) + (4)$ erhält man schließlich eine parameterfreie Darstellung und damit eine Koordinatengleichung der Ebene

$$E:\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$

Bemerkung: Es empfiehlt sich, die Probe zu machen, indem man $A(2|-1|-2)$ und $P(3|3|1)$ in die Ebene einsetzt und mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ die Orthogonalität von $\vec{n}$ und $\vec{u}$ durch den Nachweis von $\vec{n}\bullet\vec{u} = 0$ überprüft.

Aufgabe 231:

Gesucht ist eine Parameterform der Ebene E, in der die Punkte $A(2/1/2)$, $B(0/1/4)$ und $C(4/0/2)$ liegen.

Mögliche Lösung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Liegt der Punkt $D(12/-2/-2)$ ebenfalls in der Ebene?

Berechnen Sie die Spurgerade von E in der x-y-Ebene!

In welchem Winkel geht die Ursprungsgerade, die die Ebene im Punkt $A(2/1/2)$ schneidet, durch die Ebene E?

Geben Sie die zur Ebene E parallele Ebene E_2 an, in der der Ursprung liegt!

Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Ursprung!

Lösung:

Aufgabe 1.4.a)

Verschiebungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Richtungsvektor: $\vec{r}_1 = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor: $\vec{r}_2 = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.4.b)

$$\begin{pmatrix}12\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

1. und 2. Zeile:	I)	$12=2-2r+2s$	
	II)	$-2=1-s$	$s=3$
	s in I)	$12=2-2r+6$	$r=-2$
mit 3.Zeile überprüfen:	r,s in III)	$-2=2-4$ wahre Aussage	

Ergebnis: Punkt D liegt in der Ebene

Aufgabe 1.4.c)

x-y-Ebene ist $E_{xy}: \vec{x}=u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

gleichsetzen mit der Ebenengleichung ergibt folgendes Gleichungssystem:

I)	$u=2-2r+2s$	
II)	$v=1-s$	$s=1-v$
III)	$0=2+2r$	$r=-1$
r in I)	$u=2+2+2s$	
II in I)	$u=4+2(1-v)$	$u=6-2v$

in die Gleichung der x-y-Ebene einsetzen:

$$g_{xy}:(6-2v)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2v\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.d)

Ursprungsgerade durch A: $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\\\2\end{pmatrix}$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \text{wobei } \vec{n}\perp\vec{r}_1 \wedge \vec{n}\perp\vec{r}_2$$

D.h. die Skalarprodukte von Normalenvektor und den Richtungsvektoren müssen = 0 sein.

Gleichungssystem:	I)	$-2x+0y+2z=0$	
	II)	$2x-1y+0z=0$	| gewählt: $y=2$
	I)	$-2x+2z=0$	
	II)	$2x=2$	| $x=1$
	x,y in I)	$-2=-2z$	| $z=1$

Ergebnis: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Schnittwinkel des Richtungsvektors der Geraden mit dem Normalenvektor der Ebene:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{r}_g\cdot\vec{n}}{|\vec{r}_g|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{3\cdot\sqrt{6}}$$

$\alpha = 39{,}2°$

Schnittwinkel ist 90° minus Ergebnis, um den Winkel zwischen Gerade und Ebene zu erhalten:

$\gamma = 90° - 39{,}2° = 50{,}8°$

Aufgabe 1.4.e)

Ohne Verschiebungsvektor wird aus der Ebene eine Ursprungsebene:

$$E_2: \vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.f)

Länge des Normalenvektors berechnen: $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Normieren des Normalenvektors: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand berechnen:

$$|0E| = \vec{n}_0 \cdot \vec{v}_E = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}\ LE$$

Aufgabe 232:

Gesucht ist die Gerade g_1 durch die Punkte $P(2/3/4)$ und $Q(3/3/5)$.

Mögliche Lösung: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Spurpunkt SP der Geraden g_1 mit der x-y-Ebene!

Gibt es einen Spurpunkt SP_2 der Geraden g_1 mit der x-z-Ebene?

Gegeben sind die Punkte $A(4/-2/5)$, $B(1/0/7)$ und $C(4/0/1)$. Wie lautet die Ebene E_1, in der die Punkte A, B und C liegen?

Mögliche Lösung: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, daß Punkt $R(1/2/3)$ in der Ebene liegt!

Die Punkte A, B und C geben drei Ecken eines Parallelogramms an. Bestimmen Sie den Punkt D, der die vierte Ecke bildet!

Wie lautet die Spurgerade SG in der x-z-Ebene der Ebene E_1?

Welchen Abstand hat die Ebene E_1 vom Punkt $S(3/4/4)$?

Bestimmen Sie die Lage von Ebene E_1 zur Geraden g_1. Falls ein Durchdringungspunkt existiert, geben Sie diesen und zusätzlich den Schnittwinkel an!

Wie lautet eine Parameterform einer Geraden g_2, die E_1 rechtwinklig im Punkt $T(4/1/-1)$ schneidet?

Lösung:

Aufgabe 2.4.a)

allgemeine Geradengleichung ist $g\colon \vec{x} = \vec{v} + t\,\vec{r}$

Verschiebungsvektor ist $\vec{v} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor ist $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.b)

x-y Ebene: $E_{xy}\colon \vec{x} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Gerade g_1 gleichsetzen ergibt

I) $u = 2 + t$

II) $v = 3$

III) $0 = 4 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = -4$

t in die Geradengleichung einsetzen:

$$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $SP(-2/3/0)$

Aufgabe 2.4.c)

x-z Ebene: E_{xz}: $\vec{x} = u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit Gerade g_1 gleichsetzen ergibt

I) $u = 2 + t$

II) $0 = 3$ $\rightarrow$ falsche Aussage, dh. keine Lösung

III) $v = 4 + t$

Ergebnis: es gibt keinen Spurpunkt auf der x-z Ebene

Aufgabe 2.4.d)

allgemeine Ebenengleichung ist g: $\vec{x} = \vec{v} + s\vec{r}_1 + t\vec{r}_2$

Verschiebungsvektor ist $\vec{v} = \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$

1. Richtungsvektor ist $\vec{r}_1 = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor ist $\vec{r}_2 = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$

Lösung: E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.e)

Punkt in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

ergibt das Gleichungssystem:

I) $1=4-3s \quad \Leftrightarrow \quad s=1$

II) $2=-2+2s+2t$

III) $3=5+2s-4t$

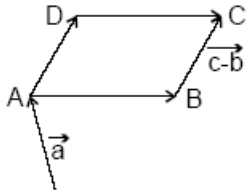
s in II) eingesetzt ergibt: $t=1$

s, t in III) eingesetzt ergibt: $3=3$,dh. wahre Aussage, Lösung ist auch für III) richtig

Lösung: Die Ebenengleichung ergibt für $s=1$ und $t=1$ den Punkt R.

Aufgabe 2.4.f)

Skizze:



Ortsvektor $\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$ ergibt den Punkt D(7/-2/-1)

Aufgabe 2.4.g)

y-z Ebene: E_{yz}: $\vec{x}=u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;mit der Ebenengleichung E_1 gleichsetzen:

$$u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

I) $0=4-3s \quad \Leftrightarrow \quad s=\frac{4}{3}$

II) $u=-2+2s+2t$

III) $v=5+2s-4t$

$2\cdot\text{II})+\text{III}) \quad 2u+v=1+8 \quad \Leftrightarrow \quad v=9-2u$

Zwischenlösung in die Ebenengleichung E_{yz} einsetzen:

$$\vec{x}=u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(9-2u)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-2u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Spurgerade SG: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.h)

Bildung des Normalenvektors der Ebene E_1:

I) $-3x+2y+2z=0$ wähle $x=1$

II) $2y-4z=0$

I) $2y+2z=3$

II) $2y-4z=0$

I)−II) $6z=3 \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{1}{2}$

z in II) $2y=2 \quad \Leftrightarrow \quad y=1$

Normalenvektor von E_1 ist: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1/2\end{pmatrix}$ strecke mit Faktor 2 : $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Bildung der Normalenform der Ebenengleichung E_1:

$E_1: \quad \vec{x}\bullet\vec{n}=\vec{v}\bullet\vec{n}$

$$\vec{x}\bullet\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\bullet\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=4\cdot 2-2\cdot 2+5\cdot 1=9$$

Bestimmung der Länge des Normalenvektors: $|\vec{n}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$$

Bildung der Hesseschen Normalenform: $0=\frac{\vec{x}\bullet\vec{n}+\vec{v}\bullet\vec{n}}{|\vec{n}|}$

$$0=\frac{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+9}{3}$$

Berechnung des Abstandes zum Punkt S; dazu die Koordinaten von S für $\vec{x}$ einsetzen:

$$|SE_1|=\frac{\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+9}{3}=\frac{6+8+4\ +9}{3}=\frac{27}{3}=9\,LE$$

Der Abstand der Ebene E_1 zum Punkt S beträgt d=9 LE

Aufgabe 2.4.i)

Die Ebenen- und die Geradengleichung gleichsetzen: $E_1 = g_1$

$$\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & 4-3s & =2+k \quad |-4-k \\ \text{II)} & -2+2s+2t=3 & |+2 \\ \text{III)} & 5+2s-4t=4+k & |-5-k \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & -3s & -k=-2 \\ \text{II)} & 2s+2t & =5 \\ \text{III)} & 2s-4t-k=-1 & |2\cdot\text{II)}+\text{III)}=\text{III)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & -3s & -k=-2 \\ \text{II)} & 2s+2t & =5 \\ \text{III)} & 6s & -k=9 \quad |2\cdot\text{I)}+\text{III)}=\text{I)} \end{array}$$

$$\text{I)} \quad -3k=5 \quad \Leftrightarrow \quad k=-\frac{5}{3}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II)} & 2s+2t & =5 \\ \text{III)} & 6s & -k=9 \end{array}$$

Lösung $t=-\frac{5}{3}$ in g_1 einsetzen ergibt $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\9\\12\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\9\\7\end{pmatrix}$

Der Durchdringungspunkt ist $SP\left(\frac{1}{3}/3/\frac{7}{3}\right)$

Der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden berechnen und das Ergebnis von 90° subtrahieren:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}\bullet\vec{r}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{2\cdot1+2\cdot0+1\cdot1}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi=arc\ \cos\frac{1}{\sqrt{2}}=45°$$

Das ist der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und der Geraden. Der Winkel zwischen Ebene und Gerade ist die Differenz zu 90°:

Lösung: $\alpha=90°-54{,}74°=35{,}26°$

Aufgabe 2.4.k)

Verschiebungsvektor ist der Ortsvektor von Punkt T, Richtungsvektor ist der Normalenvektor der Ebene E_1

Lösung: $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 233:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\t^2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\4\\8\end{pmatrix}$. Für welches t sind die Vektoren linear abhängig?

Bilden Sie für $t=1$: $\vec{c}=4\cdot\vec{a}-\vec{b}$

Geben Sie die Ebene E in Paramter-, Normalen- und Koordinatenform an, für die $\vec{a}$ der Verschiebungsvektor und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Richtungsvektoren sind ($t=1$)!

Mögliche Lösung: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix}$

Für $t=3$ ergeben sich die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die auf eine Gerade g zeigen. Bestimmen Sie die Gerade!

Mögliche Lösung: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\9\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$

Untersuchen Sie die Lage zwischen Gerade g und Ebene E!

Wie lautet die Gerade g_2 durch den Punkt $P(-2/1/3)$, die parallel zur Geraden g verläuft?

Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Ursprung!

Lösung:

Aufgabe 3.4.a)

Prüfung auf lineare Abhängigkeit mit $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$

I) $1=t\cdot k$

II) $2=4\cdot k \quad\Leftrightarrow\quad k=\frac{1}{2}$

III) $t^2=8\cdot k$

nur für $k=\frac{1}{2}$ kann es lineare Abhängigkeit geben; wir suchen nun nach passenden t

I) $1=\frac{1}{2}\cdot t \quad\Leftrightarrow\quad t=2$

III) $t^2=8\cdot\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad t=\pm 2$

Lösung: für $t=2$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig

Aufgabe 3.4.b)

$$\vec{c} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4.c)

$$\text{Ebene: } E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Bildung des Normalenvektors mit Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\text{I)} \quad 1x + 4y + 8z = 0 \\ &\underline{\text{II)} \quad 3x + 4y - 4z = 0} \quad | \text{ wähle } z = 1 \\ &\text{I)} \quad x + 4y = -8 \\ &\underline{\text{II)} \quad 3x + 4y = 4} \\ &\text{I - II)} \quad -2x = -12 \quad |:(-2) \\ &\qquad x = 6 \\ &x \text{ in I)} \quad 6 + 4y = -8 \quad | -6 \\ &\qquad 4y = -14 \quad |:4 \\ &\qquad y = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

um ganzzahlige Koordinaten zu bekommen, wird der Normalenvektor mit 2 multipliziert:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der Ebenengleichung in Parameterform mit dem Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$ die Multiplikation mit den Richtungsvektoren ergibt Null

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$ Normalenform der Ebene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$12x - 7y + 2z = 0$ Koordinatenform der Ebene

Aufgabe 3.4.d)

Gerade: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-4 \\ 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.4.e)

Untersuchung des Richtungsvektors der Geraden auf Orthogonalität zum Normalenvektor der Ebene durch Skalarmultiplikation:

$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = -24 + 14 + 2 = -8 \neq 0$ dh. nicht othogonal

Also muß es einen Durchdringungspunkt der Geraden mit der Ebene geben. Die Gerade und die Ebene gleichsetzen und s berechnen und in die Geradengleichung einsetzen:

I) $1 - 2s = 1 + u + 3v \quad \Leftrightarrow \quad -2s - u - 3v = 0$

II) $2 - 2s = 2 + 4u + 4v \quad \Leftrightarrow \quad -2s - 4u - 4v = 0$

III) $9 + s = 1 + 8u - 4v \quad \Leftrightarrow \quad s - 8u + 4v = -8$

$$\begin{aligned} -2s - u - 3v &= 0 \\ 4 \cdot \text{I} - 3 \cdot \text{II} = \text{II)} \quad -2s - 16u &= 0 \\ \text{II} + \text{III} = \text{III)} \quad -s - 12u &= -8 \\ \hline -2s - u - 3v &= 0 \\ -2s - 16u &= 0 \end{aligned}$$

$3 \cdot \text{II} + 4 \cdot \text{III} = \text{III)} \quad -2s = -32 \quad \Leftrightarrow \quad s = 16$

s in die Geradengleichung eingesetzt ergibt den Durchdringungspunkt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + 16 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ -30 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad D\left(-31/-30/25\right)$$

Aufgabe 3.4.f)

Verschiebungsvektor ist der Ortsvektor von P; Richtungsvektor ist derselbe, wie der der Geraden g:

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4.g)

Normierung des Normalenvektors der Ebene:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-7)^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{197}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abstand berechnen:

$$|0E| = \vec{n}_0 \cdot \vec{p} = \frac{1}{\sqrt{197}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{12 - 14 + 2}{\sqrt{197}} = 0$$

Der Abstand ist Null, dh. der Ursprung liegt in der Ebene.

Aufgabe 234:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3k \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Für welches k sind die Vektoren linear abhängig?

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen eine Ebene E_1 aufspannen. Wählen Sie k=3. Der Punkt $D(1/-2/-2)$ liegt in der Ebene. Wie lautet die Gleichung der Ebene E_1?

Bilden Sie eine Gerade g_1, die die Ebene E_1 rechtwinklig in D schneidet!

Mit k=2 ergeben sich 2 neue Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bilden Sie daraus mit $\vec{c}$ als Verschiebungsvektor eine zweite Ebene E_2!

Wie lautet die Schnittgerade g_2 von E_1 und E_2?

Wie lautet der Schnittwinkel φ von E_1 und E_2?

Lösung:

Aufgabe 4.4.a)

Vektoren als Gleichungssystem schreiben, a und b eliminieren und k berechnen:

I) $9a + kb = 12$

II) $4a + 2b = 6$

III) $3ka - 3b = 6$

$4 \cdot \text{I} - 9 \cdot \text{II} = \text{I)} \quad (4k - 18)b = -6 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{6}{4k - 18}$

II) $4a + 2b = 6$

$3k \cdot \text{II} - 4 \cdot \text{III} = \text{III)} \quad (6k + 12)b = 18k - 24 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{18k - 24}{6k + 12}$

I mit 2 kürzen) $b = -\frac{3}{2k - 9}$

III mit 6 kürzen) $b = \frac{3k - 4}{k + 2}$

I = II setzen) $-\frac{3}{2k - 9} = \frac{3k - 4}{k + 2}$ | mit Nennern multiplizieren

$-3(k + 2) = (3k - 4) \cdot (2k - 9)$

$-3k - 6 = 6k^2 - 35k + 36 \quad | +3k + 6$

$0 = 6k^2 - 32k + 42 \quad | : 6$

$0 = k^2 - \frac{16}{3}k + 7 \quad | \, pq - \text{Formel}$

$k_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 7} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{63}{9}} = \frac{8}{3} \pm \frac{1}{3}$

$k_1 = \frac{9}{3} = 3 \qquad k_2 = \frac{7}{3}$

Aufgabe 4.4.b)

Die Vektoren, die die Ebene aufspannen, sind die Richtungsvektoren. Der Verschiebungsvektor (= Stützvektor) der Ebene ist der Ortsvektor von Punkt *D*:

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4.c)

Der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Geraden. Der Ortsvektor von Punkt *D* ist der Verschiebungsvektor (= Stützvektor) der Geraden.

es gilt $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad ;\text{wobei} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Normalenvektor}$

als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & 9x + 4y + 9z = 0 & \\ \underline{\text{II)}} & \underline{3x + 2y - 3z = 0} & \mid \text{setze } z = 1 \\ \text{I)} & 9x + 4y = -9 & \\ \underline{\text{II)}} & \underline{3x + 2y = 3} & \\ \text{I} - 2 \cdot \text{II)} & 3x = -15 & \mid :3 \\ & \underline{x = -5} & \\ x \text{ in II)} & -15 + 2y = 3 & \mid +15 \\ & 2y = 18 & \mid :2 \\ & y = 9 & \end{array}$$

der Normalenvektor ist $\vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

die Geradengleichung lautet $g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.4.d)

zweite Ebene: $E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.4.e)

Die Ebenen gleichsetzen und als Gleichungssystem schreiben:

I) $1+9r+3s=12+9n+2m$

II) $-2+4r+2s=6+4n+2m$

III) $-2+9r-3s=6+6n-3m$

Alle Variablen auf die eine Seite, alle Zahlen auf die andere Seite bringen. Wichtig: entweder r und s oder n und m eliminieren!

I) $9r+3s-9n-2m=11$

II) $4r+2s-4n-2m=8$

III) $9r-3s-6n+3m=8$

I) $9r+3s-9n-2m=11$

II) $4r+2s-4n-2m=8$

I - III = III) $6s-3n-5m=3$

I) $9r+3s-9n-2m=11$

$4\cdot$I $-9\cdot$II = II) $-6s+10m=17$

I - III = III) $6s-3n-5m=3$

I) $9r+3s-9n-2m=11$

II) $-6s+10m=17$

II + III = III) $-3n+5m=20 \quad \Leftrightarrow \quad n=-\frac{20-5m}{3}=-\frac{20}{3}+\frac{5}{3}m$

Das Ergebnis wird in die Gleichung von E_2 eingesetzt:

$$g_2: \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix}+\left(-\frac{20}{3}+\frac{5}{3}m\right)\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\6\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix}-\left(\frac{20}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\6\end{pmatrix}+\left(\frac{5}{3}m\right)\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\6\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12-60\\6-\frac{80}{3}\\6-40\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}15+2\\\frac{20}{3}+2\\10-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-48\\-62/3\\-34\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}17\\26/3\\7\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4.f)

Der Normalenvektor der zweiten Ebene wird bestimmt (vgl. 4.4.c):

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 9x+4y+6z=0 \\ \underline{\text{II)}} & \underline{2x+2y-3z=0} \quad | \text{setze } z=1 \\ \text{I)} & 9x+4y=-6 \\ \underline{\text{II)}} & \underline{2x+2y=3} \\ \text{I}-2\cdot\text{II)} & 5x=-12 \quad |:5 \\ & x=-\frac{12}{5} \end{array}$$

$$x \text{ in II)} \quad -\frac{24}{5}+2y=3 \quad |+\frac{24}{5}$$

$$2y=\frac{15}{5}+\frac{24}{5} \quad |:2$$

$$y=\frac{39}{10}$$

Der Normalenvektor der zweiten Ebene ist $\vec{n}_{E2}=\begin{pmatrix}-12/5\\39/10\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 10} \begin{pmatrix}-24\\39\\10\end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittwinkels:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_{E1}\cdot\vec{n}_{E2}}{|\vec{n}_{E1}|\cdot|\vec{n}_{E2}|}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}-5\\9\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-24\\39\\10\end{pmatrix}}{\sqrt{(-5)^2+9^2+1^2}\cdot\sqrt{(-24)^2+39^2+10^2}}$$

$$=\frac{120+351+10}{\sqrt{107}\cdot\sqrt{2197}}$$

$$=\frac{481}{484{,}85}$$

$$=0{,}992 \quad |\arccos\varphi$$

$$\varphi=7{,}22°$$

Aufgabe 235:

Gegeben ist eine Kugel K mit der Gleichung $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]^2=50$ und die Gerade g mit

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

a) (1) Zeige, daß g eine Tangente an K ist. Berechne den Berührpunkt (Zwischenergebnis: $A(6|-2|3)$.)

(2) g liegt in einer Tangentialebene T_1 an K. Welche Gleichung hat T_1 ?

(3) In T_1 gibt es eine Tangente g' , die zu g orthogonal ist. Stelle ihre Gleichung auf.

(4) Welche Gleichung hat die zu T_1 parallele Tangentialebene T_2 an K ?

b) (1) Zeige: Die Ebene E mit $2x_1+2x_2-x_3=21$ schneidet K.
Berechne den Radius und den Mittelpunkt des Schnittkreises.

(2) Es gibt zwei Kugeln $K_{2,3}$ mit dem Radius 13, welche mit Ebene E denselben Schnittkreis gemeinsam haben wie die Kugel K.
Berechne ihre Mittelpunkte.

c) Die Gleichung

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1+t\\2+2t\\t\end{pmatrix}\right]^2=50 \quad \text{für} \quad t\in\mathbf{R}.$$

stellt eine Kugelschar K_t dar.

Gehört die Kugel K auch zu dieser Schar ?

Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln dieser Schar ?

Zeige, daß sich K und K_1 schneiden, aber K und K_{10} nicht.

Für welche Werte von t berühren sich K und K_t ?

Lösung:

a) Gegeben ist die Kugel K durch $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]^2=50$ und g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

(1) Behauptung: g ist Tangente an K.

1. Lösung: Man schneidet K mit g. Wenn sich nur eine Lösung ergibt, liegt ein Berührpunkt vor und g ist Tangente !

$$\left[\begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]^2=50$$

$$\left[\begin{pmatrix}7\\0\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right]^2=50$$

$$\begin{pmatrix}7\\0\\5\end{pmatrix}^2+2s\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s^2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}^2=50$$

$$[49+25]+2s\cdot[7+5]+s^2\cdot[1+4+1]=50$$

$$6s^2+24s+24=0 \quad |:6$$

$$s^2+4s+4=0$$

Entweder:	Oder:
$(s+2)^2=0$	$s_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=-2$
s = - 2 doppelte Lösung.	Doppelte Lösung.

Eingesetzt in g: $\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow A(6|-2|3)$.

Ergebnis: Die Schnittmenge besteht nur aus einem Punkt A, folglich ist g Tangente an K und A ist der gesuchte Berührpunkt.

2. Lösung: Man fällt das Lot von M auf g, errechnet den Lotfußpunkt A und zeigt, daß dieser vom Kugel-Mittelpunkt M den Abstand $r=\sqrt{50}$ hat.

Das Lot von einem Punkt auf eine gerade fällen ist nicht einfach. Und auch hierzu gibt es zwei grundverschiedene Methoden:

WISSEN: Lot von M auf g mit der LOTEBENE ***(1. Möglichkeit)***
Man erstellt die Gleichung der Ebene, die senkrecht zu g verläuft und durch M geht. Diese Ebene heißt Lotebene E_L von g. Der Schnitt mit g ergibt den Lotfußpunkt A.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diesen machen wir zum Normalenvektor der Lotebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt:

$$E_L: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = k \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 = k.$$

K erhält man durch Einsetzen eines Punktes von E_L, also von $M(1|2|0)$:

$$k = 1 + 4 + 0 = 5$$
$$E_L: \; x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

Schnitt von g und E_L : $(8+s) + 2(2+2s) + (5+s) = 5$

$6s + 12 = 0 \Rightarrow s = -2$

Eingesetzt in g ergibt dies $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A(6|-2|3).$

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } |\overrightarrow{MA}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} = r.$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{u}_g = 0$ folgt:

$$\begin{pmatrix} 7+s \\ 2s \\ 5+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7+s+4s+5+s=0 \Leftrightarrow 8s+12=0$$

und das ergibt auch hier $s = -2$ und somit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A(6|-2|3)$.

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } |\overrightarrow{MA}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25+16+9} = \sqrt{50} = r.$$

d.h. A liegt auf der Kugel und g ist Tangente an K.

Nun haben wir 3 verschiedene Methoden gesehen, um diese Aufgabe zu lösen: Zeige, daß g Tangente an K ist !!!

---

(2) g liegt in einer Tangentialebene T_1 an K. Welche Gleichung hat T_1 ?

Die Tangentialebene T_1 in A an K hat den Vektor $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor.

Daher lautet ihre Gleichung $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = k_1 \Leftrightarrow 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = k_1$.

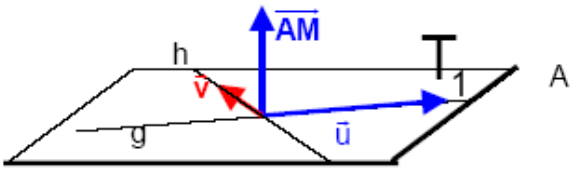
Da $A(6|-2|3) \in T_1 \Rightarrow k_1 = 30+8+9 = 47$

Ergebnis: Die Tangentialebene T_1 in A an K hat die Gleichung $5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 47$.

---

(3) In T_1 gibt es eine Tangente g' , die zu g orthogonal ist.

Der gesuchte Vektor von h sei $\vec{v}$.



Er mu0 zum Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von g und zum Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ von T_1 orthogonal sein.

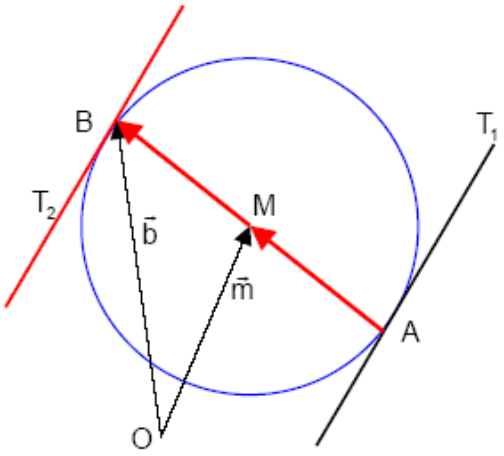
(4) Welche Gleichung hat die zu T_1 parallele Tangentialebene T_2 an K ?

Berechnung des Berührpunktes B:

$$\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{AM} = \vec{m} + (\vec{m} - \vec{a}) = 2\vec{m} - \vec{a}$$

$$\vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B(-4|6|-3)$$



T_2 ist parallel zu T_1. Also haben beide Ebenen dieselben Normalenvektoren.

Daher gilt:

$$T_2: \; 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = k_2 .$$

Da $B \in T_2 \Rightarrow k_2 = -20 - 24 - 9 = -53$.

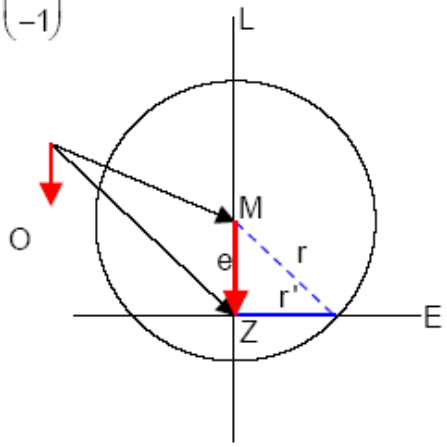
Ergebnis: $T_2: \; 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -53$.

b1) Zeige: Die Ebene E mit $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 21$ schneidet K. Berechne den Radius und den Mittelpunkt des Schnittkreises.

Hessesche Normalform von E: Dazu bringt man den Normalenvektor auf den Betrag 1.

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{n}^\circ = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

HNF: $\dfrac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 21}{3} = 0$:



Abstand des Mittelpunktes $M(1|2|0)$ von E:

$$e = d(M;E) = \frac{|2 + 4 - 21|}{3} = \frac{|-15|}{3} = \frac{15}{3} = 5 < r$$

Also schneidet E die Kugel.
Weil hier Betragsstiche verwendet worden sind, liegen O und M auf derselben Seite von E !!
Dies ist wichtig zur Berechnung des Mittelpunktes Z des Schnittkreises. Für ihn gilt dann nämlich

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OM} + e \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow Z\left(\tfrac{13}{3} \middle| \tfrac{16}{3} \middle| -\tfrac{5}{3}\right).$$

2. Methode:

Wer nicht mit dem Einheits-Normalenvektor $\vec{n}^\circ$ umgehen kann, der berechnet Z als Schnitt der Lotgeraden L mit E, was natürlich viel länger ist:

L: $\vec{x} = \vec{m} + t \cdot \vec{n}$ d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Schnitt mit E: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 21$:

$$2(1+2t) + 2(2+2t) - (-t) = 21$$
$$2 + 4t + 4 + 4t + t = 21$$
$$9t = 15 \Rightarrow t = \tfrac{15}{9} = \tfrac{5}{3}$$

Eingesetzt in L: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{5}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow Z\left(\tfrac{13}{3} \middle| \tfrac{16}{3} \middle| -\tfrac{5}{3}\right)$

Es fehlt noch der Radius des Schnittkreises. Dieser wird mit dem Satz des Pythagoras so berechnet:

P $r^2 = e^2 + r'^2 \Rightarrow r' = \sqrt{r^2 - e^2} = \sqrt{50 - 25} = \sqrt{25} = 5$.

(2) Es gibt zwei Kugeln $K_{2,3}$ mit dem Radius 13, welche mit Ebene E_1 denselben Schnittkreis gemeinsam haben wie die Kugel K.

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet man aus $r_2 = 13$:

$$e_2^2 = r_2^2 - r'^2 \Rightarrow e_2 = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12 .$$

Dies gilt natürlich auch für e_3.

Die Mittelpunkte liegen auf L, d.h. für sie gilt:

$$M(1+2t|2+2t|-t) .$$

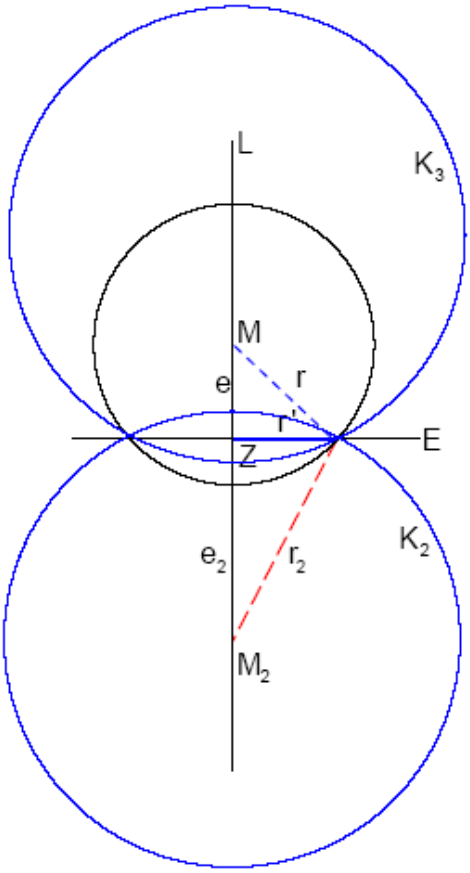
Diese Mittelpunkte müssen von E den Abstand 12 haben.

HNF von E: $\dfrac{2x_1+2x_2-x_3-21}{3} = 0$

$$d(M;E) = \frac{|2(1+2t)+2(2+2t)+t-21|}{3} = 12$$

Also
$$|2+4t+4+4t+t-21| = 36$$
$$|9t-15| = 36$$
$$9t-15 = \pm 36$$
$$9t = 15 \pm 36 = \begin{cases} 51 \\ -21 \end{cases}$$

$t_2 = \frac{51}{9} = \frac{17}{3}$ und $t_3 = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$.



Eingesetzt in L erhält man die beiden Mittelpunkte:

$$\vec{m}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{17}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{37}{3}\\\frac{40}{3}\\-\frac{17}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow M_2\left(\tfrac{37}{3}|\tfrac{40}{3}|-\tfrac{17}{3}\right) \quad \text{und}$$

$$\vec{m}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{7}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{11}{3}\\-\frac{8}{3}\\\frac{7}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow M_2\left(-\tfrac{11}{3}|-\tfrac{8}{3}|\tfrac{7}{3}\right).$$

Es gibt auch andere Lösungswegen, z.B. die Berechnung der Mittelpunkte mit dem Einheits-Normalenvektor:

$$\vec{m}_{1,2} = \vec{z} \pm e \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\\frac{16}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix} \pm 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\\frac{16}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}8\\8\\-4\end{pmatrix}$$ Man erhält dasselbe Ergebnis.

c) Gegeben ist diese Kugelschar $K_t: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+2t \\ t \end{pmatrix}\right]^2 = 50$ für $t \in \mathbf{R}$.

Für $t = 0$ entsteht K_o: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 50$ und dies ist die Kugel K.

Der Ortsvektor der Kugelmittelpunkt ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

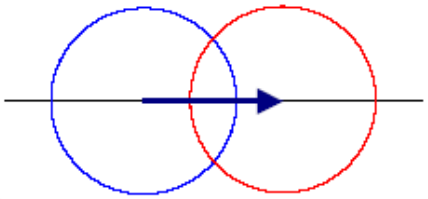
Dies ist die Gleichung einer Geraden, auf der also alle Kugelmittelpunkte liegen.

Behauptung: K und K_5 schneiden sich:

K_5 hat den Mittelpunkt $M_5(6|12|5)$.

Also ist $\overline{MM_5} = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = 5 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 5 \cdot \sqrt{1+4+1} = 4\sqrt{6} = \sqrt{16 \cdot 6} = \sqrt{96}$

Beide Kugeln haben den Radius $\sqrt{50}$,
also ist $r_1 + r_2 = 2\sqrt{50} = \sqrt{400} > \overline{MM_5}$,
d.h. die Kugeln schneiden sich.



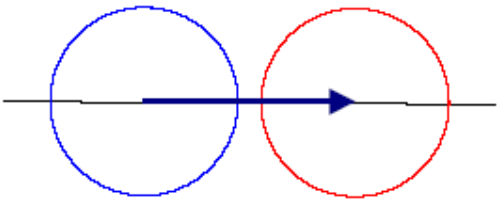
Behauptung: K und K_{10} schneiden sich nicht.

K_{10} hat den Mittelpunkt $M_{10}(11|22|10)$. Also ist

$\overline{MM_{10}} = \left|\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 10\sqrt{1+4+1} = 10\sqrt{6} = \sqrt{100 \cdot 6} = \sqrt{600}$

Dies ist größer als $r_1 + r_2 = 2\sqrt{50} = \sqrt{400}$.

Also schneiden sich K und K_{10} nicht.



K und K_t berühren sich, wenn gilt

$\overline{MM_t} = r_1 + r_2 = 2\sqrt{50} = \sqrt{400}$

$\overline{MM_t} = \left|\begin{pmatrix} 1+t \\ 2+2t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}\right| = t \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = |t| \cdot \sqrt{1+4+1} = |t|\sqrt{6}$

Daraus folgt: $|t| \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{50} \Rightarrow |t| = 2\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{\frac{25}{3}} = 10\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$

Ergebnis: $t_{4,5} = \pm\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 236:

In einem kartesischen Koordinatensystem der $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(0|0|2), C(1|4|1), D(-1|2|0) und die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, gegeben

a) (3) Zeigen Sie, dass die Punkte A, C und D eine Ebene festlegen, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

b) (4) Die Gerade g schneidet die Ebene E in einem Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens und zeigen Sie, dass der Punkt das Dreieck ACD zu einem Quadrat ABCD ergänzt

c) (4) Zusätzlich ist die Geradenschar

$h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix}$ mit $\mu, t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Eine der Schargeraden h_t ist parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie den zugehöhrigen Scharparameter t und den Abstand dieser Geraden von E.

d) (5) Bestimmen Sie die Koordinaten des von B verschiedenen Punktes $P \in g$ so, dass die Geraden PA und PC senkrecht zueinander stehen.

Lösung:

a) (3)

Die Vektoren

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängige Richtungsvektoren, wie man leicht an den Vorzeichen dieser Vektoren erkennt. Daher legen die drei Punkte A, C und D eine Ebene E fest.

Normalenform von E

Das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$ liefert einen Normalenvektor von E:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 - (-2) \\ 1 - (-2) \\ 2 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dann ist auch $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor. Mit dem Aufpunkt A erhält man eine Normalenform zu

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 - \big(0 + 0 + 2 \cdot (-2)\big) = 0$$

$$\Longrightarrow E : 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$$

b) (5)

Koordinaten des Schnittpunktes B von g und E

Durch Einsetzen der Koordinaten der Geraden g in die Ebenengleichung von E ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 - \lambda - 2 \cdot (1 + \lambda) + 4 &= 0 \\ 4 - \lambda - 2 - 2\lambda + 4 &= 0 && | -6 \\ -3\lambda &= -6 && | : (-3) \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

Nachweis, dass B das Dreieck ACD zu einem Quadrat ergänzt

Zum einen gilt $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
Deswegen ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm.
Zum anderen gilt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da für das Skalarprodukt dieser Vektoren $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0$ gilt, ist das Viereck ein Rechteck.
Zudem gilt $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ sowie $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ und damit $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Daher ist das Viereck $ABCD$ ein Quadrat.

Zusätzlich ist die Geradenschar $h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix}$ mit $\mu, t \in \mathbb{R}$ gegeben.

c) (4)

Scharparameter t, so dass $h_t \,||\, E$

Eine Gerade ist genau dann parallel zu einer Ebene, wenn ihr Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor der Ebene ist, das Skalarprodukt aus diesen Vektoren also null ergibt. Hier erhält man die Bedingung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ 2 \cdot (t-1) - (t+1) - 4t &= 0 \\ 2t - 2 - t - 1 - 4t &= 0 \qquad | + 3 \\ -3t &= 3 \qquad | : (-3) \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Für $t = -1$ erhält man den Aufpunkt $P_{-1}(-2\,|\,-1\,|\,2)$ der Geraden h_{-1}. Einsetzen der Koordinaten von P_{-1} in E liefert $-4 + 1 - 4 + 4 = 0$, also einen Widerspruch.
Für $t = -1$ ist die Gerade h_{-1} daher echt parallel zur Ebene E.

Abstand d der Geraden h_{-1} von E

Der Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat die Länge $|\vec{n}_E| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.
Man erhält die Hesse'sche Normalenform

$$\text{HNF von } E: \quad \frac{2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4}{3} = 0$$

Setzt man in die linke Seite die Koordinaten von P_{-1} ein und nimmt den Betrag, dann ergibt sich für den Abstand d von h_{-1} und E

$$d = d(h_{-1}, E) = d(P_{-1}, E) = \frac{|-4 + 1 - 4 + 4|}{3} = \frac{|-3|}{3} = 1$$

d) (5)

Bestimmung von $P \in g$, so dass $PA \perp PC$ gilt

Ein Punkt P auf der Geraden g hat die Koordinaten $P(2\,|\,\lambda\,|\,1+\lambda)$. Für die Richtungsvektoren der Geraden PA bzw. PC erhält man zum Beispiel

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. } \overrightarrow{CP} = \vec{p} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 4 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Damit $PA \perp PC$ gilt, muss das Skalarprodukt dieser Richtungsvektoren null ergeben. Man erhält die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 4 \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$2 \cdot 1 + \lambda \cdot (\lambda - 4) + (\lambda - 1) \cdot \lambda = 0$$

$$2 + \lambda^2 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda = 0$$

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$\lambda_{1;2} = \frac{5 \pm \overbrace{\sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}^{=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Für $\lambda_1 = 2$ erhält man den Punkt B. Setzt man $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ in g ein, dann erhält man für den gesuchten Punkt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow P(2\,|\,0{,}5\,|\,1{,}5)$$

Aufgabe 237:

Gegeben ist folgende Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie Darstellung in die Koordinatenform mit Hilfe des Skalarproduktverfahrens um.

Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 2n_1 + n_2 + 7n_3 = 0 \\ (2) & n_1 + 2n_2 - n_3 = 0 \end{array}$$

$(1) - 2 \cdot (2)$: $\quad -3n_2 + 9n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = 3n_3$

Wähle $\quad n_3 = a,\ a \in \mathbf{R} \Rightarrow n_2 = 3a$

Aus (1) folgt: $\quad n_1 = n_3 - 2n_2 = a - 6a = -5a$

Normalenvektor: $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -5a \\ 3a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ und für a = 1:

E: $\quad -5x_1 + 3x_2 + x_3 = k$

Mit $A(2|t|1) \in E$ $\quad$ folgt: $\quad k = -10 + 3t + 1 = 3t - 9$

Es liegt also eine Schar paralleler Ebenen vor:

$$E_t: \quad -5x_1 + 3x_2 + x_3 = 3t - 9$$

Aufgabe 238:

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden. Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird.

Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck ABCD mit

A(0|0|0),B(6|6|0),C(0|18|0) und D(-8|4|0)

Und als Deckfläche das Viereck A*, B*, C* und D* mit

A*(4|1|20), B*(7|4|20), C*(4|10|20)

(Koordinatenangaben in Meter)

a) (5) Zeigen Sie, dass S(8|2|40) die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

b) (4) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D*.

Lösung:

a) Nachweis, dass $S(8|2|40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist

Dafür genügt es nachzuweisen, dass sich die Geraden (AA^*) und (BB^*) im Punkt $S(8|2|40)$ schneiden.

Die Gerade (AA^*) geht durch den Punkt $A(0|0|0)$ (Ursprung) und hat den Richtungsvektor

$$\overrightarrow{AA^*} = \vec{a}^* - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Daher erhält man die Geradengleichung

$$(AA^*): \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \; ; s \in \mathbb{R}$$

Die Gerade (BB^*) geht durch den Punkt $B(6|6|0)$ und hat den Richtungsvektor

$$\overrightarrow{BB^*} = \vec{b}^* - \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Man erhält die Geradengleichung

$$(BB^*): \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix} \; ; t \in \mathbb{R}$$

Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen erhält man

$$s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4s = 6 + t & (1) \\ s = 6 - 2t & (2) \\ 20s = 20t & (3) \end{cases}$$

Aus Gleichung (3) folgt nach Division durch 20, dass $s = t$ gilt.
Setzt man das in Gleichung (2) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} s &= 6 - 2s \quad |+2s \\ 3s &= 6 \quad\quad |:3 \\ \Longrightarrow \quad s &= 2 \end{aligned}$$

Wegen $s = t$ gilt dann auch $t = 2$. Nun muss noch überprüft werden, ob mit $s = t = 2$ auch die Gleichung (1) erfüllt ist. Dies ist wegen

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 &= 6 + 2 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

der Fall. Setzt man $s = 2$ wieder in die Gerade (AA^*) ein, dann erhält man für den Ortsvektor des Schnittpunkts der beiden Geraden

$$\vec{x} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass der Punkt $S(8|2|40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

Koordinaten des Punktes D^*

Die Punkte A^*, B^* und C^* liegen in der Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 20$, da alle diese Punkte die x_3-Koordinate 20 haben. Dann muss auch der gesuchte Punkt D^* die x_3-Koordinate 20 haben.

Außerdem liegt der Punkt D^* auf der Geraden (SD). Diese geht durch $S(8|2|40)$ und hat z.B. den Richtungsvektor

$$\overrightarrow{SD} = \vec{d} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Für die Gerade (SD) erhält man damit die Gleichung

$$(SD): \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -40 \end{pmatrix} \quad ; r \in \mathbb{R}$$

Da für die dritte Koordinate $x_3 = 20$ gelten soll, erhält man für den Parameter r die Gleichung

$$\begin{aligned} 40 - 40r &= 20 \quad\quad |-40 \\ -40r &= -20 \quad\quad |:(-40) \\ \Longrightarrow \quad r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Setzt man $r = \frac{1}{2}$ in die Gleichung der Gerade (SD) ein, dann folgt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix} \Longrightarrow D^*(0|3|20)$$

Aufgabe 239:

Im wilden Westen werden im Tagebau wertvolle Mineralien abgebaut. Von der Abbaustelle A (800|-400|-100) aus läuft ein gerades Gleis zum Stollenausgang, dass auch am Abbaupunkt B(750|-380| -95) vorbeiläuft (Angaben in m).

a) (4) Der Stollenausgang und das Ende des Gleises liegen in einer Höhe von 10m und werden von Cowboy Jim bewacht. Gib die Koordinaten von Jims Standplatz an.

b) (3) Wie lang ist das Gleisstück von A zum Stollenausgang?

Lösung:

a) (4)

$$\begin{pmatrix} 750 \\ -380 \\ -95 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 800 \\ -400 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ -400 \\ -100 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -50 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

LGS:

Aus (3):

5r=110

r=22

Berechnung des Stollenausgangs:

$$\begin{pmatrix} 800 \\ -400 \\ -100 \end{pmatrix} + 22 \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow S(-300|40|10)$$

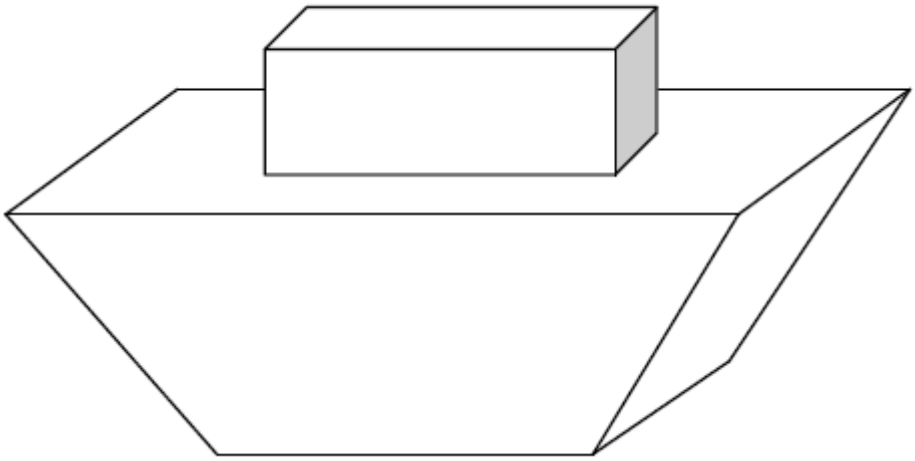
b)

$$\begin{pmatrix} 800 \\ -400 \\ -100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -300 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ -440 \\ -110 \end{pmatrix}$$

$$L = \sqrt{1100^2 + 440^2 + 110^2} = 1.189{,}83 \text{ m}$$

Aufgabe 240:

Der Gemeinderat beschließt, einen eher langweiligen Spielplatz zu einem Abenteuerspielplatz umzugestalten. Das Motto lautet „Auf hoher See“. Daher soll ein Piratenschiff inmitten des Geländes die neue Attraktion werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Schiffes beschreiben durch die Eckpunkte

$$A_1(0 \mid 0 \mid 0),\ B_1(3 \mid 0 \mid 0),\ C_1(3 \mid 5 \mid 0),\ D_1(0 \mid 5 \mid 0)$$

und das Deck durch die Eckpunkte

$$A_2(0 \mid -1 \mid 2),\ B_2(3 \mid -1 \mid 2),\ C_2(3 \mid 6 \mid 2),\ D_2(0 \mid 6 \mid 2).$$

Die Koordinaten sind zugleich als Längenangaben in Metern zu lesen.

Auf dem Deck wird ein quaderförmiger, oben offener Aufbau – genannt Kommandobrücke – errichtet, der an allen Seiten 1 m Abstand zum Rand des Decks hat und 0,75 m hoch ist.

Die aus Sicherheitsgründen notwendige Reling rund um das Deck wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

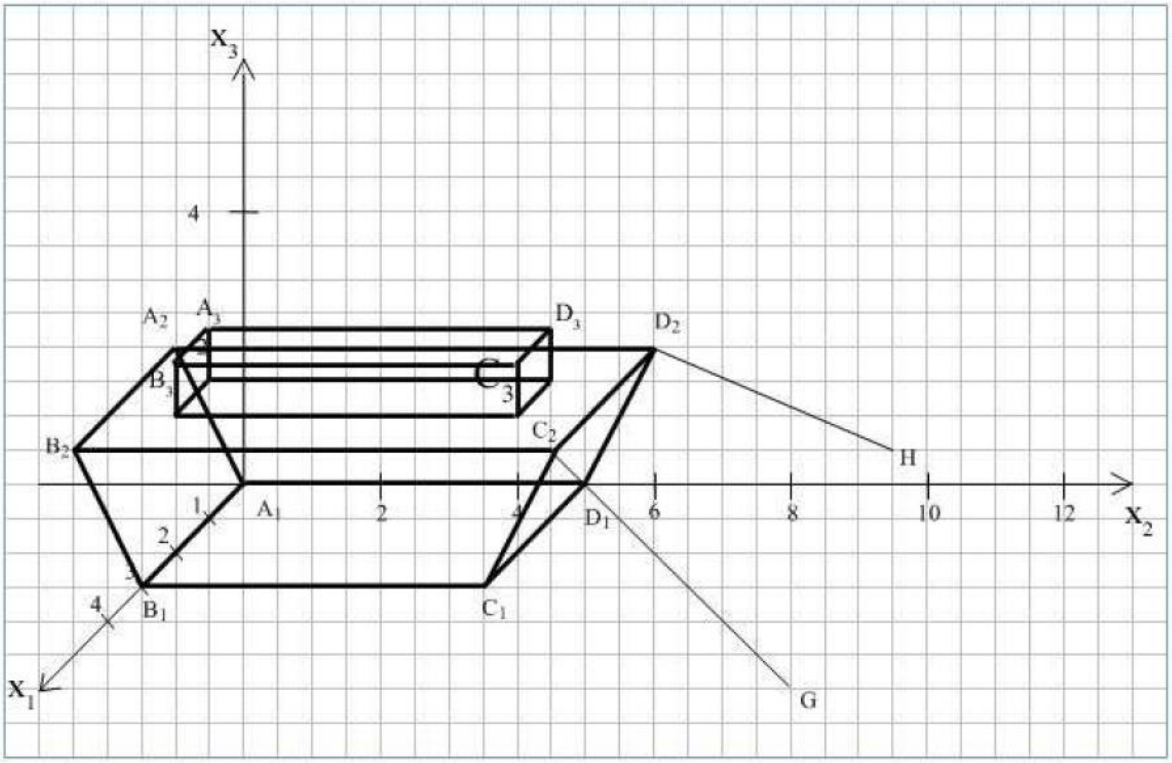
Von den alten Spielgeräten gibt es auf dem Spielplatz Betonfundamente in den Punkten G(6 | 11 | 0) und H(–3 | 8 | –1).

Von G zu C_2 und von H zu D_2 sollen Kletterstangen angebracht werden, die das Entern des Piratenschiffes ermöglichen und damit den Spielwert erhöhen.

a) (4) Berechnen Sie die Länge der beiden Kletterstangen

b) (4) Da kleine Kinder es nicht schaffen, an den Stangen an Deck zu klettern, treten die Eltern an den Gemeinderat heran und fordern, dass zwischen den beiden Stangen eine ebene Holzwand mit Grifflöchern so angebracht wird, dass die beiden Stangen die Begrenzung der Holzwand bilden. Begründen Sie rechnerisch, warum der Wunsch der Eltern schon allein aus mathematisch-geometrischen Gründen nicht erfüllt werden kann.

Lösung:



a)

Die Länge der Stange zwischen G und C_2 entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{GC_2}$, Entsprechendes gilt für die Länge der Stange zwischen H und D_2.

$$|\overrightarrow{GC_2}| = \sqrt{(3-6)^2 + (6-11)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{38} \approx 6{,}16\,.$$

Die Länge der Stange zwischen G und C_2 beträgt ungefähr 6,20 m.

$$|\overrightarrow{HD_2}| = \sqrt{(0-(-3))^2 + (6-8)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{22} \approx 4{,}70\,.$$

Die Länge der Stange zwischen H und D_2 beträgt ungefähr 4,70 m.

b)

Um zu zeigen, dass der Wunsch der Eltern nicht erfüllt werden kann, ist zu zeigen, dass die vier Punkte C_2, D_2, G und H nicht in einer Ebene liegen.

Um dies zu überprüfen, stellt man die Gleichung einer Ebene auf, in der drei der gegebenen Punkte liegen, und überprüft, ob der vierte Punkt ebenfalls auf dieser Ebene liegt. Dies sei hier exemplarisch für die Ebene, die durch die Punkte C_2, D_2 und G aufgespannt wird, gezeigt.

Eine Gleichung der Ebene lautet:
$E: \vec{x} = \overrightarrow{OC_2} + r \cdot \overrightarrow{C_2D_2} + s \cdot \overrightarrow{C_2G}\,,\ r,s \in \mathbb{R}\,.$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ r,s \in \mathbb{R}$$

Nun ist noch zu zeigen, dass H nicht auf dieser Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ r,s \in \mathbb{R}$$

führt zu einem leicht lösbaren Gleichungssystem, in dem es ausreicht, die beiden letzten Zeilen zu untersuchen:

$$\begin{array}{lll} (II) & 8 = 6 + 5s & \\ (III) & -1 = 2 - 2s & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} (II) & s = 0{,}4 \\ (III) & s = 1{,}5 \end{array}$$

Dies führt zu einem Widerspruch, der Punkt H liegt also nicht in der Ebene E. Es ist somit nicht möglich, eine ebene Holzwand zwischen den beiden Stangen anzubringen.

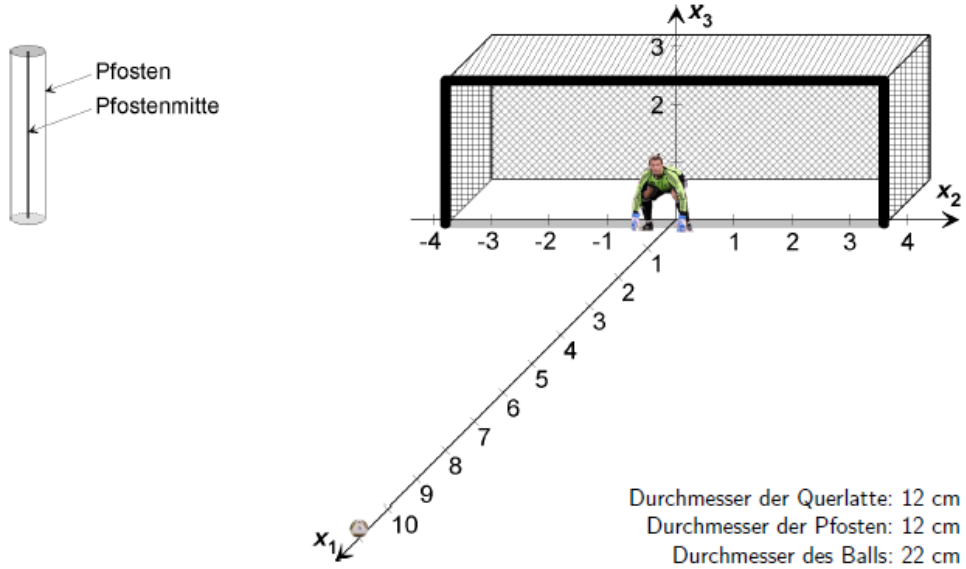
Alternativ kann auch gezeigt werden, dass die Gerade durch G und C_2 und die Gerade durch H und D_2 windschief sind.

Aufgabe 241:

Die Abbildung zeigt ein Fußballtor in einem Koordinatensystem mit Längeneinheit 1m. Der Stützpunkt der Geraden entlang der Lattenmitte ist L(0,06|0|2,5) und die Stützpunkte der Geraden entlang den Pfostenmitten sind

$P_1(0{,}06|3{,}72|0)$ bzw. $P_2(0{,}06|-3{,}72|0)$.

Pfosten, Latte und Torlinie haben einen Durchmesser bzw. Breite von 12cm, so dass die x_2-Achse die Hinterkante der Torlinie darstellt, die der Ball laut FIFA-Regeln vollständig überqueren muss. Der Ball hat einen Radius von 11cm.



a) (5) Beim Viertelfinalspiel gegen England und Deutschland wir in der 40. Spielminute der Engländer Lampard den Ball so gegen die Unterkante der Latte schießen, dass er von dort ins Tor abprallt. Der Ballmittelpunkt bewegte sich dabei nach dem Aufprall an der Unterkante der Latte auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 22{,}9 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den Punkt A, in dem der Ball auf dem Boden aufgekommen ist. Wird es sich dabei um ein reguläres Tor handeln.

b) (5) Sonntag, 13. Juli 2014, 23:20 Uhr: Endspiel Deutschland gegen Spanien:

Es steht 1:1 nach der Verlängerung und es kommt zum Elfmeterschießen. Xavi Alonso schießt den Ball (genauer gesagt: den Mittelpunkt des Balles) vom Punkt E(11|0|0,11) geradlinig Richtung Punkt R(-1|1,9|2). Der deutsche Torwart Neuer hält den Schuss sicher, wenn die Flugbahn weniger als 2,5m vom Punkt N(0,2|0|0) entfernt ist. Erzielt Xavi Alonso das 2:1?

c) (5) Danach drischt Özil den Ballmittelpunkt entlang der Geraden

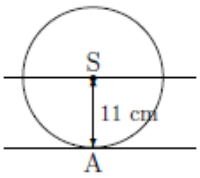
$$ö: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -55 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

ins rechte obere Eck. Trifft Özil das Tor, ohne dass der Ball den Pfosten oder die Latte berührt?

Lösung:

a) Hier muss der Schnittpunkt der Geraden l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 22,9 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E_1: $x_3 = 0,11$ bestimmt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} 2,4 + 22,9t &= 0,11 \\ 22,9t &= -2,29 \\ t &= -0,1 \end{aligned}$$



$t = -0,1$ in l eingesetzt ergibt den Schnittpunkt $S(-0,4 \mid -0,5 \mid 0,11)$. Der Ball kam also im Punkt $A(-0,4 \mid -0,5 \mid 0)$ auf dem Boden auf. Dieser befindet sich 40 cm hinter der Torlinie, so dass es sich um ein reguläres Tor handelte, das der Englischen Mannschaft zu Unrecht aberkannt wurde.

b) Der Mittelpunkt des Balls bewegt sich auf der Geraden m: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0,11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 1,9 \\ 1,89 \end{pmatrix}$.

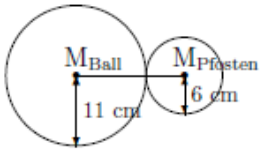
Zu berechnen ist nun der Abstand des Punktes $N(0,2 \mid 0 \mid 0)$ von der Geraden m. Dies kann durch Aufstellen einer zu m orthogonalen Hilfsebene durch N erreicht werden.

Variante mit Verwendung des GTR: Betrachtet man einen beliebigen Punkt X_t der Geraden m, so gilt für dessen Abstand zum Punkt N:

$$\begin{aligned} d(t) = \left|\overrightarrow{NX_t}\right| &= \left| \begin{pmatrix} 11 - 12t \\ 1,9t \\ 0,11 + 1,89t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(10,8 - 12t)^2 + (1,9t)^2 + (0,11 + 1,89t)^2} \end{aligned}$$

Das Minimum des Abstandes $d(t)$ kann man mit dem GTR berechnen und man erhält $d_{min} \approx 2,431 < 2,5$. NEUER hält also den ersten Elfmeter und es bleibt beim 1:1.

c)



Der Ball berührt genau z.B. den Pfosten, wenn der Mittelpunkt des Balls von einem Punkt der Geraden entlang der Pfostenmitte genau 17 cm entfernt ist. Ist also der kleinste Abstand der Geraden des Ballmittelpunktes und der Pfostenmitte kleiner oder gleich 17 cm, so fliegt der Ball gegen den Pfosten.

Zu berechnen ist hier also der Abstand der windschiefen Geraden des Ballmittelpunkts ö und der Mitte des rechten Pfostens p_1 bzw. der Mitte der Querlatte q.

ö: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0,11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -55 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}$ Pfostenmitte rechts p_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 3,72 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu beiden Richtungsvektoren orthogonaler Vektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -55 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 55 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d(\text{ö}, p_1) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10,94 \\ -3,72 \\ 0,11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 55 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{17^2 + 55^2}} = \frac{|-18,62|}{\sqrt{3314}} \approx 0,323 > 0,17$$

Für die Querlatte q: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d(\text{ö}, q) = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 10,94 \\ 0 \\ -2,39 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -55 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{11^2 + 55^2}} \approx 0,198$

Beide Abstände sind größer als 17 cm. Der Ball berührt also weder Pfosten noch Latte. Er fliegt ins Tor, weil ö die x_2-x_3-Ebene in $\ddot{O}(0 \mid 3,4 \mid 2,31)$ schneidet — unhaltbar.

Aufgabe 242:

Der Tower am Frankfurter Flughafen besitzt die Koordinaten $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Die Flugsicherung ortet ein Flugzeug um 12:01 Uhr in $\begin{pmatrix}7\\-20\\5\end{pmatrix}$ und um 12:02 in $\begin{pmatrix}6\\-16\\4{,}2\end{pmatrix}$

(Alle Angaben sind in km).

Um 12:02 Uhr kommt der SOS-Ruf: Hydraulik ausgefallen – Leitwerk blockiert, Kurs nicht änderbar, wird beibehalten. Alles vorbereiten zur Crash-Landung.

a) (2) Bestimmen Sie die Gerade g, welche die Flugroute des Flugzeugs beschreibt.

b) (3) Wie viel Meter über dem Erdboden befindet sich das Flugzeug um 12:04 Uhr?

c) (4) Nach wie vielen Minuten wird das Flugzeug den Boden erreichen?

d) (3) Bestimmen Sie die Koordinaten des Aufprall Punktes A.

e) (3) Wie viele Kilometer müssen die Rettungskräfte vom Tower zum Aufprallpunkt A fahren?

Lösung:

a) (2) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-20\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}6-7\\-16-(-20)\\4{,}2-5\end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-20\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-0{,}8\end{pmatrix}$

Richtungsvektor aus dem Unterschied der Positionen 12:01 – 12:02 Uhr.

b) (3) 12:04 ist drei Minuten später, deshalb ist r=3.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-20\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-0{,}8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-20\\5\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-0{,}8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-8\\2{,}6\end{pmatrix}$

Das Flugzeug befindet sich um 12:04 Uhr 2600 Meter über der Erde.

c (4) Die x_3-Koordinate muss Null sein:

$0 = 5 + r \cdot (-0{,}8)$

$r = 6{,}25$

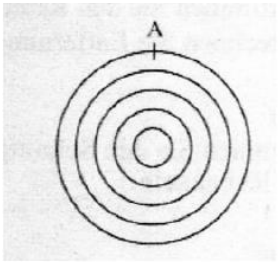
Nach 6 Minuten und 15 Sekunden wird das Flugzeug den Boden erreichen.

d) (3)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-20\\5\end{pmatrix} + 6{,}25 \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-0{,}8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}75\\5\\0\end{pmatrix} \rightarrow A(0{,}75; 5{:}\, 0)$

e) (3) Die Rettungskräfte müssen $\left|\begin{pmatrix}0{,}75\\5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}75^2 + 5^2 + 0\text{^}2} = 5{,}056\ km$

Aufgabe 243:



Maike und Jan zielen mit Laserpointern auf eine Zielscheibe. Die Zielscheibe hat einen Durchmesser von 1 m. Sie befindet sich in der x_2x_3-Ebene und der Aufhängepunkt am oberen Rand der Scheibe liegt im Punkt A(0|3|2,5).

Alle Koordinaten sind in Meter angegeben. Der Boden liegt in der x_1x_2 -Ebene.

Die Spitze von Maikes Pointer befindet sich im Punkt M(4|2|1,4), die Richtung des Strahls ist durch den Vektor

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Die Spitze von Jans Pointer befindet sich im Punkt J(3|4|2) und der Strahl trifft die Zielscheibe im Punkt T(0|2,8|2).

a) Zeigen Sie, dass der Strahl von Maikes Pointer die Zielscheibe trifft.

b) Wessen Strahl trifft die Zielscheibe näher an ihrem Zentrum?

c) Maike dreht ihren Pointer so, dass die Richtung des Strahls nun durch

$$a_t = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \; mit \;\; t \in R$$

gegeben ist, während die Spitze des Pointers im Punkt M verbleibt.

Berechnen Sie den Wert von t, für den sich der Laserstrahl von Maikes Pointer und der Laserstrahl von Jans Pointer schneiden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

d) Wenn der Laserstrahl von Maikes Pointer die Zielscheibe trifft, erzeugt er dort einen Lichtpunkt. Bestimmen Sie den Wert von t, für den dieser Lichtpunkt dem Zentrum der Zielscheibe am nächsten liegt.

Lösung:

a)

Geradengleichung des Pointers von Maike: $m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1,4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

Nun muss der Schnittpunkt der Gerade m mit der x_2x_3-Ebene bestimmt werden.
Für den Schnittpunkt gilt $x_1 = 0$.

$\Rightarrow 4 - r = 0 \Rightarrow r = 4$

Setzt man r = 4 in die Gerade ein, ergibt sich der Schnittpunkt S(0/0,8/2,2).

Der Mittelpunkt Z der Scheibe liegt 0,5m unterhalb von A(0/3/2,5)
Damit lauten die Koordinaten des Mittelpunktes Z(0/3/2).

Für den Abstand des Punktes S von Z gilt: $\overline{SZ} = \left|\overrightarrow{SZ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2} \approx 0,28\text{m}$

Da der Abstand geringer ist als der Radius der Scheibe, muss S innerhalb der Scheibe liegen.

b)

Der Pointer von Jan trifft die Zielscheibe im Punkt T(0/2,8/2).

Für den Abstand des Punktes T von Z gilt: $\overline{TZ} = \left|\overrightarrow{TZ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,2^2} = 0,2\text{m}$

Der Strahl von Jans Pointer trifft die Zielscheibe näher am Zentrum als der Strahl von Maikes Pointer.

c)

Die Geradengleichung von Maikes Pointer lautet nun: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1,4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0,2 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung von Jans Pointer lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1,2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1{,}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1{,}4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\t\\0{,}2\end{pmatrix}$$

Aus 3.Zeile: $2=1{,}4+0{,}2r\Rightarrow r=3$

Aus 1.Zeile: $3+3s=4-r\Rightarrow 3+3s=4-3\Rightarrow s=-\frac{2}{3}$

Aus 2.Zeile: $4+1{,}2\cdot(-\frac{2}{3})=2+3t\Rightarrow t=0{,}4$

Die beiden Strahlen treffen sich für t = 0,4.

Einsetzen von $s=-\frac{2}{3}$ in die Gerade von Jans Pointer ergibt den Schnittpunkt S(1 / 3,2 / 2)

d)

Zunächst wird der vom Parameter t abhängige Schnittpunkt der Gerade von Maikes Pointer mit der x_2x_3-Ebene bestimmt:

Gleichung von Maikes Pointer: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\1{,}4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\t\\0{,}2\end{pmatrix}$

Setze $x_1=0\Rightarrow 4-r=0\Rightarrow r=4$.

Einsetzen von r = 4 in die Gerade ergibt P(0 / 2 + 4t / 2,2)

Abstand von P zu Z: $\overline{PZ}=\left|\overrightarrow{PZ}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\1-4t\\-0{,}2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(1-4t)^2+0{,}2^2}$

Gesucht ist der Wert von t, so dass der Wurzelterm minimal wird:

Für t = 0,25 ergibt sich ein Minimum. Der minimale Abstand beträgt dann 0,2.

Ableitungen

Ableitungen von gebrochen rationalen Funktionen

Aufgabe 244:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\frac{3x-5}{2x}$ (b) $f(x)=\frac{x^2-8}{3x}$ (c) $f(x)=\frac{4x^2-9}{x^3}$

(d) $f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{8x^2}$ (e) $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^3}$ (f) $f(x)=\frac{4x+2}{10x^2}$

Lösung:

(a) $f(x)=\frac{3x-5}{2x}=\frac{3x}{2x}-\frac{5}{2x}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x^{-1}$

$f'(x)=+\frac{5}{2}x^{-2}=\frac{5}{2x^2}$ $f''(x)=-2\cdot\frac{5}{2}x^{-3}=-\frac{5}{x^3}$

(b) $f(x)=\frac{x^2-8}{3x}=\frac{x^2}{3x}-\frac{8}{3x}=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}x^{-1}$

$f'(x)=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}x^{-2}=\frac{1}{3}+\frac{8}{3x^2}=\frac{x^2+8}{3x^2}$ $f''(x)=-2\cdot\frac{8}{3}x^{-3}=-\frac{16}{3x^3}$

(c) $f(x)=\frac{4x^2-9}{x^3}=\frac{4x^2}{x^3}-\frac{9}{x^3}=4x^{-1}-9x^{-3}$

$f'(x)=-4x^{-2}+27x^{-4}=-\frac{4}{x^2}+\frac{27}{x^4}=\frac{-4x^2+27}{x^4}$

$f''(x)=8x^{-3}-108x^{-5}=\frac{8}{x^3}-\frac{108}{x^5}=\frac{8x^2-108}{x^5}$

(d) $f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{8x^2}=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^{-2}$

$f'(x)=\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{2}x^{-3}=\frac{1}{8}-x^{-3}=\frac{1}{8}-\frac{1}{x^3}=\frac{x^3-8}{8x^3}$ $f''(x)=3x^{-4}=\frac{3}{x^4}$

(e) $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^3}=\frac{x^2+4x+4}{x^3}=x^{-1}+4x^{-2}+4x^{-3}$

$$f'(x)=-x^{-2}-8x^{-3}-12x^{-4}=-\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x^4}=-\frac{x^2+8x+12}{x^4}$$

$$f''(x)=2x^{-3}+24x^{-4}+48x^{-5}=\frac{2}{x^3}+\frac{24}{x^4}+\frac{48}{x^5}=\frac{2x^2+24x+48}{x^5}$$

(f) $f(x)=\frac{4x+2}{10x^2}=\frac{2}{5}x^{-1}+\frac{1}{5}x^{-2}$

$$f'(x)=-\frac{2}{5}x^{-2}-\frac{2}{5}x^{-3}=-\frac{2}{5}\left(x^{-2}+x^{-3}\right)=-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\frac{2}{5}\frac{x+1}{x^3}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{5}(-2x^{-3}-3x^{-4})=\frac{2}{5}\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2x+3}{x^4}$$

Aufgabe 245:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\frac{3}{4-x}$ (b) $f(x)=\frac{24}{x^2-4}$ (c) $f(x)=\frac{-8}{(x+3)^2}$ (d) $f(x)=\frac{-18}{(x^2-9x)^2}$

Lösung:

(a) $f(x)=\dfrac{3}{4-x}=3(4-x)^{-1}$

$$f'(x)=-3(4-x)^{-2}\cdot(-1)=\frac{3}{(4-x)^2} \qquad f''(x)=-6(4-x)^{-3}\cdot(-1)=\frac{6}{(4-x)^3}$$

(b) $f(x)=\dfrac{24}{x^2-4}=24(x^2-4)^{-1}$

$$f'(x)=-24(x^2-4)^{-2}\cdot 2x=-48\frac{x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=-48\frac{1\cdot(x^2-4)^2-2(x^2-4)2x\cdot x}{(x^2-4)^4}=-48\frac{(x^2-4)\left[(x^2-4)-4x^2\right]}{(x^2-4)^4}$$

(Rot: Ableitung des Nenners: v'(x)).

$$f''(x)=-48\frac{x^2-4-4x^2}{(x^2-4)^3}=-48\frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3}=48\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$$

(c) $f(x)=\dfrac{-8}{(x+3)^2}=-8(x+3)^{-2}$

$$f'(x)=16(x+3)^{-3}\cdot 1=\frac{16}{(x+3)^3} \qquad f''(x)=-48(x+3)^{-4}=\frac{-48}{(x+3)^4}$$

(d) $f(x)=\dfrac{-18}{(x^2-9x)^2}=-18(x^2-9x)^{-2}$

$$f'(x)=36(x^2-9x)^{-3}\cdot(2x-9)=36\frac{2x-9}{(x^2-9x)^3}$$

$$f''(x)=36\frac{2(x^2-9x)^3-3(x^2-9x)^2(2x-9)\cdot(2x-9)}{(x^2-9x)^6}$$

$$f''(x)=36\frac{(x^2-9x)^2\left[2(x^2-9x)-3(2x-9)\cdot(2x-9)\right]}{(x^2-9x)^6}$$

$$f''(x)=36\frac{2(x^2-9x)-3(2x-9)^2}{(x^2-9x)^4}=36\frac{2x^2-18x-3(4x^2-36x+81)}{(x^2-9x)^4}$$

$$f''(x)=36\frac{2x^2-18x-12x^2+108x-243}{(x^2-9x)^4}=36\frac{-10x^2+90x-243}{(x^2-9x)^4}$$

Aufgabe 246:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ (b) $f(x)=\dfrac{16x}{x^2+8}$ (c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$ (e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$ (f) $f(x)=\dfrac{4x+8}{x^2+t}$

(g) $f(x)=\dfrac{t^2-x^2}{x-2t}$ (h) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+t)^2}$ (i) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

(j) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$ (k) $f(x)=\dfrac{3x^3-3x}{x^2+4}$ (l) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{(x+1)^2}$

Lösung:

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1\cdot(x+1)-1\cdot x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}=(x+1)^{-2}$

$$f''(x)=-2(x+1)^{-3}\cdot 1=-\frac{2}{(x+1)^3}$$

(b) $f(x)=\dfrac{16x}{x^2+8}=16\dfrac{x}{x^2+8}$

$$f'(x)=16\cdot\frac{x^2+8-2x\cdot x}{\left(x^2+8\right)^2}=16\frac{8-x^2}{\left(x^2+8\right)^2}$$

$$f''(x)=16\frac{-2x\left(x^2+8\right)^2-2\left(x^2+8\right)2x\cdot\left(8-x^2\right)}{\left(x^2+8\right)^4}$$

$$=16\frac{\left(x^2+8\right)\left[-2x\left(x^2+8\right)-2\cdot 2x\cdot\left(8-x^2\right)\right]}{\left(x^2+8\right)^4}=16\frac{-2x\left(x^2+8\right)-2\cdot 2x\cdot\left(8-x^2\right)}{\left(x^2+8\right)^3}$$

$$=16\frac{-2x^3-16x-32x+4x^3}{(x^2+8)^3}=16\frac{2x^3-48x}{(x^2+8)^3}$$

Wer üben will: $\quad f'''(x)=\ldots=32\dfrac{-3x^4+104x^2-128}{(x^2+8)^4}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-1\cdot(x^2-1)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-2(x+2)\cdot(x^2+4x+1)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2)-2\cdot(x^2+4x+1)\right]}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{(2x+4)(x+2)-2\cdot(x^2+4x+1)}{(x+2)^3}=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-2}{(x+2)^3}=\frac{6}{(x+2)^3}$$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+a^2)-2x(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+2a^2x-\cancel{2x^3}+2a^2x}{(x^2+a^2)^2}=4a^2\frac{x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$f''(x)=4a^2\frac{1\cdot(x^2+a^2)^2-2(x^2+a^2)2x\cdot x}{(x^2+a^2)^4}=4a^2\frac{(x^2+a^2)\left[(x^2+a^2)-4x^2\right]}{(x^2+a^2)^4}$$

$$=4a^2\frac{a^2-3x^2}{(x^2+a^2)^3}$$

(e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)^2-2(x+1)(2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[2(x+1)-2(2x+3)\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2(x+1)-2(2x+3)}{(x+1)^3}=\frac{-2x-4}{(x+1)^3}=-2\frac{x+2}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=-2\frac{1\cdot(x+1)^3-3(x+1)^2\cdot(x+2)}{(x+1)^6}=-2\frac{(x+1)^2\left[(x+1)-3(x+2)\right]}{(x+1)^6}$$

$$=-2\frac{(x+1)-3(x+2)}{(x+1)^4}=-2\frac{x+1-3x-6}{(x+1)^4}=-2\frac{-2x-5}{(x+1)^4}=2\frac{2x+5}{(x+1)^4}$$

(f) $f(x)=\dfrac{4x+8}{x^2+t}$

$$f'(x)=\frac{4(x^2+t)-2x(4x+8)}{(x^2+t)^2}=\frac{4x^2+4t-8x^2-16x}{(x^2+t)^2}=\frac{-4x^2-16x+4t}{(x^2+t)^2}$$

$$=-4\frac{x^2+4x-t}{(x^2+t)^2}$$

$$f''(x)=-4\frac{(2x+4)(x^2+t)^2-2(x^2+t)2x\cdot(x^2+4x-t)}{(x^2+t)^4}$$

$$=-4\frac{(x^2+t)\left[(2x+4)(x^2+t)-2\cdot 2x\cdot(x^2+4x-t)\right]}{(x^2+t)^4}$$

$$=-4\frac{(2x+4)(x^2+t)-2\cdot 2x\cdot(x^2+4x-t)}{(x^2+t)^3}$$

$$=-4\frac{2x^3+4x^2+2tx+4t-4x^3-16x^2+4tx}{(x^2+t)^2}=-4\frac{-2x^3-12x^2+6tx+4t}{(x^2+t)^3}$$

$$=8\frac{x^3+6x^2-3tx-2t}{(x^2+t)^3}$$

(g) $f(x)=\dfrac{t^2-x^2}{x-2t}$

$$f'(x)=\frac{-2x(x-2t)-1\cdot(t^2-x^2)}{(x-2t)^2}=\frac{-2x^2+4tx-t^2+x^2}{(x-2t)^2}=\frac{-x^2+4tx-t^2}{(x-2t)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x+4t)(x-2t)^2-2(x-2t)\cdot\left(-x^2+4tx-t^2\right)}{(x-2t)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x-2t)\left[(-2x+4t)(x-2t)-2\cdot\left(-x^2+4tx-t^2\right)\right]}{(x-2t)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-2x^2+4tx+4tx-8t^2+2x^2-8tx+2t^2}{(x-2t)^3}=\frac{-6t^2}{(x-2t)^3}$$

(h) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+t)^2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+t)^2-2(x+t)\cdot x^2}{(x+t)^4}=\frac{(x+t)\left[2x(x+t)-2x^2\right]}{(x+t)^4}=\frac{2x(x+t)-2x^2}{(x+t)^3}=2t\frac{x}{(x+t)^3}$$

$$f''(x)=2t\frac{1\cdot(x+t)^3-3(x+t)^2\cdot x}{(x+t)^6}=2t\frac{(x+t)^2\left[(x+t)-3x\right]}{(x+t)^6}=2t\frac{-2x+t}{(x+t)^4}$$

(i) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+2)-1\cdot x^3}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(6x^2+12x)(x+2)^2-2(x+2)(2x^3+6x^2)}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)\left[(6x^2+12x)(x+2)-2(2x^3+6x^2)\right]}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{(6x^2+12x)(x+2)-2(2x^3+6x^2)}{(x+2)^3}=\frac{6x^3+24x^2+24x-4x^3-12x^2}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{2x^3-12x^2+24x}{(x+2)^3}$$

(j) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+4)-2x\cdot x^3}{(x^2+4)^2}=\frac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+24x)(x^2+4)^2-2(x^2+4)\cdot 2x\cdot(x^4+12x^2)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+4)\left[(4x^3+24x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+12x^2)\right]}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+24x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+12x^2)}{(x^2+4)^3}=\frac{4x^5+24x^3+16x^3+96x-4x^5-48x^3}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-8x^3+96x}{(x^2+4)^3}=-8\frac{x^3-12x}{(x^2+4)^3}$$

(k) $f(x)=\dfrac{3x^3-3x}{x^2+4}=3\dfrac{x^3-x}{x^2+4}$

$$f'(x)=3\frac{(3x^2-1)(x^2+4)-2x(x^3-x)}{(x^2+4)^2}=3\frac{3x^4+11x^2-4-2x^4+2x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=3\frac{x^4+13x^2-4}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=3\frac{(4x^3+26x)(x^2+4)^2-2(x^2+4)\cdot 2x\cdot(x^4+13x^2-4)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=3\frac{(x^2+4)\left[(4x^3+26x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+13x^2-4)\right]}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=3\frac{(4x^3+26x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+13x^2-4)}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=3\frac{4x^5+26x^3+16x^3+104x-4x^5-52x^3+16x}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=3\frac{-10x^3+120x}{(x^2+4)^3}=-30\frac{x^3-12x}{(x^2+4)^3}$$

(l) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)(x^3-8)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[3x^2(x+1)-2(x^3-8)\right]}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)-2(x^3-8)}{(x+1)^3}=\frac{3x^3+3x^2-2x^3+16}{(x+1)^3}=\frac{x^3+3x^2+16}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(x+1)^3-3(x+1)^2(x^3+3x^2+16)}{(x+1)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(x+1)^2\left[(3x^2+6x)(x+1)-3(x^3+3x^2+16)\right]}{(x+1)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(x+1)-3(x^3+3x^2+16)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{3x^3+9x^2+6x-3x^3-9x^2-48}{(x+1)^4}=\frac{6x-48}{(x+1)^4}=6\frac{x-8}{(x+1)^4}$$

Ableitungen von Wurzelfunktionen

Aufgabe 247:

Berechnen Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(1) $f(x)=\frac{3-x}{\sqrt{x}}$

(2) $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$

(3) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{2x}$

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x}$

(5) $f(x)=\frac{4-\sqrt{x}}{x^2}$

(6) $f(x)=\sqrt{4-3x^2}$

(7) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$

(8) $f(x)=x\sqrt{x^2+25}$

(9) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{2-x}}$

(10) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

(11) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}}$

(12) $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+8}}$

(13) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-4}}$

(14) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

Lösung:

(1) $f(x)=\frac{3-x}{\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x}}=3x^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{x}$

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{3+x}{2x\sqrt{x}}$

$f''(x)=\frac{9}{4}x^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{9}{4x^2\sqrt{x}}+\frac{1}{4x\sqrt{x}}=\frac{9+x}{4x^2\sqrt{x}}$

(2) $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{x\sqrt{x}}=\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$

$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x^5}}=\frac{3x^2-12}{4x^2\sqrt{x}}=3\frac{x^2-4}{4x^2\sqrt{x}}$

(3) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f''(x)=-\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x}=x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-2}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+4}{2x^2}$

$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}-4x^{-3}=\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}-\frac{4}{x^3}=\frac{3\sqrt{x}-16}{4x^3}$

(5) $f(x)=\frac{4-\sqrt{x}}{x^2}=\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=4x^{-2}-x^{-\frac{3}{2}}$

$f'(x)=-8x^{-3}+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{8}{x^3}+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-16+3\sqrt{x}}{2x^3}$

$f''(x)=24x^{-4}-\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}=\frac{24}{x^4}-\frac{15}{4x^3\sqrt{x}}=\frac{96-15\sqrt{x}}{4x^4}$

(6) $f(x)=\sqrt{4-3x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-6x}{2\sqrt{4-3x^2}}=-3\cdot\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}$

$f''(x)=-3\cdot\frac{1\cdot\sqrt{4-3x^2}-\frac{-\cancel{6}^{3}x}{\cancel{2}\sqrt{4-3x^2}}\cdot x}{4-3x^2}=$ Mit $\sqrt{4-3x^2}$ erweitern:

$f''(x)=-3\frac{\left(4-3x^2\right)-3x^2}{\left(4-3x^2\right)\sqrt{4-3x^2}}=-3\frac{4-6x^2}{\sqrt{4-3x^2}^3}$

(7) $f(x)=\sqrt{x^2+4x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$

$$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+4x}-\dfrac{\cancel{2x+4}^{\,x+2}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4x}}\cdot(x+2)}{x^2+4x}=\frac{(x^2+4x)-(x+2)^2}{(x^2+4x)\cdot\sqrt{x^2+4x}}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+4x)-(x^2+4x+4)}{(x^2+4x)\cdot\sqrt{x^2+4x}}=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}^3}$$

(8) $f(x)=x\sqrt{x^2+25}$

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{x^2+25}+x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+25}}=\frac{(x^2+25)+x^2}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{2x^2+25}{\sqrt{x^2+25}}$$

$$f''(x)=\frac{4x\cdot\sqrt{x^2+25}-\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+25}}\cdot(2x^2+25)}{x^2+25}=\frac{4x(x^2+25)-x(2x^2+25)}{(x^2+25)\sqrt{x^2+25}}$$

$$f''(x)=\frac{2x^3+75x}{\sqrt{x^2+25}^3}$$

(9) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}=4(2-x)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-2(2-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x}^3}$

$$f''(x)=-3\cdot(2-x)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-1)=\frac{3}{\sqrt{2-x}^5}$$

(10) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x-2}-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(x+1)}{x-2}=\frac{2(x-2)-(x+1)}{2(x-2)\sqrt{x-2}}=\frac{x-5}{2\sqrt{x-2}^3}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2\sqrt{x-2}^3-3\cdot\sqrt{x-2}\cdot(x-5)}{4(x-2)^3}$$

denn die Ableitung des Nenner $2\sqrt{x-2}^3=2(x-2)^{\frac{3}{2}}$ ist $3\cdot(x-2)^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x-2}$.

Nun klammert man im Zähler $\sqrt{x-2}$ aus und kürzt diese Wurzel. Es folgt

$$f''(x)=\frac{2(x-2)-3(x-5)}{4(x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-x+11}{4\sqrt{x-2}^5}.$$

(11) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x+4}-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\cdot x}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-x}{2\sqrt{x+4}(x+4)}=\dfrac{x+8}{2\sqrt{x+4}^3}$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2\sqrt{x+4}^3-3\sqrt{x+4}\cdot(x+8)}{4(x+4)^3}=\frac{\sqrt{x+4}\cdot\left(2(x+4)-3\cdot(x+8)\right)}{4(x+4)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2(x+4)-3\cdot(x+8)}{4(x+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-x-16}{4\sqrt{x+4}^3}$$

denn die Ableitung des Nenners von f' ist

$$\left(2\sqrt{x+4}^3\right)'=\left(2(x+4)^{\frac{3}{2}}\right)'=3\cdot(x+4)^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x+4}$$

(12) $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+8}}$

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x^2+8}-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}\cdot 4x}{\left(x^2+8\right)}=\frac{4\left(x^2+8\right)-4x^2}{\left(x^2+8\right)\sqrt{x^2+8}}=\frac{32}{\sqrt{x^2+8}^3}$$

Für die 2. Ableitung schreiben wir $f'(x)=32\left(x^2+8\right)^{-\frac{3}{2}}$.

$$f''(x)=-48\cdot\left(x^2+8\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=-96\frac{x}{\sqrt{x^2+8}^5}$$

(13) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}}\cdot\frac{1\cdot(x-4)-1\cdot x}{(x-4)^2}=\frac{\sqrt{x-4}\cdot(-4)}{2\sqrt{x}\cdot(x-4)^2}=\frac{-2}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4}^3}$$

Für die 2. Ableitung schreiben wir (weil im Zähler kein x steht:)

$$f'(x)=-2x^{-\frac{1}{2}}\cdot(x-4)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=x^{-\frac{3}{2}}\cdot(x-4)^{-\frac{3}{2}}+\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)(x-4)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}^3\cdot\sqrt{x-4}^3}+\frac{3}{\sqrt{x}\sqrt{x-4}^5}$$

$$f''(x)=\frac{(x-4)+3x}{\sqrt{x}^3\sqrt{x-4}^5}=\frac{4x-4}{\sqrt{x}^3\sqrt{x-4}^5}=4\frac{x-1}{\sqrt{x}^3\sqrt{x-4}^5}$$

(14) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-1\cdot\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-2x}{(x+1)^2\cdot 2\sqrt{x}}=\dfrac{1-x}{(x+1)^2\cdot 2\sqrt{x}}$

Hier muten wir keinem eine zweite Ableitung zu ….

Ableitungen von Exponentialfunktionen

Aufgabe 248:

Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

a) $f(x)=4e^{2x}$

b) $f(x)=e^{x+3}$

c) $f(x)=e^{2-3x}$

d) $f(x)=2e^{-x-1}$

e) $f(x)=x+e^{-\frac{1}{2}x}$

f) $f(x)=x^2-e^{-x}$

Lösung:

a) $f(x)=4e^{2x}$

$f'(x)=4\cdot e^{2x}\cdot 2=8e^{2x}$

$f''(x)=8\cdot e^{2x}\cdot 2=16\cdot e^{2x}$

$f'''(x)=16\cdot e^{2x}\cdot 2=32\cdot e^{2x}$

b) $f(x)=e^{x+3}$

$f'(x)=e^{x+3}=f''(x)=f'''(x)=\ldots$

c) $f(x)=e^{2-3x}$

$f'(x)=-3\cdot e^{2-3x}$

$f''(x)=9\cdot e^{2-3x}$

$f'''(x)=-27\cdot e^{2-3x}$

d) $f(x)=2e^{-x-1}$

$f'(x)=2e^{-x-1}\cdot(-1)=-2e^{-x-1}$

$f''(x)=2e^{-x-1}=f(x)$

$f'''(x)=f'(x)$

e) $f(x)=x+e^{-\frac{1}{2}x}$ $f'(x)=1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'''(x)=-\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}$

f) $f(x)=x^2-e^{-x}$ $f'(x)=2x+e^{-x}$

$f''(x)=2-e^{-x}$

$f'''(x)=e^{-x}$

Aufgabe 249:

Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

a) $f(x)=x\cdot e^{-x}$

b) $f(x)=x\cdot e^{2-x}$

c) $f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$

d) $f(x)=(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

e) $f(x)=\frac{e^{x}+x}{e^{2x}}$

f) $f_t(x)=tx\cdot e^{\frac{1}{2}x-1}$

g) $f_k(x)=\frac{1}{k}x\cdot e^{-kx}$

h) $f_t(x)=(x^2-t^2)\cdot e^{-x}$

Lösung:

a) $f(x)=x\cdot e^{-x}$

$$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(1-x)$$
$$f''(x)=-e^{-x}\cdot(1-x)+e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}(2-x)$$
$$f'''(x)=e^{-x}(2-x)-e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(3-x)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot e^{-x}\cdot(n-x)=(-1)^{n}\cdot e^{-x}\cdot(x-n)$

Man kann dies durch vollständige Induktion beweisen !

b) $f(x)=x\cdot e^{2-x}$

$$f'(x)=1\cdot e^{2-x}+x\cdot e^{2-x}\cdot(-1)=e^{2-x}(1-x)=-e^{2-x}(x-1)$$
$$f''(x)=-e^{2-x}(1-x)\cdot e^{2-x}(-1)=-e^{2-x}(2-x)=e^{2-x}(x-2)$$
$$f'''(x)=-e^{2-x}(x-2)+e^{2-x}=e^{2-x}(-x+3)=-e^{2-x}(x-3)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n}e^{2-x}(x-n)$

c) $f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$

$$f'(x)=e^{x}+(x+2)e^{x}=e^{x}(x+3)$$
$$f''(x)=e^{x}+(x+3)e^{x}=e^{x}(x+4)$$
$$f''(x)=e^{x}+(x+4)e^{x}=e^{x}(x+5)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=e^{x}(x+n+2)$

d) $f(x)=(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$$f'(x)=-e^{-\frac{1}{2}x}+(1-x)e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-\tfrac{1}{2})=e^{-\frac{1}{2}x}(-1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x)$$
$$=(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{2})\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=\tfrac{1}{2}(x-3)e^{-\frac{1}{2}x}=-\tfrac{1}{2}(3-x)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$f''(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot[1-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}]$$
$$=\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}x)=\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(5-x)$$
$$f'''(x)=\tfrac{1}{4}\left[e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-\tfrac{1}{2})(5-x)+e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-1)\right]=\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\left[-\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}x-1\right]$$
$$=\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left[-\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2}x\right]=\tfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(x-7)=-\tfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(7-x)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=(-\tfrac{1}{2})^{n}e^{-\frac{1}{2}x}(2n+1-x)$

Die Koeffizienten sind Potenzen von $(-\tfrac{1}{2})$ und zwar so, daß sie bei geradem Exponenten positiv sind, bei ungeradem negativ, also stimmt der Faktor $(-\tfrac{1}{2})^{n}$

e) $f(x)=\frac{e^x+x}{e^{2x}}=(e^x+x)\cdot e^{-2x}=e^{-x}+x\cdot e^{-2x}$!!!

$$f'(x)=-e^{-x}+e^{-2x}+x\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=-e^{-x}+e^{-2x}(1-2x)=\frac{-e^x+1-2x}{e^{2x}}$$

$$f''(x)=e^{-x}-2e^{-2x}(1-2x)+e^{-2x}(-2)=e^{-x}-2e^{-2x}(1-2x+1)$$

$$=e^{-x}-2e^{-2x}(2-2x)=\frac{e^x-2(2-2x)}{e^{2x}}=\frac{e^x-4+4x}{e^{2x}}$$

$$f'''(x)-e^{-x}+4e^{-2x}(2-2x)-2e^{-2x}(-2)=-e^{-x}+4e^{-2x}(2-2x+1)$$

$$=-e^{-x}+4e^{-2x}(3-2x)=\frac{-e^x+4(3-2x)}{e^{2x}}=\frac{-e^x+12-8x}{e^{2x}}$$

Will man hier eine Formel für die n-te Ableitung suchen, sollte man zuerst einmal den Faktor -1 herausziehen, der abwechseln vor e^x im Zähler steht. Damit erhält man folgende Formeln:

$$f(x)=\frac{e^x+x}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=-\frac{e^x-1+2x}{e^{2x}}$$

$$f''(x)=\frac{e^x-4+4x}{e^{2x}}$$

$$f'''(x)=-\frac{e^x-12+8x}{e^{2x}}$$

jetzt entdeckt man folgende Formel:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{e^x-a_n+2^nx}{e^{2x}}$$

Die Zahlenfolge a_n entsteht bei der Ableitung so (siehe oben):

$a_2=2\cdot(1+1)=2\cdot2=4$
$a_3=4\cdot(2+1)=4\cdot3=12$ Entsprechend kann man zeigen
$a_4=8\cdot(3+1)=8\cdot4=32$
$a_5=16\cdot(4+1)=16\cdot5=80$

Also kann man diese Formel vermuten: $a_n=2^{n-1}\cdot n$

Damit lautet die *Vermutung* für die n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{e^x-n\cdot2^{n-1}+2^nx}{e^{2x}}\ \text{bzw.}\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{e^x+2^{n-1}(2x-n)}{e^{2x}}$$

f) $f_t(x)=tx\cdot e^{\frac{1}{2}x-1}$

$$f_t'(x)=t\cdot e^{\frac{1}{2}x-1}+tx\cdot e^{\frac{1}{2}x-1}\cdot\tfrac{1}{2}=te^{\frac{1}{2}x-1}\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)=\tfrac{1}{2}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+2)$$
$$f_t''(x)=\tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+2)+\tfrac{1}{2}te^{\frac{1}{2}x-1}=\tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1}[x+2+2]=\tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+4)$$
$$f_t'''(x)=\tfrac{1}{8}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+4)+\tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1}\cdot 1=\tfrac{1}{8}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+4+2)=\tfrac{1}{8}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+6)$$

g) $f_k(x)=\tfrac{1}{k}x\cdot e^{-kx}$

Hier lasse ich den Faktor $\frac{1}{k}$ als konstanten Faktor unverändert stehen:

$$f'(x)=\tfrac{1}{k}\cdot\left[1\cdot e^{-kx}+x\cdot e^{-kx}\cdot(-k)\right]=\tfrac{1}{k}\cdot e^{-kx}(1-kx)$$
$$f''(x)=\tfrac{1}{k}\cdot\left[-ke^{-kx}(1-kx)+e^{-kx}\cdot(-k)\right]=\tfrac{1}{k}(-k)e^{-kx}[1-kx+1]=-e^{-kx}(2-kx)$$
$$f'''(x)=ke^{-kx}\cdot(2-kx)-e^{-kx}(-k)=ke^{-kx}\cdot[2-kx+1]=ke^{-kx}(3-kx)$$

h) $f_t(x)=\left(x^2-t^2\right)\cdot e^{-x}$

$$f_t'(x)=2x\cdot e^{-x}+\left(x^2-t^2\right)e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}\left(2x-x^2+t^2\right)=e^{-x}\left(-x^2+2x-t^2\right)$$
$$=-e^{-x}\left(x^2-2x+t^2\right)$$
$$f_t''(x)=-e^{-x}\left(-x^2+2x-t^2\right)+e^{-x}(-2x+2)=e^{-x}\left(x^2-4x+2+t^2\right)$$
$$f_t'''(x)=-e^{-x}\left(x^2-4x+2+t^2\right)+e^{-x}(2x-4)=-e^{-x}\left(x^2-4x+2+t^2-2x+4\right)$$
$$=-e^{-x}\left(x^2-6x+6+t^2\right)$$

Aufgabe 250:

Leiten Sie folgende Funktionen zweimal ab.

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{1-e^x}{2x}$

d) $f_t(x)=\dfrac{e^{-x}}{t-e^{-x}}$

e) $f(x)=2-\dfrac{4}{e^{2x}-1}$

f) $f_t(x)=\dfrac{e^x-t}{e^x+t}$

g) $f(x)=\dfrac{e^x}{2-e^x}$

h) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-4}{e^x}$

Lösung:

a) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ Mit der Quotientenregel folgt

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-1\cdot e^x}{x^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left[e^x(x+1)+e^x\cdot 1\right]\cdot x^{\cancel{2}}-2\cancel{x}\cdot e^x(x-1)}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{e^x\left(x^2+x+x-2x+2\right)}{x^3}$$

$$=\frac{e^x\left(x^2+2\right)}{x^3}$$

b) $f(x)=\frac{e^{-x}}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)-e^{-x}}{(x+1)^2}=\frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^{-x}\left[(x+2)(x+1)-(x+1)+2(x+2)\right]}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{e^{-x}\left[x^2+3x+2-x-1+2x+4\right]}{(x+1)^3}=\frac{e^{-x}\left(x^2+4x+5\right)}{(x+1)^3}$$

c) $f(x)=\frac{1-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^x}{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-e^x\cdot x-\left(1-e^x\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-e^x\cdot x-1+e^x}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x(1-x)-1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[e^x(1-x)+e^x(-1)\right]\cdot x^{\cancel{2}}-2\cancel{x}\cdot\left[e^x(1-x)-1\right]}{x^{\cancel{4}3}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\left[(1-x)x-x-2(1-x)\right]-2}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\left[x-x^2-x-2+2x\right]-2}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\left[-x^2+2x-2\right]-2}{x^3}$$

d) $f_t(x)=\frac{e^{-x}}{t-e^{-x}}=\frac{1}{te^x-1}=\left(te^x-1\right)^{-1}$

Durch diese Erweiterung mit e^x wird die Aufgabe deutlich einfacher !

$$f_t'(x)=-\left(te^x-1\right)^{-2}\cdot\left(te^x\right)=-t\frac{e^x}{\left(te^x-1\right)^2}$$

$$f_t''(x)=-t\cdot\frac{e^x\left(te^x-1\right)^{\cancel{2}}-2\left(te^x-1\right)\left(te^x\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}3}}=-t\cdot\frac{e^x\left(te^x-1\right)^{\cancel{2}}-2\left(te^x-1\right)\left(te^x\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}3}}$$

$$=-t\cdot\frac{te^{2x}-e^x-2t^2e^{2x}+2te^x}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}3}}=-t\cdot\frac{te^{2x}\left(t-2t^2\right)+e^x\left(2t-2t^2\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}3}}$$

$$=-t\cdot\frac{t^2e^{2x}(1-2t)+2te^x(1-t)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}3}}=-t^2\cdot\frac{te^{2x}(1-2t)+2e^x(1-t)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}3}}$$

e) $f(x)=2-\frac{4}{e^{2x}-1}=2-4\left(e^{2x}-1\right)^{-1}$

$$f'(x)=4\left(e^{2x}-1\right)^{-2}\cdot 2e^{2x}=8\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$f''(x)=8\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{2}}-2\cancel{\left(e^{2x}-1\right)}\cdot 2e^{2x}\cdot e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{4}3}}=8\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)-4e^{2x}\cdot e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{4}3}}$$

$$=8\frac{2e^{4x}-2e^{2x}-4e^{4x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{4}3}}=8\frac{-2e^{4x}-2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^3}=-16\frac{e^{4x}+e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^3}$$

f) $f_t(x)=\frac{e^x-t}{e^x+t}$

$$f_t'(x)=\frac{e^x\left(e^x+t\right)-e^x\left(e^x-t\right)}{\left(e^x+t\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+t-e^x+t\right)}{\left(e^x+t\right)^2}=\frac{e^x\cdot 2t}{\left(e^x+t\right)^2}=2t\frac{e^x}{\left(e^x+t\right)^2}$$

$$f_t''(x)=2t\cdot\frac{e^x\cdot\left(e^x+t\right)^{\cancel{2}}-2\cancel{\left(e^x+t\right)}\cdot e^x\cdot e^x}{\left(e^x+t\right)^{\cancel{4}3}}=2t\cdot\frac{e^x\cdot\left(e^x+t\right)-2e^{2x}}{\left(e^x+t\right)^3}$$

$$=2t\cdot\frac{e^{2x}+te^x-2e^{2x}}{\left(e^x+t\right)^3}=2t\cdot\frac{te^x-e^{2x}}{\left(e^x+t\right)^3}=2t\cdot\frac{e^x\left(t-e^x\right)}{\left(e^x+t\right)^3}$$

g) $f(x)=\frac{e^x}{2-e^x}$

$$f'(x)=\frac{e^x\left(2-e^x\right)-\left(-e^x\right)\cdot e^x}{\left(2-e^x\right)^2}=\frac{2e^x-e^{2x}+e^{2x}}{\left(2-e^x\right)^2}=-\frac{e^{2x}}{\left(2-e^x\right)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2e^{2x}\left(2-e^x\right)^{\cancel{2}}-\cancel{2\left(2-e^x\right)}\cdot\left(-e^x\right)\cdot e^{2x}}{\left(2-e^x\right)^{\cancel{4}\,3}}=-\frac{2e^{2x}\left(2-e^x\right)+2e^{3x}}{\left(2-e^x\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

h) $f(x)=\frac{e^{2x}-4}{e^x}$

Da der Nenner keine Summe enthält zerlegt man in zwei Brüche:

$$f(x)=e^x-4e^{-x}$$

$$f'(x)=e^x+4e^{-x}=e^x+\frac{4}{e^x}=\frac{e^{2x}+4}{e^x}$$

$$f''(x)=e^x-4e^{-x}=f(x)$$

Ableitungen von Logarithmusfunktionen

Aufgabe 251:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x)=\ln(x-2)$ b) $f(x)=\ln(2-x)$

c) $f(x)=x+\ln x$ d) $f(x)=\ln(4x)$

e) $f(x)=\ln\frac{x}{2}$ f) $f(x)=4\cdot\ln(\frac{1}{4}x)$

g) $f(x)=\ln(2x)-\frac{1}{2}x$ h) $f(x)=x^2-\ln(1-4x)$

Lösung:

a) $f(x)=\ln(x-2)$

$$f'(x)=\frac{1}{x-2}=(x-2)^{-1}$$

$$f''(x)-(x-1)^{-2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

b) $f(x)=\ln(2-x)$

$$f'(x)=\frac{-1}{2-x}=-(2-x)^{-1}$$

$$f''(x)=(2-x)^{-2}\cdot(-1)=\frac{-1}{(2-x)^2}$$

c) $f(x)=x+\ln x$

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

d) $f(x)=\ln(4x)$

$$f'(x)=\frac{1}{4x}\cdot 4=\frac{1}{x}; \qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

e) $f(x)=\ln\frac{x}{2}$

$$f'(x)=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

f) $f(x)=4\cdot\ln\left(\frac{1}{4}x\right)$

$$f'(x)=4\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}x}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{x} \qquad f''(x)=-\frac{4}{x^2}$$

g) $f(x)=\ln(2x)-\frac{1}{2}x$

$$f'(x)=\frac{1}{2x}\cdot 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

h) $f(x)=x^2-\ln(1-4x)$

Für die zweite Ableitung !

$$f'(x)=2x-\frac{-4}{1-4x}=2x+\frac{4}{1-4x}=\frac{2x-8x^2+4}{1-4x} \quad \left[=2x+4(1-4x)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=2-4(1-4x)^{-2}\cdot(-4)=2+\frac{16}{(1-4x)^2}$$

Aufgabe 252:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x)=\ln(6x-x^2)$ b) $f(x)=\ln(x^2-16)$

c) $f(x)=\ln x(x-a)$ d) $f(x)=\ln\frac{x}{t}(4-x)$

Lösung:

a) $f(x)=\ln(6x-x^2)$

$$f'(x)=\frac{6-2x}{6x-x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(6x-x^2)-(6-2x)^2}{(6x-x^2)^2}=\frac{-12x+2x^2-36+24x-4x^2}{(6x-x^2)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+12x-36}{(6x-x^2)^2}$$

b) $f(x)=\ln(x^2-16)$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-16}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2-16)-2x\cdot 2x}{(x^2-16)^2}=\frac{-2x^2-32}{(x^2-16)^2}$$

c) $f(x)=\ln x(x-a)=\ln\left(x^2-ax\right)$

$$f'(x)=\frac{2x-a}{\left(x^2-ax\right)}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2-ax\right)-(2x-a)^2}{\left(x^2-ax\right)^2}=\frac{2x^2-2ax-4x^2+4ax-a^2}{\left(x^2-ax\right)^2}$$

$$=\frac{-2x^2-2ax-a^2}{\left(x^2-ax\right)^2}=-\frac{2x^2+2ax+a^2}{\left(x^2-ax\right)^2}$$

d) $f(x)=\ln\frac{x}{t}(4-x)=\ln\frac{1}{t}+\ln\left(4x-x^2\right)$

$$f'(x)=\frac{4-2x}{\left(4x-x^2\right)}$$

$$f''(x)=\frac{-2\left(4x-x^2\right)-(4-2x)^2}{\left(4x-x^2\right)^2}=\frac{-8x+2x^2-16+16x-4x^2}{\left(4x-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+8x-16}{\left(4x-x^2\right)^2}$$

oder so: $f(x)=\ln\left(\frac{4}{t}x-\frac{1}{t}x^2\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{4}{t}-\frac{2}{t}x}{\frac{4}{t}x-\frac{1}{t}x^2}=\frac{4-2x}{4x-x^2}$

Aufgabe 253:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ b) $f(x)=\ln\frac{2-x}{x+4}$

c) $f(x)=\ln\frac{4x-1}{x}$ d) $f(x)=\ln\frac{x^2-4}{x^2}$

Lösung:

a) $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{-2}{(x^2-1)}\quad\left[=-2(x^2-1)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=2(x^2-1)^{-2}\cdot 2x=4\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

b) $f(x)=\ln\frac{2-x}{x+4}$

$$f'(x)=\frac{\cancel{x+4}}{2-x}\cdot\frac{-(x+4)-(2-x)}{(x+4)^{\cancel{2}}}=\frac{-6}{(2-x)(x+4)}=\frac{-6}{-x^2-2x+8}$$

$$=\frac{6}{x^2+2x-8}\quad\left[=6(x^2+2x-8)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=-6(x^2+2x-8)^{-2}\cdot(2x+2)=-12\frac{x+1}{(x^2+2x-8)^2}$$

c) $f(x)=\ln\frac{4x-1}{x}\quad\left[=\ln\left(4-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(4-x^{-1}\right)\right]$ (für die 1. Ableitung!)

$$f'(x)=\frac{x}{4x-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x(4x-1)}=\frac{1}{4x^2-x}\quad\left[=(4x^2-x)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=-(4x^2-x)^{-2}\cdot(8x-1)=-\frac{8x-1}{(4x^2-x)^2}$$

d) $f(x)=\ln\frac{x^2-4}{x^2}\quad\left[=\ln\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=\ln\left(1-4x^{-2}\right)\right]$ (für die 1. Ableitung!)

$$f'(x)=\frac{x^2}{x^2-4}\cdot 8x^{-3}=\frac{8}{(x^2-4)x}=\frac{8}{x^3-4x}\quad\left[=8(x^3-4x)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=-8(x^3-4x)^{-2}\cdot(3x^2-4)=-8\frac{3x^2-4}{(x^3-4x)^2}$$

Aufgabe 254:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x)=x\cdot\ln(x-4)$ b) $f(x)=(x-2)\cdot\ln x$

c) $f(x)=x^2\cdot\ln x$ d) $f(x)=\frac{x}{t}\cdot\ln(tx)$

Lösung:

a) $f(x)=x\cdot\ln(x-4)$

$$f'(x)=1\cdot\ln(x-4)+x\cdot\frac{1}{x-4}=\ln(x-4)+\frac{x}{x-4}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x-4}+\frac{(x-4)-x}{(x-4)^2}=\frac{1}{x-4}+\frac{-4}{(x-4)^2}=\frac{x-4-4}{(x-4)^2}=\frac{x-8}{(x-4)^2}$$

b) $f(x)=(x-2)\cdot\ln x$

$$f'(x)=\ln x+(x-2)\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1-\frac{2}{x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{x+2}{x^2}$$

c) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

$$f'(x)=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\cdot\ln x+x=x(2\ln x+1)$$

$$f''(x)=2\ln x+1+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+3$$

d) $f(x)=\frac{x}{t}\cdot\ln(tx)$

$$f'(x)=\frac{1}{t}\cdot\ln(tx)+\frac{x}{t}\cdot\frac{t}{tx}=\frac{1}{t}\cdot\ln(tx)+\frac{1}{t}$$

$$f''(x)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{tx}$$

Aufgabe 255:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x)=\frac{2-\ln x}{x}$ b) $f(x)=\frac{a+\ln x}{2x}$

c) $f(x)=(\ln x)^2$ d) $f(x)=[\ln(x+2)]^2$

e) $f(x)=(\ln x-1)^2$ f) $f(x)=4\sqrt{a-\ln x}$

Lösung:

a) $f(x)=\frac{2-\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot(2-\ln x)}{x^2}=\frac{-1-2+\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-3}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot(\ln x-3)}{x^4}=\frac{x-2x\cdot\ln x+6x}{x^4}=\frac{7x-2x\cdot\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{7-2\ln x}{x^3}$$

b) $f(x)=\frac{a+\ln x}{2x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot 2x-2\cdot(a+\ln x)}{4x^2}=\frac{2-2a-2\ln x}{4x^2}=\frac{1-a-\ln x}{2x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x^2-4x\cdot(1-a-\ln x)}{4x^4}=\frac{-2x-4x+4ax+4x\cdot\ln x}{4x^4}$$

$$=\frac{-6x+4ax+4x\cdot\ln x}{4x^4}=\frac{-6+4a+4\ln x}{4x^3}$$

c) $f(x)=(\ln x)^2$

$$f'(x)=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}=2\frac{\ln x}{x}$$

$$f''(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=2\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

d) $f(x)=\left[\ln(x+2)\right]^2$

$$f'(x)=2\cdot\ln(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}=2\cdot\frac{\ln(x+2)}{x+2}$$

$$f''(x)=2\frac{\frac{1}{x+2}(x+2)-\ln(x+2)}{(x+2)^2}=2\frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}$$

e) $f(x)=(\ln x-1)^2$

$$f'(x)=2\cdot(\ln x-1)\cdot\frac{1}{x}=2\cdot\frac{\ln x-1}{x}$$

$$f''(x)=2\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)}{x^2}=2\frac{1-\ln x+1}{x^2}=2\frac{2-\ln x}{x^2}$$

f) $f(x)=4\sqrt{a-\ln x}$

$$f'(x)=4\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}=-2\cdot\frac{1}{x\sqrt{a-\ln x}}$$

1. Möglichkeit: $f'(x)=-2\left(x\sqrt{a-\ln x}\right)^{-1}$

$$f''(x)=2\left(x\sqrt{a-\ln x}\right)^{-2}\cdot\left[1\cdot\sqrt{a-\ln x}+x\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}\right]$$

$$=2\frac{\sqrt{a-\ln x}-\frac{1}{2\sqrt{a-\ln x}}}{\left(x\cdot\sqrt{a-\ln x}\right)^2}=2\frac{2(a-\ln x)-1}{x^2(a-\ln x)2\sqrt{a-\ln x}}$$

$$=\frac{2(a-\ln x)-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}=\frac{2a-2\ln x-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

2. Möglichkeit: mit der Quotientenregel:

$$f''(x)=-2\cdot\frac{0-\left[1\cdot\sqrt{a-\ln x}+x\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}\right]}{x^2(x-\ln x)}$$

$$=-2\cdot\frac{-\left[2\cdot\left(\sqrt{a-\ln x}\right)^2-1\right]}{x^2(x-\ln x)2\sqrt{a-\ln x}}=\frac{\left[2\cdot(a-\ln x)-1\right]}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

$$=\frac{2a-2\ln x-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

Kurvendiskussion

Aufgabe 256:

1) $\frac{x^4 + 8x^2 + 16}{2x^4 - 32}$

2) $\frac{x^4 - 16x^2}{x^3 + 2x^2 - 24x}$

3) $\frac{3x^2 - 24x + 45}{6x^2 - 18x - 60}$

4) $\frac{3x^2 - 5x + 2}{3x - 2}$

5) $\frac{a^3 - 2a^2 + a}{a^2 - a^4}$

6) $\frac{2x^2 - 3x - 2}{4x^2 - 1}$

7) $\frac{4x^2 - 24x + 36}{2x^4 - 162}$

8) $\frac{0{,}6x^2 + 0{,}5x - 0{,}4}{0{,}2x - 0{,}1}$

9) $\frac{-\frac{1}{8}x^2 - 6 + 2x}{3 - \frac{1}{4}x}$

Bringen Sie den folgenden Term auf den in Klammern angegebenen Nenner und vereinfachen dann nur den Zähler.

10) $\frac{2x}{x - 1}$ $\left[x^2 + x - 2\right]$

11) $\frac{7x - y}{4x - 3y}$ $\left[6xy - 8x^2\right]$

Lösung:

1) $\frac{x^2 + 4}{2(x - 2)(x + 2)}$; D = R\{2;-2}

2) $\frac{x(x + 4)}{x + 6}$; D = R\{4;-6;0}

3) $\frac{x - 3}{2(x + 2)}$; D = R\{-2;5}

4) x-1 ; $D = Q / \left\{\frac{2}{3}\right\}$

5) $\frac{1 - a}{(a(a + 1))}$; D = R\{0;-1;1}

6) $\frac{x - 2}{2x - 1}$; $D = Q / \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

7) $\frac{2(x - 3)}{(x + 3)(x^2 + 9)}$; D = R\{-3;3}

8) 3x+4 ; D = R\{0,5}

9) $\frac{x - 4}{2}$; D = R\{12}

10) $\frac{2x^2 + 4x}{(x - 1)\ (x + 2)}$

11) $\frac{-14x^2 + 2xy}{(4x - 3y)\ (-2x)}$

Aufgabe 257:

Ermitteln Sie zu folgende Aufgaben jeweils die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten.

$f(x) = \frac{4}{x-2}$

$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

$f(x) = \frac{8}{x^2-4}$

$f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$

Lösung:

Der Zähler ist konstant und hat daher keine Nullstellen.
Nullstelle des Nenners: $x = 2$ daher Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$
f hat also bei $x = 2$ eine Polstelle mit Zeichenwechsel,

Asymptoten:
senkrecht: $x = 2$.

waagerecht: $y = 0$, denn $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x-2} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2}{x}} = \frac{0}{1-0} = 0$

Ableitungen: $f(x) = \frac{4}{x-2} = 4(x-2)^{-1}$

$f'(x) = -4(x-2)^{-2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$

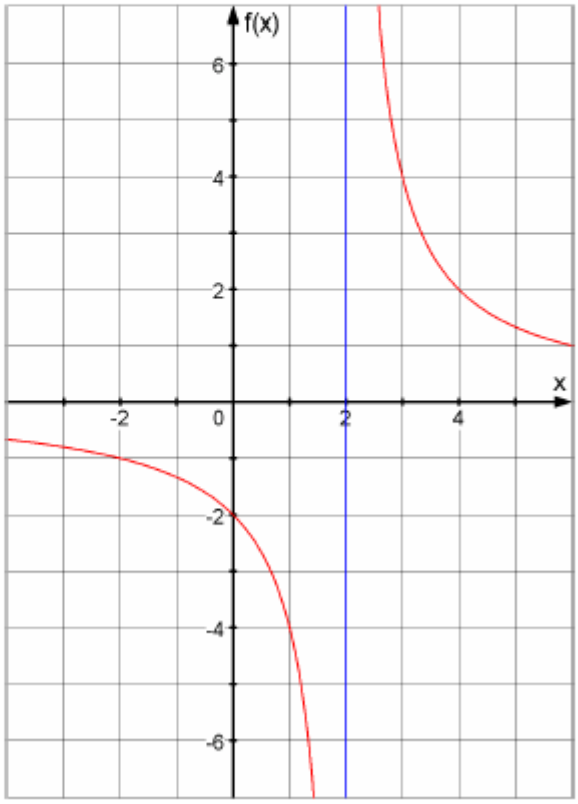
$f''(x) = 8(x-2)^{-3} = \frac{8}{(x-2)^3}$

Da f' und f'' keine Nullstellen Besitzen (konstanter Zähler), hat das Schaubild K von f **keine Extrempunkte und keine Wendepunkte**.

Wertmenge:
$\mathbf{W} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Symmetrie:
K ist punktsymmetrisch zu Z (2 I 0).

Zum Beweis rechnet man nach, daß folgendes gilt:
$f(2+h) + f(2-h) = 0$
(Siehe Gebrochen rationale Funktionen Eigenschaften 'Teil 2)



Zähler = 0: $x = 0$; Nenner = 0: $x = \pm 2$. $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Das Schaubild schneidet folglich die x-Achse in der Nullstelle (0 I 0)
und f hat die Polstellen $x = 2$ und $x = -2$ jeweils mit Zeichenwechsel.

Asymptoten: senkrecht: $x = 2$ und $x = -2$.
waagerecht: $y = 0$, denn

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{|x|\to\infty} \frac{2}{x}}{1-\lim_{|x|\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{2(x^2-4)-2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} = -2\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$

$$f''(x) = -2\frac{2x(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^4} = -2\frac{(x^2-4)\left[2x(x^2-4)-4x(x^2+4)\right]}{(x^2-4)^4}$$

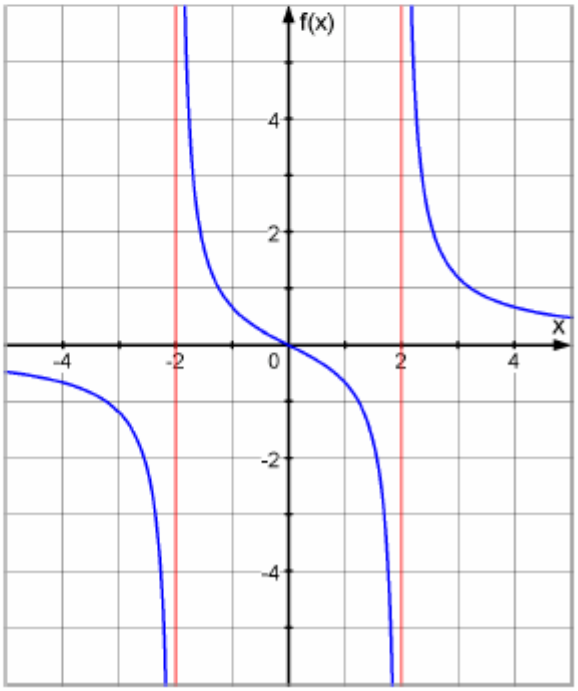
$$= -2\frac{2x(x^2-4)-4x(x^2+4)}{(x^2-4)^3} = -2\frac{2x^3-8x-4x^3-16x}{(x^2-4)^3} = -2\frac{-2x^3-24x}{(x^2-4)^3} = 4\frac{x^3+12x}{(x^2-4)^3}$$

Extrempunkte:
f' hat keine Nullstellen, da $x^2 + 4$ nie Null werden kann Also besitzt das Schaubild K von f keine Extrempunkte.

Wendepunkte:
$f''(x_W) = 0$ bedeutet
$x_W^3 - 4x_W = 0$ d.h.
$x_W(x_W^2 + 12) = 0$
ergibt $x_W = 0$. Die Klammer liefert keine weitere Nullstelle von f''.
y-Koordinate: f(0) = 0.

Kontrolle:
Zur Kontrolle muß **entweder** $f'''(0) \neq 0$ nachgewiesen werden, **oder** man stellt fest:
f'' hat bei 0 eine einfache Nullstelle, d.h. f'' hat bei 0 Vorzeichenwechsel, d.h. K hat in W (0 I 0) Krümmungswechsel.
Ergebnis: W ist Wendepunkt.

Da f(-x) = - f(x) ist K **symmetrisch** zu = O.



Der Zähler hat keine Nullstelle, daher auch nicht die Funktion.

Nullstellen des Nenners: $x = \pm 2$

Da f die beiden Polstellen $x = 2$ und $x = -2$ (jeweils mit Zeichenwechsel) hat, besitzt K die senkrechten **Asymptoten** $x = 2$ und $x = -2$.
Ferner hat K die waagerechte Asymptote $y = 0$, denn

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{8}{x^2-4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{|x|\to\infty} \frac{8}{x^2}}{1-\lim_{|x|\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Ableitungen: $f(x) = \frac{8}{x^2-4} = 8(x^2-4)^{-2}$

$$f'(x) = -16(x^2-4)^{-3} \cdot 2x = -32\frac{x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = -32\frac{1\cdot(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x\cdot x}{(x^2-4)^4} = -32\frac{(x^2-4)\left[(x^2-4)-4x^2\right]}{(x^2-4)^4} = -32\frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3}$$

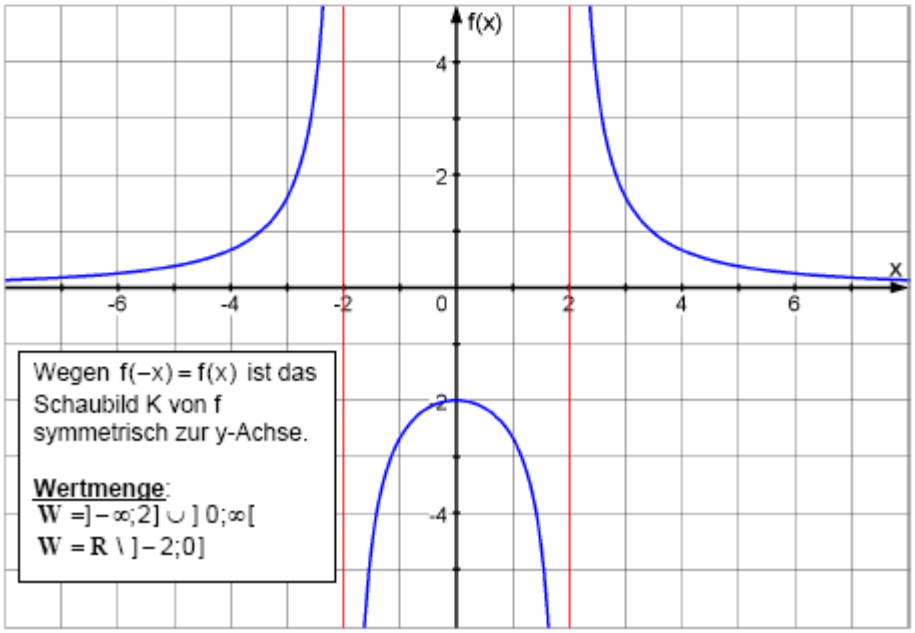
Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = 0$.

Kontrolle: $f''(0) = -32\frac{-4}{(-4)^3} < 0$ d.h. f hat bei 0 ein relatives Minimum

mit $f(0) = -2$. Ergebnis: K hat den Tiefpunkt T (0 | - 2).

Wendepunkte: Bed.: $f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow -3x_W^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x_W^2 = -4$

Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, also besitzt K keinen Wendepunkt.



Wegen $f(-x) = f(x)$ ist das Schaubild K von f symmetrisch zur y-Achse.

Wertmenge:
$W =]-\infty;2] \cup]0;\infty[$
$W = \mathbb{R} \setminus]-2;0]$

Der Zähler besitzt keine Nullstellen, der Nenner jedoch die doppelte Nullstelle x = 2.
Daher gibt es keine Schnittpunkte von K mit der x-Achse.

x = 2 ist Polstelle von f **ohne** Zeichenwechsel, also gilt $\mathbf{D = R \setminus \{2\}}$

Asymptoten: senktecht: x = 2 (Polstelle von f)
waagerecht : y = 0, denn

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{5}{(x-2)^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{5}{x^2-4x+4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{|x|\to\infty} \frac{5}{x^2}}{1-\lim_{|x|\to\infty} \frac{4}{x}+\lim_{|x|\to\infty} \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1-0-0} = 0$$

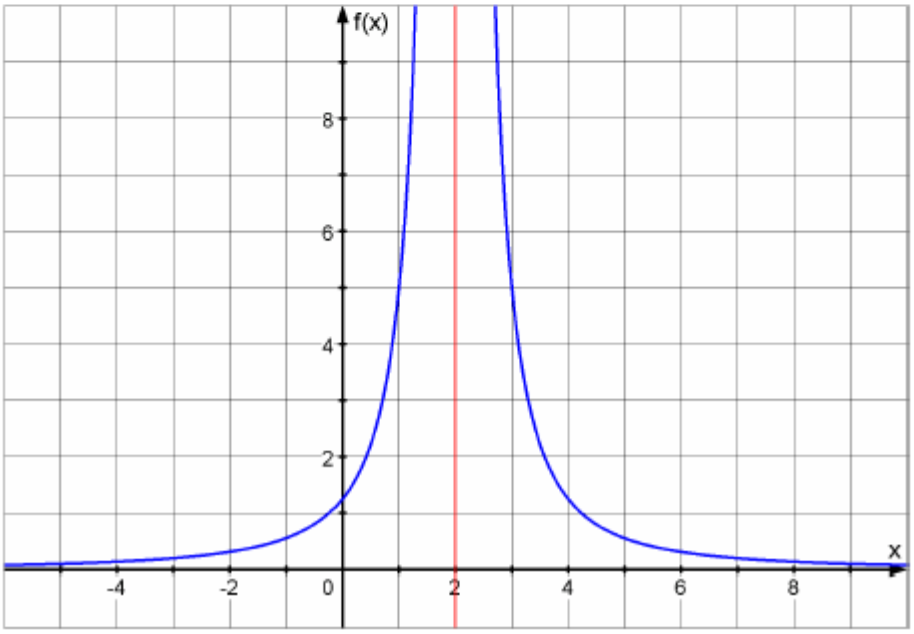
Ableitungen: $f(x) = \frac{5}{(x-2)^2} = 5(x-2)^{-2}$

$$f'(x) = -10(x-2)^{-3} = \frac{-10}{(x-2)^3} \qquad f''(x) = 30(x-2)^{-4} = \frac{-30}{(x-2)^4}$$

Extrempunkte: keine, denn f' hat keine Nullstelle.
Wendepunkte: keine, denn f'' hat keine Nullstelle.

Symmetrie: K ist symmetrisch zur Geraden x = 2.
Beweis: Es gilt f(2 - h) = f(2 + h) (hier ohne Beweis)
Siehe Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

Wertmenge: $\mathbf{W = \mathbb{R}^+}$



Aufgabe 258:

Ermitteln Sie zu folgende Aufgaben jeweils die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten.

(7) $f(x) = 3 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$

(8) $f(x) = \frac{4x+2}{2-x}$

(9) $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$

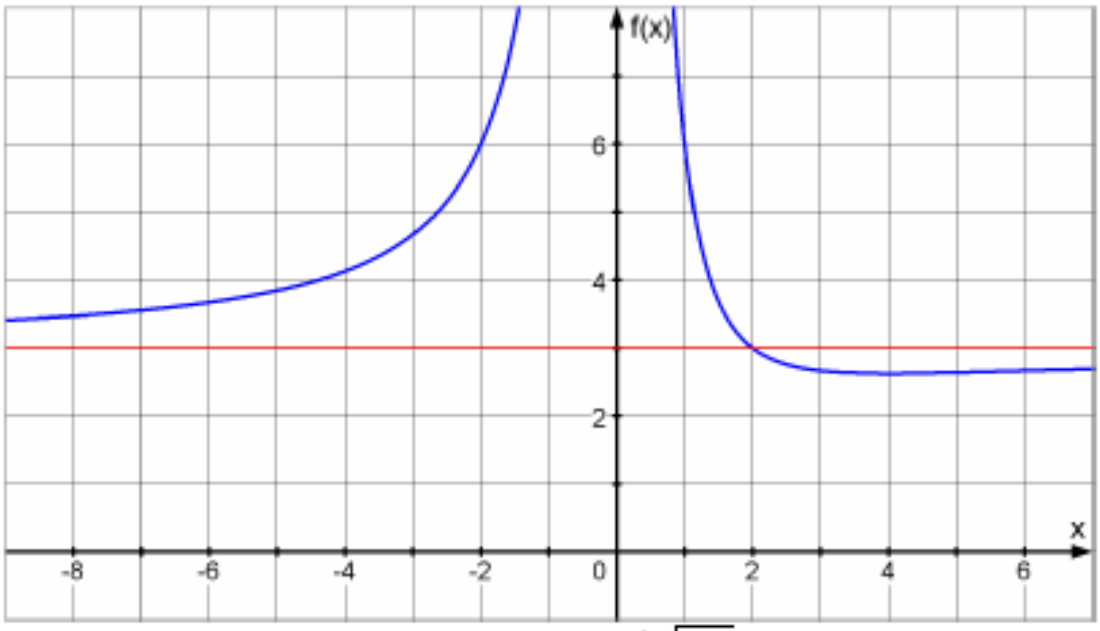
(10) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

(11) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4x}$

(12) $f(x) = \frac{16-4x^2}{x^2+16}$

Lösung:

(7)
$$f(x)=3-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}=3-3x^{-1}+6x^{-2}=3\frac{x^2-x+2}{x^2}$$
$$f'(x)=3x^{-2}-12x^{-3}=\frac{3}{x^2}-\frac{12}{x^3}=\frac{3x-12}{x^3}=3\frac{x-4}{x^3}$$
$$f''(x)=-6x^{-3}+36x^{-4}=-\frac{6}{x^3}+\frac{36}{x^4}=6\frac{-x+6}{x^4}$$
$$f'''(x)=18x^{-4}-144x^{-5}=\frac{18}{x^4}-\frac{144}{x^5}=8\frac{x-8}{x^5}$$



Zähler = 0: $x^2-x+2=0$ d.h. $x_N=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}\notin\mathbf{R}$

Nenner = 0 $x=0$ doppelte Lösung d.h. $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{0\}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: keine

Polstellen: $x_P=0$ ohne Zeichenwechsel.

Asymptoten: Waagerecht: $y=3$, denn $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Senkrecht: $x=0$ (Polstelle von f)

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E)=0$ d.h. $x_E=4$ mit $f(0)=\frac{21}{8}$

Kontrolle: $f''(4)=6\frac{-4+6}{4^4}>0$

d.h. f hat bei 4 ein relatives Minimum und K den Tiefpunkt (4 I $\frac{21}{8}$).

Wendepunkte: Bed.: $f''(x_W)=0$ d.h. $x_W=6$ mit $f(6)=\frac{8}{3}$

Kontrolle: Da f'' dort einfache Nullstellen hat, hat f'' Zeichenwechsel,
d.h. K hat Krümmungswechsel: $W_{1,2}\left(6\,|\,\frac{8}{3}\right)$

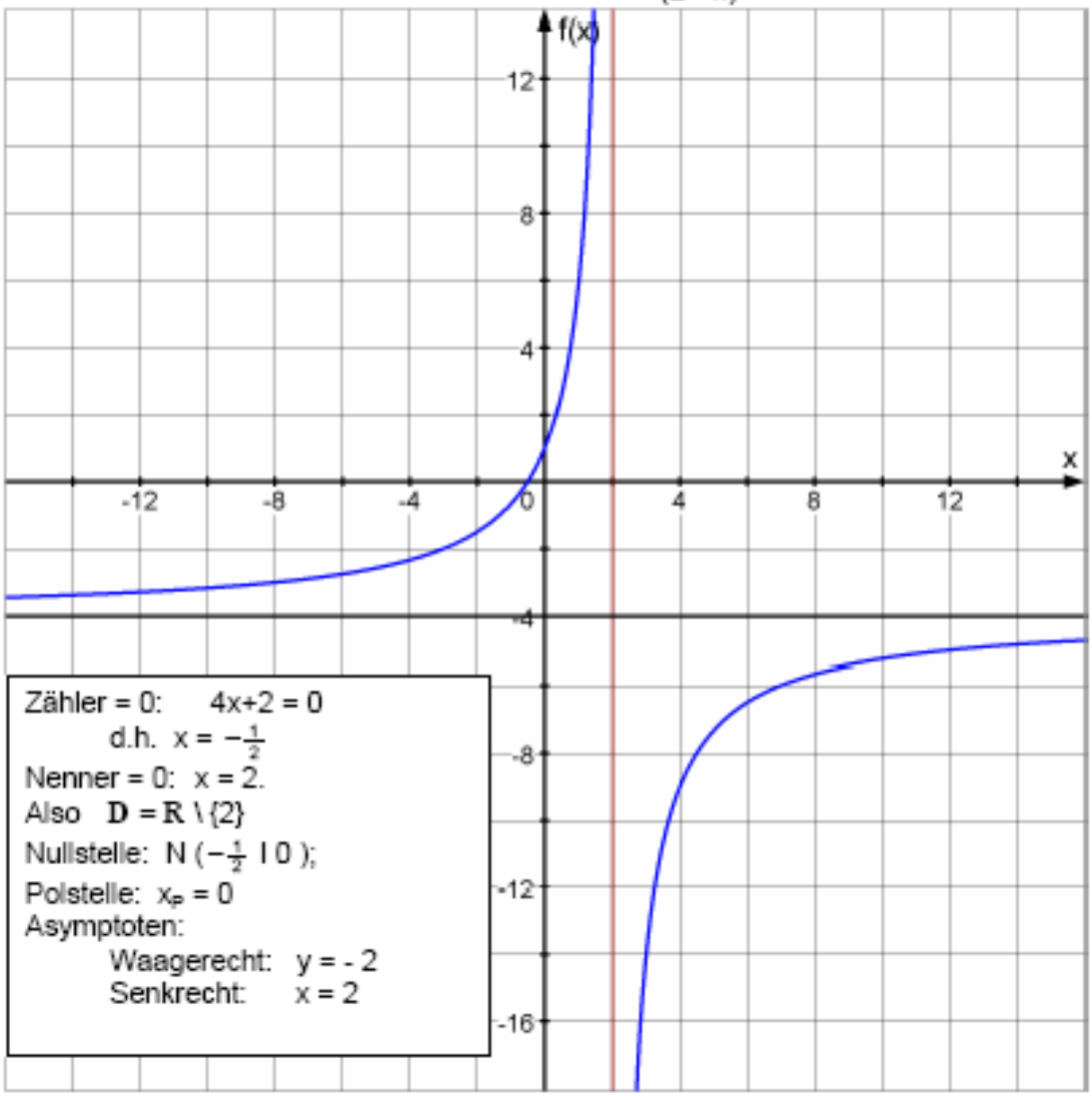
Wertmenge: $\mathbf{W}=[\frac{8}{3};\infty[$.

(8) $f(x)=\frac{4x+2}{2-x}$

$$f'(x)=\frac{4(2-x)-(-1)(4x+2)}{(2-x)^2}=\frac{8-4x+4x+2}{(2-x)^2}=\frac{10}{(2-x)^2}=10(2-x)^{-2}$$

Da f' im Zähler kein x enthält wird nach der Kettenregel abgeleitet:

$$f''(x)=-20(2-x)^{-3}(-1)=20(2-x)^{-3}=\frac{20}{(2-x)^3}$$



Zähler = 0: $4x+2=0$
d.h. $x=-\frac{1}{2}$
Nenner = 0: $x=2$.
Also $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$
Nullstelle: $N\left(-\frac{1}{2}\mid 0\right)$;
Polstelle: $x_P=0$
Asymptoten:
Waagerecht: $y=-2$
Senkrecht: $x=2$

Begründung für die waagerechte Asymptote: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4x+2}{2-x}=\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{4}{-1}=-4$

Denn $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Da f' keine Nullstellen hat, besitzt K keine Extrempunkte, und da f'' keine Nullstellen hat, gibt es auch keine Wendepunkte.

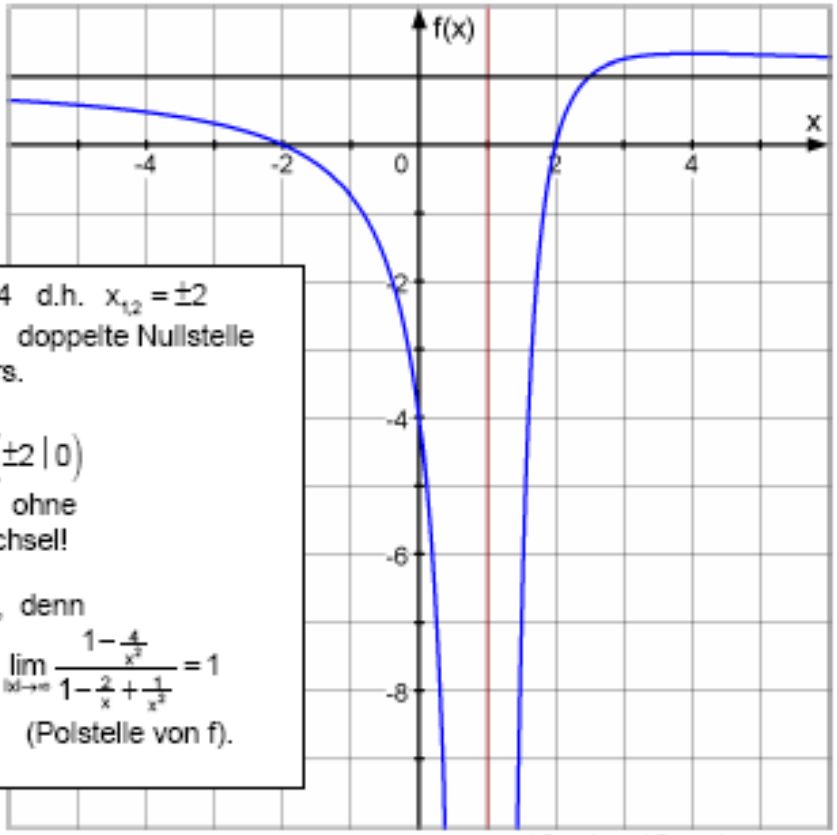
Wertmenge: $\mathbf{W}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

(9) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2-4)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\cdot\left[2x(x-1)-2(x^2-4)\right]}{(x-1)^4}=\frac{2x^2-2x-2x^2+8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=-2\frac{x-4}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=-2\frac{(x-1)^3-3(x-1)^2(x-4)}{(x-1)^6}=-2\frac{(x-1)^2[x-1-3(x-4)]}{(x-1)^8}=-2\frac{-2x+11}{(x-1)^4}$$



Zähler = 0: $x^2=4$ d.h. $x_{1,2}=\pm 2$

Nenner = 0: x = 1 doppelte Nullstelle des Nenners.

$\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{1\}$

Nullstellen $N_{1,2}\left(\pm 2\,|\,0\right)$

Polstelle: $x_P=1$ ohne Zeichenwechsel!

Asymptoten:

waagerecht: y = 1, denn

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{(x^2-4)}{(x^2-2x+1)}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

senkrecht: x = 1 (Polstelle von f).

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E)=0$ d.h. $x_E=4$ mit $f(4)=\dfrac{16-4}{9}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$

Kontrolle: $f''(4)=-2\dfrac{-8+11}{3^4}<0$ d.h. f hat bei 4 ein rel. Max.

Ergebnis: .: Hochpunkt $H\left(4\,|\,\frac{4}{3}\right)$

Wendepunkt: Bed.: $f''(x_W)=0$ d.h. x = 5,5 mit $f(5{,}5)\approx 1{,}30$

Da 5,5 eine einfache Nullstelle von f'' ist, hat f'' dort Vorzeichenwechsel, d.h. K einen Wendepunkt.

Wertmenge: $\mathbf{W}=]-\infty;\frac{4}{3}]$

(10) $$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$$

Die Ableitungen sollte man, wie dieses Beispiel zeigt, besser nach der Voruntersuchung auf Nullstellen und Polstellen berechnen!

Zähler = 0: $x^2+x-6=0$ d.h. $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{Bmatrix}2\\-3\end{Bmatrix}$

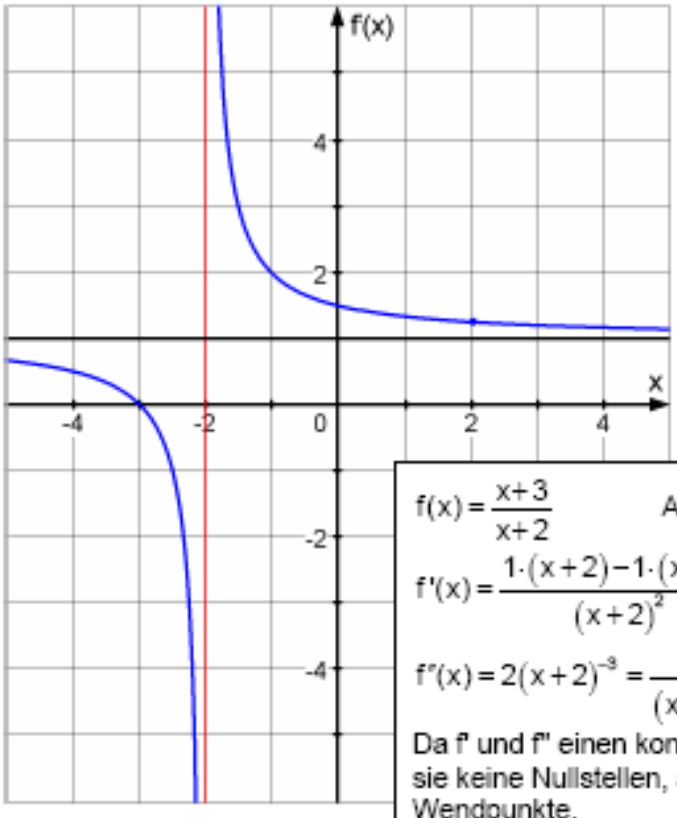
Nenner = 0: $x^2=4$ d.h. $x=\pm2$ d.h. Definitionsbereich: $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{\pm2\}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: (Bed: Zähler = 0 aber Nenner $\neq 0$): $x_N = -3$
Polstellen: (Bed.: Nenner = 0 aber Zähler $\neq 0$): $x_P = -2$
Weitere Lücke: (**Zähler = 0 und Nenner = 0)** $x_L = 2$

Wenn eine solche Lücke vorhanden ist, kann man in Zähler und Nenner den Linearfaktor (x - 2) ausklammern und dann wegkürzen.
Zerlegung des Funktionsterms:

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+3)}{(x+2)}=\frac{x+3}{x+2}$$

Diese gekürzte Funktion muß denselben Definitionsbereich bekommen, wie dies ursprünglich der Fall war, also: $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{\pm2\}$.
Man erkennt jetzt, daß man dennoch für Zahl - 2 jetzt einen "Pseudo-Funktionswert" berechnen kann: $f^*(2)=\frac{5}{4}=1{,}25$. An dieser Stelle darf die Funktion jedoch keinen



Funktionswert haben, da - 2 nicht zum Definitionsbereich gehört. Der Kurvenpunkt L (2 I 1,25) muß also aus dem Schaubild herausgenommen werden. Dort hat die Kurve **ein Loch.** Diese Stelle ist im Schaubild markiert.

Jetzt haben wir einen zum Ableiten wesentlich einfacheren Funktionsterm:

$$f(x)=\frac{x+3}{x+2}$$ Ableitungen:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x+3)}{(x+2)^2}=\frac{-1}{(x+2)^2}=-(x+2)^{-2}$$

$$f''(x)=2(x+2)^{-3}=\frac{2}{(x+2)^3}$$

Da f' und f'' einen konstanten Zähler haben, besitzen sie keine Nullstellen, also gibt es keine Extrem- und Wendpunkte.

(11) $$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4x}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-4x)-(2x-4)(x^2+4)}{(x^2-4x)^2}=\frac{2x^3-8x^2-2x^3+4x^2-8x+16}{(x^2-4x)^2}=\frac{-4x^2-8x+16}{(x^2-4x)^2}$$

$$f'(x)=-4\frac{x^2+2x-4}{(x^2-4x)^2}$$

$$f''(x)=-4\frac{(2x+2)(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)(2x-4)(x^2+2x-4)}{(x^2-4x)^4}$$

$$f''(x)=-4\frac{(x^2-4x)\left[(2x+2)(x^2-4x)-2(2x-4)(x^2+2x-4)\right]}{(x^2-4x)^4}$$

$$f''(x)=-4\frac{(2x+2)(x^2-4x)-2(2x-4)(x^2+2x-4)}{(x^2-4x)^3}$$

$$f''(x)=-4\frac{2x^3+2x^2-8x^2-8x-4x^3+8x^2-8x^2+16x+16x-32}{(x^2-4x)^3}$$

$$f''(x)=-4\frac{-2x^3-6x^2+24x-32}{(x^2-4x)^3}=8\frac{x^3+3x^2-12x+16}{(x^2-4x)^3}$$

Zähler = 0: $x^2=-4$ hat keine reelle Lösung.
Nenner = 0: $x(x-4)=0$ d.h. $x_1=0$, $x_2=4$.
Es gibt also keine Schnittpunkte mit der x-Achse aber zwei Polstellen: $x_P=0$ bzw. $x_P=4$.
Asymptoten:

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4x}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

Daher ist $y=1$ die waagerechte Asymptote.
K hat zwei senkrechte Asymptoten: $x=0$ und $x=4$ (Polstellen von f).

Extrempunkte: Bed: $f'(x_E)=0$ d.h. $x^2+2x-4=0$ ergibt

$$x_E=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$$

Näherungswerte: $x_1=1{,}236$ und $x_2=-3{,}236$
Funktionswerte: $f(1{,}236)=-1{,}618$ und $f(-3{,}236)=0{,}618$
Kontrolle: $f''(1{,}236)<0$ d.h. f hat dort ein relatives Maximum.
$f''(-3{,}236)>0$ d.h. f hat dort ein relatives Minimum.
Ergebnis: H (1,236 I - 1,618) und T (- 3,236 I 0,618).

Wendepunkte: Bed.: $f''(x_W)=0$ d.h. $x^3+3x^2-12x+16=0$.
Diese Gleichung ist nur mit dem Newtonschen Iterationsverfahren zu lösen.

Hilfsfunktion: $h(x) = x^3 + 3x^2 - 12x + 16$

$h'(x) = 3x^2 + 6x - 12$

Nullstellen Intervall: $h(-6) = -20$

$h(-5) = 26 > 0$.

Die Nullstelle von h, also die Wendestelle liegt somit im Intervall $]-6\,;-5[$.

Newtonsches Iterationsverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 - 12x_n + 16}{3x_n^2 + 6x_n - 12} = \frac{3x_n^3 + 6x_n^2 - 12x_n - x_n^3 - 3x_n^2 + 12x_n - 16}{3x_n^2 + 6x_n - 12}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 3x_n^2 - 16}{3x_n^2 + 6x_n - 12}$$

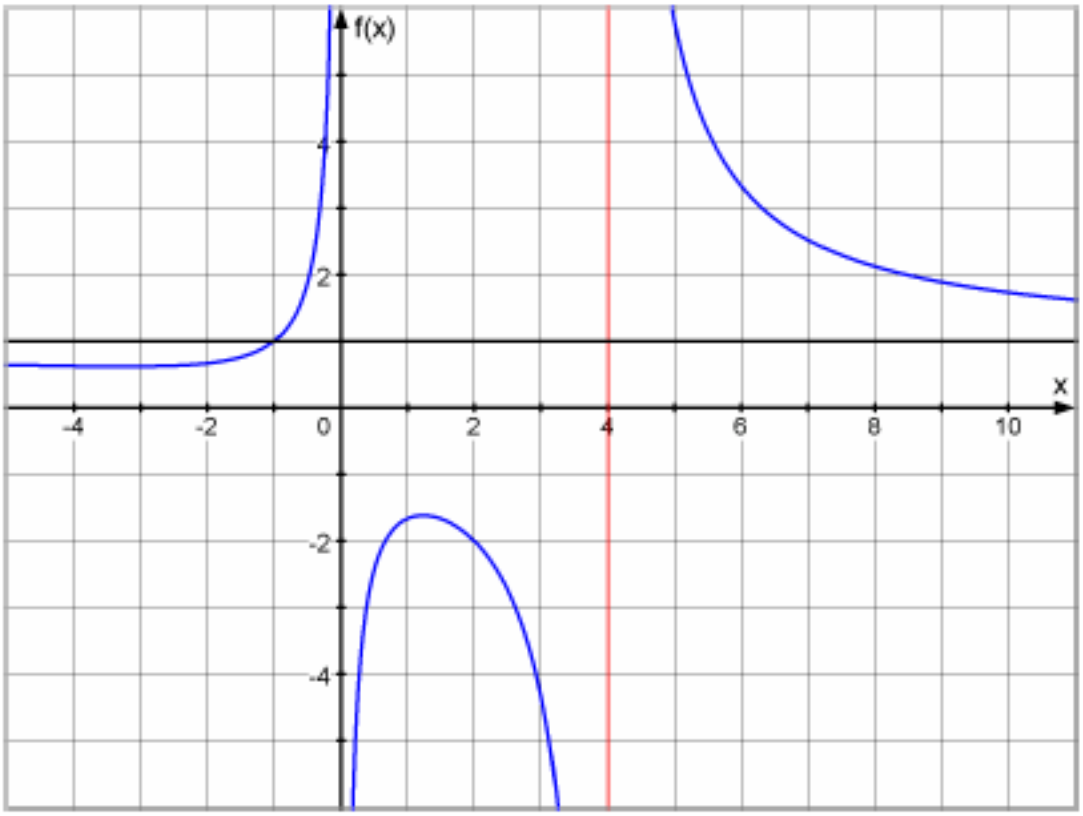
Startwert: $x_0 = -5{,}5$

$x_1 = -5{,}639\,344\,\ldots$

$x_2 = -5{,}634\,001\,\ldots$

$x_3 = -5{,}635\,454\,\ldots$

usw.

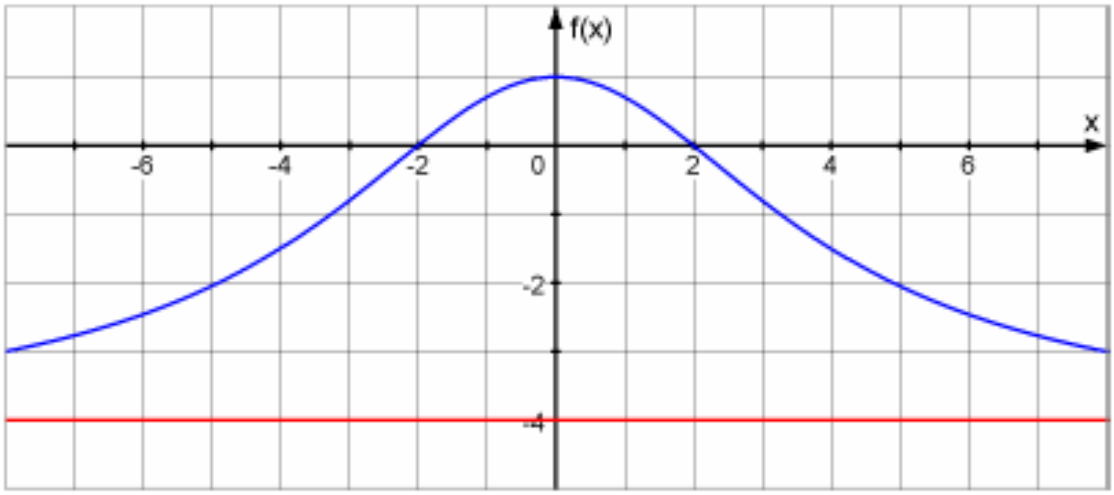


(12) $$f(x)=\frac{16-4x^2}{x^2+16}$$

$$f'(x)=\frac{-8x\left(x^2+16\right)-2x\left(16-4x^2\right)}{\left(x^2+16\right)^2}=\frac{-8x^3-128x-32x+8x^3}{\left(x^2+16\right)^2}=-160\frac{x}{\left(x^2+16\right)^2}$$

$$f''(x)=-160\frac{\left(x^2+16\right)^2-2\left(x^2+16\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2+16\right)^4}=-160\frac{\left(x^2+16\right)\left[\left(x^2+16\right)-4x^2\right]}{\left(x^2+16\right)^4}$$

$$f''(x)=-160\frac{-3x^2+16}{\left(x^2+16\right)^3}=160\frac{3x^2-16}{\left(x^2+16\right)^3}$$



Symmetrie: Da für alle x gilt $f(-x)=f(x)$, ist das Schaubild K von f symmetrisch zur y-Achse.

Zähler = 0: $x=\pm 2$

Der Nenner ist stets ungleich Null, also gibt es keine Polstellen und $\mathbf{D}=\mathbf{R}$.

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2}\left(\pm 2\,|\,0\right)$

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E)=0$ d.h. $x_E=0$ mit $f(0)=1$.

Kontrolle: $f''(0)=160\frac{-16}{16^3}<0$ d.h. f hat bei 0 ein relatives Maximum

Und K hat den Hochpunkt H (0 | 1).

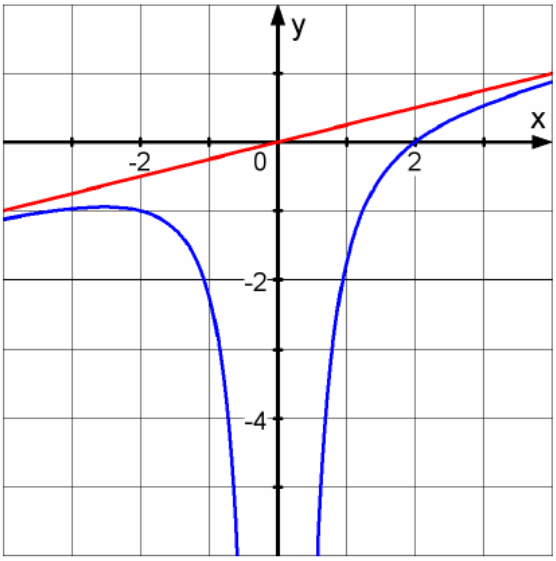
Wendepunkte: Bed.: $f''(x_W)=0$ d.h. $x_W^{\,2}=\frac{16}{3}\Leftrightarrow x_W=\pm\sqrt{\frac{16}{3}}=\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\approx\pm 2{,}31.$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{16}{3}}\right)=\frac{16-4\cdot\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}+16}=\frac{48-64}{16+48}=-\frac{16}{64}=-\frac{1}{4}$$

Kontrolle: Da beide Stelle einfache Nullstellen von f'' sind, liegen Wendepunkte vor, Ergebnis: $W_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{16}{3}}\,|\,-\frac{1}{4}\right)\approx\left(\pm 2{,}31\,|\,-0{,}25\right)$

Aufgabe 259:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{x^3-8}{4x^2}$. K sei das Schaubild von f.



a) Gib die Gleichung der schiefen Asymptote an und berechne den Hochpunkt.

b) P (u I f(u)) sei ein beliebiger Kurvenpunkt von K. Für welchen Wert von u geht die Tangente in P durch den Ursprung ?
In welchem Punkt S schneidet die Tangente in P die Kurve K nochmals ?

c) Die Parallele zur y-Achse durch P(u I f(u)) jetzt mit u > 1 schneidet die schiefe Asymptote in Q. Ferner sei R (1 I 0) gegeben.
Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.
Für welchen Wert von u nimmt das Dreieck einen extremen Inhalt an ?
Bestimme dessen Art und Größe.

Lösung:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{4x^2}=\frac{1}{4}x-\frac{2}{x^2}=\frac{1}{4}x-2x^{-2}$$

a) Ableitungen: $f'(x)=\frac{1}{4}+4x^{-3}=\frac{1}{4}+\frac{4}{x^3}=\frac{x^3+16}{4x^3}$

$$f''(x)=-12x^{-4}=-\frac{12}{x^4}$$

Zähler = 0: $x^3=8$ d.h. $x=2$
Nenner = 0: $x=0$ doppelte Lösung.

Schnittpunkt mit der x-Achse (Zähler = 0 aber Nenner $\neq 0$) N (2 | 0).
Polstelle (Nenner = 0 aber Zähler $\neq 0$): $x_P=0$ ohne Zeichenwechsel.

Asymptoten: senkrecht: $x=0$ (Polstelle)

schief: $y=\frac{1}{4}x$, denn $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$

Exptrempunkte: Bed.: $f'(x_E)=0 \Leftrightarrow x^3+16=0 \Leftrightarrow x^3=-16$

$$x_E=-\sqrt[3]{16}=-2\sqrt[3]{2}\approx -2{,}52$$

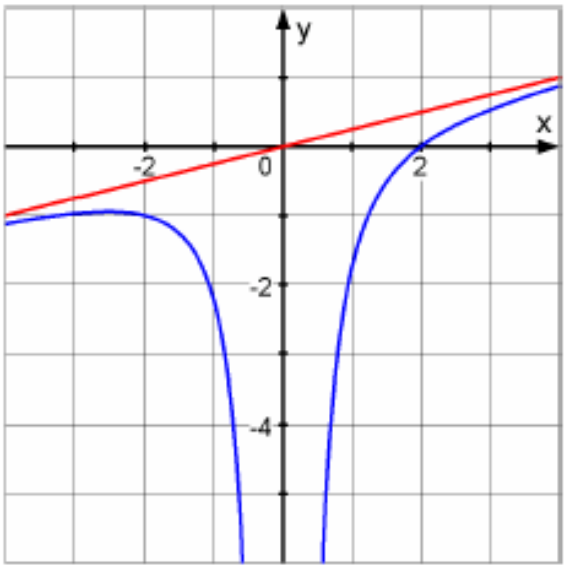
$$f(x_E)=\frac{-16-8}{4\cdot 4\sqrt[3]{4}}=\frac{-24}{16\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{-24}{32}\sqrt[3]{2}=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\approx -0{,}94$$

Kontrolle: $f''(x_E)<0$

Also hat f bei x_E ein relatives Maximum und das Schaubild K den Hochpunkt

$$H\left(-2\sqrt[3]{2}\,|\,-\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)\approx(-2{,}52\,|\,-0{,}94)$$

Wendepunkte gibt es nicht, da f' keine Nullstellen besitzt.



Beliebiger Kurvenpunkt $P\left(u \mid f(u)\right)=\left(u \mid \frac{u^3-8}{4u^2}\right)$

Tangentensteigung in P: $m_T = f'(u) = \frac{u^3+16}{4u^3}$

Tangente in P: $y - f(u) = f'(u)(x-u)$

$$y - \frac{u^3-8}{4u^2} = \frac{u^3+16}{4u^3}(x-u)$$

$$y = \frac{u^3+16}{4u^3}x - \frac{u^3+16}{4u^2} + \frac{u^3-8}{4u^2}$$

$$y = \frac{u^3+16}{4u^3}x - \frac{24}{4u^2}$$

T: $y = \frac{u^3+16}{4u^3}x - \frac{6}{u^2}$

Tangente durch den Ursprung: Bed: $O\left(0 \mid 0\right) \in T$: $\frac{6}{u^2} = 0$

Da diese Gleichung keine Lösung hat, gibt es keine Tangente durch den Ursprung.

Schnitt der allgemeinen Tangente mit der Kurve K:

$$\frac{x^3-8}{4x^2} = \frac{u^3+16}{4u^3}x - \frac{6}{u^2} \mid \cdot 4x^2u^3$$

$$\left(x^3-8\right)u^3 = \left(u^3+16\right)x^3 - 24ux^2$$

$$u^3x^3 - 8u^3 = u^3x^3 + 16x^3 - 24ux^2$$

$$-8u^3 = 16x^3 - 24ux^2$$

$$16x^3 - 24ux^2 + 8u^3 = 0 \quad | : 8$$

$$2x^3 - 3ux^2 + u^3 = 0$$

Da die Berührstelle einer Tangente eine doppelte Lösung der Schnittgleichung zwischen Tangente und Kurve ist, kann man den Linearfaktor (x - u) mit dem **Hornschema** gleich zweimal ausklammern:

	2	-3u	0	u^3
	0	2u	$-u^2$	$-u^3$
x = u				
	2	-u	$-u^2$	0
	0	2u	u^2	
x = u				
	2	u	0	

Folgerung: Die Schnittgleichung hat folgende Produktform:

$$(x-u)^2(2x+u) = 0$$

Zweite Lösung: $2x + u = 0 \Leftrightarrow x_S = -\frac{1}{2}u$

$$y_S = f\left(-\frac{u}{2}\right) = \frac{-\frac{u^3}{8} - 8}{4 \cdot \frac{u^2}{4}} = \frac{-\frac{u^3}{8} - \frac{64}{8}}{u^2} = -\frac{u^3+64}{8u^2}$$

Ergebnis:

$$S\left(-\frac{u}{2} \mid -\frac{u^3+64}{8u^2}\right)$$

c) Es sei $P\left(u \mid f(u)\right)=\left(u \mid \frac{u^3-8}{4u^2}\right)$ mit $u>1$, dann ist $Q\left(u \mid \frac{1}{4}u\right)$

Inhalt des Dreiecks PQR:

Grundseite PQ mit $\overline{PQ}=y_Q-y_P=\frac{1}{4}u-\left(\frac{1}{4}u-\frac{2}{u^2}\right)=\frac{2}{u^2}$

Höhe: $h=x_P-x_R=u-1$

Inhalt: $A(u)=\frac{1}{2}(u-1)\cdot\frac{2}{u^2}=\frac{u-1}{u^2}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}$ mit $u>1$.

Ableitungen: $A'(u)=-\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u^3}=\frac{-u+2}{u^3}$

$A''(u)=\frac{2}{u^3}-\frac{6}{u^4}=\frac{2u-6}{u^4}$

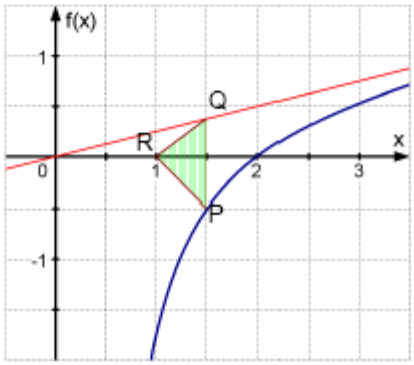
Extremwertbedingung: $A'(u_E)=0 \Leftrightarrow -u+2=0 \Leftrightarrow u_E=2$

Kontrolle: $A''(2)=\frac{4-6}{16}<0$ d.h. es liegt ein relatives Maximum vor.

Randwerte: $\lim\limits_{u\to 1}A(u)=0$ und $\lim\limits_{u\to\infty}A(u)=0$

Also hat das Dreieck für u = 2 den absolut größten Inhalt und dieser beträgt

$A(2)=\frac{1}{4}$



Aufgabe 260:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{4x^2}$, K sei ihr Schaubild.

a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte.
Zeichne K für $-7 \le x \le 7$

b) Die Gerade x = u mit u < 0 schneidet das Schaubild K von f in P und die schiefe Asymptote in Q. Untersuche den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ.

c) An welcher Stelle x > 0 ist f(x) = 3 ?
Bestimme x mit einem Näherungsverfahren

d) P (u I v) sei ein Kurvenpunkt mit u < 0.
Die Tangente in P schneidet die beiden Asymptoten in R und T.
Berechne den Inhalt des Dreiecks RTV.

e) Welche Parallelen zur schiefen Asymptote haben mit der Kurve K wie viele Punkte gemeinsam ?

Lösung:

Gegeben: $f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{4x^2}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

Zähler = 0: $x^3-2x^2-4x+8=0 \quad (1)$

Probierlösung: $x_1 = 2$:

Ausklammern von (x-2) mittels Horner-Schema oder Polynomdivision:

Horner-Schema:

	1	-2	-4	8
	0	2	0	-8
x = 2				
	1	0	-4	0

Polynom-Division:

$(x^3-2x^2-4x+8):(x-2)=x^2-4$

$-(x^3-2x^2)$

$-4x+8$

$-(-4x+8)$

0

Beide Verfahren liefern die Zerlegung der Gleichung (1) in

$(x-2)(x^2-4)=0$

bzw. $(x-2)(x-2)(x+2)=0$

bzw. $(x-2)^2(x+2)=0$

Jetzt erkennen wir, daß der Zähler die Nullstellen 2 und - 2 hat, wobei 2 als doppelte Nullstelle in Erscheinung tritt.

Nenner = 0: x = 0 ebenfalls doppelte Nullstelle des Nenners.

Auswertung:
Das Schaubild hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: N_1 (- 2 I 0) und N_2 (2 I 0), die Polstelle $x_P = 0$ und folglich hat f den Definitionsbereich $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Asymptoten: Senkrecht: x = 0

Schräg: $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$, denn $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$.

Ableitungen:

$f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{4x^2}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}-x^{-1}+2x^{-2}$

$f'(x)=\frac{1}{4}+x^{-2}-4x^{-3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}=\frac{x^3+4x-16}{4x^3}$

$f''(x)=-2x^{-3}+12x^{-4}=-\frac{2}{x^3}+\frac{12}{x^4}=\frac{-2x+12}{x^4}=-2\frac{x-6}{x^4}$

$f'''(x)=6x^{-4}-48x^{-5}=\frac{6}{x^4}-\frac{48}{x^5}=\frac{6x-48}{x^5}=6\frac{x-8}{x^5}$

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x - 16 = 0$ (2)

Da wir $x_E = 2$ als doppelte Nullstelle und somit Extremstelle bereits kennen, können wir mittels Horner-Schema oder Polynomdivison den Linearfaktor (x - 2) aus $x^3 + 4x - 16$ ausklammern:

Horner-Schema:

	1	0	4	-16
x = 2	0	2	4	16
	1	2	8	0

Polynomdivision:

$(x^3 + 0x^2 + 4x - 16) : (x - 2) = x^2 + 2x + 8$

$-(x^3 - 2x^2)$

$2x^2 + 4x$

$-(2x^2 - 4x)$

$8x - 16$

$-(8x - 16)$

0

Beide Verfahren liefern eine Zerlegung der Gleichung (2) in

$$(x-2)(x^2+2x+8) = 0$$

Die erste Klammer liefert die schon bekannte Extremstelle $x_E = 2$. Die restlichen erhält man durch Nullsetzen der zweiten Klammer: $x^2 + 2x + 8 = 0$.

Dies ergibt: $x_E = \frac{-2 \pm \sqrt{4-32}}{2} \notin \mathbb{R}$

Die Funktion hat also keine weiteren Extremstellen.

Kontrollrechnung: $f''(2) = -2\frac{-4}{2^4} > 0$

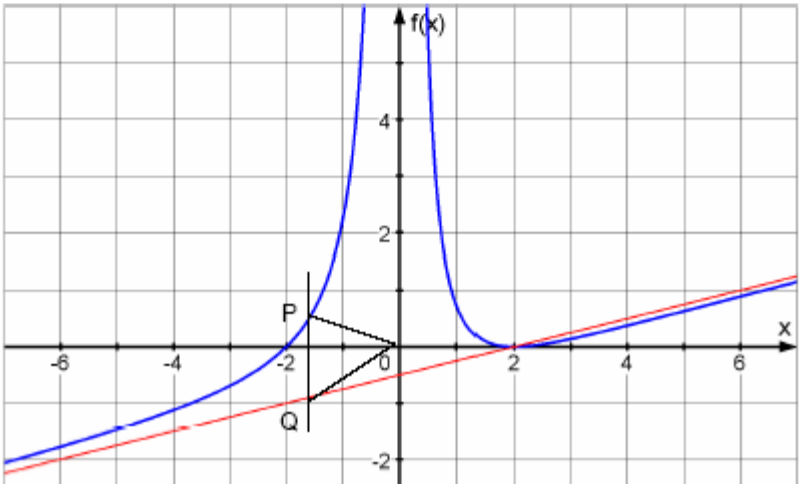
d.h. f hat bei 2 ein relatives Minimum, und K den Tiefpunkt T (2 | 0).

Wendepunkte: Bed: $f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow x_W = 6$

$$f(6) = \frac{216 - 72 - 24 + 8}{144} = \frac{128}{144} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$$

Kontrolle: $f'''(6) \neq 0$

Ergebnis: K hat den Wendepunkt $W\left(6 \mid \frac{8}{9}\right)$



b) Es sei $P\left(u \mid \frac{1}{4}u-\frac{1}{2}-\frac{1}{u}+\frac{2}{u^2}\right)$ mit $u<0$, dann ist $Q\left(u \mid \frac{1}{4}u-\frac{1}{2}\right)$

Grundseite des Dreiecks OPQ ist PQ mit der Länge

$$\overline{PQ}=y_P-y_Q=\left(\frac{1}{4}u-\frac{1}{2}-\frac{1}{u}+\frac{2}{u^2}\right)-\left(\frac{1}{4}u-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{u}+\frac{2}{u^2}=\frac{-u+2}{u^2}$$

und der Höhe $h = -u$.

Dreiecksinhaltsfunktion:

$$A(u)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-u+2}{u^2}\cdot(-u)=\frac{1}{2}\frac{u-2}{u}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{u}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{u}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbf{D}_u=]-\infty;0[$

Ableitungen: $A'(u)=\frac{1}{u^2}$

Da für alle $u\in\mathbf{D}_u$ gilt $A'(u) > 0$ wächst A streng monoton vom linken Rand bis zum rechten.

Randwerte: $\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{2}$

$u\to 0$ ergibt $A(u)\to\infty$, denn A hat bei 0 eine Polstelle.

Ergebnis: Die Flächeninhaltsfunktion wächst streng monoton in der Wertmenge $\mathbf{W}=]\frac{1}{2};\infty[$.

c) An welcher Stelle $x>0$ ist $f(x) = 3$?

d.h. $$f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{4x^2}=3$$

$$x^3-2x^2-4x+8=12x^2$$

$$x^3-14x^2-4x+8=0$$

<u>Bestimmung mit den Newtonschen Iterationsverfahren:</u>

Hilfsfunktion: $h(x)=x^3-14x^2-4x+8$

$$h'(x)=3x^2-28x-4$$

Näherungsformel: $$x_{n+1}=x_n-\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-14x_n^2-4x_n+8}{3x_n^2-28x_n-4}$$

$$x_{n+1}=\frac{3x_n^3-28x_n^2-4x_n-x_n^3+14x_n^2+4x_n-8}{3x_n^2-28x_n-4}$$

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3-14x_n^2-8}{3x_n^2-28x_n-4}$$

Startwert (aus der Zeichnung abgelesen): $x_0 = 0{,}7$

Anwendung der Iteration liefert:

$x_1 = 0{,}640\,488\ldots$

$x_2 = 0{,}638\,442\ldots$

$x_3 = 0{,}638\,439\ldots$

Ergebnis: Die gesuchte Zahl ist $x \approx 0{,}6384$

d) P (u I v) sei ein Kurvenpunkt mit $u < 0$.
Die Tangente in P schneidet die beiden Asymptoten in R und T.
Untersuche den Inhalt des Dreiecks RTV.

$P\left(u \mid \frac{1}{4}u - \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2}\right)$ mit $u < 0$ und $V\left(0 \mid -\frac{1}{2}\right)$

Tangentensteigung in P: $m_T = f'(u) = \frac{u^3 + 4u - 16}{4u^3}$

Tangentengleichung: $y - f(u) = f'(u)(x - u)$

Also:

$$y - \left(\frac{1}{4}u - \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2}\right) = \frac{u^3 + 4u - 16}{4u^3}(x - u)$$

$$y = \frac{u^3 + 4u - 16}{4u^3}x - \frac{u^3 + 4u - 16}{4u^2} + \left(\frac{1}{4}u - \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2}\right)$$

$$y = \frac{u^3 + 4u - 16}{4u^3}x - \frac{1}{4}u - \frac{1}{u} + \frac{4}{u^2} + \frac{1}{4}u - \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{2}{u^2}$$

$$y = \frac{u^3 + 4u - 16}{4u^3}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{u} + \frac{6}{u^2}$$

Schnittpunkt mit der senkrechten Asymptote: $x = 0$: $R\left(0 \mid -\frac{1}{2} - \frac{2}{u} + \frac{6}{u^2}\right)$

Schnittpunkt mit der schiefen Asymptote: $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$:

$$\frac{u^3 + 4u - 16}{4u^3}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{u} + \frac{6}{u^2} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{u^3 + 4u - 16}{4u^3}x - \frac{2}{u} + \frac{6}{u^2} = \frac{1}{4}x \quad | \cdot 4u^3$$

$$(u^3 + 4u - 16)x - 8u^2 + 24u = u^3x$$

$$u^3x + 4ux - 16x - 8u^2 + 24u = u^3x$$

$$4ux - 16x - 8u^2 + 24u = 0 \quad | : 4$$

$$ux - 4x - 2u^2 + 6u = 0$$

$$(u - 4)x = 2u^2 - 6u$$

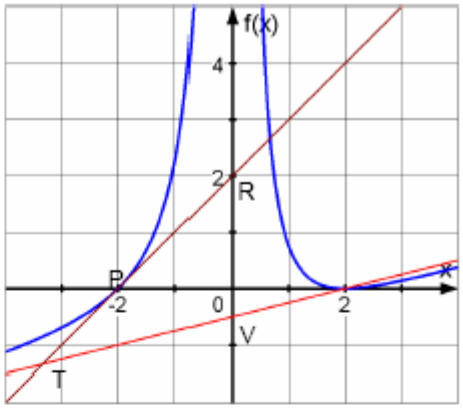
$$x_T = \frac{2u^2 - 6u}{u - 4} = 2\frac{u(u - 3)}{u - 4}$$

y-Koordinate: Einsetzen in $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$:

$$y_T = \frac{1}{4} \cdot 2\frac{u^2 - 3u}{u - 4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u^2 - 3u}{u - 4} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2 - 3u - u + 4}{u - 4} = \frac{1}{2}\frac{u^2 - 4u + 4}{u - 4}$$

Ergebnis: $T\left(2\frac{u^2 - 3u}{u - 4} \mid \frac{1}{2}\frac{u^2 - 4u + 4}{u - 4}\right)$

Inhalt des Dreiecks RTV.



Grundseite RV mit

$$\overline{RV} = y_R - y_V = \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{u} + \frac{6}{u^2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{RV} = \frac{6}{u^2} - \frac{2}{u} = \frac{6-2u}{u^2} = 2\frac{3-u}{u^2}$$

Höhe:

$$h = -x_T = -2\frac{u(u-3)}{u-4} = 2\frac{u(3-u)}{u-4}$$

Flächeninhaltsfunktion:

$$A(u) = \frac{1}{2}\overline{RV}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\frac{3-u}{u^2}\cdot 2\frac{u(3-u)}{u-4}$$

$$A(u) = 2\frac{(3-u)^2}{u(u-4)} \quad \text{mit } u < 0.$$

e) Welche Parallelen zur schiefen Asymptote haben mit der Kurve K Punkte gemeinsam ?

Eine Parallele p zur schiefen Asymptote hat die Gleichung $p: y = \frac{1}{4}x + n$

Schnitt mit der Kurve:

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{4}x + n$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = n \quad |\cdot 2x^2$$

$$-x^2 - 2x + 4 = 2nx^2$$

$$2nx^2 + x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$(2n+1)x^2 + 2x - 4 = 0$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $2n+1=0$ d.h. $n=-\frac{1}{2}$: $2x - 4 = 0$ ergibt $x_S = 2$.

2. Fall: $2n+1\neq 0$

$$x_S = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16(2n+1)}}{2(2n+1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{32n+20}}{4n+2}$$

Es gibt genau einen Schnittpunkt für $32n+20=0$ d.h. für $n = -\frac{20}{32} = -\frac{5}{8}$

Und es gibt genau zwei Schnittpunkte für $32n+20>0$ d.h. $n > -\frac{5}{8}$.

Ergebnis: Ist $n < -\frac{5}{8}$, dann haben p und K keine gemeinsamen Punkte.

Für $n = -\frac{5}{8}$ berührt p die Kurve,

Für $n = -\frac{1}{2}$ gibt es genau einen Schnittpunkt (Asymptote)

Für $n > -\frac{5}{8}$ aber $n \neq -\frac{1}{2}$ gibt es genau zwei Schnittpunkte.

Aufgabe 261:

Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 2 - \sqrt{24 - 4x}$$

a) Bestimme den Definitionsbereich D_f, die Wertmenge W_f, Nullstellen und Extrempunkte.

Lösung:

a) Definitionsbereich: Bed.: $\text{Rad} \geq 0$ d.h.

$24 - 4x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \leq 24 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 6$ also $\mathbf{D}_f =]-\infty ; 6\,]$

Wertmenge: $\mathbf{W}_f =]-\infty ; 2\,]$

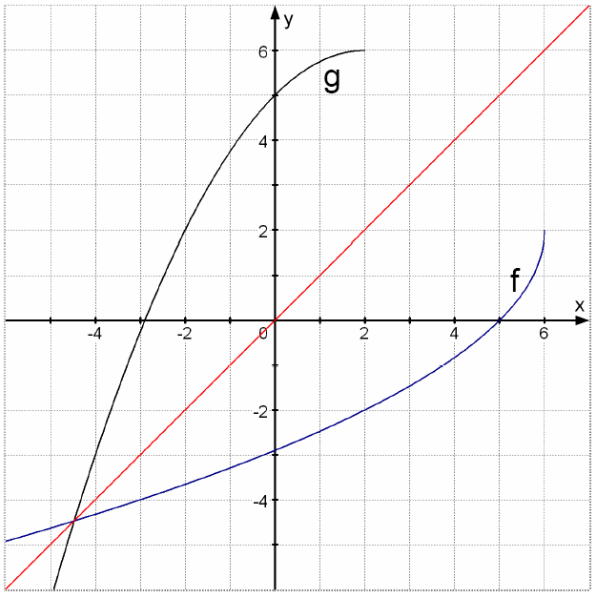
Mit Hochpunkt H (6 I 2) = Parabelscheitel.

Nullstellen: f(x) = 0 d.h. $0 = 2 - \sqrt{24 - 4x} \qquad \sqrt{24 - 4x} = 2$

Quadriert: $24 - 4x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 20 \quad \Leftrightarrow \quad = 5$

Probe: f(5) = 2 – 2 = 0

Ergebnis: N (5 I 0).



Aufgabe 262:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten. Berechnen Sie zwei Ableitungen und stelle fest, ob eine senkrechte Tangente vorliegt.

a) $f(x) = \sqrt{8 - x}$

b) $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{5 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{-x - 3}$

Lösung:

a)

Definitionsbereich: $8-x \geq 0 \Leftrightarrow 8 \geq x \Leftrightarrow x \leq 8$ $\quad \mathbf{D} =]-\infty;8]$

Nullstellen: Rad = 0: $x_N = 8$ $\quad N(8 \mid 0)$

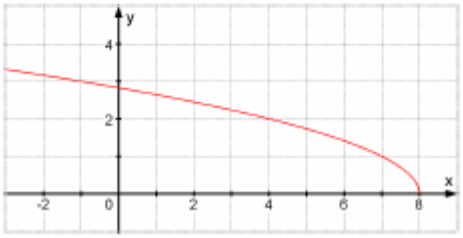
Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{8-x}} = -\frac{1}{2}(8-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}(8-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{4(8-x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4\sqrt{8-x}^3}$$

Wie man sieht, haben f' und f'' keine Nullstellen, also besitzt das Schaubild von f weder *Extrempunkte mit waagerechter Tangente* noch Wendepunkte.

Einen Extrempunkt gibt es aber dennoch, nämlich den rechten Randpunkt R (8 | 0). Da für alle $x \in \mathbf{D}$ gilt $f(x) \geq 0$ ist R der tiefste Punkt, also ein **Randtiefpunkt** und zwar **mit senkrechter Tangente**, weil f' bei 8 eine Polstelle hat. Das Schaubild ist eine Halbparabel:



b)

Definitionsbereich: $\frac{1}{2}x+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq -2 \Leftrightarrow \mathbf{D}=[-2;\infty[$

Nullstellen: Bed.: $f(x_N)=0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{\frac{1}{2}x+1}=0$

$$\sqrt{\frac{1}{2}x+1}=2 \Rightarrow \frac{1}{2}x+1=4$$

$$\frac{1}{2}x=3 \text{ d.h. } x_N=6$$

Da die Funktion aus einer Summe mit einer Wurzel besteht, muß man die Probe machen: $f(6)=2-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 6+1}=2-\sqrt{4}=2-2=0$.

Ergebnis: N (6 I 0)

Ableitungen:

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x+1}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x+1}}=\frac{-1}{\sqrt{8x+16}}=-(8x+16)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}(8x+16)^{-\frac{3}{2}}\cdot 8=\frac{4}{(8x+16)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{2^3\sqrt{2x+4}^3}=\frac{1}{2\sqrt{2x+4}^3}$$

Man sieht, daß f'(x) stets negativ ist, also fällt die Funktion streng monoton. Es gibt also keine Extrempunkte mit waagerechter Tangente. Und wir haben am linken Randpunkt L (- 2 I 2) einen Randhochpunkt, der außerdem eine senkrechte Tangente besitzt, da f' dort eine Polstelle hat. Das Schaubild ist eine Halbparabel

c)

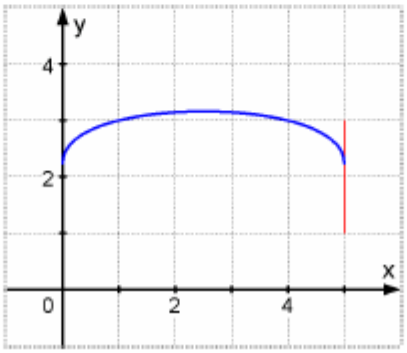
Definitionsbereich: 1. Bedingung: $x \geq 0$, 2. Bed.: $5-x \geq 0$ d.h. $x \leq 5$
Daraus folgt: $\mathbf{D} = [0;5]$

Nullstellen: $\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-\sqrt{5-x}$
quadriert: $x = 5-x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x_N = \frac{5}{2}$
Da diese Funktion die Summe mit einer Wurzel enthält, muß man die Probe machen:
$f\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}} \neq 0$. Diese Funktion besitzt keine Nullstellen.

Ableitung: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$

Punkte mit waagerechter Tangente: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x}=\sqrt{x}$
quadriert: $5-x=x \Leftrightarrow 2x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$
Die Probe stimmt jetzt. Das Schaubild K von f hat also im Punkt E $\left(\frac{5}{2} \mid 2\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
eine waagerechte Tangente. Übrigens ist $2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{4\cdot\frac{5}{2}}=\sqrt{10}$!!!

Punkte mit senkrechter Tangente:
Die Funktion f' hat bei 0 und 5 je eine Polstelle, d.h. das Schaubild hat in den Randpunkten $L(0 \mid \sqrt{5})$ und $R(5 \mid \sqrt{5})$ senkrechte Tangenten.



d)

Definitionsbereich: 1. Bedingung: $x \geq 0$, 2. Bed.: $5 - x \geq 0$ d.h. $x \leq 5$
Daraus folgt: $\mathbf{D} = [0;5]$

Nullstellen: Bedingung $f(x_N) = 0$

$$\sqrt{x} - \sqrt{5-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5-x}$$

quadriert: $x = 5 - x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x_N = \frac{5}{2}$

Da diese Funktion die Summe mit einer Wurzel enthält, muß man die Probe machen:

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} = 0$.

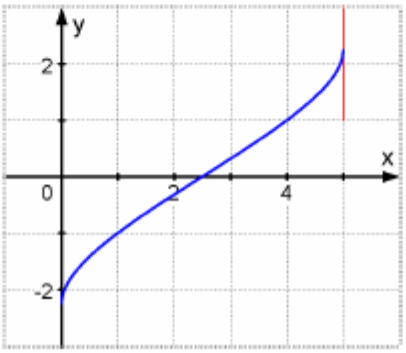
Ergebnis: $N\left(\frac{5}{2} \mid 0\right)$

Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$

Auswertung: Weil eine Wurzel nie negativ werden kann, nimmt der Zähler nur dann den Wert 0 an, wenn beide Wurzeln zugleich 0 werden. Dies ist aber nicht der Fall, denn der erste tut dies für x = 5, die zweite für x = 0.,

Also gibt es keine Punkte mit waagerechter Tangente. (Man könnte auch den Zähler Null setzen und die Wurzelgleichung durch Isolieren der Wurzeln und Quadrieren lösen. Jedoch stimmt die Probe dann nicht.

Senkrechte Tangenten in den Randpunkten $L\left(0 \mid -\sqrt{5}\right)$, $R\left(5 \mid \sqrt{5}\right)$, weil dort der Nenner von f' Null wird, d.h. die Ableitungsfunktion einen je einen Pol besitzt.



e)

Definitionsbereich:

1. Bedingung: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
2. Bedingung: $-x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3$

Da x in beide Radikanden eingesetzt werden muß, geht dies nur für Zahlen, die in beiden Teildefinitionsbereichen liegen. Da es aber keine Zahlen gibt, die sowohl mindestens 2, aber höchstens - 3 sind, ist der Definitionsbereich leer: $\mathbf{D} = \{\ \}$.

Also gibt es zur Funktion kein Schaubild.

Aufgabe 263:

Gegeben ist die Funktionenschar f_a für $a \in \mathbf{R}$ durch

$$f_a(x) = x - \sqrt{x+a}$$

a) Berechne den Definitionsbereich.
Für welche Werte von a kann es Nullstellen geben ? Berechne sie für a = 2.

b) Berechne alle Extrem- und Wendepunkte. Welche Gleichung hat die Ortskurve der Extrempunkte ?
Wo gibt es senkrechte Tangenten ?

c) Zeichne K_2. Gib dazu alle bekannten Daten zu K_2 an.

d) In welchem Punkt hat K_2 eine Tangente, die zur Geraden g: $y = \frac{1}{2}x$ parallel ist ? Gib die Gleichung dieser Tangente an.

Lösung:

a) **Definitionsbereich**: Bed.: $x+a \geq 0$ d.h. $x \leq -a$ $\mathbf{D} =]-a;\infty]$

Nullstellen: Bed.: $f_a(x_N) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x+a} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{x+a}$

quadriert: $x^2 = x+a \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0 \Leftrightarrow x_N = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

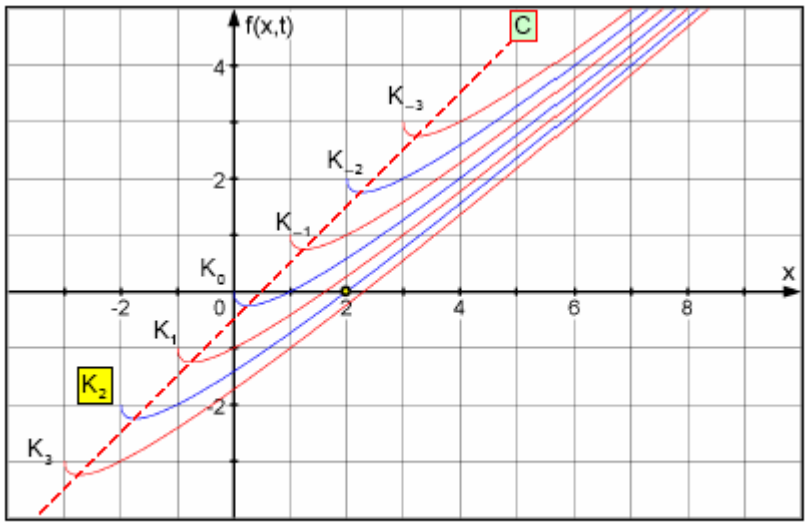
Zunächst einmal existieren diese Nullstellen nur dann, wenn der Radikand nicht negativ wird, also für $1+4a \geq 0 \Leftrightarrow 4a \geq -1 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{4}$.

Für a = 2 folgt: $x_N = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Probe: $f_2(2) = 2 - \sqrt{2+2} = 2 - 2 = 4 = 0$

$f_2(-1) = -1 - \sqrt{-1+2} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Ergebnis: $N(2\,|\,0)$



b) **Ableitungen**: $f_a(x) = x - \sqrt{x+a}$

$$f_a'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+a}} = \frac{2\sqrt{x+a}-1}{2\sqrt{x+a}}$$

Für die 2. Ableitung schreibt man die erste so um: $f_a'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_a''(x) = \frac{1}{4}(x+a)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4(x+a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{x+a}^3} > 0 \quad \text{für alle a !}$$

Extrempunkte: Bed.: $f_a'(x_E) = 0$ d.h. $2\sqrt{x+a} - 1 = 0$

Ergibt: $2\sqrt{x+a} = 1$ und $\sqrt{x+a} = \frac{1}{2}$
Quadriert: $x + a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_E = \frac{1}{4} - a$

Probe: $f_a'\left(\frac{1}{4} - a\right) = \frac{2\sqrt{\frac{1}{4} - a + a} - 1}{2\sqrt{\frac{1}{4} - a + a}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1-1}{1} = 0$ für jedes a !

Also besitzt jedes Schaubild K_a einen Tiefpunkt !

$$f_a(x_E) = f_a\left(\frac{1}{4} - a\right) = \frac{1}{4} - a - \sqrt{\frac{1}{4} - a + a} = \frac{1}{4} - a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - a$$

Ergebnis: $T\left(\frac{1}{4} - a \,|\, \frac{1}{2} - a\right)$
Für a = 2 gilt somit: $T(-1{,}75 \,|\, -1{,}5)$

Ortskurve der Tiefpunkte:

Aus $x_T = \frac{1}{4} - a$ folgt $a = \frac{1}{4} - x_T$.
Damit wird $y_T = \frac{1}{2} - a$ zu $y_T = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - x_T\right) = -\frac{1}{2} + x_T$

Die Ortskurve ist somit die Gerade mit der Gleichung C: $x = -x + \frac{1}{2}$
(Siehe Abbildung auf der Seite zuvor!)

Wendepunkte: Bedingung: $f_a''(x_W) = 0$ d.h. $\frac{1}{4\sqrt{x+a}^3} = 0$

Diese Gleichung hat keine Lösung (da ein Bruch nur dann 0 wird, wenn der Zähler Null wird !), also gibt es keine Wendepunkte.

Senkrechte Tangenten: Die Ableitungsfunktion f' hat eine Polstelle für x = - a,

Also besitzt K_a dort eine senkrechte Tangente: Wegen
$f_a(-a) = -a - \sqrt{-a+a} = -a$ ist dies in $R(-a \,|\, -a)$.

R ist ein Randhochpunkt, weil rechts von ihm ein Tiefpunkt liegt !

c) Zeichnung für K_2 :

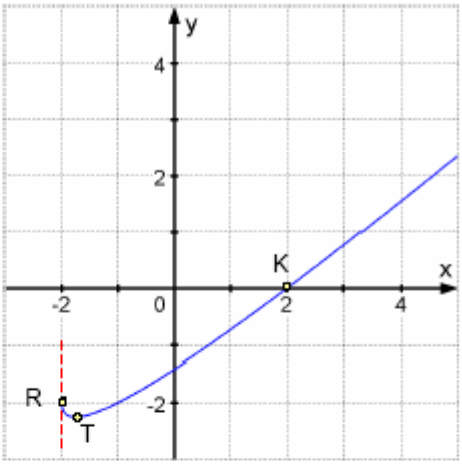
$f_2(x) = x - \sqrt{x+2}$

$\mathbf{D} = [-2; \infty[$

$N(2|0)$, $T(-1{,}75|-1{,}5)$.

Randhochpunkt:

$R(-2|-2)$.



d) Tangente parallel zu g: $y = \frac{1}{2}x$ an K_2 :

Bedingung: $f_2'(x) = \frac{1}{2}$ d.h. $1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Kehrwert: $\sqrt{x+2} = 1$

Quadriert: $x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 2 = -1$

Probe: $f_2'(-1) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-1+2}} = \frac{1}{2}$ stimmt !

y-Koordinate des Berührpunkts: $f_2(-1) = -1 - \sqrt{-1+2} = -1 - 1 = -2$

Ergebnis: $B(-1|-2)$

Tangentengleichung: $y + 2 = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Aufgabe 264:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x - 4\sqrt{x}$.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.
Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte für das Schaubild K von f.

Zeichne das Schaubild für $0 \leq x \leq 8$.

b) $P(u|v)$ sei ein Punkt von K mit $0 < u < 4$. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q.

Das Dreieck OPQ hat den Flächeninhalt A(u). Für welches u nimmt die Flächeninhaltsfunktion einen Extremwert an und wie groß ist er ?

c) Durch Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen V(u). Für welches u nimmt dieses Volumen einen Extremwert an?

d) Berechne den Inhalt F der Fläche, die K und die x-Achse begrenzen.

e) Dreht man diese Fläche um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen V*.

Lösung:

a) **Definitionsbereich**: Bedingung: Rad ≥ 0 d.h. $x \geq 0$ d.h. $\mathbf{D} = \mathbf{R}_0^+$.

Nullstellen: Bed.: $f'(x_N) = 0$ d.h. $2x - 4\sqrt{x} = 0 \quad |:2$

$x = 2\sqrt{x}$ ergibt $x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$

Man hüte sich davor, hier durch x zu dividieren, dann geht die Lösung x = 0 verloren !!

$x_1 = 0; \quad x_2 = 4$

Probe: $f(0) = 0 - 0 = 0$

$f(4) = 8 - 4 \cdot 2 = 0$

Ergebnis: $N_1(0|0); \quad N_2(4|0)$.

Ableitungen: $f(x) = 2x - 4\sqrt{x}$

$$f'(x) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = 2\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

Für die 2. Ableitung schreibt man $f'(x) = 2 - 2x^{-\frac{1}{2}}$

ergibt $f''(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

Extremwerte Bed.: $f'(x_E) = 0$ d.h. $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x_E = 1$

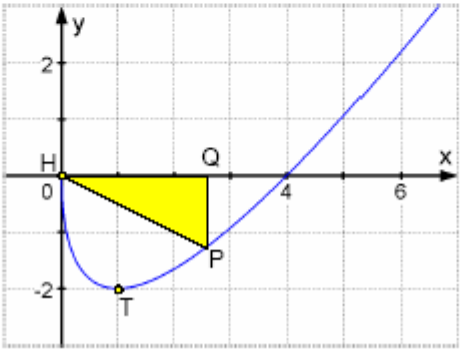
$f(1) = 2 - 4 = -2$

$f''(1) = 1 > 0 \Rightarrow T(1|-2)$ ist Tiefpunkt mit waagerechter Tangente.

Randwert x = 0: Die erste Ableitungsfunktion f' hat dort eine Polstelle, also besitzt K dort eine senkrechte Tangente, Weil der benachbarte Extrempunkt ein Tiefpunkt ist, liegt ein Randhochpunkt vor: $H_R(0|0)$

Andere Begründung:
Für $0 < x < 1$ ist $f'(x) < 0$ also fällt f von 0 aus nach rechts.

Wendepunkte gibt es keine, da f'' keine Nullstellen besitzt.



b) Inhalt des Dreiecks OPQ:

$A(u)=\frac{1}{2}\cdot u\cdot\left(-f(u)\right)=\frac{1}{2}u\cdot\left(-2u+4\sqrt{u}\right)=-u^2+2u\sqrt{u}=-u^2+2u^{\frac{3}{2}}$

mit $0<u<4$.

$A'(u)=-2u+3u^{\frac{1}{2}}=-2u+3\sqrt{u}$

$A''(u)=-2+\frac{3}{2}u^{-\frac{1}{2}}=-2+\frac{3}{2\sqrt{u}}=\frac{-4\sqrt{u}+3}{2\sqrt{u}}$

Extremwertbedingung: $A'(u_E)=0 \Leftrightarrow 2u=3\sqrt{u}$.

Quadrieren: $4u^2=9u \Leftrightarrow 4u^2-9u=0 \Leftrightarrow u(4u-9)=0$

$u_{E;1}=0 \notin \mathbf{D}_u$ und $u_{E;2}=\frac{9}{4}$.

Probe: $A'\left(\frac{9}{4}\right)=-2\cdot\frac{9}{4}+3\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{9}{2}+3\cdot\frac{3}{2}=0$

Kontrolle: $A''\left(\frac{9}{4}\right)=-2+\frac{3}{2\cdot\frac{3}{2}}=-2+1<0$

d.h. es liegt ein relatives Maximum vor.

$A_{min}=A\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{81}{16}+2\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{81}{16}+\frac{27}{4}=\frac{-81+108}{16}=\frac{27}{16}$

Randwerte: $\lim\limits_{u\to 0}A(u)=0$ und $\lim\limits_{u\to 4}A(u)=0$.

Also liegt sogar ein absolutes Maximum vor !

c) Durch Rotation des Dreiecks OPQ um die x-Achse entsteht ein Kegel.

Seine Grundfläche ist ein Kreis mit dem Radius $r=\overline{OP}=-f(u)=-2u+4\sqrt{u}$

Kegelvolumen:

$V(u)=\frac{1}{3}Gh=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(-2u+4\sqrt{u}\right)^2\cdot u=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(4u^2-16u\sqrt{u}+16u\right)u$

$V(u)=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(4u^3-16u^2\sqrt{u}+16u^2\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(4u^3-16u^{\frac{5}{2}}+16u^2\right)$

mit $\mathbf{D}_u=]\,0\,;4\,[$.

$V'(u)=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(12u^2-40u^{\frac{3}{2}}+32u\right)$

$V''(u)=\frac{1}{3}\pi\left(24u-60\sqrt{u}+32\right)$

Extremwertbedingung: $V'(u_E)=0$

$12u^2-40u^{\frac{3}{2}}+32u=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(12u-40u^{\frac{1}{2}}+32\right)u=0$

Da die erste Lösung $u=0$ nicht zum Definitionsbereich $\mathbf{D}_u=]\,0\,;4\,[$ gehört, bleibt: $12u-40\sqrt{u}+32=0$

Mit der Substitution $z=\sqrt{u}$ folgt

$12z^2-40u+32=0 \quad |:4$

$3z^2-10z+8=0$

$$z_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-96}}{6}=\frac{10\pm 2}{6}=\begin{cases}2\\ \frac{4}{3}\end{cases}$$

Rücksubstitution: Aus $z_1=2$ folgt $u_1=z^2=4\notin\mathbf{D}_u$

Aus $z_2=\frac{4}{3}$ folgt $u_2=\frac{16}{9}\in\mathbf{D}_u$.

Kontrolle: $V''\left(\frac{16}{9}\right)=\frac{1}{3}\pi\left(24\cdot\frac{16}{9}-60\cdot\frac{4}{3}+32\right)<0$

d.h. es liegt ein relatives Maximum vor.

Randwertuntersuchung:

$\lim\limits_{u\to 0}V(u)=0$ und $\lim\limits_{u\to 4}V(u)=0$.

Daher liegt sogar ein absolutes Maximum vor.

d) Integralrechnung:

Fläche zwischen Kurve K und x-Achse.

Weil diese Fläche unter der x-Achse liegt vertauscht man die Grenzen, sonst wird ihr Wert negativ:

$$F=\int_4^0 f(x)\,dx=\int_4^0\left(2x-4x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left[x^2-4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^0=\left[x^2-\tfrac{8}{3}x\sqrt{x}\right]_4^0$$

$F=[0]-\left[16-\frac{8}{3}\cdot 4\cdot 2\right]=-16+\frac{64}{3}=\frac{-48+64}{3}=\frac{16}{3}\ (\text{FE})$.

e) Rotation dieser Fläche um die x-Achse:

$$V^*=\pi\int_0^4 f(x)^2\,dx=\pi\int_0^4\left(2x-4\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(4x^2-16x^{\frac{3}{2}}+16x\right)dx=$$

$$V^*=\pi\left[\tfrac{4}{3}x^3-16\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+8x^2\right]_0^4=\pi\left[\tfrac{4}{3}x^3-\tfrac{32}{5}\cdot x^2\sqrt{x}+8x^2\right]_0^4$$

Ein Trick zum einfachen Weiterrechnen besteht im Umschreiben in Zweierpotenzen mit anschließendem Ausklammern:

$V^*=\pi\left[\frac{4}{3}\cdot 64-\frac{32}{5}\cdot 16\cdot 2+8\cdot 16\right]-\pi[0]=\pi\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 2^8-\frac{1}{5}\cdot 2^{10}+2^7\right]$

$V^*=2^7\pi\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{8}{5}+1\right]=128\pi\cdot\frac{10-24+15}{15}=128\pi\cdot\frac{1}{15}=\frac{128}{15}\pi\approx 26{,}8\ (\text{VE})$

Aufgabe 265:

Es ist folgende Funktion gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + e^{-x}$

a) K sei das Schaubild von f. K hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Einer davon läßt sich berechnen. Begründe, warum es einen zweiten geben muss.

Welchen Extrempunkt hat K ? Zeige daß seine y-Koordinate $y_E = \ln\sqrt{\frac{2}{e}}$ ist

Welche Asymptote hat die Kurve K ?

Warum hat K keine Wendepunkte ?

Zeichne das Schaubild K für $-3 \le x \le 10$.

b) Die Kurve K, die Asymptote und die y-Achse begrenzen eine ins Unendliche reichende Fläche. Berechne deren Inhalt.

c) Gib die Gleichung der Tangente an K an, die zur Asymptote orthogonal ist.

d) Die Gerade g: $x = u$ mit $u > 0$ schneidet K in P und die Asymptote in Q. Die Parallelen zur x-Achse durch P und Q sowie g und die y-Achse begrenzen ein Rechteck. Für welches u nimmt der Inhalt dieses Rechtecks einen extremen Wert an ? Mache über dieses Extremwert Aussagen.

Lösung:

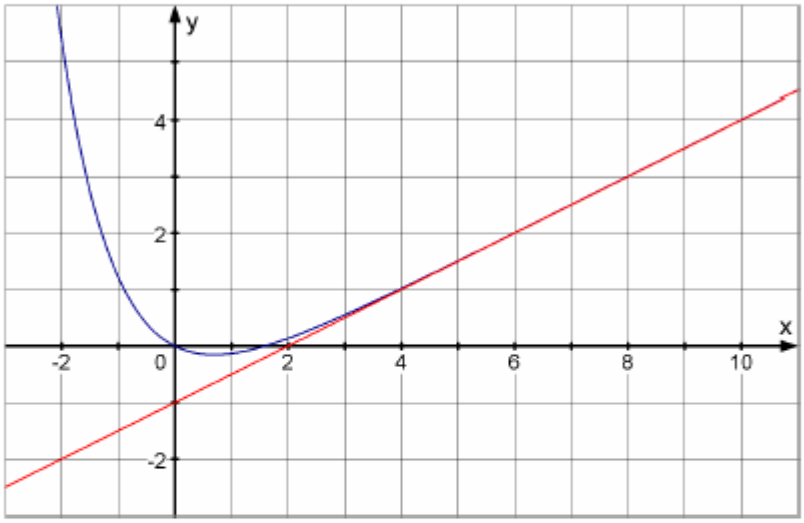
a) K sei das Schaubild von f. K hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Einer davon läßt sich berechnen.

Welchen Extrempunkt hat K ? Zeige daß seine y-Koordinate $y_E = \ln\sqrt{\frac{2}{e}}$ ist

Welche Asymptote hat die Kurve K ?

Warum hat K keine Wendepunkte ?

Zeichne das Schaubild K für $-3 \le x \le 10$.



Der Nullpunkt ist der erste Schnittpunkt von K mit der x-Achse, denn es gilt:

$f(0) = \frac{1}{2}\cdot 0 - 1 + e^{-0} = -1 + 1 = 0$.

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2} - e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$

Extrempunkt-Bedingung: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x} = 2 \Leftrightarrow x_E = \ln 2$

Funktionswert:

$f(\ln 2) = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - 1 + e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - 1 + e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \frac{1}{2} \approx -0{,}15$

Angegeben war

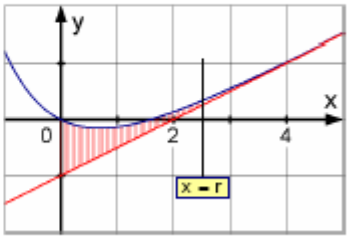
$$y_E = \ln\sqrt{\frac{2}{e}} = \ln\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2}{e} = \frac{1}{2}\cdot(\ln 2 - \ln e) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1) = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \frac{1}{2}$$

Kontrolle: $f''(\ln 2) = e^{\ln 2} > 0$

Also liegt ein Tiefpunkt vor: $T(\ln 2 \mid \frac{1}{2}\ln 2 + 1)$

b) Die Kurve K, die Asymptote und die y-Achse begrenzen eine bis ins Unendliche reichende Fläche. Berechne deren Inhalt.

$$A(r) = \int_0^r \left(\left(\tfrac{1}{2}x - 1 + e^{-x}\right) - \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)\right)dx = \int_0^r e^{-x}dx$$



$A(r) = \left[-e^{-x}\right]_0^r = -e^{-r} + e^{0} = 1 - e^{-r}$

$A^* = \lim_{r\to\infty} A(r) = 1$,

denn $\lim_{r\to\infty} e^{-r} = 0$.

c) Gib die Gleichung der Tangente an K an, die zur Asymptote orthogonal ist.

Die Asymptote hat die Steigung $m_{As} = \frac{1}{2}$. Also muss die Tangente die Steigung $m_T = -\frac{1}{m_{As}} = -2$ haben.

Bedingung für die Tangentensteigung:

$f'(x_B) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - e^{-x} = -2 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow e^{x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x_B = \ln\frac{2}{5} = \ln 0{,}4$

y-Koordinate:

$y_B = f\left(\ln\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2}{5} - 1 + e^{-\ln\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2}{5} - 1 + e^{\ln\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2}{5} - 1 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{2}$

Berührpunkt somit: $B\left(\ln\frac{2}{5} \mid \frac{1}{2}\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\right)$

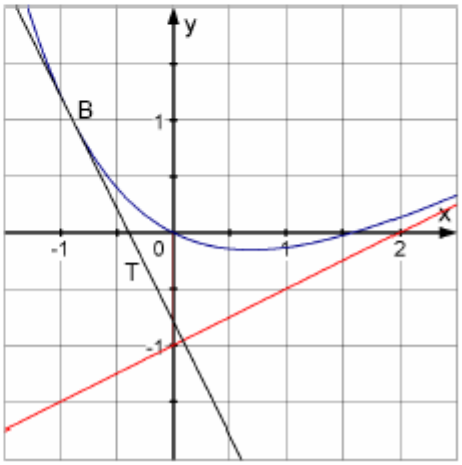
Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungsform:

$y - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\right) = -2\cdot\left(x - \ln\frac{2}{5}\right)$

$y = -2\cdot\left(x - \ln\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\right)$

$y = -2x + 2\cdot\ln\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{2}$

$y = -2x + \frac{5}{2}\cdot\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{2} \approx -2x - 0{,}79$

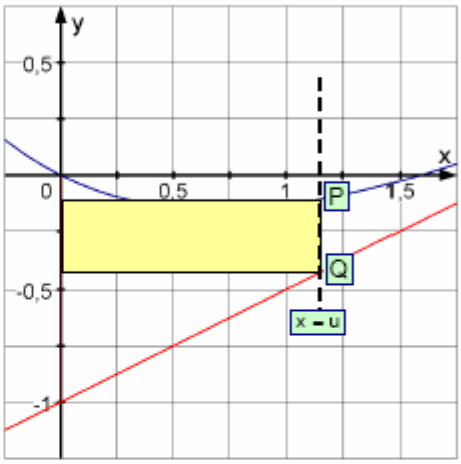


d) Die Gerade g: x = u mit u > 0 schneidet K in P und die Asymptote in Q. Die Parallelen zur x-Achse durch P und Q sowie g und die y-Achse begrenzen ein Rechteck. Für welches u nimmt der Inhalt dieses Rechtecks einen extremen Wert an ? Mache über dieses Extremwert Aussagen.

Die Gerade g schneidet

K in $P\left(u \mid \frac{1}{2}u - 1 + e^{-u}\right)$ und die

Asymptote in $Q\left(u \mid \frac{1}{2}u - 1\right)$



Grundseite des Rechtecks: u
Höhe des Rechtecks:
$\overline{PQ} = \left(\frac{1}{2}u - 1 + e^{-u}\right) - \left(\frac{1}{2}u - 1\right) = e^{-u}$

Inhalt des Rechtecks:

$$F(u) = u \cdot e^{-u}$$

Diese Flächeninhaltsfunktion hat den Definitionsbereich $\mathbf{D_u} = \mathbf{R^+}$.

Ableitungen

$$F'(u) = 1 \cdot e^{-u} \cdot u \cdot \left(-e^{-u}\right) = e^{-u}(1-u)$$
$$F''(u) = -e^{-u} \cdot (1-u) + e^{-u} \cdot (-1) = -e^{-u}(1-u+1) = -e^{-u}(2-u)$$

Extremwertbedingung:

$$F'(u_E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_E = 1$$

Kontrolle: $F''(1) = -e^{-1}(2-1) < 0$

Es liegt somit ein Maximum vor mit dem Wert $F_{max} = F(1) = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$

Aufgabe 266:

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = tx - e^{tx-1} \quad für\ t > 0$

K_t sei das Schaubild der Funktion f_t.

a) Berechne den Schnittpunkte von K_t mit der y-Achse, Extrem- und Wendepunkte sowie die Gleichung der Asymptoten.

Zeichne $K_{\frac{1}{2}}$ für $-6 \le x \le 6$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) Gesucht sind drei Tangenten an K_t:

(1) Die Tangente im Punkt $P\left(-\frac{1}{t} \mid ?\right)$

(2) Die Tangente parallel zur Geraden $g: y = -2tx - t^2$

(3) Die Tangente, die durch den Ursprung geht.

(4) Die Tangente, die durch den Punkt $Q(0 \mid e)$ geht.

c) Die Kurve $K_{\frac{1}{2}}$, die Asymptote, die x-Achse und die Gerade h: $x = u$, $(u < 0)$ begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt $A(u)$ sowie deren Grenzwert für $u \to -\infty$.

d) Die Gerade h: $x = u$ $(u < 0)$ schneidet die Kurve $K_{\frac{1}{2}}$ in R und die Asymptote in S.

Berechne den Inhalt $F(u)$ des Dreiecks ORS.

Für welchen Wert von u wird der Inhalt ein Extremwert ? Gib die Art des Extremums an und seine Größe.

Lösung:

a) **Schnitt von K_t mit der x-Achse:**

$f_t(0) = 0 - e^{-1} = -e^{-1} \Rightarrow S_y\left(0 \mid -\frac{1}{e}\right)$.

Ableitungen: $f_t'(x) = t - t \cdot e^{tx-1}$, $f_t''(x) = -t^2 e^{tx-1}$

Extrempunkte:

Bedingung: $f_t'(x_E) = 0 \Leftrightarrow t - te^{tx-1} = 0 \Leftrightarrow te^{tx-1} = t \mid :t$

$e^{tx-1} = 1 \Leftrightarrow tx - 1 = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow tx = 1 \Leftrightarrow x_E = \frac{1}{t}$.

y-Koordinate: $f_t\left(\frac{1}{t}\right) = t \cdot \frac{1}{t} - e^{t \cdot \frac{1}{t} - 1} = 1 - e^{1-1} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

Kontrolle: $f_t''\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2 e^0 < 0 \Rightarrow$ Relatives Maximum.

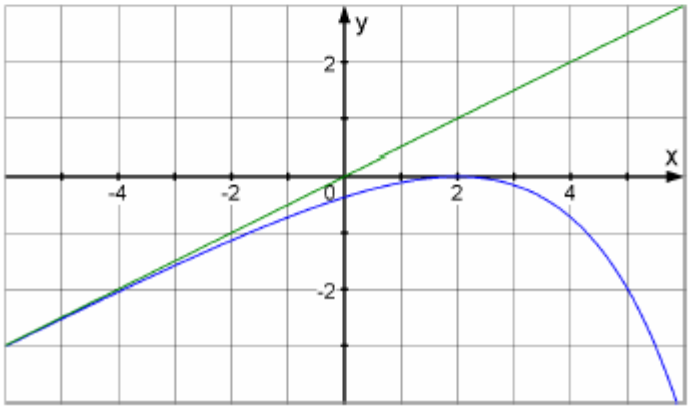
K_t hat somit den Hochpunkt $H\left(\frac{1}{t} \mid 0\right)$.

Die Hochpunkte aller Scharkurven liegen somit auf der x-Achse.

Wendepunkte gibt es keine, da f_t'' keine Nullstellen besitzt.

Asymptote: $y = tx$, denn $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{tx-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{tx}}{e} = 0$ wegen $t>0$.

Schaubild von $K_{\frac{1}{2}}$:



b) **Tangentenprobleme:**

(1) Tangente durch $P\left(-\frac{1}{t}\,|\,?\right)$

$$f_t\left(-\frac{1}{t}\right) = -t\cdot\frac{1}{t} - e^{-t\cdot\frac{1}{t}-1} = -1-e^{-2} \;\Rightarrow\; P\left(-\tfrac{1}{t}\,|\,-1-e^{-2}\right).$$

Tangentsteigung: $m_{T,1} = f_t'\left(-\frac{1}{t}\right) = t - te^{-t\cdot\frac{1}{t}-1} = t - t\cdot e^{-2} = t\left(1-e^{-2}\right)$

Tangentengleichung:

$$y-\left(-1-e^{-2}\right) = t\left(1-e^{-2}\right)\cdot\left(x+\tfrac{1}{t}\right)$$
$$y = t\left(1-e^{-2}\right)\cdot\left(x+\tfrac{1}{t}\right)+\left(-1-e^{-2}\right)$$
$$y = t\left(1-e^{-2}\right)\cdot x + 1 - e^{-2} - 1 - e^{-2}$$
$$y = t\left(1-e^{-2}\right)\cdot x + 1 - 2e^{-2}$$

(2) Tangente parallel zu $g:\ y = -2tx - t^2$:

Also muss die Tangente diese Steigung haben: $m_{T,2} = -2t$

d.h.

$$f_t'(x_B) = -2t$$
$$t - t\cdot e^{tx-1} = -2t$$
$$-t\cdot e^{tx-1} = -3t$$
$$e^{tx-1} = 3$$
$$tx - 1 = \ln 3$$
$$tx = \ln 3 + 1$$
$$x_B = \frac{\ln 3 + 1}{t}$$

y-Koordinate: $y_B = f_t\left(\frac{1+\ln 3}{t}\right) = t\cdot\frac{1+\ln 3}{t} - e^{t\cdot\frac{1+\ln 3}{t}-1} = 1+\ln 3 - \underbrace{e^{\ln 3}}_{=3} = \ln 3 - 2$

Berührpunkt: $B\left(\frac{1+\ln 3}{t}\,|\,\ln 3 - 2\right)$

Gleichung der Tangente: Bekannt ist die Steigung $m_{T,2} = -2t$:

$$y-(\ln 3-2) = -2t\cdot\left(x-\tfrac{1+\ln 3}{t}\right)$$
$$y = -2t\cdot\left(x-\tfrac{1+\ln 3}{t}\right)+(\ln 3-2)$$
$$y = -2tx + 2\cdot(1+\ln 3)+(\ln 3-2)$$
$$y = -2tx + 3\cdot\ln 3$$
$$y = -2tx + \ln 27$$

(3) Tangente durch den Ursprung.

Diese Grundaufgabe wird mit dieser Methode gelöst: Man stellt in einem beliebigen Kurvenpunkt $B(u \mid f_t(u))$ *die Tangentengleichung auf und verlangt, daß der Ursprung auf dieser Tangente liegt, also setzt man für x und y 0 ein.*

Beliebiger Kurvenpunkt: $B\left(u \mid tu - e^{tu-1}\right)$,

Tangentensteigung in B: $m_{T,3} = f_t'(u) = t - te^{tu-1}$

Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungs-Form:

$$y - \left(tu - e^{tu-1}\right) = \left(t - te^{tu-1}\right)(x - u) \qquad (*)$$

Bedingung: $O \in T_3$: $\quad 0 - \left(tu - e^{tu-1}\right) = \left(t - te^{tu-1}\right)(0 - u)$

$$-\left(tu - e^{tu-1}\right) = \left(t - te^{tu-1}\right)(-u) \quad \text{bzw.} \quad \left(tu - e^{tu-1}\right) = \left(t - te^{tu-1}\right)u$$

$$tu - e^{tu-1} = tu - tue^{tu-1}$$

$$-e^{tu-1} = -tue^{tu-1} \quad \text{bzw.} \quad e^{tu-1} = tue^{tu-1}$$

$$e^{tu-1} - tue^{tu-1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad e^{tu-1}(1 - tu) = 0$$

Weil $e^{tu-1} \neq 0$ folgt: $\quad tu = 1$ also $u = \frac{1}{t}$.

Damit haben wir den Hochpunkt gefunden, der auf der x-Achse liegt und diese somit zur Tangente hat.

Mit Nachdenken hätte man also diese Lösung schnell finden können.

(4) Soll die Tangente statt durch O durch $Q(0 \mid e)$ gehen, lautet die

Bedingung: $Q \in T_3$, d.h. $\quad e - \left(tu - e^{tu-1}\right) = \left(t - te^{tu-1}\right)(0 - u)$

$$e - tu + e^{tu-1} = -tu + tue^{tu-1}$$

$$e = tue^{tu-1} - e^{tu-1}$$

$$e^{tu-1}(tu - 1) = e$$

Hier muss man eine Probierlösung finden. Durch genaues Hinsehen erkennt man, daß die linke Seite zu e wird, wenn $tu - 1 = 1$ wird, also wenn gilt

$$tu = 2 \quad \text{bzw.} \quad u_B = \frac{2}{t}$$

y-Koordinate: $y_B = f_t\left(\frac{2}{t}\right) = t \cdot \frac{2}{t} - e^{t\frac{2}{t}-1} = 2 - e^{2-1} = 2 - e$

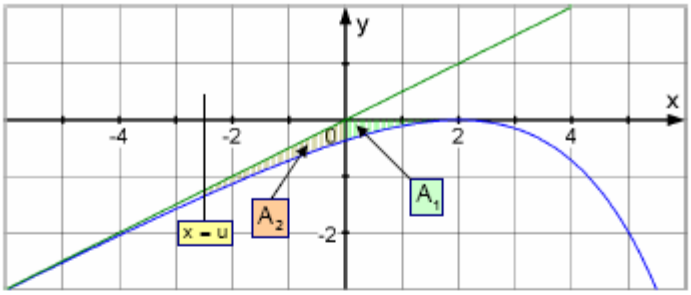
Berührpunkt: $B\left(\frac{2}{t} \mid 2 - e\right)$

Tangentensteigung: $m_{T,4} = t - t \cdot e^{t\frac{2}{t}-1} = t - t \cdot e = t(1 - e)$

Tangentengleichung: T_4: $\quad y = t(1 - e)x + e$,

denn Q war der Schnittpunkt von T_4 mit der y-Achse !

c) **Flächenberechnung.**



$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{0} f_{\frac{1}{2}}(x)\,dx$ denn die Fläche wird oben von der x-Achse begrenzt.

Damit sie dann nicht negativ wird, vertauscht man die Grenzen.

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{0}\left(\tfrac{1}{2}x - e^{\frac{1}{2}x-1}\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 - \frac{e^{\frac{1}{2}x-1}}{\frac{1}{2}}\right]_2^0 = \left[\tfrac{1}{4}x^2 - 2e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_2^0 =$$

$$A_1 = \left[0 - 2e^{-1}\right] - \underbrace{\left[\tfrac{1}{4}\cdot 4 - 2e^{0}\right]}_{=-1-2} = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

$$A_2(u) = \int_{u}^{0}\left(\tfrac{1}{2}x - \left(\tfrac{1}{2}x - e^{\frac{1}{2}x-1}\right)\right)dx = \int_{u}^{0} e^{\frac{1}{2}x-1}dx = \left[2e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_u^0 = 2e^{-1} - 2e^{\frac{1}{2}u-1} = \frac{2}{e} - 2e^{\frac{1}{2}u-1}$$

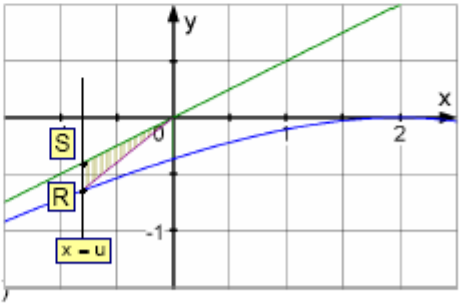
$$A(u) = A_1 + A_2(u) = 1 - \frac{2}{e} + \frac{2}{e} - 2e^{\frac{1}{2}u-1} = 1 - 2e^{\frac{1}{2}u-1}$$

$$A^* = \lim_{u\to-\infty} A(u) = 1, \quad \text{denn} \quad \lim_{u\to-\infty} e^{\frac{1}{2}u-1} = \lim_{u\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}u}}{e} = 0.$$

d) **Extremwertaufgabe**

$R\left(u \mid \tfrac{1}{2}u - e^{\frac{1}{2}u-1}\right)$

$S\left(u \mid \tfrac{1}{2}u\right)$



Inhalt des Dreiecks ORS:

Grundseite $\overline{RS} = y_S - y_R = e^{\frac{1}{2}u-1}$

(stets achsenparallel wählen!)

Höhe = -u (Achtung: u ist negativ !!!)

$F(u) = \tfrac{1}{2}\cdot(-u)\cdot e^{\frac{1}{2}u-1} = -\tfrac{1}{2}u\cdot e^{\frac{1}{2}u-1}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbf{D}_u =]-\infty;0[$.

Ableitungen mit der Produktregel:

$$F'(u) = -\left(\tfrac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}u-1} + \tfrac{1}{2}u\cdot\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}u-1}\right) = -\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}u-1}\left(1+\tfrac{1}{2}u\right)$$

$$F''(u) = -\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}u-1}\left(1+\tfrac{1}{2}u\right) + \tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}u-1}\cdot\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}e^{\frac{1}{2}u-1}\cdot\left(2+\tfrac{1}{2}u\right)$$

Extremwertbedingung: $F'(u_E) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}u = 0 \Leftrightarrow u_E = -2$.

Kontrolle: $F''(2) = -\frac{1}{4}e^0 \cdot (2+1) < 0$

Der Flächeninhalt nimmt also für u = -1 ein relatives Maximum an.

Dieses hat den Wert $F(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)-1} = e^{-2}$

Um zu untersuchen, ob dieses Maximum sogar ein absolutes Maximum darstellt, muss man die Randwerte untersuchen.

Wegen $\mathbf{D}_u =]-\infty; 0[$ berechnet man:

(1) $\lim\limits_{u \to -\infty} F(u) = \lim\limits_{u \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}u \cdot e^{\frac{1}{2}u-1} \right) = 0$

Zur Begründung wird man im Grundkurs argumentieren, daß man gelernt hat, daß sich im Produkt $u \cdot e^{-u}$ der e-Faktor durchsetzt.

Im Leistungskurs wird man das Ergebnis mit dem Satz von de L'Hospital beweisen:

$$\lim_{u \to -\infty} F(u) = \lim_{u \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}u \cdot e^{\frac{1}{2}u-1} \right) = \lim_{u \to -\infty} \frac{-\frac{1}{2}u}{e^{-\frac{1}{2}u+1}} = \lim_{u \to -\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u+1}} = \lim_{u \to -\infty} e^{\frac{1}{2}u-1} = 0.$$

(2) $\lim\limits_{u \to 0-} F(u) = \lim\limits_{u \to 0-} \left(-\frac{1}{2}u \cdot e^{\frac{1}{2}u-1} \right) = 0 \cdot e^{-1} = 0$

Ergebnis: Da der Inhalt zum Rand hin abnimmt, befindet sich bei - 2 das absolute Maximum.

Aufgabe 267:

Untersuche die folgenden Funktionen bzw. ihre Schaubilder auf

Definitionsbereich,
Randwerte,
senkrechte Asymptoten,
Nullstellen,
2 Ableitungen,
Extrem- und Wendepunkte.

a)

$$f(x) = \ln\left(4 - \tfrac{1}{2}x\right)$$

b)

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{t}x - t\right) \quad \text{für } t > 0$$

Lösung:

a)

Definitionsbereich: Bed.: $\text{Arg} > 0$ d.h. $4-\frac{1}{2}x>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x<4 \Leftrightarrow x<8$: $\mathbf{D}=]-\infty;8[$

Randwerte: $x \to 8 \Rightarrow \text{Arg} \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow \text{Arg} \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

Senkrechte Asymptote: $x = 8$

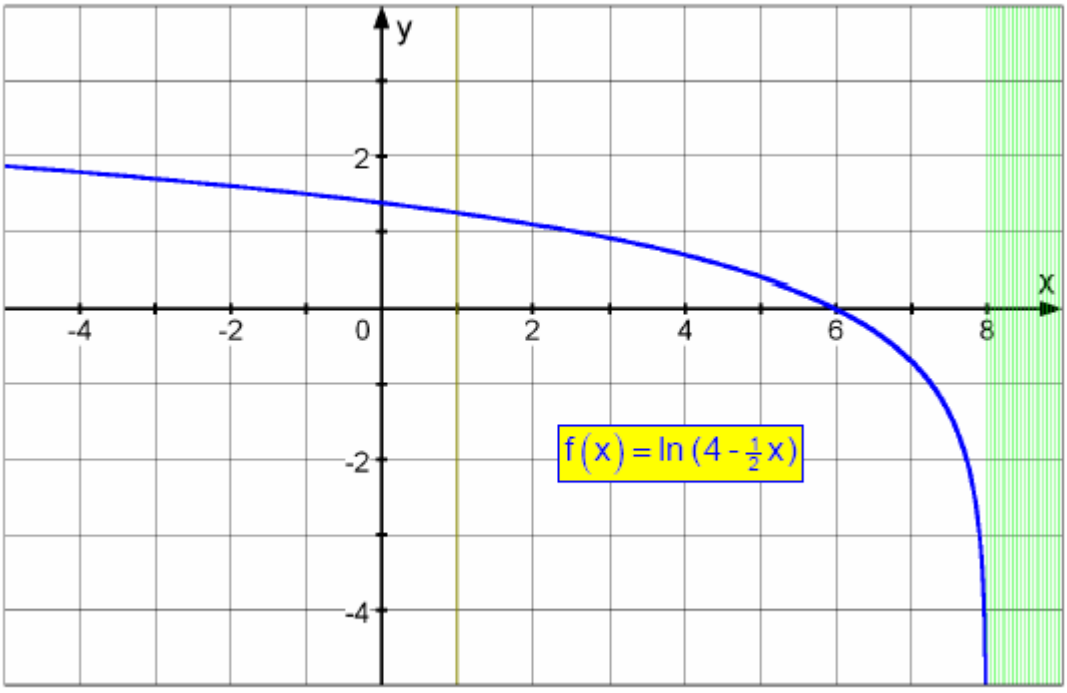
Wertmenge: $\mathbf{W}=\mathbf{R}$

Nullstelle: Bed.: $\text{Arg} = 1$ d.h. $4-\frac{1}{2}x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=3 \Leftrightarrow x_N=6$: $N(6\,|\,0)$

Ableitungen: $f'(x)=\frac{-\frac{1}{2}}{4-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{x-8}=(x-8)^{-1}$

$f''(x)=-(x-8)^{-2}=-\frac{1}{(x-8)^2}$

Da f' und f'' keine Nullstellen haben, besitzt das Schaubild K von f weder Extrem- noch Wendepunkte.



b)

Definitionsbereich: Bed.: Arg > 0 d.h. $\frac{1}{t}x - t > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t}x > t \Leftrightarrow x > t^2$ $\mathbf{D} =]t^2;\infty[$

Randwerte: $x \to t^2 \Rightarrow Arg \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$x \to \infty \Rightarrow Arg \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

Senkrechte Asymptote: $x = t^2$

Wertmenge: $\mathbf{W} = \mathbf{R}$

Nullstelle: Bed.: Arg = 1 d.h $\frac{1}{t}x - t = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t}x = t + 1 \Leftrightarrow x = t^2 + t$

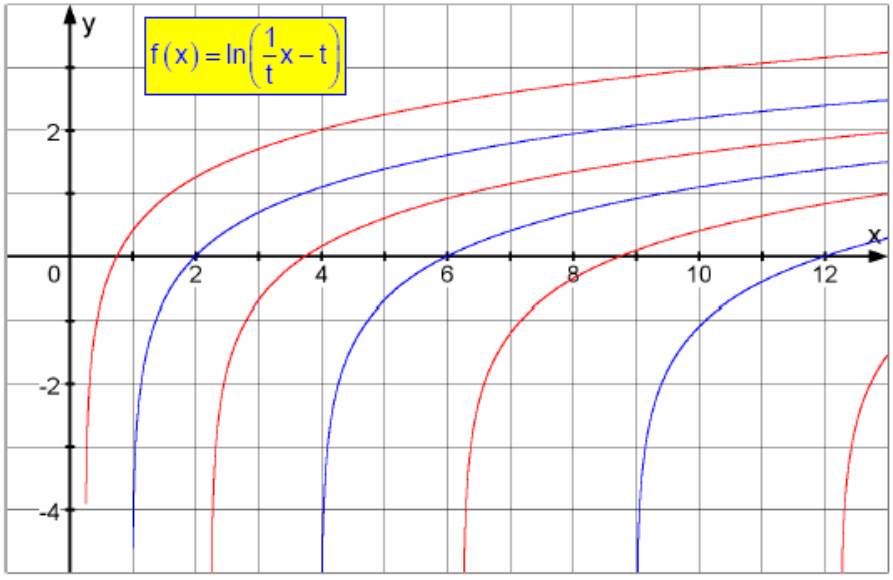
$N(t^2 + t \mid 0)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}x - t} = \frac{1}{x - t^2} = (x - t^2)^{-1}$

$f''(x) = -(x - t^2)^{-2} = -\frac{1}{(x - t^2)^2}$

Da f' und f'' keine Nullstellen haben, besitzt das Schaubild K von f weder Extrem- noch Wendepunkte.

Das Schaubild zeigt alle Scharkurven für t = 0,5 ; 1 ; 1,5 ; bis 4.



Aufgabe 268:

Untersuche die folgenden Funktionen bzw. ihre Schaubilder auf

Definitionsbereich,
Randwerte,
senkrechte Asymptoten,
Nullstellen,
Symmetrie !!!
2 Ableitungen,
Extrem- und Wendepunkte.

$f(x)=\ln\left(8-\frac{1}{2}x^2\right)$

Lösung:

Definitionsbereich: Bed.: Arg > 0 d.h. $8-\frac{1}{2}x^2>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2<8 \Leftrightarrow x^2<16$
also $|x|<4 \Leftrightarrow -4<x<4$ mit $\mathbf{D}=[-4;4]$

Symmetrie: Wegen $f(-x)=f(x)$ ist K symmetrisch zur y-Achse.

Randwerte: $x\to 4 \Rightarrow \text{Arg}\to 0 \Rightarrow f(x)\to -\infty$
$x\to -4 \Rightarrow \text{Arg}\to 0 \Rightarrow f(x)\to -\infty$
$x\to \pm\infty$ ist in diesem Definitionsbereich nicht möglich.

Senkrechte Asymptoten: x = - 4 und x = 4

Nullstelle: Bed.: Arg = 1 d.h
$8-\frac{1}{2}x^2=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=7 \Leftrightarrow x^2=14 \Leftrightarrow x_N=\pm\sqrt{14}$
$N_1\left(\sqrt{14}\,|\,0\right)\approx(3{,}74\,|\,0)$ $N_2\left(-\sqrt{14}\,|\,0\right)\approx(-3{,}74\,|\,0)$

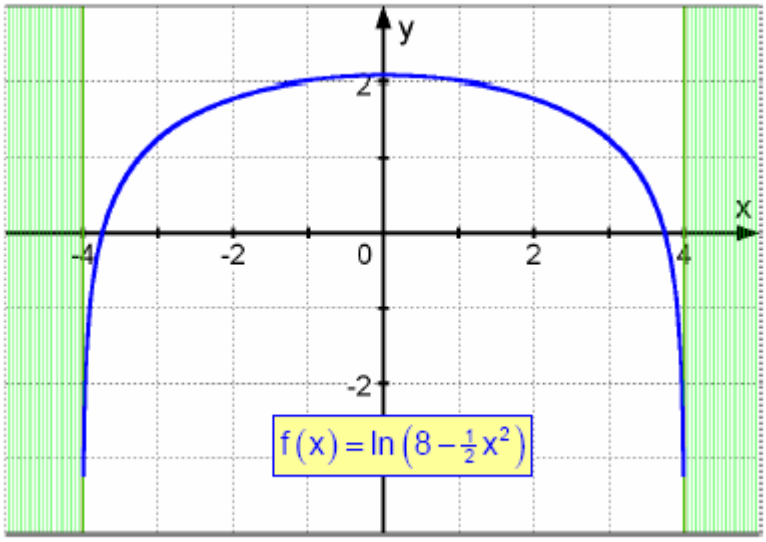
Ableitungen: $f'(x)=\frac{-x}{8-\frac{1}{2}x^2}=\frac{2x}{x^2-16}$

$$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2-16)-2x\cdot 2x}{(x^2-16)^2}=\frac{-2x^2-32}{(x^2-16)^2}=-2\frac{x^2+16}{(x^2-16)^2}$$

Extrempunkte: $f_t'(x_E)=0$ ergibt $x_E=0$ mit $f(0)=\ln 8$
und $f''(0)=-2\cdot\frac{16}{(-16)^2}<0$, also Hochpunkt H(0 | ln 8)

Wendepunkte gibt es keine, da f'' keine Nullstellen hat: $x^2 + 16 = 0$ führt auf $x^2 = -16$, was nie möglich wird.

Wertmenge: $\mathbf{W}=]-\infty;\ln 8]$



Aufgabe 269:

Bestimme den Definitionsbereich, Nullstellen, die Randwerte, Asymptoten und berechne zwei Ableitungen sowie Extrem- und Wendepunkte.

Zeichne das Schaubild K mit Längeneinheit 1 cm.

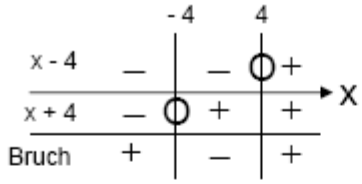
Beweise eine eventuell vorhandene Symmetrie.

$$f(x)=\ln\frac{x-4}{x+4}$$

Lösung:

Definitionsbereich: Bed.: Arg > 0 d.h. $\frac{x-4}{x+4}>0$

Vorzeichentabelle:



Definitionsbereich also:
$\mathbf{D}=]-\infty;-4[\cup]4;\infty[=\mathbf{R}\setminus[-4;4]$

Randwerte: $x\to 4 \Rightarrow \text{Arg}\to 0 \Rightarrow f(x)\to -\infty$

$x\to -4 \Rightarrow \text{Arg}\to \infty \Rightarrow f(x)\to \infty$ (Polstelle des Bruches !)

$\lim\limits_{|x|\to\infty} \ln\frac{x-4}{x+4}=\lim\limits_{|x|\to\infty} \ln\frac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{4}{x}}=\ln 1=0$

Asymptoten: senkrecht: x = 4 und x = - 4, waagerecht: y = 0

Wertmenge: $\mathbf{W}=\mathbf{R}$

Nullstelle: Bed.: Arg = 1 d.h $\frac{x-4}{x+4}=1 \Leftrightarrow x-4=x+4 \Leftrightarrow -4=4$

Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine Nullstellen gibt.

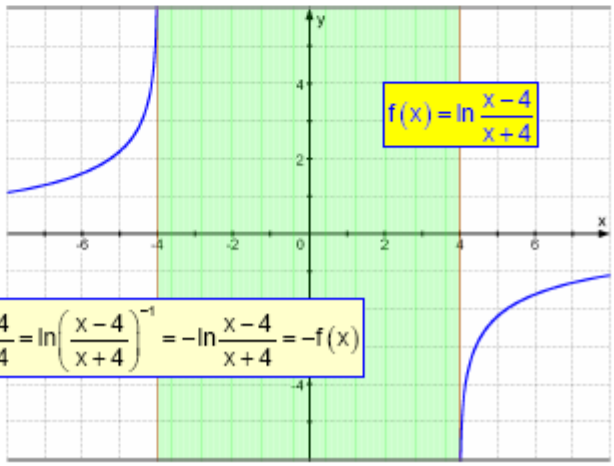
Ableitungen: $f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x}=2\frac{x+1}{(x^2+2x)}$

$$f''(x)=2\frac{1\cdot(x^2+2x)-(2x+2)(x+1)}{(x^2+2x)^2}=2\frac{x^2+2x-2x^2-4x-2}{(x^2+2x)^2}=2\frac{-x^2-2x-2}{(x^2+2x)^2}$$

Keine Extrempunkte: denn $f_t'(x_E)=0$ ergibt $x_E=-1\notin\mathbf{D}$!

Keine Wendepunkte: denn $f_t''(x_W)=0$ ergibt $x^2+2x+2=0$ ohne Lösungen:

$x_W=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}\notin\mathbf{R}$



Zusatz:

Beweise, daß K punktsymmetrisch zu O ist.

Beweis:

$$f(-x)=\ln\frac{-x-4}{-x+4}=\ln\frac{+x+4}{+x-4}=\ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{-1}=-\ln\frac{x-4}{x+4}=-f(x)$$

ÜBEN !!!

Aufgabe 270:

Bestimme den Definitionsbereich, Nullstellen, die Randwerte, Asymptoten und berechne zwei Ableitungen sowie Extrem- und Wendepunkte.

Zeichne das Schaubild K mit Längeneinheit 1 cm.

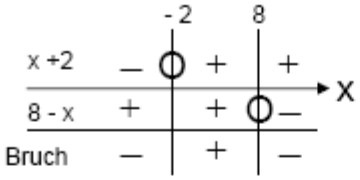
Beweise eine eventuell vorhandene Symmetrie.

$$f(x)=\ln\frac{x-4}{x+4}$$

Lösung:

Definitionsbereich: Bed.: Arg > 0 d.h. $\frac{x-4}{x+4} > 0$

Vorzeichentabelle:



Definitionsbereich also:
D =]−2;8[

Randwerte: $x \to 2 \Rightarrow Arg \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$x \to 8 \Rightarrow Arg \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ (Polstelle des Bruches !)

Asymptoten: senkrecht: x = -2 und x = 8.

Wertmenge: **W = R**

Nullstelle: Bed.: Arg = 1 d.h $\frac{x+2}{8-x} = 1 \Leftrightarrow x+2 = 8-x \Leftrightarrow 2x = 6$

$x_N = 3$ d.h. N (3 | 0).

Ableitungen: $f'(x) = \frac{8-x}{x+2} \cdot \frac{1\cdot(8-x)-(-1)\cdot(x+2)}{(8-x)^2} = \frac{8-x}{x+2} \cdot \frac{10}{(8-x)^2}$

$$f'(x) = \frac{10}{(x+2)(8-x)} = \frac{10}{-x^2+6x+16} = -\frac{10}{x^2-6x-16} = -10\left(x^2-6x-16\right)^{-1}$$

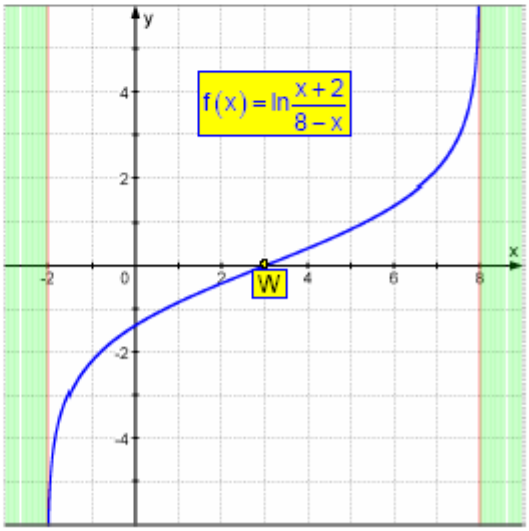
$$f''(x) = 10\left(x^2-6x-16\right)^{-2} \cdot (2x-6) = 20\frac{x-3}{\left(x^2-6x-16\right)^2}$$

Extrempunkte gibt es keine, da f' einen konstanten Zähler und somit keine Nullstellen hat.

Wendepunkte:
Bed.: $f_t''(x_W) = 0$
d.h. x_W = 3 (Nullstelle!)

Da 3 eine einfache Nullstelle von f'' ist, liegt dort Vorzeichenwechsel von f' vor, also besitzt K dort Krümmungswechsel.

Ergebnis:
Wendepunkt W (3 | 0).



Aufgabe 271:

Gegeben ist zwei Funktionenscharen f_a und g_a durch

$$g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin x \quad \text{und} \quad f_a(x) = \frac{a}{4} \cdot \sin x$$

für $0 \le x \le 2\pi$ und $a > 0$.

a) Gib die Extremwerte von g_a in Abhängigkeit von a an.

b) Für welche Werte von a besitzt g_a keine, eine oder zwei Nullstellen ?

c) Zeichne das Schaubild K_2 von g_2 in ein Achsenkreuz (Längeneinheit 2 cm)
Durch welche Abbildungen entsteht die Kurve K_2 aus der Kurve y = sin x ?

d) Für welche Werte von a schneiden sich die Schaubilder von f_a und g_a auf der Geraden $x = \frac{1}{3}\pi$?

Für welchen Wert von a berühren sich die beiden Schaubilder ?

e) Für a = 2 schließen die beiden Kurven ein Flächenstück ein.
Berechne seinen Inhalt.

f) Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Kurven von Teilaufgabe c) bilden ein Drachenviereck. Berechne seinen Inhalt.

Lösung:

a) $g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin x$ für $0 \le x \le 2\pi$ und $a > 0$.

$g_a'(x) = -\frac{3}{a}\cos x$

$g_a''(x) = \frac{3}{a}\sin x$

a) **EXTREMPUNKTE**:

Bed.: $g'(x_E) = 0$ d.h. $\cos x_E = 0$

Es folgt $x_{E,1} = \frac{1}{2}\pi$, $x_{E,2} = \frac{3}{2}\pi$.

Kontrolle: $g_a''(\frac{1}{2}\pi) = \frac{a}{4} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{2}\pi}_{=1} = \frac{a}{2} > 0$ rel. Minimum und

$g_a''(\frac{3}{2}\pi) = \frac{a}{4} \cdot \underbrace{\sin\frac{3}{2}\pi}_{=-1} = -\frac{a}{2} < 0$ rel. Maximum,

weil nach Voraussetzung a > 0 ist !

$g_a(\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin\frac{1}{2}\pi = \sqrt{3} - \frac{3}{a}$ und $g_a(\frac{3}{2}\pi) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin\frac{3}{2}\pi = \sqrt{3} + \frac{3}{a}$

Ergebnis:

Das Schaubild K_a von f_a hat den natürlichen Tiefpunkt $T\left(\frac{1}{2}\pi \mid \sqrt{3} - \frac{3}{a}\right)$ und den natürlichen Hochpunkt $H\left(\frac{3}{2}\pi \mid \sqrt{3} + \frac{3}{a}\right)$

Die Bezeichnung „natürlich“ soll andeuten, daß es wegen des „künstlich“ auf $\mathbf{D} = [\,0\,;2\pi\,]$ verkleinerten Definitionsbereiches dort Randextrempunkte gibt.

Wenn sie gefragt sind, ermittelt man sie so:

Tangentensteigung im Randpunkt $L\left(0 \mid \sqrt{3}\right)$: $g_a'(0) = -\frac{3}{a} < 0$, d.h. links fällt die Kurve K_g, also ist L ein Randhochpunkt.

In $R\left(2\pi \mid \sqrt{3}\right)$ ist $g_a'(2\pi) = -\frac{3}{a} < 0$, d.h. rechts fällt die Kurve K_a, also ist R ein Randtiefpunkt.

b) *Für welche Werte von a besitzt g_a kein, eine oder zwei Nullstellen ?*

$$g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin x$$

Nullstellenbedingung: $g_a(x_N) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{a}\sin x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

Im Intervall $\mathbf{D} = [\,0\,;2\pi\,]$ hat die Sinusfunktion Werte aus dem Bereich $[-1;1]$.

Fallunterscheidung:

(1) Ist sinx < 1, dann gibt es zwei Werte, also für $\frac{a}{3}\sqrt{3} < 1 \Leftrightarrow a < \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

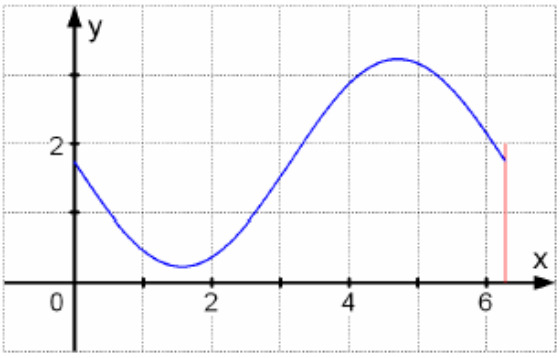
Dabei muß nach Voraussetzung a > 0 bleiben.

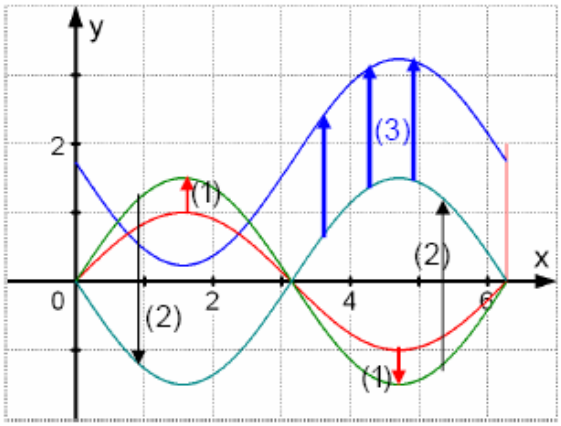
(2) Ist sinx = 1, dann gibt es genau einen Wert, nämlich $x = \frac{1}{2}\pi$. Und dies tritt ein, wenn $\frac{a}{3}\sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$ ist.

(3) Ist sin x > 1, hat die Gleichung keine Lösung. Dies ist der Fall für $\frac{a}{3}\sqrt{3} > 1 \Leftrightarrow a > \sqrt{3}$.

Ergebnis: g_a hat genau 2 Nullstellen für $0 < a < \sqrt{3}$,
genau eine Nullstelle für $a = \sqrt{3}$
und keine Nullstelle für $a > \sqrt{3}$.

c) Schaubild von K_2 : $g_2(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{2} \cdot \sin x$





Dieses Schaubild entsteht aus y = sin x durch folgende Abbildungen:
(1) Eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor k = 1,5, dann eine Spiegelung (2) an der x-Achse. Und schließlich wurde die Kurve um die Strecke $\sqrt{3}$ in y-Richtung verschoben (3) (siehe Abbildung rechts.

d) *Für welche Werte von a schneiden sich die Schaubilder von f und g auf der Geraden* $x = \frac{1}{3}\pi$ *?*

Wenn sich zwei Schaubilder bei $\frac{1}{3}\pi$ schneiden, dann haben dort die beiden Funktionen denselben Wert:

$$f\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = g\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)$$

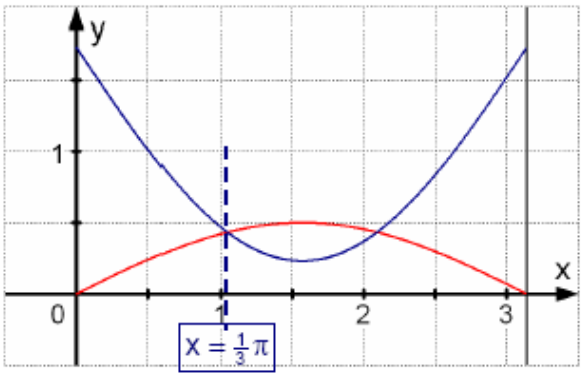
$$\tfrac{a}{4}\cdot\underbrace{\sin\tfrac{1}{3}\pi}_{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \tfrac{3}{a}\cdot\underbrace{\sin\tfrac{1}{3}\pi}_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$\tfrac{a}{8}\sqrt{3} = \sqrt{3} - \tfrac{3}{2a}\sqrt{3}$$

$$\tfrac{a}{8} = 1 - \tfrac{3}{2a} \quad |\cdot 8a$$

$$a^2 = 8a - 12$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$



Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

Ergebnis: Für $a_1 = 2$ oder $a_2 = 6$ schneiden sich die Schaubilder bei $\frac{1}{3}\pi$.

Für welchen Wert von a berühren sich die beiden Schaubilder ?

Der Tiefpunkt von K_g ist $T\left(\frac{1}{2}\pi \mid \sqrt{3} - \frac{3}{a}\right)$. Das Schaubild K_f von $f_a(x) = \frac{a}{4}\cdot\sin x$ hat ihren Hochpunkt auch bei $\frac{1}{2}\pi$: $H\left(\frac{1}{2}\pi \mid \frac{a}{4}\right)$. Da beide bei $x = \frac{1}{2}\pi$ liegen, können sie sich nur dort berühen, dann muss gelten:

$$f_a\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = g_a\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$\tfrac{a}{4} = \sqrt{3} - \tfrac{3}{a} \quad |\cdot 4a$$

$$a^2 = 4\sqrt{3}\cdot a - 12$$

$$a^2 - 4\sqrt{3}\cdot a + 12 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{16\cdot 3 - 48}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ergebnis: Für $a = 2\sqrt{3}$ berühren sich die beiden Schaubilder.

e) *Für a = 2 schließen die beiden Kurven ein Flächenstück ein. Berechne seinen Inhalt.*

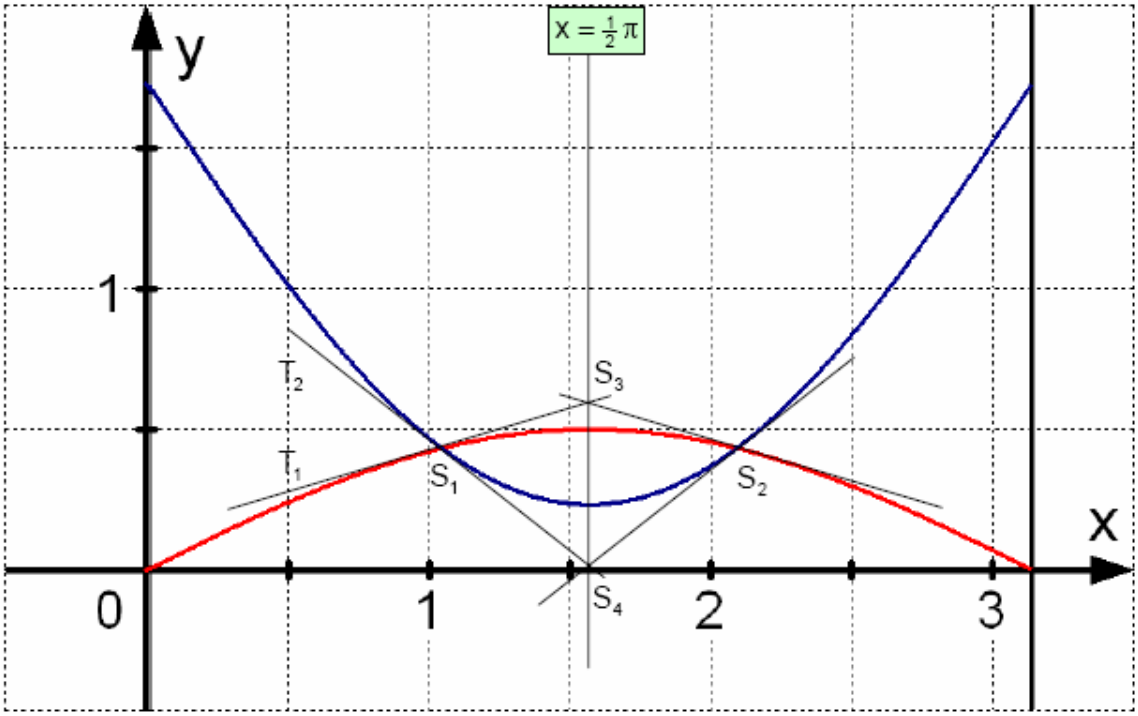
Es wurde bereits nachgewiesen, daß sich für a = 2 die beiden Schaubilder bei $\frac{1}{3}\pi$ schneiden. Weil die Sinuskurve zur Geraden $x = \frac{1}{2}\pi$ symmetrisch ist, liegt der zweite Schnittpunkt bei $x = \frac{2}{3}\pi$.

$$A = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left[\tfrac{1}{2}\cdot\sin x - \sqrt{3} + \tfrac{3}{2}\sin x\right] dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left[2\sin x - \sqrt{3}\right] dx$$

$$A = \left[-2\cos x - \sqrt{3}\cdot x\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} = \left[\underbrace{-2\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)}_{-0{,}5} - \sqrt{3}\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right] - \left[\underbrace{-2\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)}_{0{,}5} - \sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{3}\pi\right]$$

$$A = 1 - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\pi + 1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\pi = 2 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\pi \approx 0{,}186$$

f) *Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Kurven von Teilaufgabe c) bilden ein Drachenviereck. Berechne seinen Inhalt.*



Man muß erkennen, daß sich die Tangenten aus Symmetriegründen auf der Geraden $x = \frac{1}{2}\pi$ schneiden.

Schnittpunkte: $S_1\left(\frac{1}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$ und $S_2\left(\frac{2}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\cos x$ und $g'(x) = -\frac{3}{2}\cos x$

Tangentensteigungen:

in S_1 an K_f : $m_1 = f'(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

in S_1 an K_g : $m_2 = g'(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{1}{3}\pi = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

Tangentengleichungen (Punktsteigungsform)

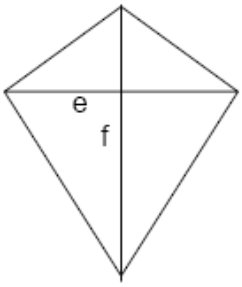
T_1 : $y - \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}\pi) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}$

T_2 : $y - \frac{1}{4}\sqrt{3} = -\frac{3}{4}(x - \frac{1}{3}\pi) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Schnitt mit der Geraden $x = \frac{1}{2}\pi$:

S_3 : $y_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} = (\frac{1}{8} - \frac{1}{12})\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{24}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}$

S_4 : $y_4 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} = (-\frac{3}{8} + \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} = -\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}$



Dracheninhalt: $A = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f$

mit $e = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$ und $f = y_3 - y_4 = \frac{1}{24}\pi + \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{6}\pi$

$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{36}\pi^2$

Aufgabe 272:

Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = tx + t\cdot\sin tx \quad \text{mit} \quad x \in \left]-\frac{2\pi}{t};\frac{2\pi}{t}\right[$$

Das Schaubild von f_t sei K_t.

a) Untersuche das Schaubild von K_1 auf Symmetrie, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K_1 mit Längeneinheit 1 cm.

b) Für welche Werte von t besitzt K_t waagerechte Tangenten ?

c) Berechne die Wendepunkte und die Gleichungen der Wendetangenten von K_t

Lösung:

$$f_t(x) = tx + t \cdot \sin tx \quad \text{mit} \quad x \in \mathbf{D}_t = \left]-\frac{2\pi}{t}; \frac{2\pi}{t}\right[\quad \text{und} \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

a) **Symmetrieverhalten:**

$$f_1(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f_1(x)$$

denn schon die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zu Ursprung mit $\sin(-x) = -\sin x$.

Ergebnis: K_1 ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Ableitungen:

$$f_1(x) = x + \sin x$$
$$f_1'(x) = 1 + \cos x$$
$$f_1''(x) = -\sin x$$
$$f_1'''(x) = -\cos x$$

Extrempunkte: Bedingung: $f_1'(x_E) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x_E = 0 \Leftrightarrow \cos x_E = -1$

Im Definitionsbereich $\mathbf{D}_t =]-2\pi; 2\pi[$ erhalten wir diese Lösungen:

Zunächst ist $\cos \pi = -1$. Im Intervall $[0; 2\pi]$ ist dies die einzige Lösung. Wegen der Periode $\Delta x = 2\pi$ folgt die weitere Lösung $x_E = \pi - 2\pi = -\pi$.

Funktionswerte: $f_1(\pi) = \pi + \underbrace{\sin \pi}_{0} = \pi$ und $f_1(-\pi) = -f_1(\pi) = -\pi$ wegen der Punktsymmetrie.

Kontrollrechnung (Hinreichende Bedingung):

$f_1''(\pi) = -\sin \pi = 0$ und $f_1''(-\pi) = -\sin(-\pi) = 0$

Es liegt also Verdacht auf Wendepunkt vor. Daher erfolgt die nächste Kontrolle:

$f_1'''(\pi) = -\cos \pi = -(-1) = 1 \neq 0$ und

$f_1'''(-\pi) = -\cos(-\pi) = -(-1) = 1 \neq 0$

WISSEN: Punkte mit waagerechter Tangente ($f'(a) = 0$) und den Eigenschaften $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$ sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente (=Terrassenpunkte) !

Man erhält sie meist bei der Suche nach Extrempunkten, muß sie dann aber den Wendepunkten zuordnen !

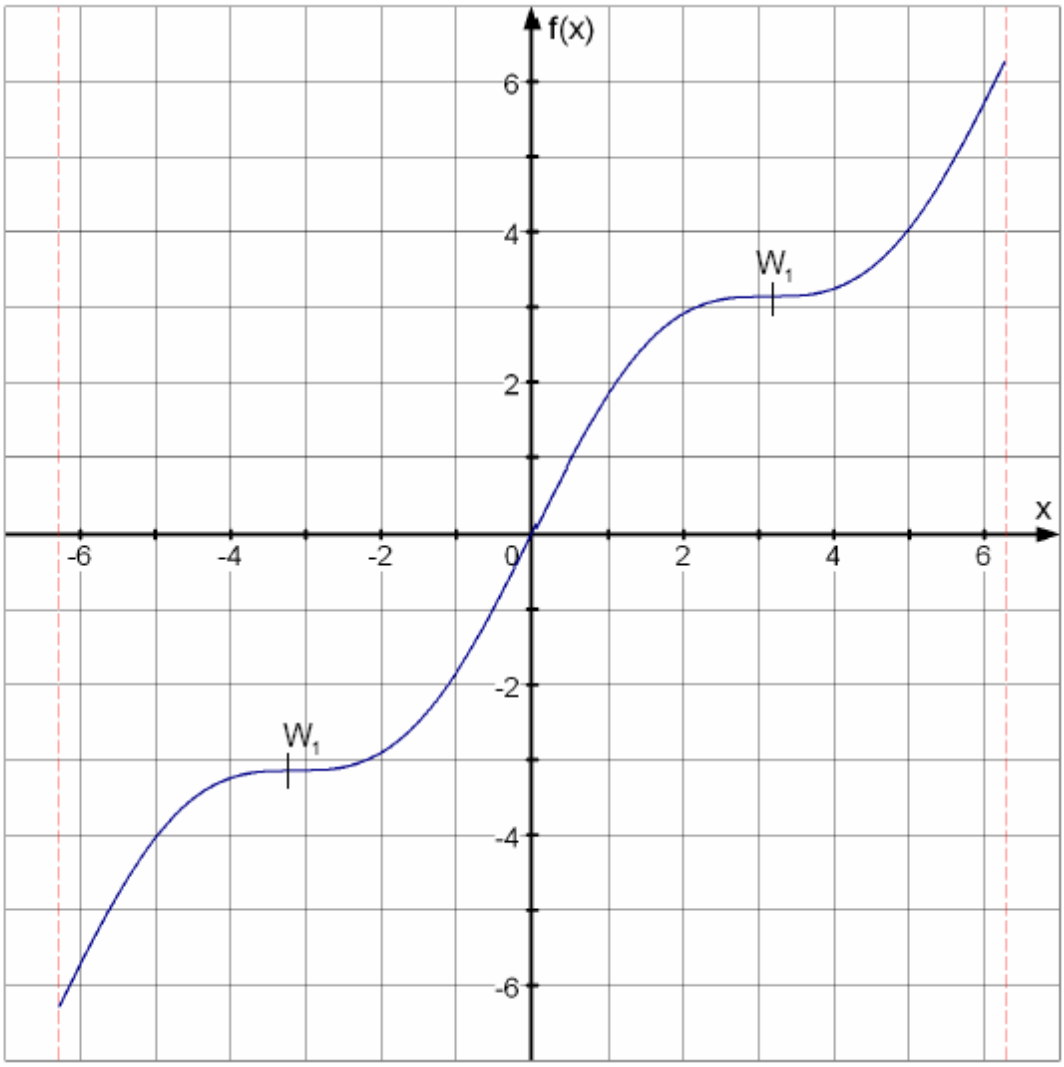
Ergebnis: Die Kurve hat keine Extrempunkte aber in $\mathbf{D_1}$ die beiden Terrassenpunkte $W_1(\pi|\pi)$ und $W_2(-\pi|-\pi)$.

Weitere Wendepunkte: Bed.: $f_1''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \sin x_W = 0$

Dies führt auf die schon bekannten Wendestellen $x_W = \pm\pi$ und außerdem zu $x_W = 0$ mit $f_1(0) = 0$.

Kontrolle: $f_1'''(0) = -\cos 0 = -1 \neq 0$

Es gibt also außer den beiden Terrassenpunkten noch den Wendepunkt $W_3(0|0)$.



b) Für welche Werte von t besitzt K_t waagerechte Tangenten ?

$f_t(x) = tx + t \cdot \sin tx$

$f_t'(x) = t + t^2 \cdot \cos tx$

$f_t''(x) = -t^3 \cdot \sin tx$

$f_t'''(x) = -t^4 \cdot \cos tx$

Punkte mit waagerechter Tangente: Bed.: $f_t'(x_E) = 0$

d.h. $t + t^2 \cdot \cos tx = 0 \Leftrightarrow t^2 \cdot \cos tx = -t$

Da $t \neq 0$ vorausgesetzt ist, kann man durch t dividieren und erhält

$$\cos tx = -\frac{1}{t}$$

Diese Gleichung soll nun nicht gelöst werden. Vielmehr soll geprüft werden, für welche Werte von t diese Gleichung lösbar wird.

Dazu muß man wissen, daß die Wertmenge der Kosinusfunktion $\mathbf{W} = [-1;1]$ ist. Also gilt $-1 \le -\frac{1}{t} \le 1.$ (1)

Da t positiv und negativ sein kann, muß man wegen der Regeln für Ungleichungen eine Fallunterscheidung durchführen. Außerdem spalten wir die Doppelungleichung (1) in zwei Bedingungen auf:

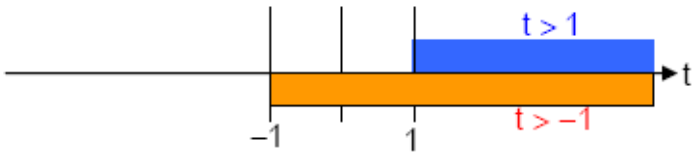
$-1 \le -\frac{1}{t}$ (1a) und $-\frac{1}{t} \le 1$ (1b)

1. Fall: $t > 0$. Dann ändert sich bei der Multiplikation der Ungleichungen (1a) und (2b) die Ungleichungsrichtung nicht:

$-1 \le -\frac{1}{t} \Leftrightarrow -t \le -1 \quad |\cdot(-1)$ bzw. $-\frac{1}{t} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t$

$t \ge 1$ (2a) $t \ge -1$ (2b)

Wir suchen eine gemeinsame Lösungsmenge für (2a) und (2b). Dies kann man sich sehr schön grafisch klar machen:



Es wird (vielleicht auch ohne Skizze) klar: Wenn die Ungleichung (2a) erfüllt ist, dann auch (2b). Also lautet die gemeinsame Lösungsmenge $\mathbf{L}_1 = [1;\infty[$, d.h. es bleibt die Forderung $t \ge 1$ übrig.,

2. Fall: $t < 0$. Dann ändert sich bei der Multiplikation der Ungleichungen (1a) und (2b) die Ungleichungsrichtung:

$-1 \le -\frac{1}{t} \Leftrightarrow -t \ge -1 \quad |\cdot(-1)$ bzw. $-\frac{1}{t} \le 1 \Leftrightarrow -1 \ge t$

$t \le 1$ (3a) $t \le -1$ (3b)

Analog zum 1. Fall wird klar, daß alle Zahlen, die (3b) erfüllen, auch (3a) erfüllen, d.h. es bleibt $t \le -1$ übrig mit $\mathbf{L}_2 =]-\infty;-1]$.

Insgesamt sind beide Fälle möglich. Die Lösungsmenge für t ist also die Vereinigungsmenge aus beiden:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 =]-\infty;-1] \cup [1;\infty[= \mathbf{R} \setminus]-1;1[.$$

Für alle Werte $t \le -1$ oder $t \ge 1$ gibt es somit Punkte mit waagerechter Tangente. Diese beiden Ungleichungen kann man noch zu einer Betragsungleichung zusammenziehen. Dann lautet das **Ergebnis**:
Für alle Werte t mit $|t| \ge 1$ hat K_t Punkte mit waagerechter Tangente.

c) Berechne die Wendepunkte und die Gleichungen der Wendetangenten von K_t.

Wendepunktsbedingung: $f_t''(x_W) = 0 \Leftrightarrow -t^2 \cdot \sin tx = 0 \Leftrightarrow \sin tx = 0$

Substitution: Setze $u = tx$, dann lautet die Gleichung $\sin u = 0$

Die Lösungen innerhalb $[0;2\pi]$ sind $u_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$,

$$u_2 = \pi \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{t}$$

$$u_3 = 2\pi \Rightarrow x_3 = \frac{2\pi}{t}.$$

Nun müssen wir jedoch den für diese Aufgabe vorgeschriebenen Definitionsbereich $\mathbf{D} = \left]-\frac{2\pi}{t};\frac{2\pi}{t}\right[$ beachten. Dann fällt $x_3 = \frac{2\pi}{t}$ weg.

Aber es kommt statt deren die Lösung $x_3 = -\frac{\pi}{t}$ dazu.

Funktionswerte dazu: $f_t(0) = 0$, $f_t\left(\frac{\pi}{t}\right) = t \cdot \frac{\pi}{t} + t \cdot \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{t}\right) = \pi + t \cdot \underbrace{\sin\pi}_{0} = \pi$

und $f_t\left(-\frac{\pi}{t}\right) = -t \cdot \frac{\pi}{t} + t \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{t}\right) = -\pi + t \cdot \underbrace{\sin(-\pi)}_{0} = -\pi$.

Kontrollen: $f_t'''(0) = -t^4 \cdot \cos 0 = -t^4 \neq 0$ Wendepunkt $W_1(0|0)$

$f_t'''\left(\frac{\pi}{t}\right) = -t^4 \cdot \cos\pi = +t^4 \neq 0$ Wendepunkt $W_2\left(\frac{\pi}{t}|\pi\right)$

$f_t'''\left(-\frac{\pi}{t}\right) = -t^4 \cdot \cos(-\pi) = +t^4 \neq 0$ Wendepunkt $W_3\left(-\frac{\pi}{t}|-\pi\right)$

Wendetangenten: Wir verwenden die Punkt-Steigungsform:
$y - y_W = f'(x_W) \cdot (x - x_W)$:

Steigung der Wendetangenten in $W_1(0|0)$: $m_1 = f_t'(0) = t + t^2 \cdot \cos 0 = t + t^2$

Gleichung: $y - 0 = (t + t^2) \cdot (x - 0) \Rightarrow \boxed{y = (t + t^2)x}$

Steigung der Wendetangenten in $W_2\left(\frac{\pi}{t}|\pi\right)$: $m_1 = f_t'\left(\frac{\pi}{t}\right) = t + t^2 \cdot \cos\pi = t - t^2$

Gleichung: $y - \pi = (t - t^2) \cdot \left(x - \frac{\pi}{t}\right) \Rightarrow y = (t - t^2)x - \frac{\pi}{t}(t - t^2) + \pi$

$$\boxed{y = (t + t^2)x + \pi t}$$

Steigung der Wendetangenten in $W_3\left(-\frac{\pi}{t}|-\pi\right)$:

$$m_1 = f_t'\left(-\frac{\pi}{t}\right) = t + t^2 \cdot \cos(-\pi) = t - t^2$$

Gleichung: $y + \pi = (t - t^2) \cdot \left(x + \frac{\pi}{t}\right) \Rightarrow y = (t - t^2)x + \frac{\pi}{t}(t - t^2) - \pi$

$$\boxed{y = (t + t^2)x - \pi t}$$

Aufgabe 273:

Für welches t existiert für folgende Funktion eine Nullstelle?

$$f(x) = \ln(tx) - \frac{x^2}{2t} \quad t > 0$$

Lösung:

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{1}{tx} \cdot t - \frac{2x}{2t} = \frac{1}{x} - \frac{x}{t} = \frac{t - x^2}{tx}$

$f_t''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{t} = -\frac{t + x^2}{tx^2}$

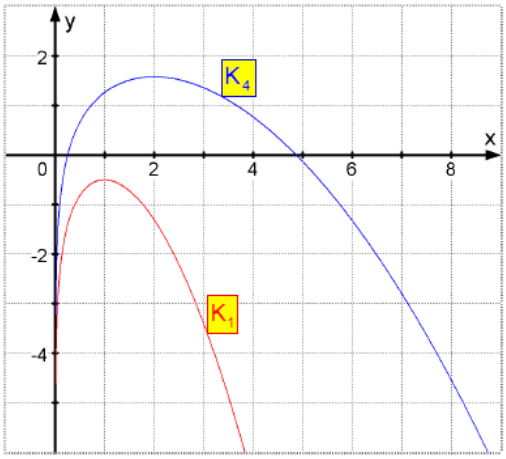
Extrempunkte: Bed.: $f_t'(x_E) = 0$ d.h. $x^2 = t$ also $x = \pm\sqrt{t}$.

Da $-\sqrt{t} \notin \mathbf{D}$ folgt $x_E = \sqrt{t}$.

$y_E = f\left(\sqrt{t}\right) = \ln\left(t\sqrt{t}\right) - \frac{t}{2t} = \ln t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln t - \frac{1}{2}$

Kontrolle: $f_t''(x) = -\frac{t + t}{t \cdot t} < 0$ da $t > 0$.

Erg.: $H\left(\sqrt{t} \,|\, \frac{3}{2}\ln t - \frac{1}{2}\right)$



c) **Existenz der Nullstellen**:
Die Kurve K_t hat genau eine Nullstelle, wenn H auf der x-Achse liegt und genau zwei Nullstellen, wenn H über der x-Achse liegt.

H liegt auf der x-Achse, wenn gilt:

$$y_H = 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}\ln t - \tfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \ln t = \tfrac{1}{3} \Leftrightarrow t = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

H liegt oberhalb der x-Achse, wenn gilt:

$$y_H > 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}\ln t - \tfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \ln t > \tfrac{1}{3} \Leftrightarrow t > e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \approx 1{,}4$$

Aufgabe 274:

Bilden Sie zu der folgenden Funktion zwei Ableitungen und ermitteln sie den oder die Wendepunkte.

$f(x) = \sqrt{e^x - 4}$

Lösung:

$$f(x)=\sqrt{e^x-4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{e^x-4}}\cdot e^x=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{\sqrt{e^x-4}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-4}-\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}\cdot e^x}{e^x-4}$$

Erweitern mit $2\sqrt{e^x-4}$:

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^x\cdot\left(e^x-4\right)-e^{2x}}{\left(e^x-4\right)\cdot 2\sqrt{e^x-4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2e^{2x}-8e^x-e^{2x}}{\sqrt{e^x-4}^3}=\frac{e^{2x}-8e^x}{4\cdot\sqrt{e^x-4}^3}$$

$e^{2x}=8e^x$

$\frac{e^{2x}}{e^x}=8$

$x=ln8$

$f(ln8)=\sqrt{e^x-4}=\sqrt{e^{ln8}-4=2}$

Aufgabe 275:

Bilden Sie von folgender Funktion zwei Ableitungen:

$f(x)=4\sqrt{a-\ln(x)}$

Lösung:

$$f(x)=4\sqrt{a-\ln x}$$

$$f'(x)=4\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}=-2\cdot\frac{1}{x\sqrt{a-\ln x}}$$

1. Möglichkeit: $f'(x)=-2\left(x\sqrt{a-\ln x}\right)^{-1}$

$$f''(x)=2\left(x\sqrt{a-\ln x}\right)^{-2}\cdot\left[1\cdot\sqrt{a-\ln x}+x\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}\right]$$

$$=2\frac{\sqrt{a-\ln x}-\frac{1}{2\sqrt{a-\ln x}}}{\left(x\cdot\sqrt{a-\ln x}\right)^2}=2\frac{2(a-\ln x)-1}{x^2(a-\ln x)2\sqrt{a-\ln x}}$$

$$=\frac{2(a-\ln x)-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}=\frac{2a-2\ln x-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

2. Möglichkeit: mit der Quotientenregel:

$$f''(x)=-2\cdot\frac{0-\left[1\cdot\sqrt{a-\ln x}+x\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}\right]}{x^2(x-\ln x)}$$

$$=-2\cdot\frac{-\left[2\cdot\left(\sqrt{a-\ln x}\right)^2-1\right]}{x^2(x-\ln x)2\sqrt{a-\ln x}}=\frac{[2\cdot(a-\ln x)-1]}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

$$=\frac{2a-2\ln x-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

Aufgabe 276:

Bilden Sie von folgender Funktion die ersten beiden Ableitungen:

$f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$

Lösung:

Für jede Ableitung 5 Punkte

$$f(x)=\ln\frac{2-x}{x+4}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{x+4}}{2-x}\cdot\frac{-(x+4)-(2-x)}{(x+4)^{\cancel{2}}}=\frac{-6}{(2-x)(x+4)}=\frac{-6}{-x^2-2x+8}$$

$$=\frac{6}{x^2+2x-8}\quad\left[=6\left(x^2+2x-8\right)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=-6\left(x^2+2x-8\right)^{-2}\cdot(2x+2)=-12\frac{x+1}{\left(x^2+2x-8\right)^2}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 277:

Gegeben ist die Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \frac{x^3 - t^3}{tx^2} \quad \text{für } t > 0$$

a) (6) Untersuchen sie K_t auf Schnittpunkte mit den Achsen, Asymptoten, Extremwerte und Wendepunkte.

b) (7) B(u|v) sei ein Punkt von K_2 mit u>0.

Die Parallelen zu den Asymptoten von K_2 durch B schneiden die Asymptoten in A und C. Für welchen Wert von u nimmt der Umfang des Parallelogramms OABC einen Extremwert an? Von welcher Art und wie groß ist er?

Lösung:

a) $f_t(x) = \frac{x^3 - t^3}{tx^2} = \frac{x}{t} - \frac{t^2}{x^2}$ mit $t > 0$

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{1}{t} + 2t^2x^{-3} = \frac{1}{t} + \frac{2t^2}{x^3} = \frac{x^3 + 2t^3}{tx^3}$

$f_t''(x) = -6t^2x^{-4} = -\frac{6t^2}{x^4}$

Zähler = 0: $x = t$

Nenner = 0: $x = 0$ doppelt.

Auswertung: Da t > 0 ist , besitzen Zäher und Nenner keine gemeisanem Nullstellen.

Schnittpunkt mir der x-Achse: $N(t|0)$

Polstelle: x = 0 ohne Zeichenwechsel

Asymptoten: senkrecht. x = 0

schräg: $y = \frac{1}{t}x$ denn $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Extrempunkte: Bedingung: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$y_E = f_t\left(-t\cdot\sqrt[3]{2}\right) = \frac{-2t^3 - t^3}{t\cdot t^2\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{-3t^3\cdot\sqrt[3]{2}}{t^3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} = -\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}$$

Kontrolle: $f_t''(x_E) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H\left(-t\sqrt[3]{2} \,|\, -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$

Da die y-Koordinate dieser Hochpunkte von t unabhängig ist, liegen die Hochpunkte aller Scharkurven auf einer Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ (Ortskurve der Hochpunkte !)

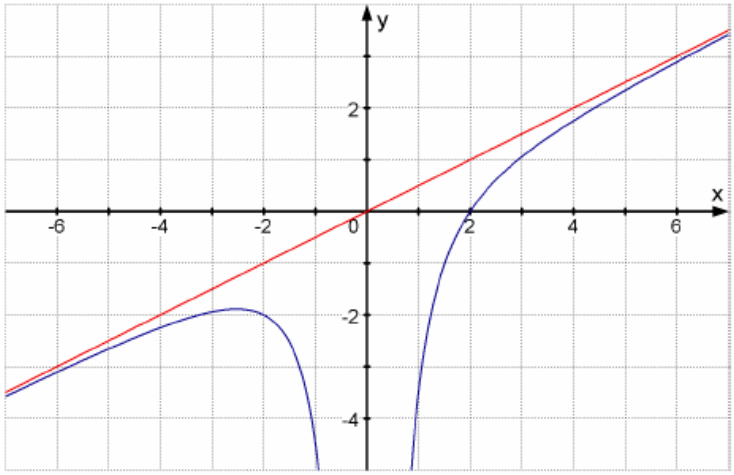
Da f_t'' keine Nullstellen besitzt, gibt es keine **Wendepunkte**.

Abbildung:

$K_2: \; y = \dfrac{x^3 - 8}{2x^2}$

Mit $N(2\,|\,0)$ und

$H\left(-2\sqrt[3]{2}\,|\,-\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right) \approx (-2{,}5\,|\,-1{,}9)$



b) Es sei $B\left(u\,|\,\dfrac{u}{2} - \dfrac{4}{u^2}\right)$ mit u>0. Dann ist $A\left(u\,|\,\tfrac{1}{2}u\right)$.

Länge der Strecke OA:

$\overline{OA} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{u^2 + \left(\tfrac{1}{2}u\right)^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}u^2} = |u| \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = \tfrac{u}{2}\sqrt{5}$, denn u>0 !

Länge der Strecke AB:

$\overline{AB} = y_A - y_B = \tfrac{1}{2}u - \left(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{4}{u^2}\right) = \tfrac{4}{u^2}$

Umfang des Parallelogramms OABC:

$$U(u) = 2 \cdot \overline{OA} + 2 \cdot \overline{AB} = u\sqrt{5} + \frac{8}{u^2} = \frac{u^3\sqrt{5} + 8}{u^2}.$$

Ableitungen: $U'(u) = \sqrt{5} - \dfrac{16}{u^3} = \dfrac{u^3\sqrt{5} - 16}{u^3}$, $U''(u) = \dfrac{48}{u^4}$.

Extremwertbedingung. $U'(u_E) = 0 \;\Leftrightarrow\; u^3\sqrt{5} = 16 \;\Leftrightarrow\; u_E = \sqrt[3]{\dfrac{16}{\sqrt{5}}} \approx 1{,}93$

Kontrolle: $U''(u_E) = \dfrac{48}{u_E^{\,4}} > 0 \;\Rightarrow$ Minimaler Umfang.

$$U_{min} = U\left(\sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt{5}}}\right) = \frac{16 + 8}{\sqrt[3]{\frac{2^8}{5}}} = \frac{24 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2}}{\underbrace{\sqrt[3]{2^8} \cdot \sqrt[3]{2}}_{2^3=8}} = 3 \cdot \sqrt[3]{10}$$

Randwerte: $u \to 0 \;\Rightarrow\; U(u) \to \infty$

$u \to \infty \;\Rightarrow\; U(u) \to \infty$

Ergebnis: Der Umfang nimmt für $u_E = \sqrt[3]{\dfrac{16}{\sqrt{5}}} \approx 1{,}93$ sogar ein absolutes Minimum an.

Aufgabe 278:

Bestimmen Sie für die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1 - 2x - 2x^2}{x^2 - 1}$$

a) (2) den Definitionsbereich

b) die erste Ableitung

c) alle Asymptoten

Lösung:

a)

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash(\pm 1)$

b)

$$f(x) = \frac{1 - 2x - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(-4x - 2)((x^2 - 1) - (1 - 2x - 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3 + 4x - 2x^2 + 2 - 2x + 4x^2 + 4x^3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{+2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

c)

Senkrechte Asym.:

$x = \pm 1$

Waagrechte Asym.:

$y = -2$

Schiefe Asym.:

Keine

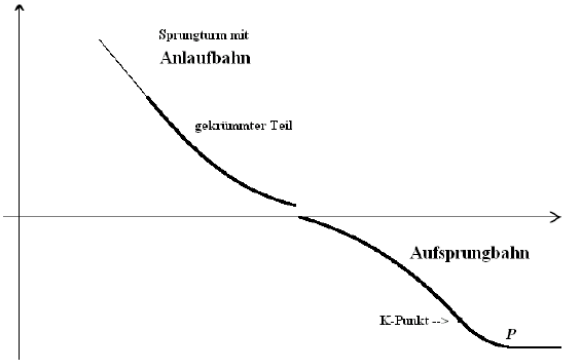
Aufgabe 279:

Sie sehen ein Foto, sowie schematisch das ungefähre Profil der Olympiaschanze in Sotschi. Der Sprungturm mit der Anlaufbahn besteht aus einem geraden Teil und einem gekrümmten Teil. Zuerst soll der gekrümmte Teil mithilfe eines Teils des Graphen einer geeigneten Funktion modelliert werden. Die x-Achse verlaufe dabei waagerecht.

Betrachten Sie dazu zunächst die Funktionsgleichung:

$f_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$ mit $k > 0$

Untersuchen Sie die Funktionen f_k in Abhängigkeit von k in Bezug auf Symmetrie, Nullstellen mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkte und Verhalten für $x \to \pm\infty$.



Lösung:

$f_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$ mit $k > 0$

Symmetrie zur y-Achse:

$f_k(x) = f_k(-x)$

$e^{-k \cdot x^2} = e^{-k \cdot (-x)^2}$

Achsensymmetrie vorhanden

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f_k(x) = 0$

Keine Schnittpunkte mit der x-Achse, da die Funktion nicht Null wird.

Schnittpunkte mit der y-Achse:

$f_k(0) = y$

$e^{-k \cdot 0^2} = e^0 = 1$

$N_y(0|1)$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-k \cdot x^2} = 0$

Extremwerte:

$f_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$

$f_k'(x) = -2kx \cdot e^{-k \cdot x^2}$

$f_k''(x) = -2k \cdot e^{-k \cdot x^2} + \left(-2kx \cdot e^{-k \cdot x^2} \cdot (-2kx)\right)$

$f_k''(x) = -2k \cdot e^{-k \cdot x^2} + 4k^2x^2 \cdot e^{-k \cdot x^2}$

$f_k'(x) = 0$

$-2kx \cdot e^{-k \cdot x^2}$

$x = 0$

$f_k(0) = e^{-k \cdot 0^2} = e^0 = 1$

$f_k''(0) = -2k \cdot e^{-k \cdot 0^2} + 4k^2 0^2 \cdot e^{-k \cdot 0^2} = -2k < 0 \to HP$

$HP(0|1)$

Wendepunkte:

$f_k''(x) = 0$

$-2k \cdot e^{-k \cdot x^2} + 4k^2x^2 \cdot e^{-k \cdot x^2} = 0$

$e^{-k \cdot x^2} \cdot (-2k + 4k^2x^2) = 0$

$-2k + 4k^2x^2 = 0$

$4k^2x^2 = 2k$

$x^2 = \frac{2k}{4k^2} = \frac{1}{2k}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$

$f_k\left(+\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = e^{-k \cdot \left(+\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2} = e^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow WP\left(+\sqrt{\frac{1}{2k}}|e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$

$f_k\left(+\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = e^{-k \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2} = e^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow WP\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}|e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$

Erstellen von Funktionen Anhand von Bedingungen

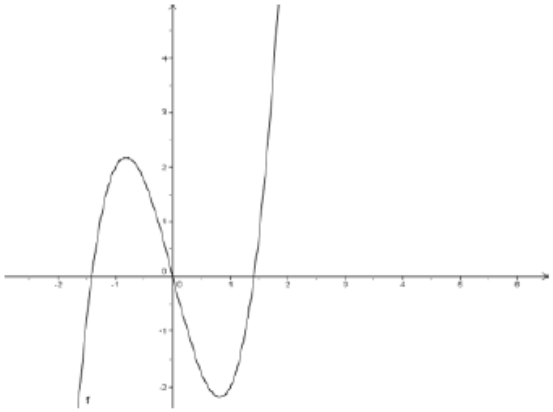
Aufgabe 280:

Gesucht wird eine Funktion 3. Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und durch die Punkte A(1,−2) und B(2, 8) geht.

Lösung:

Ansatz : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die Funktion verläuft durch den Ursprung : $0 = f(0) = d$.
Punktsym. zum Ursprung (nur ungerade Potenzen): $b = 0$
Wir haben also: $f(x) = ax^3 + cx$
A: $-2 = a + c$, also $c = -2 - a$
B: $8 = 8a + 2c$; c eingesetzt: $8 = 8a + 2(-2 - a) = 8a - 4 - 2a$
damit $12 = 6a$, also $a = 2$, $c = -2 - a = -4$
Somit haben wir: $\boxed{f(x) = 2x^3 - 4x}$.
Die NST liegen bei $2x(x^2 - 2) = 0$, also $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$.
Mit A und B liegen übrigens auch (−1, 2) und (−2,−8) auf dem Graphen (wegen der Punktsymmetrie).
Als Graph ergibt sich:



Aufgabe 281:

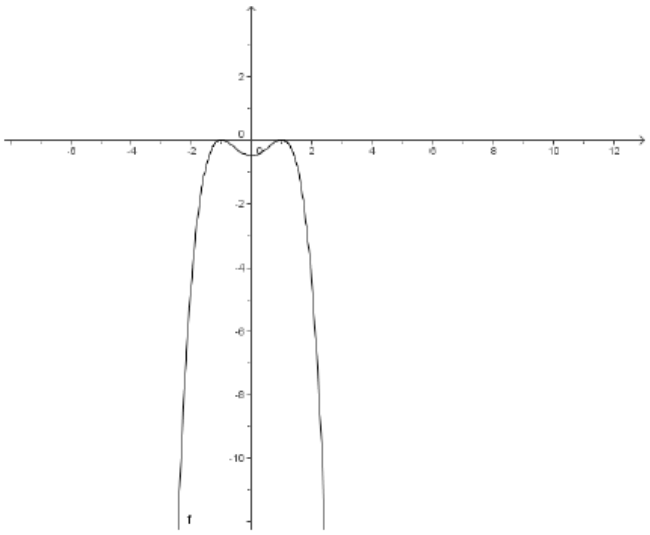
Gesucht wird eine Funktion 4. Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft, die y-Achse bei y = −0, 5 schneidet und die Punkte A(2;−4,5) und B(−3;−32) enthält.

Lösung:

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Achsensymmetrie zur y-Achse (nur gerade Potenzen): $b = d = 0$
Schnittpunkt mit der y-Achse : $(0;-0,5) : -0,5 = f(0) = e$
Damit haben wir schon: $f(x) = ax^4 + cx^2 - 0,5$
A: $-4,5 = 16a + 4c - 0,5$, also $c = -4a - 1$
B: $-32 = 81a + 9c - 0,5$, also $-31,5 = 81a - 36a - 9 \Rightarrow -22,5 = 45a \Rightarrow a = -0,5 \Rightarrow$
$c = -4a - 1 = 2 - 1 = 1$

Damit: $\boxed{f(x) = -0,5x^4 + x^2 - 0,5}$
Für die NST gilt mit $f(z) = -0,5z^2+z-0,5 : z_{1/2} = -1 \pm \sqrt{(1-1)} = 1$, also $x^2 = 1$(doppelt) $\Rightarrow : x_{1/2} = \pm 1$ (jeweils doppelt). Das führt zu folgendem Graphen:



Aufgabe 282:

Eine Parabel hat ihren Scheitel bei (2;−1) und schneidet die y-Achse bei y = −3.

Lösung:

Ansatz mit der Scheitelform $(f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S)$: $f(x) = a(x - 2)^2 - 1$
$(0;-3) : -3 = a(-2)^2 - 1 \Rightarrow -2 = 4a \Rightarrow a = -0,5$

$f(x) = -0,5(x - 2)^2 - 1$. Schon aus den y-Werten der Angabe ist klar, dass f keine NST besitzt.
Aus Symmetriegründen muss auch (4;−3) auf dem Graphen liegen. Natürlich könnte man auch (0;−3), (4;−3), (2;−1) in $f(x) = ax^2 + bx + c$ einsetzen und so (mit etwas mehr Aufwand freilich) a, b, c berechnen.
Oder Sie verwenden: $x_S = -b/2a \Rightarrow b = -2 \cdot 2a = -4a$.

Aufgabe 283:

Eine Funktion 3. Grades hat ihren Wendepunkt bei (1; 1), eine Nullstelle bei x = 2 und geht durch den Punkt (3; 5).

Lösung:

Ansatz : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
(1; 1) : I.) $1 = a + b + c + d$
(2; 0) : II.) $0 = 8a + 4b + 2c + d$
(3; 5) : III.) $5 = 27a + 9b + 3c + d$
$x_{WP} = 1$: IV.) $1 = -b/3a \Rightarrow b = -3a$

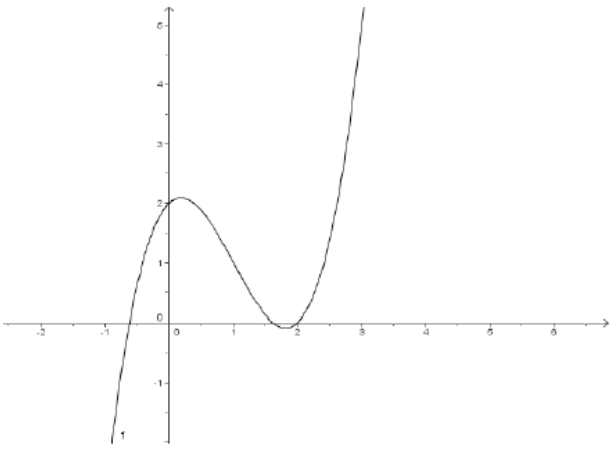
IV.) in I.) : I'.) $1 = -2a + c + d$
IV.) in II.) : II'.) $0 = -4a + 2c + d$
IV.) in III.) : III'.) $5 = 3c + d \Rightarrow d = 5 - 3c$
III'.) in I'.) : I''.) $1 = -2a - 2c + 5$
III'.) in II') : II'') $0 = -4a - c + 5 \Rightarrow c = -4a + 5$
II00.) in I00.) : $1 = -2a + 8a - 10 + 5 \Rightarrow 6 = 6a \Rightarrow a = 1$
in II00.)$c = -4 + 5 = 1$, in III0.) $d = 5 - 3 = 2$, IV.) $b = -3$

Damit gilt $\boxed{: f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2}$

Aus der Symmetrie hätte man auch schließen können: (0; 2) und (−1;−3) liegen auf dem Graphen. Damit hätten wir d = 2 sofort gewusst.
Für die NST gilt: $x_1 = 2$ laut Angabe. Polynomdivision ergibt:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 + x + 2) : (x - 2) = x^2 - x - 1 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \quad -x^2 + x \\ \quad \underline{-(-x^2 + 2x)} \\ \quad\quad -x + 2 \\ \quad\quad \underline{-(-x + 2)} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Damit : $x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{5}$.
Der Graph sieht folgendermaßen aus:



Analog zur Scheitelform bei Parabeln könnte man eine Wendepunktsform für Funktionen 3. Grades definieren: $\boxed{f(x) = a(x - x_{WP})^3 + b(x - x_{WP}) + y_{WP}}$

Dass $f(x_{WP}) = y_{WP}$ gilt, sieht man unmittelbar durch Einsetzen (die Klammern werden 0). Die Symmetrie sieht man daran, dass nur ungerade Potenzen verwendet werden.
Mit diesem Ansatz lässt sich die gegebene Aufgabe so bearbeiten :
$f(x) = a(x - 1)^3 + b(x - 1) + 1$
(2; 0): $0 = a + b + 1 \Rightarrow b = -a - 1$
(3; 5): $5 = a _ 8 + b _ 2 + 1 \Rightarrow 5 = 8a - 2a - 2 + 1 \Rightarrow 6 = 6a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -2$
$\boxed{f(x) = (x - 1)^3 - 2(x - 1) + 1}$

Aufgabe 284:

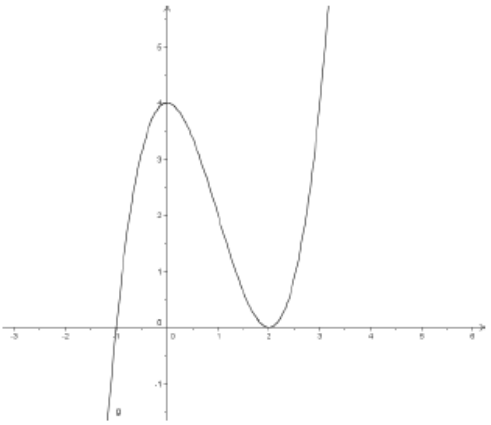
Eine Funktion 3. Grades besitzt bei x = 2 eine doppelte Nullstelle, schneidet die y-Achse bei y = 4 und geht durch (1; 2).

Lösung:

Eine Funktion dritten Grades mit einer doppelten NST muss auch noch eine 3. NST besitzen. Mit Hilfe von Linearfaktoren lässt sich $f(x) = a(x-2)^2(x-x_3)$ ansetzen.
Einsetzen der Punkte ergibt:
$(0;4): 4 = a(-2)^2(-x_3) \Rightarrow 1 = -ax_3$
$(1;2): 2 = a(-1)^2(1-x_3) \Rightarrow 2 = a - ax_3$
Hier lässt sich $-ax_3$ durch 1 ersetzen : $2 = a + 1$.
Damit $a = 1$ und somit $1 = -x_3$, also $\boxed{f(x) = (x-2)^2(x+1)}$.

Ich hoffe, Sie stören sich nicht daran, dass hier nicht nur die Variable x^3 oder a allein ersetzt wird, sondern gleich $-ax_3$ ersetzt werden kann.

Möglich wäre auch der Ansatz: $f(x) = (x-2)^2(ax+b)$
((ax+b) ergibt sich aus f durch zweifache Polynomdivision jeweils mit (x−2)).
$(0;4): 4 = (-2)^2 b \Rightarrow b = 1$
$(1;2): 2 = (-1)^2(a+1) \Rightarrow a = 1$
$f(x) = (x-2)^2(x+1)$
Die dritte NST ist übrigens bei −1.
Um den Wendepunkt zu bestimmen, muss man die Funktion wohl ausmultiplizieren:
$f(x) = (x^2-4x+4)(x+1) = x^3+x^2-4x^2-4x+4x+4 = x^3-3x^2+4$.
Der Wendepunkt liegt also bei $x_{WP} = -(-3)/3 = 1$, d.h. (1; 2) ist der WP.
Graph: (Wegen der Sym. muss der Graph auch bei (0; 4) umkehren).



Hat eine Funktion 4. Grades eine doppelte NST bei $x = 2$, so könnte man $f(x) = (x-2)^2(ax^2+bx+c)$ ansetzen.

Aufgabe 285:

Aufgabe 1 Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und einen Wendepunkt bei $x_w = 1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

Aufgabe 2 Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(5|-12,5)$ und einen Hochpunkt bei $H(1|3,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f(x)$!

Aufgabe 3 Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(-1|8)$. Bei $x = 1$ lässt sich die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -4x + 4$ als Tangente an den Graphen der gesuchten Funktion $f_1(x)$ legen. Bestimmen Sie diese Funktionsgleichung!

Aufgabe 4 Ein Polynom 3. Grades berührt bei $x_1 = -2$ die Tangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -8x - 15$. Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei $y_0 = 1$. Dort beträgt die Steigung $m = 16$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

Aufgabe 5 Ein Polynom 4. Grades ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Bei $x_w = -1$ hat sie eine Wendetangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 8x + 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

Aufgabe 6 Ein Polynom 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph der Funktion hat einen Hochpunkt bei $H(2|48)$ und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 5x + 19$ an der Stelle $x_s = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion?

Aufgabe 7 Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|4)$. Bei $x_b = 2$ berührt sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 4x - 8$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

Aufgabe 8 Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -2x + 4$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Eine andere Parabel mit der Funktionsgleichung $f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ schneidet die gesuchte Parabel bei $x_s = 2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Parabel!

Aufgabe 9 Ein Polynom 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ schneidet die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x^2 + 4x - 4$ bei $x_1 = -1$, bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 5$. Außerdem hat der Graph der gesuchten Funktion einen Hochpunkt bei $x_h = 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

Lösung:

Aufgabe 1

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und einen Wendepunkt bei $x_w = 1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f_1''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Nullstelle bei $x_0 = 0$:	$f_1(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0$
Wendepunkt bei $x_w = 1$:	$f_1''(1) = 0$	$\Rightarrow 6a + 2b = 0$
Steigung am Wendepunkt $x_w = 1$:	$f_1'(1) = f_2'(1) = -9$	$\Rightarrow 3a + 2b + c = -9$
Funktionswert am Wendepunkt $x_w = 1$:	$f_1(1) = f_2(1) = -8$	$\Rightarrow a + b + c + d = -8$

Aus der ersten Gleichung erhält man sofort den Parameter $d = 0$. Eingesetzt in die anderen Gleichungen erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

$$\begin{array}{|llllll|} \hline (1) & 6a & +2b & & = & 0 \\ (2) & 3a & +2b & +c & = & -9 \\ (3) & a & +b & +c & = & -8 \\ \hline \end{array}$$

Nur in Gleichung (2) und (3) ist der Parameter c enthalten. Da der Parameter dort mit gleichem Koeffizienten[1] vorkommt, können die Gleichungen direkt voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{llllll|l} (2) & 3a & +2b & +c & = & -9 & | \\ (3) & a & +b & +c & = & -8 & | - \\ \hline (4) & 2a & +b & & = & -1 & \end{array}$$

Damit bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\begin{array}{|llll|} \hline (1) & 6a & +2b & = & 0 \\ (4) & 2a & +b & = & -1 \\ \hline \end{array}$$

Ich löse Gleichung (4) nach b auf und setze das Ergebnis in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned} 2a + b &= -1 \quad | -2a \\ b &= -1 - 2a \end{aligned}$$

[1] Der Koeffizient wird auch *Vorzahl* genannt. Das ist die Zahl, die vor einer Variablen steht.

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= -1 \\ 6a + 2 \cdot (-1 - 2a) &= -1 \\ 6a - 2 - 4a &= 0 \quad | +2 \\ 2a &= 2 \quad | :2 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Mit der umgestellten Gleichung (1) bestimme ich b.

$$b = -1 - 2a = -1 - 2 \cdot 1 = -3$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (3) ein, um c zu bestimmen.

$$\begin{aligned} a + b + c &= -8 \\ 1 - 3 + c &= -8 \quad | +2 \\ c &= -6 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 6x}$

Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(5|-12,5)$ und einen Hochpunkt bei $H(1|3,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f(x)$!

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ f'(x) &= 3ax^2+2bx+c \end{aligned}$$

Tiefpunkt bei $x_t=5$:	$f'(5)=0$	$\Rightarrow 75a+10b+c=0$
Funktionswert am Tiefpunkt $x_t=5$:	$f(5)=-12,5$	$\Rightarrow 125a+25b+5c+d=-12,5$
Hochpunkt bei $x_h=1$:	$f'(1)=0$	$\Rightarrow 3a+2b+c=0$
Funktionswert am Hochpunkt $x_h=1$:	$f(1)=3,5$	$\Rightarrow a+b+c+d=3,5$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung erhalten.

$$\begin{array}{|llllll|} \hline (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 \\ (2) & 125a & +25b & +5c & +d = & -12,5 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (4) & a & +b & +c & +d = & 3,5 \\ \hline \end{array}$$

Man erkennt sofort, dass der Parameter d nur in zwei Gleichungen – (2) und (4) – vorkommt. Da jeweils d allein auftritt, können die Gleichungen sofort voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{llllll|l} (2) & 125a & +25b & +5c & +d = & -12,5 & | \\ (4) & a & +b & +c & +d = & 3,5 & | - \\ \hline (5) & 124a & +24b & +4c & = & -16 & \end{array}$$

Mit dieser Gleichung (5) anstelle von (2) und (4) bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung übrig.

$$\begin{array}{|llllll|} \hline (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 124a & +24b & +4c & = & -16 \\ \hline \end{array}$$

Zur Vereinfachung kann Gleichung (5) noch durch 4 dividiert werden.

$$\begin{array}{|llllll|} \hline (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 31a & +6b & +c & = & -4 \\ \hline \end{array}$$

Jetzt sind alle Koeffizienten von c gleich. Daher bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Zunächst subtrahiere ich Gleichung (3) von Gleichung (1).

$$\begin{array}{llllll|l} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 & | \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 & | - \\ \hline (6) & 72a & +8b & & = & 0 & \end{array}$$

Dann subtrahiere ich Gleichung (5) von Gleichung (1).

$$\begin{array}{llllll} (1) & 75a & +10b & +c & = 0 & | \\ (5) & 31a & +6b & +c & = -4 & | - \\ \hline (7) & 44a & +4b & & = 4 & \end{array}$$

Gleichung (6) und (7) stellen nun ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung dar.

$$\boxed{\begin{array}{llllll} (6) & 72a & +8b & = & 0 \\ (7) & 44a & +4b & = & 4 \end{array}}$$

Beide Gleichungen können noch etwas vereinfacht werden. Gleichung (6) lässt sich durch 8 dividieren und Gleichung (7) durch 4.

$$\boxed{\begin{array}{llllll} (6) & 9a & +b & = & 0 \\ (7) & 11a & +b & = & 1 \end{array}}$$

In dieser Form lassen sich die Gleichungen voneinander subtrahieren, so dass b wegfällt.

$$\begin{array}{llllll} (6) & 9a & +b & = & 0 & | - \\ (7) & 11a & +b & = & 1 & | \\ \hline & 2a & & = & 1 & | : 2 \\ & a & & = & 0,5 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis setze ich in Gleichung (6) ein.

$$\begin{array}{rcll} 9a + b & = & 0 & \\ 9 \cdot 0,5 + b & = & 0 & | - 4,5 \\ b & = & -4,5 & \end{array}$$

Diese Ergebnisse setze ich in Gleichung (3) ein.

$$\begin{array}{rcll} 3a + 2b + c & = & 0 & \\ 3 \cdot 0,5 + 2 \cdot (-4,5) + c & = & 0 & \\ -7,5 + c & = & 0 & | + 7,5 \\ c & = & 7,5 & \end{array}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 7,5x$

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(-1|8)$. Bei $x=1$ lässt sich die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x)=-4x+4$ als Tangente an den Graphen der gesuchten Funktion $f_1(x)$ legen. Bestimmen Sie diese Funktionsgleichung!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ f_1'(x) &= 3ax^2+2bx+c \end{aligned}$$

Hochpunkt bei $x_h=-1$:	$f_1'(-1)=0$	$\Rightarrow 3a-2b+c=0$
Funktionswert am Hochpunkt $x_h=-1$:	$f_1(-1)=8$	$\Rightarrow -a+b-c+d=8$
Steigung bei $x_1=1$:	$f_1'(1)=f_2'(1)=-4$	$\Rightarrow 3a+2b+c=-4$
Funktionswert bei $x_1=1$:	$f_1(1)=f_2(1)=0$	$\Rightarrow a+b+c+d=0$

Damit haben wir folgendes Gleichungssystem erhalten:

$$\boxed{\begin{array}{llllll} (1) & 3a & -2b & +c & = & 0 \\ (2) & -a & +b & -c+d & = & 8 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & -4 \\ (4) & a & +b & +c+d & = & 0 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass der Parameter d nur in Gleichung (2) und (4) enthalten ist. Daher ist es sinnvoll, diese beiden Gleichungen so miteinander zu kombinieren, dass d wegfällt. Das geht ab besten durch Subtrahieren. Die neue Gleichung bekommt die Nummer (5).

$$\begin{array}{llllll|l} (2) & -a & +b & -c & +d & = 8 & \mid - \\ (4) & a & +b & +c & +d & = 0 & \mid \\ \hline (5)=(4)-(2) & 2a & & +2c & & = -8 & \end{array}$$

Zufälligerweise ist dabei auch b weggefallen. Auf jeden Fall haben wir jetzt nur noch 3 Gleichungen mit 3 Variablen.

$$\boxed{\begin{array}{llllll} (5) & 2a & & +2c & = & -8 \\ (1) & 3a & -2b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & -4 \end{array}}$$

Addiert man Gleichung (1) und (3), dann fällt b weg und es bleiben nur noch zwei Gleichungen mit zwei Variablen übrig.

$$\begin{array}{llllll|l} (1) & 3a & -2b & +c & = & 0 & \mid \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & -4 & \mid + \\ \hline (6) & 6a & & +2c & = & -4 & \end{array}$$

Das wiederum vereinfachte Gleichungssystem sieht folgendermaßen aus:

$$\boxed{\begin{array}{llllll} (5) & 2a & +2c & = & -8 \\ (6) & 6a & +2c & = & -4 \end{array}}$$

In diesem Gleichungssystem kann bequem c eliminiert werden, wenn man die Gleichungen voneinander subtrahiert.

$$\begin{array}{llllll} (5) & 2a & +2c & = & -8 & \mid - \\ (6) & 6a & +2c & = & -4 & \mid \\ \hline & 4a & & = & 4 & \mid :4 \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{array}{rcll} 2a+2c & = & -8 & \\ 2\cdot 1+2c & = & -8 & \mid -2 \\ 2c & = & -10 & \mid :2 \\ c & = & -5 & \end{array}$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcll} 3a-2b+c & = & 0 & \\ 3\cdot 1-2b-5 & = & 0 & \\ -2b-2 & = & 0 & \mid +2 \\ -2b & = & 2 & \mid :(-2) \\ b & = & -1 & \end{array}$$

Jetzt fehlt nur noch d. Dazu verwende ich Gleichung (4).

$$\begin{array}{rcll} a+b+c+d & = & 0 & \\ 1-1-5+d & = & 0 & \mid +5 \\ d & = & 5 & \end{array}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x)=x^3-x^2-5x+5}$

Ein Polynom 3. Grades berührt bei $x_1 = -2$ die Tangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -8x - 15$. Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei $y_0 = 1$. Dort beträgt die Steigung $m = 16$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Steigung bei $x_1 = -2$:	$f_1'(-2) = f_2'(-2) = -8$	$\Rightarrow 12a - 4b + c = -8$
Funktionswert bei $x_1 = -2$:	$f_1(-2) = f_2(-2) = 1$	$\Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 1$
Funktionswert bei $x_2 = 0$:	$f_1(0) = 1$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 1$
Steigung bei $x_2 = 0$:	$f_1'(0) = 16$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 16$

Bekannt sind aus den beiden letzten Gleichungen sofort $c = 16$ und $d = 1$. Setzen wir das in die beiden ersten Gleichungen ein, erhalten wir:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 12a - 4b + c & = & -8 \\ (2) & -8a + 4b - 2c + d & = & 1 \\ \hline (1) & 12a - 4b + 16 & = & -8 \\ (2) & -8a + 4b - 2 \cdot 16 + 1 & = & 1 \\ \hline (1) & 12a - 4b & = & -24 \\ (2) & -8a + 4b & = & 32 \end{array}$$

Es bietet sich an, die beiden Gleichungen zu addieren, damit b wegfällt.

$$\begin{array}{llcll} (1) & 12a & -4b & = -24 & \mid \\ (2) & -8a & +4b & = 32 & \mid + \\ \hline & 4a & & = 8 & \mid : 4 \\ & a & & = 2 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein.

$$\begin{array}{rcll} -8a + 4b & = & 32 & \\ -8 \cdot 2 + 4b & = & 32 & \mid +16 \\ 4b & = & 48 & \mid : 4 \\ b & = & 12 & \end{array}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x + 1}$

Ein Polynom 4. Grades ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Bei $x_w = -1$ hat sie eine Wendetangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 8x + 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ Wegen Spiegelsymmetrie: } \Rightarrow b = d = 0 \text{ also:} \\ f_1(x) &= ax^4 + cx^2 + e \\ f_1'(x) &= 4ax^3 + 2cx \\ f_1''(x) &= 12ax^2 + 2c \end{aligned}$$

Wendepunkt bei $x_w = -1$: $f_1''(-1) = 0 \quad \Rightarrow 12a + 2c = 0$
Steigung bei $x_w = -1$: $f_1'(-1) = f_2'(-1) = 8 \quad \Rightarrow -4a - 2c = 8$
Funktionswert bei $x_w = -1$: $f_1(-1) = f_2(-1) = -2 \Rightarrow a + c + e = -2$

Wir haben ein Gleichungssystem 3. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr} (1) & 12a & +2c & & = & 0 \\ (2) & -4a & -2c & & = & 8 \\ (3) & a & +c & +e & = & -2 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass die Koeffizienten von c in Gleichung (1) und (2) bis auf das Vorzeichen identisch sind. Addiert man diese Gleichungen, dann bleibt nur a übrig und kann aus dieser einen Gleichung berechnet werden.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 12a & +2c & = & 0 & | \\ (2) & -4a & -2c & = & 8 & | + \\ \hline & 8a & & = & 8 & | : 8 \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned} 12a + 2c &= 0 \\ 12 \cdot 1 + 2c &= 0 \\ 12 + 2c &= 0 \quad | -12 \\ 2c &= -12 \quad | : 2 \\ c &= -6 \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (3) eingesetzt, um e zu bestimmen.

$$\begin{aligned} a + c + e &= -2 \\ 1 - 6 + e &= -2 \\ -5 + e &= -2 \quad | +5 \\ e &= 3 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^4 - 6x^2 + 3}$

Ein Polynom 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph der Funktion hat einen Hochpunkt bei $H(2|48)$ und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 5x + 19$ an der Stelle $x_s = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion?

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \text{ Wegen Punktsymmetrie: } \Rightarrow b = d = f = 0 \text{ also:} \\ f_1(x) &= ax^5 + cx^3 + ex \\ f_1'(x) &= 5ax^4 + 3cx^2 + e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Hochpunkt bei } x_h = 2: && f_1'(2) = 0 && \Rightarrow 80a + 12c + e = 0 \\ &\text{Funktionswert bei } x_h = 2: && f_1(2) = 48 && \Rightarrow 32a + 8c + 2e = 48 \\ &\text{Funktionswert bei } x_s = 1: && f_1(1) = f_2(1) = 24 && \Rightarrow a + c + e = 24 \end{aligned}$$

Wir haben ein Gleichungssystem 3. Ordnung erhalten.

$$\begin{array}{|lrrrcr|} \hline (1) & 80a & +12c & +e & = & 0 \\ (2) & 32a & +8c & +2e & = & 48 \\ (3) & a & +c & +e & = & 24 \\ \hline \end{array}$$

Da das Gleichungssystem keine Besonderheiten aufweist, die ein bestimmtes Vorgehen als besonders günstig erscheinen lassen, wähle ich zur Lösung die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 48 & 8 & 2 \\ 24 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 12 \\ 48 & 8 \\ 24 & 1 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 80 & 12 & 1 \\ 32 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 80 & 12 \\ 32 & 8 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \\ &= \frac{0 + 576 + 48 - 0 - 192 - 576}{640 + 24 + 32 - 8 - 160 - 384} \\ &= \frac{-144}{144} \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\begin{vmatrix} 80 & 0 & 1 \\ 32 & 48 & 2 \\ 1 & 24 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 80 & 0 \\ 32 & 48 \\ 1 & 24 \end{matrix}}{144} \\ &= \frac{3840 + 0 + 768 - 48 - 3840 - 0}{144} \\ &= \frac{720}{144} \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von c setze ich diese Werte in Gleichung (3) ein.

$$\begin{aligned} a + c + e &= 24 \\ -1 + 5 + e &= 24 \quad | -4 \\ e &= 20 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = -x^5 + 5x^3 + 20x}$

Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|4)$. Bei $x_b = 2$ berührt sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 4x - 8$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f_1'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f_1''(x) &= 12ax + 6bx + 2c \end{aligned}$$

Sattelpunkt bei $x_s = 0$:	$f_1'(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0$
Sattelpunkt $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_s = 0$:	$f_1''(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0$
Funktionswert bei $x_s = 0$:	$f_1(0) = 4$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d + e = 4$
Steigung bei $x_b = 2$:	$f_1'(2) = f_2'(2) = 4$	$\Rightarrow 32a + 12b + 4c + d = 4$
Funktionswert bei $x_b = 2$:	$f_1(2) = f_2(2) = 0$	$\Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$

Aus den ersten drei Gleichungen ergeben sich sofort die Parameter $d = 0$, $c = 0$ und $e = 4$. Diese Ergebnisse setze ich in die letzten beiden Gleichungen ein.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 32a + 12b + 4c + d & = & 4 \\ (2) & 16a + 8b + 4c + 2d + e & = & 0 \\ \hline (1) & 32a + 12b & = & 4 \\ (2) & 16a + 8b + 4 & = & 0 \\ \hline (1) & 32a + 12b & = & 4 \\ (2) & 16a + 8b & = & -4 \end{array}$$

Dividiert man die erste Gleichung durch 2, dann kann man die Gleichungen voneinander subtrahieren, um b zu erhalten.

$$\begin{array}{llrcll} (1) & 32a & +12b & = & 4 & \mid : 2 \\ (2) & 16a & +8b & = & -4 & \\ \hline (1) & 16a & +6b & = & 2 & \mid - \\ (2) & 16a & +8b & = & -4 & \mid \\ \hline & & 2b & = & -6 & \mid : 2 \\ & & b & = & -3 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein.

$$\begin{aligned} 16a + 8b &= -4 \\ 16a + 8 \cdot (-3) &= -4 \quad \mid + 24 \\ 16a &= 20 \quad \mid : 16 \\ a &= 1,25 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f_1(x) = 1,25x^4 - 3x^3 + 4$

Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -2x + 4$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Eine andere Parabel mit der Funktionsgleichung $f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ schneidet die gesuchte Parabel bei $x_s = 2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Parabel!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^2 + bx + c \\ f_1'(x) &= 2ax + b \end{aligned}$$

Steigung bei $x_b = 0$: $f_1'(0) = f_2'(0) = -2 \Rightarrow 0 \cdot a + b = -2$
Funktionswert bei $x_b = 0$: $f_1(0) = f_2(0) = 4 \Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 4$
Funktionswert bei $x_s = 2$: $f_1(2) = f_3(2) = 13 \Rightarrow 4a + 2b + c = 13$

Die weitere Lösung ist sehr simpel. Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich direkt $b = -2$ und $c = 4$. Diese Werte müssen nur noch in die dritte Gleichung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 13 \\ 4a + 2 \cdot (-2) + 4 &= 13 \\ 4a &= 13 \quad | : 4 \\ a &= 3,25 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f_1(x) = 3,25x^2 - 2x + 4$

Ein Polynom 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ schneidet die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x^2 + 4x - 4$ bei $x_1 = -1$, bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 5$. Außerdem hat der Graph der gesuchten Funktion einen Hochpunkt bei $x_h = 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Funktionswert bei $x_1 = -1$: $f_1(-1) = f_2(-1) = -7 \Rightarrow -a + b - c + d = -7$
Funktionswert bei $x_1 = 2$: $f_1(2) = f_2(2) = 8 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 8$
Funktionswert bei $x_1 = 5$: $f_1(5) = f_2(5) = 41 \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = 41$
Hochpunkt bei $x_h = 1$: $f_1'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung erhalten.

(1)	$-a$	$+b$	$-c$	$+d$	$=$	-7
(2)	$8a$	$+4b$	$+2c$	$+d$	$=$	8
(3)	$125a$	$+25b$	$+5c$	$+d$	$=$	41
(4)	$3a$	$+2b$	$+c$		$=$	0

Es fällt auf, dass der Parameter d in Gleichung (4) nicht vorkommt und in den anderen Gleichungen jeweils nur einfach. Daher bietet es sich an, zunächst d zu eliminieren. Dazu subtrahiere ich Gleichung (1) von Gleichung (2) und erhalte Gleichung (5).

(1)	$-a$	$+b$	$-c$	$+d$	$=$	-7	$\mid -$
(2)	$8a$	$+4b$	$+2c$	$+d$	$=$	8	$\mid$
(5)	$9a$	$+3b$	$+3c$		$=$	15	

Dann subtrahiere ich Gleichung (2) von Gleichung (3) und erhalte Gleichung (6).

(2)	$8a$	$+4b$	$+2c$	$+d$	$=$	8	$\mid -$
(3)	$125a$	$+25b$	$+5c$	$+d$	$=$	41	$\mid$
(6)	$117a$	$+21b$	$+3c$		$=$	33	

Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

(4)	$3a$	$+2b$	$+c$	$=$	0
(5)	$9a$	$+3b$	$+3c$	$=$	15
(6)	$117a$	$+21b$	$+3c$	$=$	33

Das Gleichungssystem lässt sich etwas vereinfachen, wenn man sowohl Gleichung (5) als auch Gleichung (6) durch 3 dividiert.

(4)	$3a$	$+2b$	$+c$	$=$	0
(5)	$3a$	$+b$	$+c$	$=$	5
(6)	$39a$	$+7b$	$+c$	$=$	11

Es fällt auf, dass in Gleichung (4) und (5) die Koeffizienten von a und c übereinstimmen. Das kann man ausnutzen, indem man die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert. Dann fallen beide gleichzeitig weg!

$$\begin{array}{llllll} (4) & 3a & +2b & +c & = 0 & \mid \\ (5) & 3a & +b & +c & = 5 & \mid - \\ \hline (7) & & b & & = -5 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird nun in Gleichung (6) und entweder in Gleichung (4) oder Gleichung (5) eingesetzt. Ich wähle willkürlich Gleichung (5) aus. Dann bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{llllll} (5) & 3a & & -5 & +c & = 5 \\ (6) & 39a & +7\cdot(-5) & & +c & = 11 \end{array}}$$

Aufgelöst in Normalform sieht das System so aus:

$$\boxed{\begin{array}{llll} (5) & 3a & +c & = 10 \\ (6) & 39a & +c & = 46 \end{array}}$$

Da jeweils c allein vorkommt, können die Gleichungen sofort voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{llll} (5) & 3a & +c & = 10 \mid - \\ (6) & 39a & +c & = 46 \mid \\ \hline & 36a & & = 36 \mid :36 \\ & a & & = 1 \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{array}{rcll} 3a+c & = & 10 & \\ 3\cdot 1+c & = & 10 & \mid -3 \\ c & = & 7 & \end{array}$$

Alle Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcll} -a+b-c+d & = & -7 & \\ -1-5-7+d & = & -7 & \mid +13 \\ d & = & 6 & \end{array}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 6$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 286:

Zu bestimmen ist eine ganz-rationale Funktion f vom Grad 4, deren Graph den Punkt H(2 | 4) als Hochpunkt und im Koordinatenursprung die Gerade mit der Gleichung y = x als Wendetangente hat.

Lösung:

Ansatz:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Folgende Bedingungen sind gegeben:

$$f(2) = 4$$
$$f'(2) = 0$$
$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$
$$f''(0) = 0$$

Aus der dritten Bedingung folgt:

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$$
$$e = 0$$

Daraus ergibt sich ein neuer Ansatz:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Aus der ersten Bedingung folgt:

$$f(2) = 4$$
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$
$$a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 = 4$$
$$16a + 8b + 4c + 2d = 4$$

Aus der zweiten Bedingung folgt:

$$f'(2) = 0$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 + d = 0$$
$$32a + 12b + 4c + d = 0$$

Aus der vierten Bedingung folgt:

$$f'(0) = 1$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 1$$
$$d = 1$$

Aus der fünften Bedingung folgt:

$$f''(0) = 0$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$
$$12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0$$
$$2c = 0$$
$$c = 0$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$16a + 8b + 4c + 2d = 4$$
$$32a + 12b + 4c + d = 0$$
$$d = 1$$
$$c = 0$$

Einsetzen von c und d in die beiden Gleichungen:

$$16a + 8b + 2 = 4$$
$$32a + 12b + 1 = 0$$

$$16a + 8b = 2$$
$$32a + 12b = -1$$

Die erste Gleichung mal (-2) und auf die zweite Gleichung addieren:

$$-4b = -5$$

$$b = \frac{5}{4}$$

In die erste Gleichung einsetzen:

$$16\mathrm{a} + 8\mathrm{b} = 2$$

$$16a = 2 - 8b$$

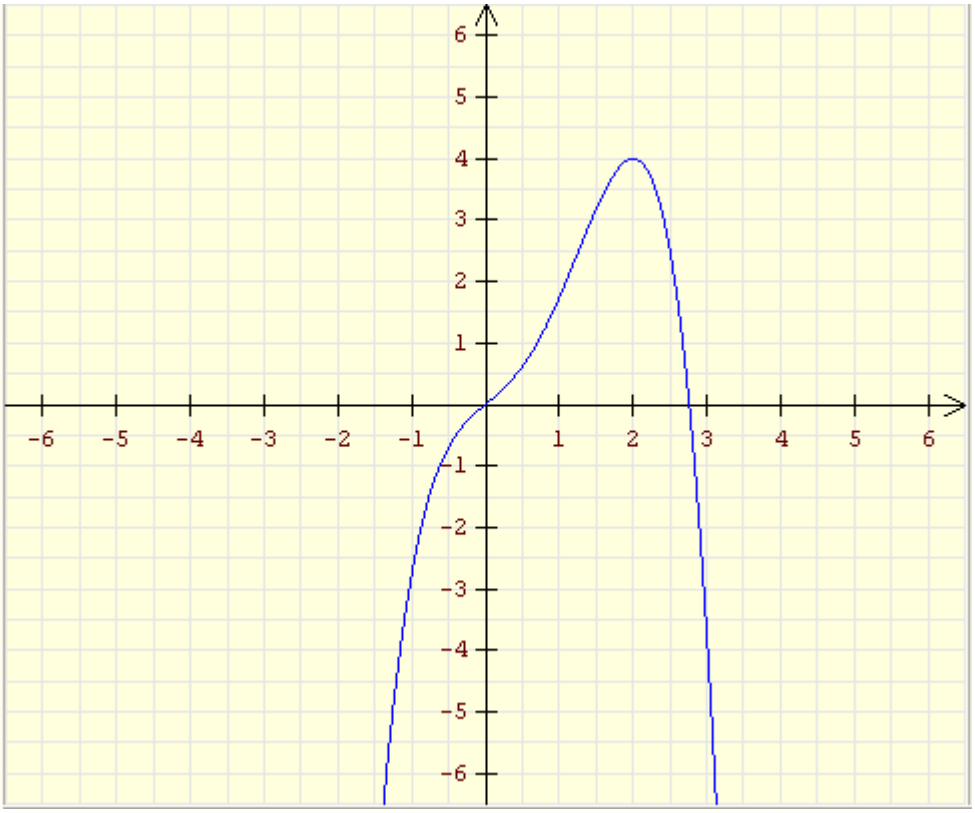
$$16a = 2 - 8 \cdot \frac{5}{4}$$

$$16a = -8$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Daraus ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + x$$



$$
\begin{aligned}
6e_1 + 2(27 - 2e_1) &= 76 \\
6e_1 + 54 - 4e_1 &= 76 \\
+54 &= 76\,. \\
2e_1 &= 22 \\
e_1 &= 11
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis in *III* eingesetzt ergibt $e_2 = 5$.

Einsetze in Gleichung *II* liefert $z_2 = 150$.

Möglich ist auch die formale Lösung des LGS:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 8 & 10 & -1 & -12 \\ 6 & 2 & 0 & 76 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+3\cdot I]{-II+4\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -6 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{II+6\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)
$$

Hieraus lässt sich ablesen: $e_2 = 5 \wedge z_2 = 150$, eingesetzt in I folgt $e_1 = 11$

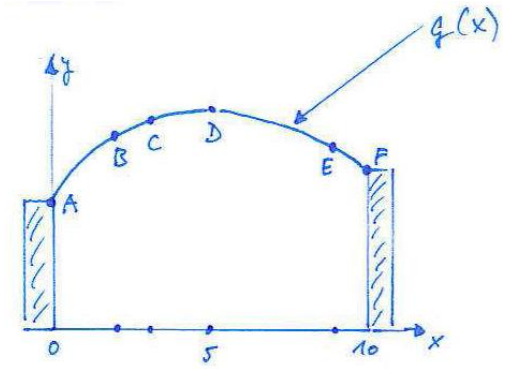
Die genannten Zwischenproduktbestände lassen sich bei der Produktion aller Endprodukte vollständig verarbeiten. Das Werk A muss dazu 150 ME von Z_2 liefern und es können zu den bestellten 12 ME von E_3, 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 hergestellt werden.

Aufgabe 287:

Im Bild sehen Sie den geplanten Tunnel der olympischen Bobbahn in Sotschi. Mit diesem Tunnel werden die Bobfahrer zum ersten Mal bei einem olympischen Turnier in eine 150m lange gekrümmte Röhre fahren.

Man interessiert sich für die Gestaltung des Eingangs (Portal) und sucht eine geeignete Funktion, die den gekrümmten Verlauf möglichst passend beschreibt.

Dazu hat man die 6 Punkte A bis F mit ihren Koordinaten ermittelt. Sie dienen als Rechenbasis. Diese sind auf der nachfolgenden Skizze abgebildet.



A(0|8); B(2|9); C(3|9,5); D(5|10); E(9|8,75)); F(10|8,5)

Alle Angaben sind in Metern gemacht.

Bestimmen Sie die Parabel 2. Ordnung, die durch die Punkte A, D und F geht.

Lösung:

$ax^2 + bx + c$

$A(0|8): a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 8 \rightarrow c = 8$

$D(5|10): a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 8 = 10$

$25a + 5b = 2$

$F(10|8{,}5): a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 8 = 8{,}5$

$100a + 10b = 0{,}5$

Daraus ergibt sich:

$25a + 5b = 2$

$100a + 10b = 0{,}5$

(1)*-4+(2)

$-10b = -\frac{15}{2}$

$b = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$25a + 5b = 2$

$a = \frac{2 - 5b}{25} = \frac{2 - 5 \cdot \frac{3}{4}}{25} = \frac{\frac{8}{4} - \frac{15}{4}}{25} = -\frac{\frac{7}{4}}{25} = -\frac{7}{100}$

Daraus ergibt sich folgende Funktion:

$-\frac{7}{100}x^2 + \frac{3}{4}x + 8$

Vermischtes

Aufgabe 288:

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x)=\frac{16}{x^2+4}$

a) (18) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für folgende Funktion. Geben Sie dabei speziell die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit der x- und y-Achse, Asymptoten, Extrempunkte und Wendepunkte an.

b) (7) P(u|f(u)) sei für u>0 ein beliebiger Kurvenpunkt. Q sei das Spiegelbild zu P bzgl. der y-Achse. Berechnen Sie den Inhalt A(u) des Dreiecks OPQ.

Lösung:

a)

Symmetrieuntersuchung: Da $f_1(-x)=f_1(x)$ ist das Schaubild von f_1 symmetrisch zur y-Achse.

Zähler und Nenner haben keine Nullstellen, also gibt es keine Schnittpunkte mit der x-Achse und keine Polstellen bzw. senkrechte Asymptoten.

Waagerechte Asymptote y = 0, denn:

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{16}{x^2+4}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{\frac{16}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

Ableitungen: $f_1(x)=\frac{16}{x^2+4}=16\cdot(x^2+4)^{-1}$

$$f_1'(x)=-16(x^2+4)^{-2}\cdot 2x=-32\frac{x}{(x^2+4)^2}$$

$$f_1''(x)=-32\frac{1\cdot(x^2+4)^2-2(x^2+4)\cdot 2x\cdot x}{(x^2+4)^4}=-32\frac{(x^2+4)-4x^2}{(x^2+4)^3}=-32\frac{4-3x^2}{(x^2+4)^3}$$

Extrempunkte: Bed.. $f_1'(x_E)=0$ d.h. $x_E = 0$. Mit $f_1(0) = 4$

Kontrolle: $f_1''(0)<0$ d.h. f hat bei 0 ein relatives Maximum.

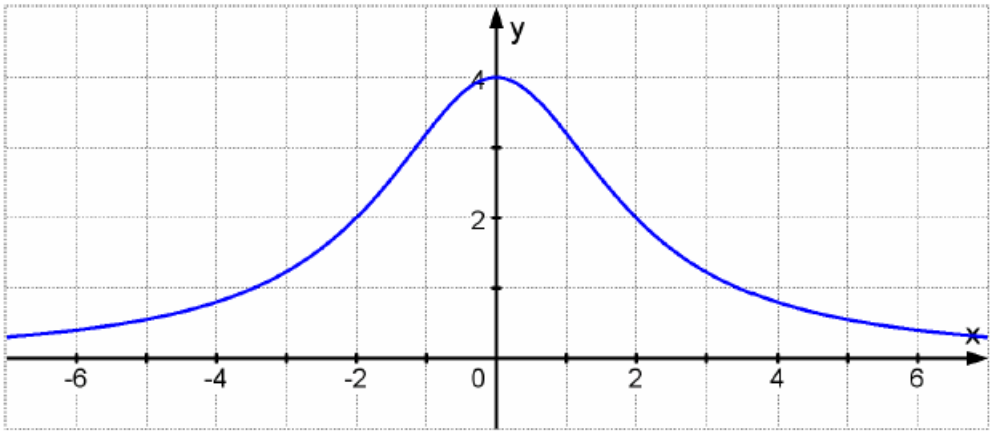
K hat den Hochpunkt H (0 | 4).

Wendepunkte: Bed.: $f_1''(x_W)=0$ d.h. $3x^2 = 4$ also

$$x_W=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 2\sqrt{\frac{3}{9}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx 1{,}15 \qquad f_1\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{16}{\frac{4}{3}+4}=\frac{16}{\frac{16}{3}}=3$$

Da $\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ einfache Nullstellen von f_1'' sind, hat f_1'' dort Zeichenwechsel, also liegen Wendestellen vor! Ergebnis: .: $W_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\mid 3\right)$

Wertmenge: $\mathbf{W}=]0;4]$



b)

$P\left(u \mid f(u)\right)$ sei für $u > 0$ ein beliebiger Kurvenpunkt von K_1. Q sei das Spiegelbild zu P bzgl. der y-Achse: Es folgt daher: $P\left(u \mid \frac{16}{u^2+4}\right)$ und $Q\left(-u \mid \frac{16}{u^2+4}\right)$

Berechne den Inhalt A(u) des Dreiecks OPQ.

Die Grundseite soll stets achsenparallel sein. Also verwenden wir

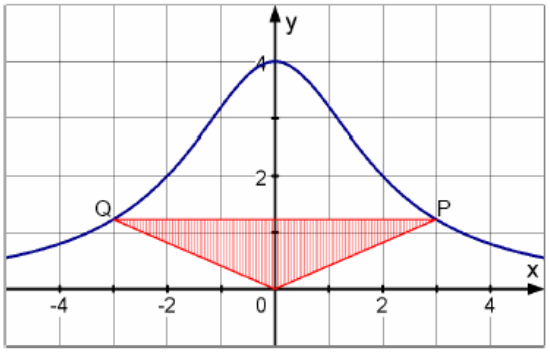
$g = \overline{PQ} = x_P - x_Q = u - (-u) = 2u$

Und als Höhe $h = y_P = f(u) = \frac{16}{u^2+4}$

Dreiecksinhalt:

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot \frac{16}{u^2+4} = 16\frac{u}{u^2+4}$

mit dem Definitonsbereich $\mathbf{D}_u =]0;\infty[$



Dies ist genau die Funktion f_2 von Seite 1, und dort sehen wir auch ihr Schaubild. Diese Flächeninhaltsfunktion wächst von 0 zu einem absoluten Maximum um dann asymptotisch gegen 0 zu gehen.

Die Aufgabe lautet: Berechne den Extremwert des Flächeninhalts.
Ableitungen der Flächeninhaltsfunktion:

$$A(u)=16\frac{u}{u^2+4} \quad \text{folgt} \quad A'(u)=16\frac{u^2+4-2u\cdot u}{\left(u^2+4\right)^2}=16\frac{4-u^2}{\left(u^2+4\right)^2}$$

$$A''(u)=16\frac{-2u\left(u^2+4\right)^2-2\left(u^2+4\right)\cdot 2u\cdot\left(4-u^2\right)}{\left(u^2+4\right)^4}=16\frac{-2u\left(u^2+4\right)-2\cdot 2u\cdot\left(4-u^2\right)}{\left(u^2+4\right)^3}$$

$$A''(u)=16\frac{-2u^3-8u-16u+4u^3}{\left(u^2+4\right)}=16\frac{2u^3-24u}{\left(u^2+4\right)^3}=32\frac{u^3-12u}{\left(u^2+4\right)^3}$$

Extremwertbedingung: $A'(u_E)=0$ d.h. $u\left(u^2-12\right)=0$

$u_1=0\notin \mathbf{D}_u$, $u_{2,3}=\pm 2$ aber auch $u_3=-2\notin \mathbf{D}_u$ Also bleibt nur $u_E = 2$ übrig.

Kontrolle: $A''(2)=32\frac{8-24}{8^3}<0$

d.h. der Flächeninhalt nimmt für u = 2 ein relatives Maximum an.

Randwerte:

$$\lim_{u\to 0}A(u)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{u\to 0}A(u)=16\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{u^2+4}=16\cdot\lim_{|x|\to\infty}\frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{4}{u^2}}=16\cdot 0=0$$

Also ist $A(2)=4$ der **absolut** größte Flächeninhalt.

Aufgabe 289:

Für welches t existiert für folgende Funktion eine Nullstelle?

$$f(x)=\ln(tx)-\frac{x^2}{2t} \quad t>0$$

Lösung:

Ableitungen:

$$f_t'(x)=\frac{1}{tx}\cdot t-\frac{2x}{2t}=\frac{1}{x}-\frac{x}{t}=\frac{t-x^2}{tx}$$

$$f_t''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{t}=-\frac{t+x^2}{tx^2}$$

Extrempunkte:

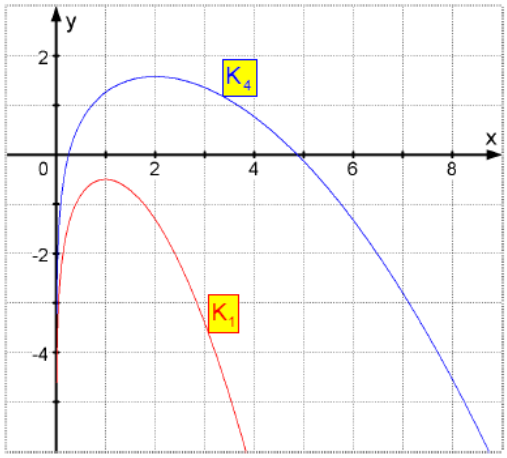
Bed.: $f_t'(x_E)=0$ d.h. $x^2=t$ also $x=\pm\sqrt{t}$.

Da $-\sqrt{t}\notin \mathbf{D}$ folgt $x_E=\sqrt{t}$.

$$y_E=f\left(\sqrt{t}\right)=\ln\left(t\sqrt{t}\right)-\frac{t}{2t}=\ln t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln t-\frac{1}{2}$$

Kontrolle: $f_t''(x)=-\frac{t+t}{t\cdot t}<0$ da t > 0.

Erg.: $H\left(\sqrt{t}\,\middle|\,\frac{3}{2}\ln t-\frac{1}{2}\right)$



c) **Existenz der Nullstellen**:
Die Kurve K_t hat genau eine Nullstelle, wenn H auf der x-Achse liegt und genau zwei Nullstellen, wenn H über der x-Achse liegt.

H liegt auf der x-Achse, wenn gilt:

$$y_H = 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}\ln t - \tfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \ln t = \tfrac{1}{3} \Leftrightarrow t = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

H liegt oberhalb der x-Achse, wenn gilt:

$$y_H > 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}\ln t - \tfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \ln t > \tfrac{1}{3} \Leftrightarrow t > e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \approx 1{,}4$$

Aufgabe 290:

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{t}{4},\ t \in \mathbb{R}$

a) (5) Bestimmen Sie t so, dass die x-Achse eine Tangente an das Schaubild G von f_t ist.

b) (5)Berechnen Sie mit dem unter a) ermittelnden Wert für t den Inhalt des Flächenstücks zwischen G und der x-Achse

Lösung:

Bestimmen Sie t so, dass die x-Achse eine Tangente an das Schaubild G von f ist und zeichnen Sie dieses Schaubild (bzw. lassen es zeichnen...).
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen G und der x-Achse.

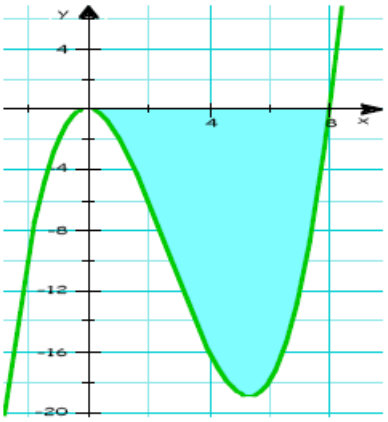
Doppelte Nullstelle für t = 0: $f(0,x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2$

mit x = 0 als doppelter und x = 8 als zweiter Nullstelle.

$$\int_0^8 \left(\frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right)dx = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^8 =$$

$$= \frac{1}{16}8^4 - \frac{2}{3}8^3 - 0 = 256 - \frac{1024}{3} = -\frac{256}{3}$$

also ist der gesuchte Flächeninhalt $A = \frac{256}{3}$



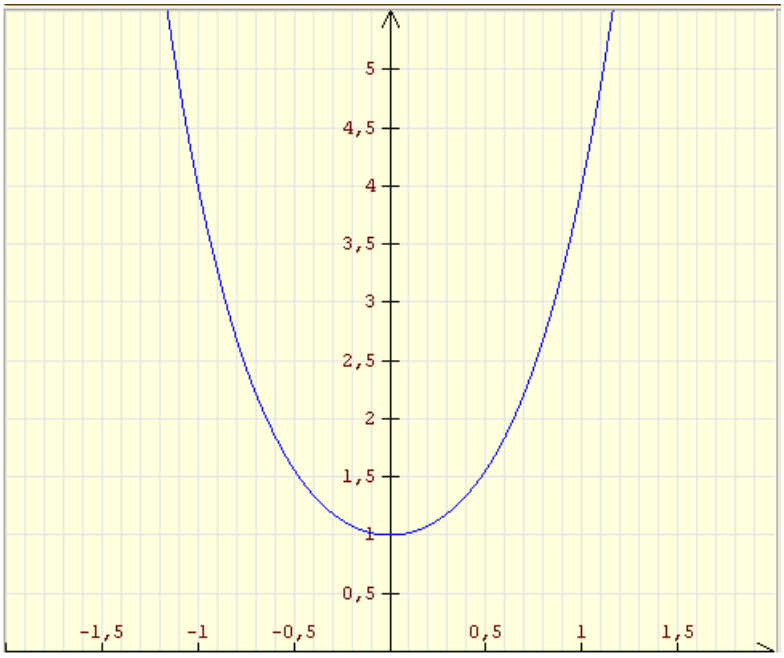
Aufgabe 291:

Der Punkt P(x |f(x)) auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ erzeugt mit den Punkten X(x|0), Y(0|f(x)) und dem Koordinatenursprung O(0|0) ein Rechteck der Fläche A(x).

(a) (5) Berechnen Sie die Punkte des Graphen der Funktion f(x) mit waagrechter Tangente.

(b) (5) Geben Sie die Koordinaten des Punktes P an, bei dem die Fläche des Rechtecks maximal ist.

Lösung:



a)

TP (0|19

b)

Fläche ist unendlich

Aufgabe 292:

Gegeben ist folgende Funktion:

$f_t(x)=\frac{x^2+4x+8}{x+2}$ K sei das Schaubild von f.

a) (8) Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

b) (7) Die Gerade mit der Gleichung x = u mit u > - 2 schneidet K in P und die schräge Asymptote in Q. R sei der Schnittpunkt der Asymptoten. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

a)

$$f_t(x)=\frac{x^2+4x+8}{x+2}$$

a) $f'(x)=\frac{(2x+4)(x+2)-(x^2+4x+8)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+8x+8-x^2-4x-8}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^{\cancel{1}}-2\cancel{(x+2)}(x^2+4x)}{(x+2)^{\cancel{3}}}=\frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3}=\frac{8}{(x+2)^3}$

Zähler =0: $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}\notin \mathbf{R}$.

Nenner =0: $x = -2$.

Es gibt keine Schnittpunkte mit der x-Achse, aber die senkrechte Asymptote x = -2.

Schräge Asymptote ist $y=x+2$, denn

$$f(x)=\frac{x^2+4x+8}{x+2}=x+2+\frac{4}{x+2}$$

mit $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x+2}=0$.

$$\begin{array}{l}(x^2+4x+8):(x+2)=x+2\\ \underline{-(x^2+2x)}\\ \quad 2x+8\\ \quad \underline{-(2x+4)}\\ \quad\quad 4\end{array}$$

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E)=0$

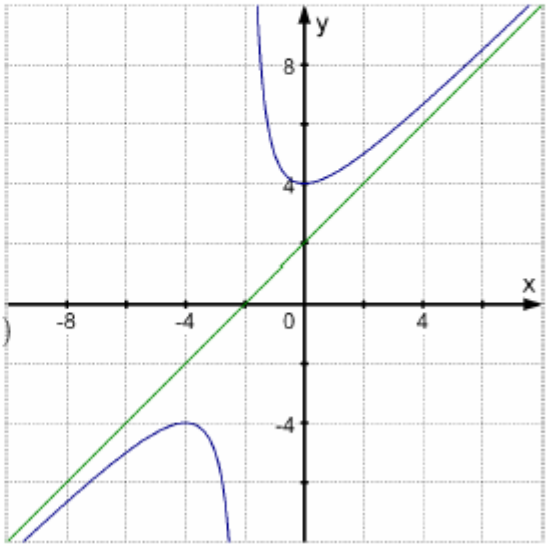
d.h. $x^2+4x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-4$

$f(0)=4;\ f(-4)=-4$

Kontrolle: $f''(0)>0 \Rightarrow T(0|-4)$

$f''(-4)<0 \Rightarrow H(-4|-4)$

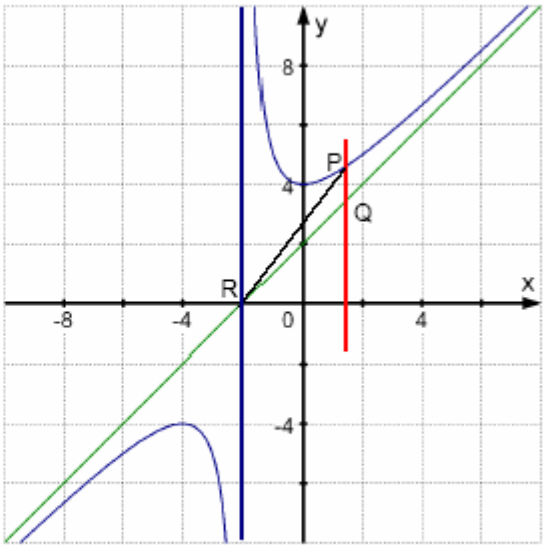
Da f' keine Nullstellen besitzt, hat K keine Wendepunkte.



b)

d) Die Gerade $x = u$ mit $u > -2$ schneidet K in $P(u|f(u))$ und die Asymptote in $Q(u|u+2)$

Ferner ist $R(-2|0)$



Das Dreieck RPQ hat den Inhalt

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot (u - x_R)$ mit

$\overline{PQ} = y_P - y_Q$ also

$$\overline{PQ} = \left(u + 2 + \frac{4}{u+2}\right) - (u+2) = \frac{4}{u+2}$$

Damit folgt

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{u+2} \cdot (u+2) = 2$$

Die Besonderheit liegt darin, dass der Flächeninhalt konstant ist, unabhängig von der Lage von P !!!

Aufgabe 293:

Es ist

$$f(x) = \frac{1}{8}x(x-6)^2 + 4$$

a) (4) Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie den Wendepunkt des Schaubilds der Funktion von f.

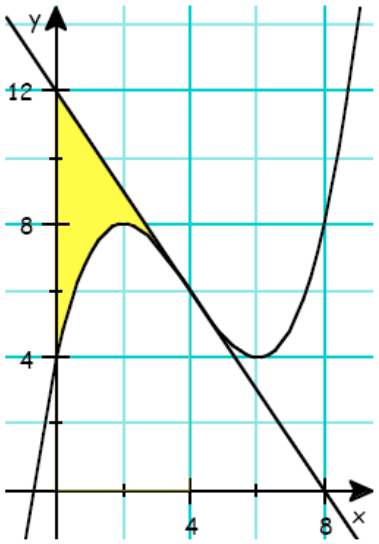
b) (2) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf.

c) (4) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von der Wendetangente, der y-Achse und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.

Lösung:

Es ist $f(x) = \frac{1}{8}x\left(x-6\right)^2 + 4$.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie den Wendepunkt des Schaubilds von f.
b) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf und fertigen Sie eine Zeichnung mit dem Schaubild von f und der Wendetangente an.
c) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von der Wendetangente, der y-Achse und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.



a) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$

Nullstellen der Ableitung: $x = 2 \vee x = 6$

$E_1(2|8)$; $E_2(6|0)$; $W(4|6)$ wg. Symmetrie

b) $f'(4) = -\frac{3}{2}$

w: $y = -\frac{3}{2}(x - 4) + 6 = -\frac{3}{2}x + 12$

c) $A = 8$

Aufgabe 294:

Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion

$$f(x) = \left(x^2 + b\right) \cdot e^{ax}$$

in der Nullstelle N(3|0) die Steigung m=6e hat.

Lösung:

Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion $f(x)=(x^2+b)\cdot e^{ax}$ in der Nullstelle N(3|0) die Steigung m=6e hat.

$$f(x)=(x^2+b)\cdot e^{ax}$$

$$f'(x)=2x\cdot e^{ax}+(x^2+b)\cdot e^{ax}\cdot a$$

$$=e^{ax}(ax^2+2x+ab)$$

" in der Nullstelle N(3|0)"	$f(3)=0$	$0=(3^2+b)\cdot e^{3a}$	(1)
" in N(3|0) die Steigung m=6e"	$f'(3)=6e$	$6e=e^{3a}(a\cdot 3^2+6+ab)$	(2)

Da e^{3a} sicher nicht 0 ist folgt aus (1): $9+b=0 \quad\Rightarrow\quad b=-9$

Damit wird (2) zu:

$$6e=e^{3a}(9a+6-9a)$$

$$6e=6e^{3a}$$

$$6e^1=6e^{3a}$$

$$1=3a$$

$$a=\frac{1}{3}$$

Gesuchte Funktion: $\mathbf{f(x)=(x^2-9)\cdot e^{\frac{x}{3}}}$

Aufgabe 295:

Führen Sie für die Funktion f(x) eine Kurvendiskussion durch.

$$f(x)=\frac{4x^2+16}{3x}$$

a) (12) Bestimmen Sie die Definitionsmenge, Asymptoten, Nullstellen mit der x-Achse, Extremwerte und Wendepunkte.

b) (5) Für welchen Wert von k hat die Fläche, die vom Grafen von f, von der schrägen Asymptote und den Geraden g: x=1 und h: x = k (k ist positiv) begrenzt wird, den Inhalt A=16/3?

c) (8) Zieht man im Punkte P(1|?) des Graphen von f die Tangente, bildet diese mit der y-Achse und der erwähnten Asymptote ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

Lösung:

a) **KURVENDISKUSSION**

$$f(x)=\frac{4x^2+16}{3x}=\frac{4x}{3}+\frac{16}{3x}=\frac{4x}{3}+\frac{16}{3}x^{-1}$$

$$f'(x)=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}x^{-2}=\frac{4}{3}-\frac{16}{3x^2}=\frac{4x^2-16}{3x^2}$$

$$f(x)=\frac{32}{3}x^{-3}=\frac{32}{3x^3}$$

Definiert für: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Asymptoten: für $x\to\pm\infty$: $y=\frac{4x}{3}$ und ein Pol: $x=0$

Symmetrisch zum Nullpunkt

Definiert für: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Asymptoten: für $x \to \pm\infty$: $y = \frac{4x}{3}$ und ein Pol: $x = 0$

Symmetrisch zum Nullpunkt

Nullstellen: keine

Extrema:

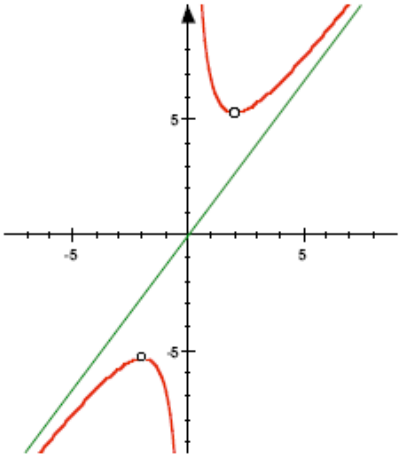
$$f'(x) = \frac{4x^2 - 16}{3x^2}$$

$$4(x^2 - 4) = 0$$

$$\left(\pm 2 \middle| \pm 5\tfrac{1}{3}\right)$$

Wendepunkte: keine

Graph



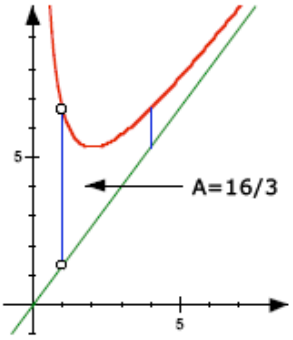
b) k BERECHNEN

$$\int_1^k \left(\frac{4x}{3} + \frac{16}{3x} - \frac{4x}{3}\right) dx = \left[\frac{16}{3}\ln x\right]_1^k$$

$$\frac{16}{3}\ln k - 0 = \frac{16}{3}$$

$$\ln k = 1$$

$$\mathbf{k = e}$$



c) A BERECHNEN

Tangente in $P\left(1 \middle| \frac{20}{3}\right)$ mit der Steigung $f'(1) = -4$

Tangentengleichung: $y - \frac{20}{3} = -4(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -4x + \frac{32}{3}$

Schnitt der Tangente mit der y-Achse: $Q\left(0 \middle| \frac{32}{3}\right)$

Schnitt der Tangente mit $y = \frac{4}{3}x$

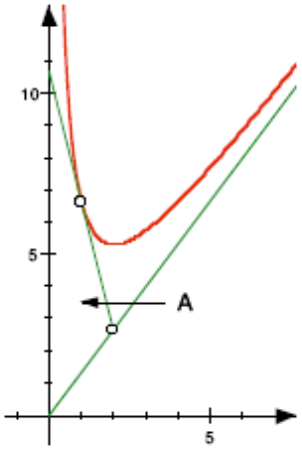
$$-4x + \frac{32}{3} = \frac{4}{3}x$$

$$-12x + 32 = 4x$$

$$32 = 16x$$

$$x = 2$$

Dreiecksfläche: $\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} \cdot 2 = \frac{32}{3}}$



Aufgabe 296:

Welche Gleichung hat die Tangente in der einzigen Nullstelle der Kurve f(x)?

$f(x) = e^x \cdot \ln x$

Lösung:

Welche Gleichung hat die Tangente in der einzigen Nullstelle der Kurve $f(x) = e^x \cdot \ln x$?

Nullstelle:

$e^x \cdot \ln x = 0$ **e^x ist nie Null!**

$\ln x = 0$

$\mathbf{x = 1}$

Steigung:

$f(x) = e^x \cdot \ln x$

$f'(x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x(\ln x + \frac{1}{x})$

$f'(1) = e(0 + 1) = \mathbf{e}$

Gerade durch P(1|0) mit der Steigung e:

$y - 0 = e(x - 1)$ $\mathbf{y = ex - e}$

Aufgabe 297:

Es ist

$$f(x)=\frac{1}{8}x(x-6)^2+4$$

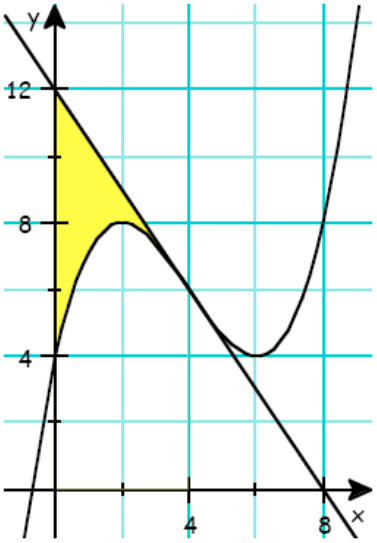
a) (6) Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie den Wendepunkt des Schaubilds der Funktion von f.

b) (2) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf.

Lösung:

Es ist $f(x)=\frac{1}{8}x(x-6)^2+4$.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie den Wendepunkt des Schaubilds von f.
b) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf und fertigen Sie eine Zeichnung mit dem Schaubild von f und der Wendetangente an.
c) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von der Wendetangente, der y-Achse und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.



a) $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$

Nullstellen der Ableitung: $x=2 \vee x=6$
$E_1(2|8)$; $E_2(6|0)$; $W(4|6)$ wg. Symmetrie

b) $f'(4)=-\frac{3}{2}$

w: $y=-\frac{3}{2}(x-4)+6=-\frac{3}{2}x+12$

c) $A=8$

Aufgabe 298:

Gegeben ist folgende Funktion:

$f_t(x)=\frac{x^2+4x+8}{x+2}$ K sei das Schaubild von f.

a) (8) Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

b) (7) Die Gerade mit der Gleichung x = u mit u > - 2 schneidet K in P und die schräge Asymptote in Q. R sei der Schnittpunkt der Asymptoten. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

a)

$$f_t(x)=\frac{x^2+4x+8}{x+2}$$

a) $f'(x)=\frac{(2x+4)(x+2)-(x^2+4x+8)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+8x+8-x^2-4x-8}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^{\not 1}-2\cancel{(x+2)}(x^2+4x)}{(x+2)^{\not 3}}=\frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3}=\frac{8}{(x+2)^3}$

Zähler =0: $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}\notin \mathbf{R}$.

Nenner =0: $x = -2$.

Es gibt keine Schnittpunkte mit der x-Achse, aber die senkrechte Asymptote x = -2.

Schräge Asymptote ist $y=x+2$, denn

$$f(x)=\frac{x^2+4x+8}{x+2}=x+2+\frac{4}{x+2}$$

mit $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x+2}=0$.

$$\begin{array}{l}(x^2+4x+8):(x+2)=x+2\\ \underline{-(x^2+2x)}\\ \quad 2x+8\\ \quad \underline{-(2x+4)}\\ \quad\quad 4\end{array}$$

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E)=0$

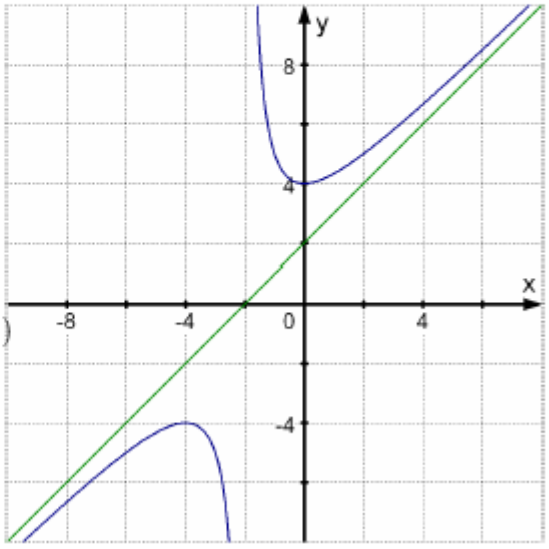
d.h. $x^2+4x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-4$

$f(0)=4;\ f(-4)=-4$

Kontrolle: $f''(0)>0 \Rightarrow T(0|-4)$

$f''(-4)<0 \Rightarrow H(-4|-4)$

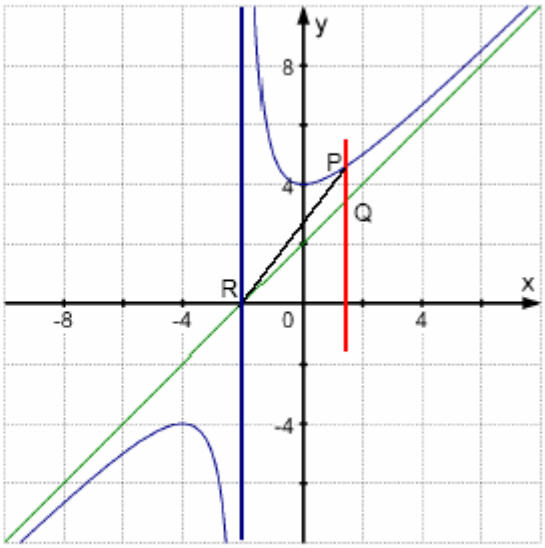
Da f' keine Nullstellen besitzt, hat K keine Wendepunkte.



b)

d) Die Gerade $x = u$ mit $u > -2$ schneidet K in $P(u|f(u))$ und die Asymptote in $Q(u|u+2)$

Ferner ist $R(-2|0)$



Das Dreieck RPQ hat den Inhalt

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot (u - x_R)$ mit

$\overline{PQ} = y_P - y_Q$ also

$$\overline{PQ} = \left(u + 2 + \frac{4}{u+2}\right) - (u+2) = \frac{4}{u+2}$$

Damit folgt

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{u+2} \cdot (u+2) = 2$$

Die Besonderheit liegt darin, dass der Flächeninhalt konstant ist, unabhängig von der Lage von P !!!

Aufgabe 299:

Gegeben ist die Funktion f durch

$f(x) = x \cdot (lnx)^2;\ \ x > 0$

Ihr Schaubild sei K.

a) (16) Geben Sie für diese Funktion die Definitionsmenge, die Symmetrieeigenschaft, Asymptoten, Schnittpunkte mit der x- bzw. y-Achse und Extremwerte an.

b) (9) Die Tangente an K im Kurvenpunkt B schneidet die y-Achse im vom Koordinatenursprung O verschiedenen Punkt P. Bestimmen Sie den Punkt B so, dass die Strecken BP und BO gleich lang sind.

c) (9) Die 1. Winkelhalbierende und K schließen eine Fläche ein, die unterhalb der 1. Winkelhalbierenden liegt. Berechnen Sie deren Inhalt. Sie können dabei verwenden, dass für $f_1\ mit\ f_1(x) = x \cdot \ln(x)$ eine Stammfunkt F_1 mit

$F_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)$ hat.

Lösung:

a)

Kurvenuntersuchung

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x \cdot (\ln x)^2 \quad ; \quad x > 0$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x \cdot (\ln x)^2 &= 0 \quad | : x \neq 0 \\ (\ln x)^2 &= 0 \quad |\sqrt{(\cdot)} \\ \ln x &= 0 \quad |e^{(\cdot)} \\ x &= 1 \quad \Longrightarrow \quad N(1\,|\,0) \end{aligned}$$

Symmetrie

Auf Grund der Nullstelle $N(1\,|\,0)$ und dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f =]\,0\,; +\infty\,[$ ist keine Symmetrie vorhanden.

Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (\ln x)^2 \qquad \text{; mit der Produkt- und Kettenregel gilt:} \\ f'(x) &= 1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot (\ln x)^1 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{(Kürzen von } x\text{)} \\ &= (\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x \qquad \text{; wieder die Kettenregel:} \\ f''(x) &= 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{(Ausklammern von } \tfrac{2}{x}\text{)} \\ &= \frac{2}{x} \cdot (\ln x + 1) \\ &= 2 \cdot \frac{\ln x + 1}{x} \qquad \text{; jetzt Quotientenregel} \\ f'''(x) &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1) \cdot 1}{x^2} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} \\ &= \frac{-2 \cdot \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Extrema

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x &= 0 \quad \text{(Ausklammern von } \ln x\text{)} \\ \ln x \cdot (\ln x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \ln x = 0 & |e^{(\cdot)} \\ x_1 = e^0 = 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \ln x + 2 = 0 & |-2 \\ \ln x = -2 & |e^{(\cdot)} \\ x_2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \end{cases}$$

Hinreichende Bedingung (es muss nur noch $f'''(x) \neq 0$ überprüft werden):

$$\begin{aligned} f''(1) &= 2 \cdot \frac{\ln 1 + 1}{1} > 0 \implies \text{Tiefpunkt bei } x_1 = 1 \\ f''(e^{-2}) &= 2 \cdot \frac{\ln e^{-2} + 1}{e^{-2}} = 2 \cdot \frac{-2+1}{e^{-2}} = -2 \cdot e^2 < 0 \implies \text{Hochpunkt bei } x_2 = e^{-2} \end{aligned}$$

Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f(1) = 0 &\implies \text{Tiefpunkt } T(1|0) = N \\ f(e^{-2}) = e^{-2} \cdot (\ln(e^{-2}))^2 = \frac{1}{e^2} \cdot (-2)^2 = \frac{4}{e^2} &\implies \text{Hochpunkt } H(\frac{1}{e^2}|\frac{4}{e^2}) \end{aligned}$$

Wendepunkte

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 \cdot \frac{\ln x + 1}{x} &= 0 \qquad | \cdot \frac{x}{2} \neq 0 \\ \ln x + 1 &= 0 \qquad | -1 \\ \ln x &= -1 \qquad | e^{(\cdot)} \\ x &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung (es muss nur noch $f''''(x) \neq 0$ überprüft werden)::

$$f''''(e^{-1}) = \frac{-2 \cdot \ln e^{-1}}{(e^{-1})^2} = 2 \cdot e^2 \neq 0 \implies \text{Wendepunkt bei } x = e^{-1}$$

Funktionswert:

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (\ln(e^{-1}))^2 = \frac{1}{e} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{e} \implies \text{Wendepunkt } W(\frac{1}{e}|\frac{1}{e})$$

Verhalten für x gegen 0

Es gilt

$$x \longrightarrow 0 \quad (x > 0) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & 0^+ \\ (\ln x)^2 & \longrightarrow & +\infty \end{array} \right.$$

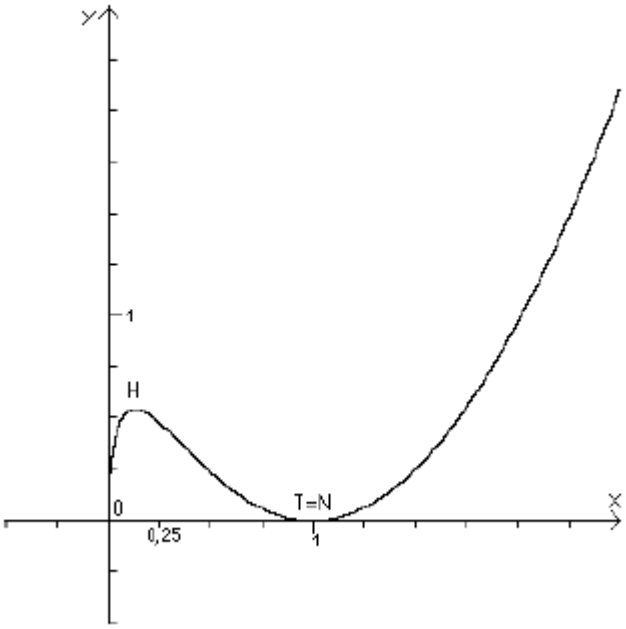
Daher ist es zunächst unentscheidbar, wogegen $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$ konvergiert.
Formt man f um zu

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$$

dann gilt

$$x \longrightarrow 0 \quad (x > 0) : \left\{ \begin{array}{rcl} (\ln x)^2 & \longrightarrow & +\infty \\ \frac{1}{x} & \longrightarrow & +\infty \end{array} \right.$$

Zeichnung



b)

b) Abszisse von B

Der Kurvenpunkt B hat die Koordinaten $B(u|f(u))$ mit $u > 0$.

Tangente im Punkt B

Die Steigung m_t der Tangente in $B(u\,|\,u \cdot (\ln u)^2)$ wird mit der ersten Ableitung bestimmt:

$$m_t = f'(u) = (\ln u)^2 + 2 \cdot \ln u$$

Mit der Punktsteigungsformel gilt für die Gleichung der Tangente t

$$\begin{aligned} y &= m_t \cdot (x - x_1) + y_1 \quad ; \text{mit } x_1 = u \text{ und } y_1 = f(u) \text{ erhält man} \\ y &= ((\ln u)^2 + 2 \cdot \ln u) \cdot (x - u) + u \cdot (\ln u)^2 \end{aligned}$$

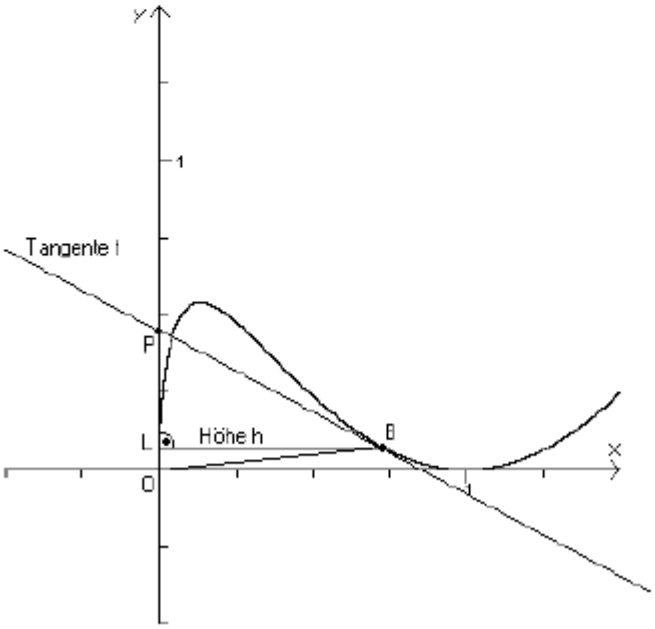
$$\begin{aligned} y &= ((\ln u)^2 + 2\cdot \ln u)\cdot x - ((\ln u)^2 + 2\cdot \ln u)\cdot u + u\cdot (\ln u)^2 \\ &= ((\ln u)^2 + 2\cdot \ln u)\cdot x - u\cdot (\ln u)^2 - 2u\cdot \ln u + u\cdot (\ln u)^2 \\ t: \quad y &= ((\ln u)^2 + 2\cdot \ln u)\cdot x - 2u\cdot \ln u \end{aligned}$$

Koordinaten von P

Die Tangente schneidet die y-Achse ($x=0$) im Punkt $P(0\,|\,-2u\cdot \ln u)\,; u>0$.
Da P vom Ursprung verschieden sein soll, muss auch $\ln u \neq 0$, also $u \neq 1$ gelten:

$$P(0\,|\,-2u\cdot \ln u) \quad ; u>0 \text{ und } u\neq 1$$

Skizze



Da BP und BO gleichlang sein sollen, ist das Dreieck BPO dann gleichschenklig mit der Basis OP; der Punkt L halbiert dann die Strecke OP. L hat deswegen die Koordinaten

$$L(0\,|\,-u\cdot \ln u) \quad \text{(Mitte von } O \text{ und } P)$$

Da die Höhe h durch B senkrecht auf OP steht, müssen L und B dieselben Ordinaten (y-Werte) haben. Als Bedingung erhält man also

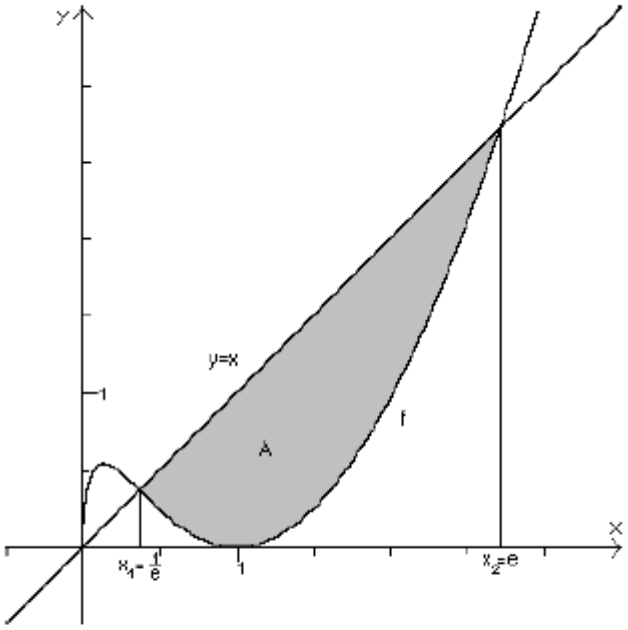
$$\begin{aligned} y_B &= y_L \\ u\cdot (\ln u)^2 &= -u\cdot \ln u \quad | : (u\cdot \ln u) \neq 0 \quad \text{(wegen } u>0 \text{ und } u\neq 1) \\ \ln u &= -1 \quad |e^{(\cdot)} \\ u &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Damit ist der gesuchte Punkt B der Wendepunkt $B = W(\frac{1}{e}|\frac{1}{e})$ mit der Abszisse $x_B = \frac{1}{e}$.

c)

Flächeninhalt

Skizze



Schnittpunkte von f mit der 1.Winkelhalbierenden $(y = x)$

Dazu setzt man $f(x)$ und $y = x$ gleich:

$$\begin{aligned} x \cdot (\ln x)^2 &= x \quad | : x > 0 \\ (\ln x)^2 &= 1 \quad |\sqrt{(\cdot)} \\ \ln x &= \pm 1 \\ \ln x = -1 \quad &\text{oder} \quad \ln x = 1 \quad |e^{(\cdot)} \\ x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad &\text{oder} \quad x_2 = e \end{aligned}$$

Damit gilt für die gesuchte Fläche (siehe Skizze)

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} (x - f(x))\,dx \qquad (\text{da } f \text{ unter der 1.Winkelhalbierenden } y = x \text{ liegt!}) \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} (x - x \cdot (\ln x)^2)\,dx \\ &= \underbrace{\int_{\frac{1}{e}}^{e} x\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{\frac{1}{e}}^{e} x \cdot (\ln x)^2\,dx}_{I_2} \end{aligned}$$

Das Integral I_1 ist einfachzu lösen:

$$I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\,dx$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} \\ &= \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2} \\ I_1 &= \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2e^2} \end{aligned}$$

Für I_2 benötigt man eine Produktintegration. Es gilt

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)] - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Da für $f_1(x) = x\cdot\ln x$ eine Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x$ in der Aufgabe angegeben ist, wählt man

$$\begin{aligned} u(x) = \ln x \quad &\text{und} \quad v'(x) = x\cdot\ln x \\ u'(x) = \frac{1}{x} \quad &\text{und} \quad v(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\cdot(\ln x)^2\,dx \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \underbrace{\ln x}_{u(x)}\cdot\underbrace{x\cdot\ln x\,dx}_{v'(x)} \\ &= \Big[\underbrace{\ln x}_{u(x)}\cdot\underbrace{\Big(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\Big)}_{v(x)}\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\Big(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\Big)}_{v(x)}\,dx \\ &= \left[\ln x\cdot\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x\cdot\ln x\right)dx \\ &= \left[\ln x\cdot\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \left[-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^2\cdot\ln x + \frac{1}{2}x^2\cdot(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \left[-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^2\cdot\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e} \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^2\cdot\ln x + \frac{1}{2}x^2\cdot(\ln x)^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^2\cdot\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e} \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x + \frac{1}{2}x^2\cdot(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} \quad \text{(im folgenden beachte } \tfrac{1}{e^z} = e^{-z} \text{ und } \ln(e^z) = z\text{)} \\ &= \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}e^2\cdot\underbrace{\ln e}_{=1} + \frac{1}{2}e^2\cdot\underbrace{(\ln e)^2}_{=1} - \left(\frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2}\cdot\underbrace{\ln(e^{-1})}_{=-1} + \frac{1}{2}e^{-2}\cdot\underbrace{(\ln(e^{-1}))^2}_{=(-1)^2=1}\right) \\ &= \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4e^2} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2e^2}\right) \\ I_2 &= \frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{4e^2} \end{aligned}$$

Damit erhält man die Fläche A zu

$$\begin{aligned} A &= I_1 - I_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2e^2} - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{4e^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{4e^2} \\ A &= \frac{1}{4} \cdot e^2 + \frac{3}{4e^2} \approx 1,95 \end{aligned}$$

Aufgabe 300:

Zu jedem $t \in R^+$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = t \cdot [\ln(x + t)]^2$$

mit $(x + t) \in R^+$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) (13) Geben Sie die Definitionsmenge für die Funktion $f_t(x)$ an. Untersuchen Sie K_t auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse und y-Achse, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte.

b) (14) g_t sei die Gerade durch den Tiefpunkt und den Wendepunkt von K_t.

h_t sei die Senkrechte zu g_t durch den Tiefpunkt von K_t.

g_t und h_t schneiden die senkrechte Asymptote von K_t in G_t bzw. H_t.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Welche Kurve bilden die Punkte H_t, wenn t alle zugelassenen Werte annimmt?

Für welches t haben G_t und H_t die kleinste Entfernung?

Wie groß ist diese?

c) (8) Die x-Achse, K_t und die Gerade $x = e - t$ begrenzen eine Fläche.

Berechnen Sie deren Inhalt A(t).

Lösung:

a)

Gegeben ist $f_t(x) = t \cdot \left[\ln(x+t)\right]^2$; $(x+t) \in \mathbf{R}^+$ mit $t \in \mathbf{R}^+$

a) **Definitionsbereich**: Bed.: Argument > 0, d.h. $x + t > 0$ d. $x > -t$
$\mathbf{D} =]-t;\infty[$

Randwerte: $x \to -t \Rightarrow \text{Arg} \to 0 \Rightarrow \ln(x+t) \to -\infty \Rightarrow f_t(x) \to -\infty$
d.h. $x = -t$ ist **senkrechte Asymptote** für $y \to -\infty$.
$x \to \infty \Rightarrow \text{Arg} \to \infty \Rightarrow \ln(x+t) \to \infty \Rightarrow f_t(x) \to \infty$

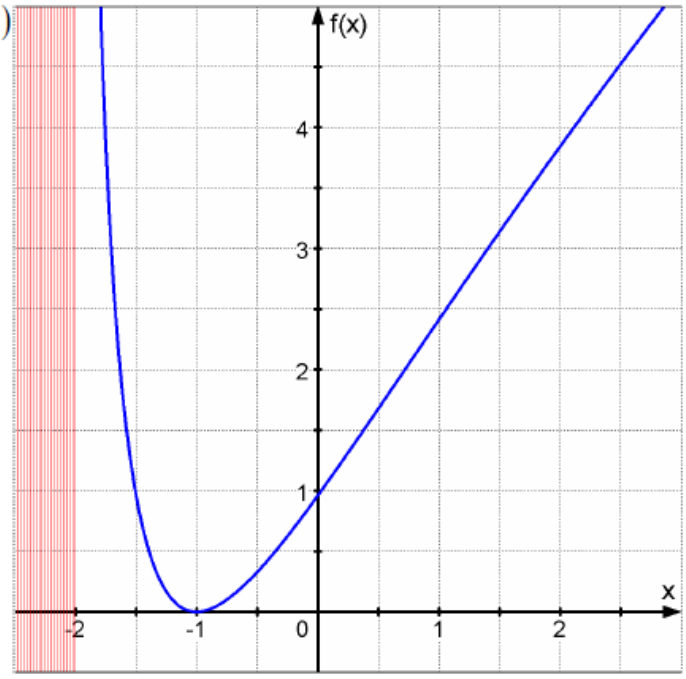
Nullstelle: Bed.: $\ln(x+t) = 0$ d.h. $x + t = 1$ also $x_N = 1 - t$
$N(1 - t \mid 0)$ Es handelt sich um eine **doppelte Nullstelle !**

Ableitungen: $f_t'(x) = 2t \cdot \ln(x+t) \cdot \frac{1}{x+t} = 2t\frac{\ln(x+t)}{x+t}$

$$f_t''(x) = 2t \cdot \frac{\frac{1}{x+t} \cdot (x+t) - 1 \cdot \ln(x+t)}{(x+t)^2} = 2t\,\frac{1-\ln(x+t)}{(x+t)^2}$$

Extrempunkt: Bed.: $f_t'(x_E) = 0$ d.h. $\ln(x+t) = 0 \Leftrightarrow x+t = 1 \Leftrightarrow x_E = 1-t$
$y_E = 0$ (die doppelte Nullstelle ist der Tiefpunkt !)
Kontrolle: $f_t''(1-t) = 2t\frac{1-\ln 1}{1^2} > 0$ da $t > 0$.
Ergebnis: Tiefpunkt $T(1-t \mid 0)$.

Wendepunkt: Bed.: $f_{t''}(x_W)$
$\ln(x+t) = 1$ also $x + t = e^1$
$x_W = e - t$
$y_W = f_t(e-t) = t \cdot \left[\ln e\right]^2 = t$
denn ln e = 1.
Da $e - t$ eine einfache Nullstelle von f_t '' ist, liegt Zeichenwechsel vor, d.h. K_t hat dort Krümmungswechsel.
Erg.: $W(e-t \mid t)$



b)

b) Tiefpunkt $T(1-t\,|\,0)$. Wendpunkt $W(e-t\,|\,t)$.

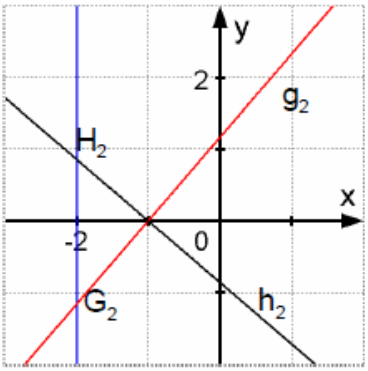
Steigung der Geraden g_t = (TW): $m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t-0}{e-t-(1-t)} = \frac{t}{e-1}$

Gleichung von g_t mit der Punkt-Steigungsform:

$$y - y_T = m_g(x - x_T)$$

$$y - 0 = \frac{t}{e-1}(x - 1 + t)$$

$$g_t:\ y = \frac{t}{e-1}x + t\frac{t-1}{e-1} \quad (1)$$



h_t sei das Lot auf g_t in T, also gilt

$$m_h = -\frac{1}{m_g} = -\frac{e-1}{t} = \frac{1-e}{t}$$

Gleichung von h_t: $y - 0 = \frac{1-e}{t}(x - 1 + t)$

$$h_t:\ y = \frac{1-e}{t}x + \frac{(1-e)(t-1)}{t} \quad (2)$$

Die Gerade g_t schneidet die Asymptote x = - t in G_t:

$$y_G = \frac{t}{e-1}(-t) + t\frac{t-1}{e-1} = \frac{-t^2 + t^2 - t}{e-1} = \frac{-t}{e-1} = \frac{t}{1-e}$$

Die Gerade h_t schneidet die Asymptote x = - t in H_t:

$$y_G = \frac{1-e}{t}(-t) + \frac{(1-e)(t-1)}{t} = \frac{-t + et + t - et - 1 + e}{t} = \frac{e-1}{t}$$

Ergebnis: $G_t\left(-t\,|\,\frac{t}{1-e}\right)$ und $H_t\left(-t\,|\,\frac{e-1}{t}\right)$

Ortskurve der Punkte H_t: $x_H = -t$ ergibt $t = -x_H$. Weiter ist $y_H = \frac{e-1}{t} = \frac{e-1}{-x_H} = \frac{1-e}{x_H}$

Also liegen alle Punkte H_t auf der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1-e}{x}$.

Da zusätzlich $t > 0$ vorgeschrieben ist, haben die Punkte H_t nur negative Koordinaten, d.h. sie bilden die Kurve C mit

$$C:\ y = \frac{1-e}{x}$$

Entfernung der Punkte G_t und H_t:
Da $y_H > 0$ und $y_G < 0$ liegt H_t oberhalb von G_t, also rechnet man so:

$$d(t) = y_H - y_G = \frac{e-1}{t} - \frac{t}{1-e} = (e-1)\cdot t^{-1} - \frac{1}{1-e}\cdot t \quad \text{für } t > 0.$$

Ableitungen: $d'(t) = -(e-1)t^{-2} - \frac{1}{1-e} = \frac{1-e}{t^2} - \frac{1}{1-e}$

$$d''(t) = 2(e-1)t^{-2} = 2\frac{e-1}{t^2}$$

Extremwertbedingung: $d'(t_E) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-e}{t^2} = \frac{1}{1-e} \Leftrightarrow (1-e)^2 = t^2$

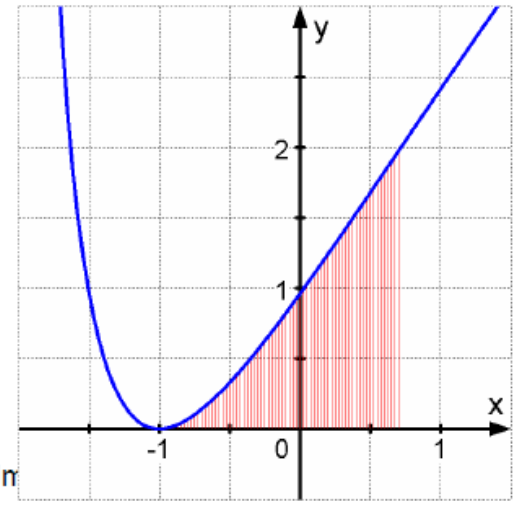
$t_{1,2} = \pm(1-e)$. Da aber $t > 0$ bleiben muß, folgt nur $t_E = e - 1$.

Kontrolle: $d''(e-1) = 2\frac{e-1}{(e-1)^2} > 0$ d.h. es ist ein minimaler Abstand.

$$d_{min} = d(e-1) = \frac{e-1}{e-1} - \frac{e-1}{1-e} = 1-(-1) = 2\,.$$

c)

d) **Flächenberechnung**



$$A(t) = \int_{1-t}^{e-t} t\cdot\left[\ln(x+t)\right]^2 dx$$

1. Schritt: Vereinfachung durch die Substitution: $r = x + t$ mit $dr = dx$.

$$A(t) = t\int_1^e \left[\ln r\right]^2 dr = t\cdot\int_1^e \ln r\cdot\ln r\, dr$$

Partielle Integration durch

$u' = \ln r \Rightarrow u = r\cdot\ln r - r$

$v = \ln r \Rightarrow v' = \frac{1}{r}$

Als partielle Integration bezeichnet man die Um

$\int_a^b u'\cdot v\, dr = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u\cdot v'\, dr$, die das Integral vereinfachen soll. Es folgt:

$$A(t) = t\int_1^e \ln r\cdot\ln r\, dr = t\left[\ln r\cdot(r\cdot\ln r - r)\right]_1^e - t\int_1^e \frac{1}{r}(r\cdot\ln r - r)\, dr$$

$$A(t) = t\left[\ln r\cdot(r\cdot\ln r - r)\right]_1^e - t\cdot\int_1^e (\ln r - 1)\, dr = t\left[\ln r\cdot(r\cdot\ln r - r)\right]_1^e - t\left[r\cdot\ln r - r - r\right]_1^e$$

$$A(t) = t\cdot\left[r\cdot(\ln r)^2 - 2r\cdot\ln r + 2r\right]_1^e = t\left[e\cdot(\ln e)^2 - 2e\cdot\ln e + 2e\right] - t\left[(\ln 1)^2 - 2\cdot\ln 1 + 2\right]$$

Mit $\ln e = 1$ und $\ln 1 = 0$ folgt:

$$A(t) = t[e - 2e + 2e - 2] = t(e-2)$$

Das Integral $A(t)=\int_1^e t(\ln r)^2\,dr$ kann auch auf diese Weise partiell integriert werden:

$u'=t \Rightarrow u=t\cdot r$ (Achtung: Die Integrationsvariable heißt r !)

$v=(\ln r)^2 \Rightarrow v'=2(\ln r)\cdot\frac{1}{r}=2\frac{\ln r}{r}$ Damit folgt:

$$A(t)=\left[tr\cdot(\ln r)^2\right]_1^e-\int_1^e 2tr\cdot\frac{\ln r}{r}\,dr=\left[tr\cdot(\ln r)^2\right]_1^e-2t\int_1^e \ln r\,dr=$$

$$A(t)=\left[tr(\ln r)^2\right]_1^e-2t\left[r\ln r-r\right]_1^e=te\cdot(\ln e)^2-tr\cdot(\ln 1)^2-2t\left(\underbrace{e\cdot\ln e-e}_{0}\right)+2t\left(\underbrace{1\cdot\ln 1-1}_{0}\right)$$

$$A(t)=te-2t=t(e-2)$$

Aufgabe 301:

Für jedes t>0 ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x)=\frac{1}{t}(x^3-9x);\quad x\in R$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) (9) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extremwerte und Wendepunkte. Geben Sie dabei die Punkte explizit an.

b) (7) Jede Kurve K_t umschließt mit der positiven x-Achse eine Fläche. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

c) (10) Die Gerade n schneidet das Schaubild K_6 im Punkt N(3|0) rechtwinklig. Bestimmen Sie die weiteren Schnittpunkte von n und K_6

d) (10) Die Gerade x=1 schneidet das Schaubild K_t im Punkt R_t und sie schneidet die Gerade y=tx im Punkt S_t.

Berechnen Sie die Strecke R_tS_t.

Wie lang ist diese Strecke mindestens?

Lösung:

a)

Symmetrie 1 Punkt

Nullstellen 2 Punkte

Ableitungen 2 Punkte

Extrema 2 Punkte

Wendepunkte 2 Punkte

Symmetrie

$$\begin{aligned} f_t(-x) &= \frac{1}{t} \cdot ((-x)^3 - 9(-x)) \\ &= \frac{1}{t} \cdot (-x^3 + 9x) \qquad \text{(Minuszeichen ausklammern)} \\ &= -\frac{1}{t} \cdot (x^3 - 9x) \\ &= -f_t(x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Nullstellen

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0 \\ \frac{1}{t} \cdot (x^3 - 9x) &= 0 \qquad | \cdot t \\ x^3 - 9x &= 0 \qquad \text{(x ausklammern)} \\ x \cdot (x^2 - 9) &= 0 \\ x_1 = 0 \quad &\text{oder} \quad x^2 = 9 \quad |\sqrt{(...)} \\ x_1 = 0 \quad &\text{oder} \quad x_{2;3} = \pm 3 : \end{aligned}$$

$N_1(0|0) \quad ; \quad N_2(-3|0) \quad ; \quad N_3(3|0)$

Ableitungen

Bemerkung: $\frac{1}{t}$ ist konstanter Faktor für die Funktion und bleibt erhalten!

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{1}{t}(x^3 - 9x) \\ f_t'(x) &= \frac{1}{t} \cdot (3x^2 - 9) = \frac{3}{t} \cdot (x^2 - 3) \\ f_t''(x) &= \frac{3}{t} \cdot 2x = \frac{6}{t} \cdot x \\ f_t'''(x) &= \frac{6}{t} \end{aligned}$$

Extrema

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ \frac{3}{t} \cdot (x^2 - 3) &= 0 \quad | \quad \cdot \frac{t}{3} \\ x^2 - 3 &= 0 \quad | \quad +3 \\ x^2 &= 3 \quad | \quad \sqrt{(...)} \\ x_{1;2} &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$)

Da für die gefundenen Stellen schon $f_t'(x_{1;2}) = 0$ gilt, muss nur noch $f_t''(x_{1;2}) \neq 0$ überprüft werden:

Wegen der Symmetrie reicht es $f_t''(\sqrt{3})$ zu berechnen:

$$f_t''(\sqrt{3}) = \frac{6}{t} \cdot \sqrt{3} > 0 \text{ (wegen } t > 0), \quad \text{also ein Tiefpunkt.}$$

Funktionswert(e)

$f_t(\sqrt{3}) = \frac{1}{t} \cdot \left((\sqrt{3})^3 - 9 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{1}{t} \cdot (3\sqrt{3} - 9\sqrt{3}) = \frac{-6\sqrt{3}}{t}$
(wegen $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$)

Tiefpunkt ist $T(\sqrt{3}|\frac{-6\sqrt{3}}{t})$ und wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung ist $H(-\sqrt{3}|\frac{6\sqrt{3}}{t})$ ein Hochpunkt.

Wendepunkt

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f_t''(x) &= 0 \\ \frac{6}{t} \cdot x &= 0 \quad | \cdot \frac{t}{6} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung ($f_t''(x) = 0$ und $f_t'''(x) \neq 0$)

Da für die gefundene Stelle schon $f_t''(x) = 0$ gilt, muss nur noch $f_t'''(x) \neq 0$ überprüft werden:

$$f_t'''(0) = \frac{6}{t} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

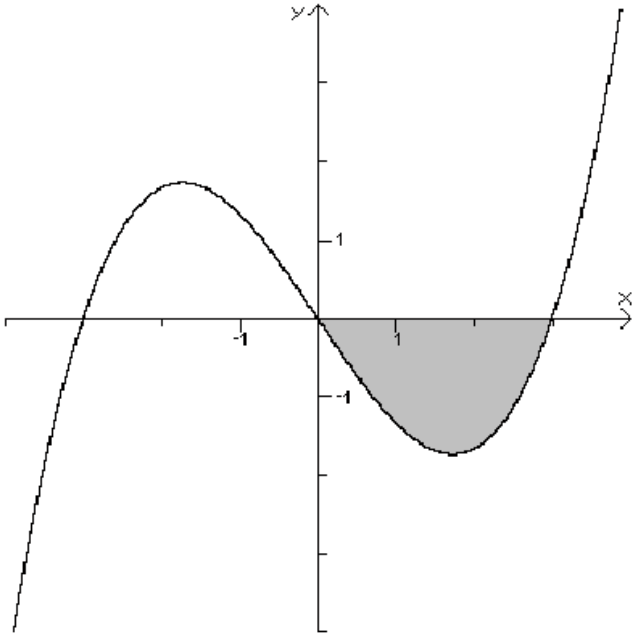
Funktionswert:

$f_t(0) = \frac{1}{t} \cdot (0 - 0)$

Man erhält den Wendepunkt $W(0|0)$ (gleichzeitig Nullstelle und Schnittpunkt mit der y-Achse)

Zeichnung

Für K_6 erhält man die Punkte
$N_1(0|0) = W \;;\; N_2(-3|0) \;;\; N_2(3|0) \;;\; T(\sqrt(3)|-\sqrt{3}) \;;\; H(-\sqrt{3}|\sqrt{3})$ mit $\sqrt{3} \approx 1,732$:



b) (7)

Flächeninhalt

Jetzt erkennt man die Fläche, die mit der positiven x-Achse eingeschlossen wird:
Diese Fläche reicht vom Ursprung ($x = 0$) bis zur positiven Nullstelle ($x = 3$, unabhängig von t) und liegt **unter** der x-Achse (deswegen integriert man $-f_t(x)$):

$$
\begin{aligned}
A_t &= \int_0^3 -f_t(x)\,dx \\
&= \int_0^3 -\frac{1}{t}(x^3 - 9x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{4}x^4 - 9\frac{1}{2}x^2\right)\right]_0^3 \\
&= \left[-\frac{1}{4t}x^4 + \frac{9}{2t}x^2\right]_0^3 \\
&= -\frac{81}{4t} + \frac{9\cdot 9}{2t} - \left(-\frac{1}{4t}\cdot 0 + \frac{9}{2t}\cdot 0\right) \\
&= -\frac{81}{4t} + \frac{81}{2t}\cdot\frac{2}{2} \\
&= \frac{-81 + 162}{4t} \\
A_t &= \frac{81}{4t}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt also $A_t = \frac{81}{4t}$.

c)

Geradengleichung von n

$f_6(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x)$
$f_6'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 9) = \frac{1}{2}(x^2 - 3)$

Im Punkt $N(3|0)$ gilt für die (Tangenten-)Steigung:

$$m_t = f_6'(3) = \frac{1}{2}(3^2 - 3) = \frac{1}{2}(9 - 3) = \frac{1}{2}6 = 3$$

Rechtwinklig dazu ist jede Gerade mit der Steigung

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$$

(wegen der „Orthogonalitätsbedingung", d.h. wegen der Bedingung „senkrecht": $m_n = -\frac{1}{m_t}$ oder $m_n \cdot m_t = -1$).

Die gesuchte Gerade $n: y = m \cdot x + b$ hat also die Steigung $m_n = -\frac{1}{3}$:

$$n: \quad x = -\frac{1}{3} \cdot x + b$$

Die Punktprobe mit $N(3|0)$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{3} \cdot 3 + c \\ 0 &= -1 + c \quad | +1 \\ 1 &= c \quad \text{oder} \\ c &= 1 \quad , \text{ also} \\ n: \quad y &= -\frac{1}{3} \cdot x + 1 \quad \text{oder} \\ n(x) &= -\frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

Weitere Schnittpunkte

Zu bestimmen sind nun die Schnittpunkte von f_6 und n. Das geschieht durch Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen:

$$\begin{aligned} f_6(x) &= n(x) \\ \frac{1}{6}(x^3 - 9x) &= -\frac{1}{3}x + 1 \quad | \cdot 6 \\ x^3 - 9x &= -2x + 6 \qquad \text{Faktorisieren liefert} \qquad (1) \\ x(x^2 - 9) &= -2(x - 3) \qquad (2) \\ x(x-3)(x+3) &= -2(x-3) \quad | : (x-3) \neq 0, \quad \text{da } x = 3 \text{ die bekannte Lösung } N(3|0) \text{ liefert} \\ x(x+3) &= -2 \\ x^2 + 3x &= -2 \quad | +2 \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Die bekannte Mitternachtsformel (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

liefert

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \\ x_1 &= \frac{-3 - 1}{2} = -2 \\ x_2 &= \frac{-3 + 1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Da nicht nur die x-Werte, sondern die Schnittpunkte von n und K_6 gesucht sind, muss man diese x-Werte noch jeweils in die Funktion(en) einsetzen (in n einsetzen ist einfacher!):

$$\begin{aligned} n(-2) &= -\frac{1}{3} \cdot (-2) + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad : \quad S_1\left(-2 \,|\, \frac{5}{3}\right) \\ n(-1) &= -\frac{1}{3} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \quad : \quad S_1\left(-1 \,|\, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Damit ist diese Teilaufgabe gelöst.

Bemerkung: statt der Faktorisierung der Gleichung (1) kann man auch alles auf eine Seite bringen und eine Polynomdivision mit $(x - 3)$ durchführen, da $x = 3$ eine schon bekannte Lösung der Gleichung ist (der Punkt $N(3|0)$ liegt sowohl auf f_g als auch auf n):

$$\begin{aligned} x^3 - 9x &= -2x + 6 \qquad | + 2x - 6 \qquad (4) \\ x^3 - 7x - 6 &= 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrl} (x^3 & & -7x & -6) : (x-3) = x^2 + 3x + 2 \\ -(x^3 & -3x^2) & & \\ \hline & 3x^2 & -7x & \\ & -(3x^2 & -9x) & \\ \hline & & 2x & -6 \\ & & -(2x & -6) \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

So erhält man ebenfalls die Gleichung (3), und man fährt mit der Mitternachtsformel fort wie oben.

d)

Koordinaten der Punkte R_t und S_t:

$R_t: \quad x=1: \quad f_t(1)=\frac{1}{t}(1-9)=-\frac{8}{t}: \quad R_t(1|-\frac{8}{t})$
$S_t: \quad x=1: \quad y=t\cdot 1=t: \quad S_t(1|t)$

Länge der Strecke R_tS_t:

Da der x-Wert der beiden Punkte gleich ist, bekommt man den Abstand der beiden Punkte durch die Differenz der y-Werte:

$$d(t) \quad = \quad t-\left(-\frac{8}{t}\right)=t+\frac{8}{t}=t+8\cdot t^{-1}$$

Mindestlänge der Strecke:

Wegen der Frage nach der Mindestlänge der Strecke braucht man die Ableitungen, denn es handelt sich um eine Extremwertaufgabe:

$$\begin{aligned} d(t) &= t+\frac{8}{t}=t+8\cdot t^{-1} \\ d'(t) &= 1-8\cdot t^{-2}=1-\frac{8}{t^2} \\ d''(t) &= 16\cdot t^{-3}=\frac{16}{t^3} \end{aligned}$$

$d'(t)=0$ liefert ein mögliches (relatives oder lokales) Extremum:

$$\begin{aligned} d'(t) &= 0 \\ 1-\frac{8}{t^2} &= 0 \quad |+\frac{8}{t^2} \\ 1 &= \frac{8}{t^2} \quad |\cdot t^2 \\ t^2 &= 8 \quad |\sqrt{\ldots} \end{aligned}$$

$t_1=+\sqrt{8}=+2\sqrt{2}$ oder $t_2=-2\sqrt{2}$: t_2 liegt nicht im Bereich, da $t>0$ gelten soll.

Einzige Lösung bleibt $t_1=2\sqrt{2}$, für die $d''(t_1)>0$ gilt (ausserdem gilt das für alle $t>0$). Daher ergibt sich füt $t_1=2\sqrt{2}$ ein relatives (lokales) Minimum mit dem Wert

$$d(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}+\frac{8}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+\frac{8\sqrt{2}}{2\cdot 2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

Dieses Minimum ist auch ein absolutes (globales) Minimum:
Entweder stellt man fest, dass $d(t)$ an den Rändern ($t\longrightarrow 0$ und $t\longrightarrow\infty$) gegen Unendlich strebt, oder man argumentiert damit, dass $d(t)$ (wegen der Stetigkeit von d') bei t_1 minimal sein muss, da d(t) für $t<t_1$ streng fällt und für $t>t_1$ streng wächst.

Aufgabe 302:

Wo besitzt die Funktion $y=2x^2\cdot\ln(\sqrt{x}), x>0$ Extremwerte bzw. Wendepunkte?

Lösung:

Die Funktion wird zunächst wie folgt *vereinfacht*:

$$y = 2x^2 \cdot \ln\sqrt{x} = 2x^2 \cdot \ln x^{1/2} = 2x^2 \cdot \frac{1}{2}\ln x = x^2 \cdot \ln x \qquad \text{(Rechenregel: } \ln a^n = n \cdot \ln a\text{)}$$

Ableitungen 1. bis 3. Ordnung (Produktregel)

$$y = \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = x^2, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u' = 2x, \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = u'\,v + v'\,u = 2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 = 2x \cdot \ln x + x$$

$$y' = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} + x = u\,v + x \quad \text{mit} \quad u = 2x, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u' = 2, \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = u'\,v + v'\,u + 1 = 2 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot 2x + 1 = 2 \cdot \ln x + 2 + 1 = 2 \cdot \ln x + 3$$

$$y''' = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Berechnung der Extremwerte: $y' = 0,\ y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot \ln x + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x}_{>0}(2 \cdot \ln x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln x + 1 = 0$$

Diese *logarithmische Gleichung* lösen wir wie folgt durch *Entlogarithmieren* (*Rechenregel:* $e^{\ln z} = z$ für $z > 0$):

$$2 \cdot \ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad e^{\ln x} = x = e^{-0{,}5} \quad \Rightarrow \quad x_1 = e^{-0{,}5}$$

Es gibt somit nur *einen* Kurvenpunkt mit *waagerechter* Tangente. Wegen

$$y''(x_1 = e^{-0{,}5}) = 2 \cdot \ln e^{-0{,}5} + 3 = 2 \cdot (-0{,}5) + 3 = -1 + 3 = 2 > 0$$

liegt ein *relatives Minimum* vor. Die zugehörigen Koordinaten lauten:

$$x_1 = e^{-0{,}5} = 0{,}6065; \quad y_1 = (e^{-0{,}5})^2 \cdot \ln e^{-0{,}5} = e^{-1} \cdot (-0{,}5) = -0{,}5 \cdot e^{-1} = -0{,}1839$$

Relative Extremwerte: $\text{Min} = (0{,}6065; -0{,}1839)$

Berechnung der Wendepunkte: $y'' = 0,\ y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{e^{\ln x}}_{x} = e^{-1{,}5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = e^{-1{,}5}$$

$$y'''(x_2 = e^{-1{,}5}) = \frac{2}{e^{-1{,}5}} = 2 \cdot e^{1{,}5} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Die Koordinaten des Wendepunktes sind:

$$x_2 = e^{-1{,}5} = 0{,}2231; \quad y_2 = (e^{-1{,}5})^2 \cdot \ln e^{-1{,}5} = e^{-3} \cdot (-1{,}5) \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = -1{,}5 \cdot e^{-3} = -0{,}0747$$

Wendepunkte: $W = (0{,}2231; -0{,}0747)$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 303:

Gegeben ist eine Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{x} + 3 \; mit \; x \neq 0$$

Das Schaubild von f hat im Punkt P(3|v) die Tangente t.

a) (5) Ermitteln Sie die Gleichung von t.

b) (5) Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimmen sie die Koordinaten von S.

Lösung:

Gleichung von t

Der Punkt P hat die Abszisse (x-Wert) $x = 3$. Setzt man diesen in die Funktion f ein, dann erhält man

$$y = f(3) = \frac{3}{3} + 3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad P(3|4)$$

Um die Gleichung der Tangente t aufzustellen, benötigt man noch deren Steigung m_t. Diese erhält man mittels

$$m_t = f'(3)$$

Mit der Ableitung

$$f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{3}{x^2} \;\; ; \;\; x \neq 0$$

erhält man

$$m_t = -\frac{3}{3^2} = -\frac{1}{3}$$

Der Ansatz

$$y \;\; = \;\; m_t \cdot x + c$$

führt durch Einsetzen von $m_t = -\frac{1}{3}$, $x = 3$ und $y = 4$ auf

$$\begin{array}{rcll} 4 & = & -\frac{1}{3} \cdot 3 + c & | + 1 \\ c & = & 5 & \end{array}$$

Für die Tangente ergibt sich daher die Gleichung

$$t: \;\; y \;\; = \;\; -\frac{1}{3} \cdot x + 5$$

Koordinaten von S (Nullstelle von t)

Hier ist die Nullstelle der Tangente t gesucht:

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & -\frac{1}{3}x + 5 & | + \frac{1}{3}x \\ \frac{1}{3}x & = & 5 & | \cdot 3 \\ x & = & 15 & \end{array}$$

Der gesuchte Punkt S hat daher die Koordinaten

$$S(15|0)$$

Aufgabe 304: (15)

Für jedes t>0 ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t}(x^3 - 9x); x \in \mathbb{R}$$

a) (6) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.

b) (9) Die Gerade n schneidet das Schaubild K_6 im Punkt N(3|0) rechtwinklig. Bestimmen Sie die weiteren Schnittpunkte von n und K_6.

Lösung:

a)

a) Symmetrie

$$\begin{aligned} f_t(-x) &= \frac{1}{t}\cdot((-x)^3-9(-x)) \\ &= \frac{1}{t}\cdot(-x^3+9x) \qquad \text{(Minuszeichen ausklammern)} \\ &= -\frac{1}{t}\cdot(x^3-9x) \\ &= -f_t(x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Nullstellen

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0 \\ \frac{1}{t}\cdot(x^3-9x) &= 0 \qquad |\cdot t \\ x^3-9x &= 0 \qquad \text{(x ausklammern)} \\ x\cdot(x^2-9) &= 0 \\ x_1=0 \quad &\text{oder} \quad x^2=9 \quad |\sqrt{(...)} \\ x_1=0 \quad &\text{oder} \quad x_{2;3}=\pm 3: \end{aligned}$$

$N_1(0|0)$; $N_2(-3|0)$; $N_3(3|0)$

Ableitungen

Bemerkung: $\frac{1}{t}$ ist konstanter Faktor für die Funktion und bleibt erhalten!

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{1}{t}(x^3-9x) \\ f_t'(x) &= \frac{1}{t}\cdot(3x^2-9)=\frac{3}{t}\cdot(x^2-3) \\ f_t''(x) &= \frac{3}{t}\cdot 2x=\frac{6}{t}\cdot x \\ f_t'''(x) &= \frac{6}{t} \end{aligned}$$

Extrema

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ \frac{3}{t}\cdot(x^2-3) &= 0 \quad | \quad \cdot\frac{t}{3} \\ x^2-3 &= 0 \quad | \quad +3 \\ x^2 &= 3 \quad | \quad \sqrt{(...)} \\ x_{1;2} &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung ($f_t'(x)=0$ und $f_t''(x)\neq 0$)

Da für die gefundenen Stellen schon $f_t'(x_{1;2})=0$ gilt, muss nur noch $f_t''(x_{1;2})\neq 0$ überprüft werden:

Wegen der Symmetrie reicht es $f_t''(\sqrt{3})$ zu berechnen:

$$f_t''(\sqrt{3}) = \frac{6}{t}\cdot\sqrt{3} > 0 \text{ (wegen } t>0), \quad \text{also ein Tiefpunkt.}$$

Funktionswert(e)

$f_t(\sqrt{3}) = \frac{1}{t}\cdot\left((\sqrt{3})^3 - 9\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{1}{t}\cdot(3\sqrt{3}-9\sqrt{3}) = \frac{-6\sqrt{3}}{t}$
(wegen $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$)

Tiefpunkt ist $T(\sqrt{3}|\frac{-6\sqrt{3}}{t})$ und wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung ist $H(-\sqrt{3}|\frac{6\sqrt{3}}{t})$ ein Hochpunkt.

Wendepunkt

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f_t''(x) &= 0 \\ \frac{6}{t}\cdot x &= 0 \quad | \cdot\frac{t}{6} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung ($f_t''(x)=0$ und $f_t'''(x)\neq 0$)

Da für die gefundene Stelle schon $f_t''(x)=0$ gilt, muss nur noch $f_t'''(x)\neq 0$ überprüft werden:

$$f_t'''(0) = \frac{6}{t}\neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

Funktionswert:

$f_t(0) = \frac{1}{t}\cdot(0-0)$

Man erhält den Wendepunkt $W(0|0)$ (gleichzeitig Nullstelle und Schnittpunkt mit der y-Achse)

b)

Geradengleichung von n

$f_6(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x)$
$f_6'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 9) = \frac{1}{2}(x^2 - 3)$

Im Punkt $N(3|0)$ gilt für die (Tangenten-)Steigung:

$$m_t = f_6'(3) = \frac{1}{2}(3^2 - 3) = \frac{1}{2}(9 - 3) = \frac{1}{2}6 = 3$$

Rechtwinklig dazu ist jede Gerade mit der Steigung

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$$

(wegen der „Orthogonalitätsbedingung", d.h. wegen der Bedingung „senkrecht":
$m_n = -\frac{1}{m_t}$ oder $m_n \cdot m_t = -1$).

Die gesuchte Gerade $n: y = m \cdot x + b$ hat also die Steigung $m_n = -\frac{1}{3}$:

$$n: \quad x = -\frac{1}{3} \cdot x + b$$

Die Punktprobe mit $N(3|0)$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{3} \cdot 3 + c \\ 0 &= -1 + c \quad | +1 \\ 1 &= c \quad \text{oder} \\ c &= 1 \quad , \text{ also} \\ n: \quad y &= -\frac{1}{3} \cdot x + 1 \quad \text{oder} \\ n(x) &= -\frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

Weitere Schnittpunkte

Zu bestimmen sind nun die Schnittpunkte von f_6 und n. Das geschieht durch Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen:

$$\begin{aligned} f_6(x) &= n(x) \\ \frac{1}{6}(x^3 - 9x) &= -\frac{1}{3}x + 1 \quad | \cdot 6 \\ x^3 - 9x &= -2x + 6 \qquad \text{Faktorisieren liefert} \qquad (1) \\ x(x^2 - 9) &= -2(x - 3) \qquad (2) \\ x(x-3)(x+3) &= -2(x-3) \quad | : (x-3) \neq 0, \quad \text{da } x = 3 \text{ die bekannte Lösung } N(3|0) \text{ liefert} \\ x(x+3) &= -2 \\ x^2 + 3x &= -2 \quad | +2 \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Die bekannte Mitternachtsformel (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

liefert

$$\begin{aligned} x_{1;2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \\ x_1 &= \frac{-3 - 1}{2} = -2 \\ x_2 &= \frac{-3 + 1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Da nicht nur die x-Werte, sondern die Schnittpunkte von n und K_6 gesucht sind, muss man diese x-Werte noch jeweils in die Funktion(en) einsetzen (in n einsetzen ist einfacher!):

$$\begin{aligned} n(-2) &= -\frac{1}{3} \cdot (-2) + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad : \quad S_1\left(-2 \middle| \frac{5}{3}\right) \\ n(-1) &= -\frac{1}{3} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \quad : \quad S_1\left(-1 \middle| \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Damit ist diese Teilaufgabe gelöst.

Bemerkung: statt der Faktorisierung der Gleichung (1) kann man auch alles auf eine Seite bringen und eine Polynomdivision mit $(x - 3)$ durchführen, da $x = 3$ eine schon bekannte Lösung der Gleichung ist (der Punkt $N(3|0)$ liegt sowohl auf f_g als auch auf n):

$$\begin{aligned} x^3 - 9x &= -2x + 6 \qquad | + 2x - 6 \qquad (4) \\ x^3 - 7x - 6 &= 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrl} (x^3 & & -7x & -6) : (x - 3) = x^2 + 3x + 2 \\ -(x^3 & -3x^2) & & \\ \hline & 3x^2 & -7x & \\ & -(3x^2 & -9x) & \\ \hline & & 2x & -6 \\ & & -(2x & -6) \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

So erhält man ebenfalls die Gleichung (3), und man fährt mit der Mitternachtsformel fort wie oben.

Aufgabe 305:

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2; x \in \mathbb{R}$

a) (8) Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Extrempunkte, Wendepunkte und Asymptoten.

b) (4) Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte.

c) (6) Das Schaubild $f_t(x)$ schließt mit den Geraden y=4, x=u (u<0) und der y-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A(u) ein. Berechnen Sie A(u). Bestimmen Sie hierbei auch

$\lim_{u \to -\infty} A(u)$.

d) (5) Durch $k(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion k gegeben. Ihr Schaubild sei K. Bestimmen Sie t>0 so, dass sich K und f_t orthogonal schneiden.

Lösung:

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

a) Es soll G_2 untersucht werden, also bestimmt man für $t = 2$ die Funktionsgleichung

$$f_2(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$$

und, da nach Extrem- und Wendepunkten gefragt ist, auch die

Ableitungen von f_2

Für die Funktion $g(x) = e^{kx}$ erhält man die Ableitung

$$g'(x) = k \cdot e^{kx}$$

Damit bekommt man die Ableitungen

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 2 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x \\ f_2''(x) &= 4 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x \\ f_2'''(x) &= 8 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x \end{aligned}$$

Extrempunkte

Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 0 \\ 2 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x &= 0 \quad \text{(Ausklammern von } 2 \cdot e^x\text{)} \\ 2 \cdot e^x \cdot (e^x - 2) &= 0 \quad \text{; da } 2 \cdot e^x \neq 0 \text{ gilt, folgt} \\ e^x - 2 &= 0 \quad | + 2 \\ e^x &= 2 \quad | \ln(\cdot) \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung ($f_2'(x) = 0$ und $f_2''(x) \neq 0$)

Da für die gefundene Stelle schon $f_2'(x) = 0$ gilt, muss nur noch $f_2''(x) \neq 0$ überprüft werden:

$$\begin{aligned} f_2''(\ln 2) &= 4 \cdot e^{2 \cdot \ln 2} - 4 \cdot e^{\ln 2} \quad \text{(beachte: für } z > 0 \text{ gilt } e^{\ln z} = z\text{)} \\ &= 4 \cdot (e^{\ln 2})^2 - 4 \cdot 2 \quad \text{(wegen der Potenzregel } e^{x \cdot y} = (e^x)^y = (e^y)^x\text{)} \\ &= 4 \cdot 2^2 - 8 \\ &= 8 > 0 \implies \text{Tiefpunkt} \end{aligned}$$

Funktionswert

$$\begin{aligned} f_2(\ln 2) &= e^{2\cdot\ln 2} - 4\cdot e^{\ln 2} + 4 \\ &= (e^{\ln 2})^2 - 4\cdot 2 + 4 \\ &= 2^2 - 8 + 4 \\ &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt } T(\ln 2|0) = N\text{: gleichzeitig Nullstelle} \end{aligned}$$

Wendepunkte

Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} f_2''(x) &= 0 \\ 4\cdot e^{2x} - 4\cdot e^x &= 0 \quad \text{(Ausklammern von } 4\cdot e^x\text{)} \\ 4\cdot e^x\cdot(e^x - 1) &= 0 \quad \text{; da } 4\cdot e^x \neq 0 \text{ gilt, folgt} \\ e^x - 1 &= 0 \quad |+1 \\ e^x &= 1 \quad |\ln(\cdot) \\ x &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung ($f_2''(x) = 0$ und $f_2'''(x) \neq 0$)

Da für die gefundene Stelle schon $f_2''(x) = 0$ gilt, muss nur noch $f_2'''(x) \neq 0$ überprüft werden:

$$\begin{aligned} f_2'''(0) &= 8\cdot e^0 - 4\cdot e^0 \\ &= 8 - 4 = 4 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Wendepunkt} \end{aligned}$$

Funktionswert

$$\begin{aligned} f_2(0) &= e^0 - 4e^0 + 4 \\ &= 1 - 4 + 4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Wendepunkt } W(0|1) = S_y\text{: gleichzeitig Schnittpunkt mit der } y\text{-Achse} \end{aligned}$$

Asymptoten

Senkrechte Asymptoten

Es gibt keine senkrechten Asymptoten, da $\mathbf{D}_{f_2} = \mathbf{R}$

Waagrechte Asymptoten

Die waagrechten Asymptoten ermittelt man durch das Verhalten von f_2 für $x \longrightarrow \pm\infty$.

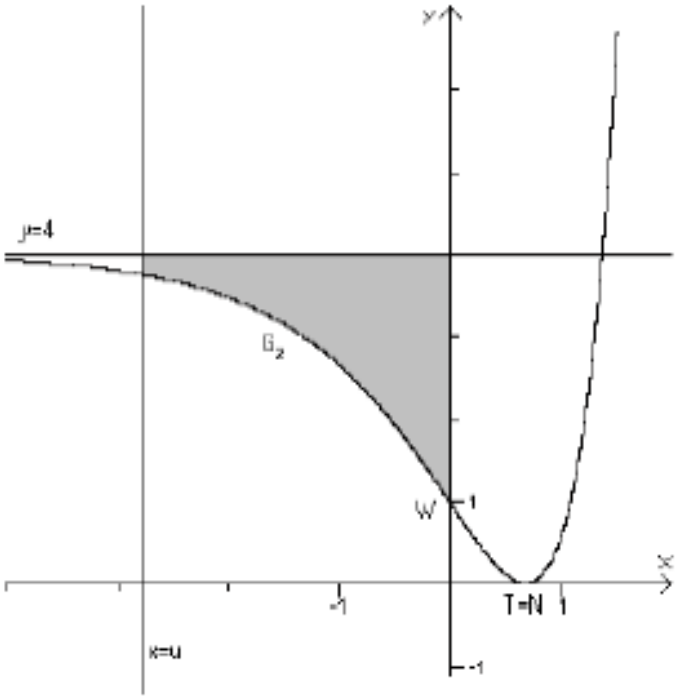
Vorbemerkung:
für $x \longrightarrow -\infty$ gilt: $e^x \longrightarrow 0$ und
für $x \longrightarrow +\infty$ gilt: $e^x \longrightarrow +\infty$.

Daher gilt

$x \longrightarrow -\infty$: $f_2(x) = e^{2x} - 4e^x + 4 \longrightarrow 0 - 0 + 4 = 4$: $y = 4$ ist waagrechte Asymptote
$x \longrightarrow +\infty$: $f_2(x) = e^{2x} - 4e^x + 4 = e^x\cdot(e^x - 4) + 4 \longrightarrow +\infty$: keine Asymptote
(da sowohl $e^x \longrightarrow +\infty$ als auch $(e^x - 4) \longrightarrow +\infty$)

Die einzige Asymptote ist also die waagrechte Asymptote $y = 4$.

Zeichnung



b) Berechnung von $A(u)$

Die gesuchte Fläche $A(u)$ reicht von $x = u < 0$ bis $x = 0$ (y-Achse). Sie wird nach oben durch $y = 4$ und nach unten durch f_2 begrenzt.
Deswegen wird $(4 - f_2(x))$ integriert („Oberkurve minus Unterkurve"):

$$
\begin{aligned}
A(u) &= \int_u^0 (4 - f_2(x))\,dx \\
&= \int_u^0 [4 - (e^{2x} - 4e^x + 4)]\,dx \\
&= \int_u^0 (4 - e^{2x} + 4e^x - 4)\,dx \\
&= \int_u^0 (-e^{2x} + 4e^x)\,dx \quad \text{(Bemerkung: eine Stammfunktion von } e^{kx} \text{ ist } \tfrac{1}{k}e^{kx}) \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x\right]_u^0 \quad \text{(Probe durch Ableiten ist ratsam)} \\
&= -\frac{1}{2}e^0 + 4e^0 - \left(-\frac{1}{2}e^{2u} + 4e^u\right) \\
&= -\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2}e^{2u} - 4e^u \\
\Longrightarrow \quad A(u) &= \frac{1}{2}e^{2u} - 4e^u + 3{,}5
\end{aligned}
$$

Grenzwert von $A(u)$

$$\lim_{u\to-\infty} A(u) = \lim_{u\to-\infty} e^{2u} - 4e^{u} + 3{,}5 = 3{,}5$$

(da für $u \to -\infty$ sowohl $e^{2u} \to 0$ als auch $e^{u} \to 0$ gilt)

c) Orthogonaler Schnitt

Die Schaubilder von $k(x) = e^{2x}$ und $f_t(x) = e^{2x} - 2te^{x} + t^2\,(t > 0)$ schneiden sich genau dann orthogonal (senkrecht) bei $x = x_0$, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind (beachte: $k'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ und $f_t'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 2te^{x}$):

Schnittbedingung:

$$k(x_0) = f_t(x_0) \iff e^{2x_0} = e^{2x_0} - 2te^{x_0} + t^2 \quad (1)$$

Orthogonalitätsbedingung:

$$k'(x_0) \cdot f_t'(x_0) = -1 \iff 2 \cdot e^{2x_0} \cdot (2 \cdot e^{2x_0} - 2te^{x_0}) = -1 \quad (2)$$

Gleichung (1) kann man vereinfachen:

$$\begin{aligned} e^{2x_0} &= e^{2x_0} - 2te^{x_0} + t^2 \quad | -e^{2x_0} + 2te^{x_0} \\ 2te^{x_0} &= t^2 \quad | : (2t) \neq 0 \\ e^{x_0} &= \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Gleichung (3) muss nicht nach x_0 aufgelöst werden, da man $e^{x_0} = \frac{t}{2}$ direkt in Gleichung (2) einsetzen kann (beachte: $e^{2x_0} = (e^{x_0})^2$):

$$\begin{aligned} 2 \cdot (e^{x_0})^2 \cdot (2 \cdot (e^{x_0})^2 - 2te^{x_0}) &= -1 \quad ; \text{ jetzt } e^{x_0} = \tfrac{t}{2} \text{ einsetzen:} \\ 2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 - 2t \cdot \frac{t}{2}\right) &= -1 \\ 2 \cdot \frac{t^2}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{t^2}{4} - t^2\right) &= -1 \\ \frac{t^2}{2} \cdot \left(\frac{t^2}{2} - t^2\right) &= -1 \\ \frac{t^2}{2} \cdot \left(-\frac{t^2}{2}\right) &= -1 \\ -\frac{t^4}{4} &= -1 \quad | \cdot (-4) \\ t^4 &= 4 \quad | \sqrt[4]{\cdot} \\ t_{1;2} &= \pm\sqrt[4]{2^2} = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Wegen $t > 0$ entfällt die Lösung $t = -\sqrt{2}$, so dass $t = \sqrt{2}$ die gesuchte Lösung ist.

Ergänzung: Der orthogonale Schnitt geschieht bei
$x_0 = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln 2 \approx -0{,}35$
mit dem Funktionswert
$k(-\frac{1}{2}\ln 2) = e^{-\ln 2} = (e^{\ln 2})^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

d) Wendestelle von f_t

Zur Berechnung der Wendestelle von f_t benötigt man die

Ableitungen

$$\begin{aligned} f_t(x) &= e^{2x} - 2te^x + t^2 \\ f_t'(x) &= 2 \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x \\ f_t''(x) &= 4 \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x \\ f_t'''(x) &= 8 \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} f_t''(x) &= 0 \\ 4 \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x &= 0 \quad \text{(Ausklammern von } 2 \cdot e^x\text{)} \\ 2 \cdot e^x \cdot (2 \cdot e^x - t) &= 0 \quad \text{; da } 2 \cdot e^x \neq 0 \text{ gilt, folgt} \\ 2 \cdot e^x - t &= 0 \quad | + t \\ 2 \cdot e^x &= t \quad | : 2 \\ e^x &= \frac{t}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $\frac{t}{2} > 0$ bzw $t > 0$ ist, da der Wertebereich der streng monoton wachsenden e-Funktion $\mathbb{W} =]0; +\infty[$ ist (nur für jedes $t > 0$ existiert also genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = \frac{t}{2}$). Im Fall $t > 0$ kann also eine Wendestelle existieren, und zwar bei $x = \ln \frac{t}{2}$ (Logaritmisieren der Gleichung (4)).

Hinreichende Bedingung (nur für $t > 0$)

Für $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f_t'''(\ln \frac{t}{2}) &= 8 \cdot e^{2 \cdot \ln \frac{t}{2}} - 2t \cdot e^{\ln \frac{t}{2}} \qquad \text{(beachte wieder: } e^{x \cdot y} = (e^x)^y = (e^y)^x\text{)} \\ &= 8 \cdot (e^{\ln \frac{t}{2}})^2 - 2t \cdot \frac{t}{2} \qquad \text{(beachte: } e^{\ln z} = z\text{)} \\ &= 8 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 - t^2 \\ &= 8 \cdot \frac{t^2}{4} - t^2 \\ &= 2t^2 - t^2 \\ &= t^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{es existiert eine Wendestelle} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass nur für $t > 0$ genau eine Wendestelle existiert. Zu zeigen bleibt also noch, dass f_t für $t \leq 0$ streng monoton wächst.

Monotonie von f_t für $t \leq 0$

Die Monotonie einer Funktion wird mit Hilfe der ersten Ableitung bestimmt. Es gilt:
$f' < 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend
$f' > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend

Wegen $e^x > 0$, $e^{2x} > 0$ und $t \leq 0$ gilt $-2t \cdot e^x \geq 0$ und damit

$$f_t'(x) = \underbrace{2 \cdot e^{2x}}_{>0} \underbrace{- 2t \cdot e^x}_{\geq 0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f_t \text{ ist für } t \leq 0 \text{ streng monoton wachsend.}$$

Jede Funktion f_t hat also genau eine Wendestelle oder ist streng monoton wachsend.

Ortskurve der Wendepunkte

Die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte liegen, wird auch als Ortskurve bezeichnet. Dazu bestimmt man zunächst die Koordinaten des Wendepunktes von f_t. Die Abszisse (x-Koordinate) des Wendepunktes wurde oben schon bestimmt: $x = \ln\frac{t}{2}$.
Die Ordinate (y-Koordinate) erhält man durch einsetzen von $x = \ln\frac{t}{2}$ in die Funktionsgleichung von f_t:

$$\begin{aligned} f_t(\ln\frac{t}{2}) &= e^{2\cdot\ln\frac{t}{2}} - 2t\cdot e^{\ln\frac{t}{2}} + t^2 \qquad \text{(beachte wiederum } e^{x\cdot y} = (e^x)^y = (e^y)^x\text{)} \\ &= (e^{\ln\frac{t}{2}})^2 - 2t\cdot\frac{t}{2} + t^2 \qquad \text{(...und } e^{\ln z} = z\text{)} \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^2 - t^2 + t^2 \\ y &= \frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

Jetzt löst man $x = \ln\frac{t}{2}$ nach t auf und setzt das in y ein:

$$\begin{aligned} x &= \ln\frac{t}{2} \quad |\,e^{(\cdot)} \\ e^x &= \frac{t}{2} \quad |\cdot 2 \\ t &= 2\cdot e^x \end{aligned}$$

$t = 2\cdot e^x$ in $y = \frac{t^2}{4}$ liefert die Ortskurve:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(2\cdot e^x)^2}{4} \\ &= \frac{4\cdot e^{2x}}{4} \\ y &= e^{2x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Wendepunkte von G_t liegen also auf der Kurve $y = e^{2x}$.

Funktionsscharen

Aufgabe 306:

Gegeben ist eine Funktionsschar durch ihre Gleichung

$f_t(x) = x^3 - 3t^2x \ \ mit\ t > 0$

a) Für welches t geht die Kurve durch (2/5)?

b) Für welches t ist die 2. Winkelhalbierende die Tangente im Ursprung?

c) Für welches t liegen die Extrempunkte auf der 2. Winkelhalbierenden?

d) Für welches t ist die Tangente im Schnittpunkt mit der positiven x-Achse parallel zur 1. Winkelhalbierenden?

e) Auf welcher Kurve liegen alle Extrempunkte?

Lösung:

a)

$$f_t(2)=5 \ \Rightarrow\ 2^3-3\cdot t^2\cdot 2=5 \ \Rightarrow\ 8-6\cdot t^2=5 \ \Rightarrow\ 3=6\cdot t^2 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}=t^2 \ \Rightarrow\ t=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)

Gleichung der 2. Winkelhalbierenden: $w_2(x)=-x$ mit $w_2'(x)=-1$

Die Tangente im Ursprung hat die Steigung $f'(0)$ und den y-Achsenabschnitt 0:
$f'(0)=0-3\cdot t^2=-3\cdot t^2$
Also gilt für die Gleichung der Tangente bei x=0: $T_0(x)=-3\cdot t^2\cdot x$ mit $T_0'(x)=-3\cdot t^2$.
Nun muss gelten: $w_2'(0)=T_0'(0) \ \Rightarrow\ -1=-3\cdot t^2 \ \Rightarrow\ t^2=\frac{1}{3} \ \Rightarrow\ t=\sqrt{\frac{1}{3}}$.
Die Funktion mit der Gleichung $f_{\sqrt{\frac{1}{3}}}=x^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot x=x^3-x$ besitzt also die 2. Winkelhalbierende als Tangente im Punkt (0/0).

c)

Für die Extrempunkte gilt: $f_t'(x)=0 \ \Rightarrow\ 3\cdot x^2-3\cdot t^2=0 \ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm t$
Dazu gehören die Funktionswerte $f_t(x)=\pm t^3-3\cdot t^2\cdot(\pm t)=\pm t^3\mp 3\cdot t^3=\mp 2\cdot t^3$
Für die 2. Winkelhalbierende $w_2(x)=-x$ gilt, dass der Funktionswert gleich ist dem negativen x-Wert. Also muss gelten: $\mp 2\cdot t^3=-(\pm t)=\mp t \ \Rightarrow\ 2\cdot t^3=t \ \Rightarrow\ 2\cdot t^3-t=0 \ \Rightarrow\ t\cdot(2\cdot t^2-1)=0$
Es ergeben sich die Lösungen $t_1=0; t_2=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (keine 3. Lösung wegen $t>0$)
Da für $t=0$ der Funktionsgraph keine Extrempunkte besitzt - nur einen Sattelpunkt - gilt nur die Lösung t_2.

d)

Die erste Winkelhalbierende $w_1(x)=x$ hat überall die Steigung 1.
Die Nullstelle im positiven Bereich liegt bei $x_N=\sqrt{3}\cdot t$ (siehe oben bei 1).
Die Steigung an dieser Stelle beträgt $f_t'(\sqrt{3}\cdot t)=3\cdot 3\cdot t^2-3\cdot t^2=9\cdot t^2-3\cdot t^2=6\cdot t^2$
Diese Steigung soll den Wert der Steigung der 1. Winkelhalbierenden (also 1) haben.
Also gilt: $6\cdot t^2=1 \Rightarrow t^2=\frac{1}{6} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{1}{6}}$ Nur eine Lösung wegen $t>0$.
Die Gleichung der entsprechenden Funktion ist also $f_{\sqrt{\frac{1}{6}}}(x)=x^3-3\cdot\frac{1}{6}\cdot x=x^3-\frac{1}{2}\cdot x$.

e)

Unter 4 wurde gezeigt, dass für die Extrempunkte gilt: $x_E=\pm t$. Daraus folgt: $t=\pm x_E$.
Für die Funktionswerte der Extrempunkte gilt:
$f(x_E)=x_E^3-3\cdot t^2\cdot x_E=x_E^3-3\cdot x_E^2\cdot x_E=x_E^3-3\cdot x_E^3=-2\cdot x_E^3$.
Also liegen alle Extrempunkte auf der Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x_E)=-2\cdot x_E^3$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 307:

Die Kurve K_t begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechne deren Inhalt A. In welchem Verhältnis teilt die Ortskurve C der Tiefpunkte diese Fläche?

$f_t(x) = \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \; für \; t \in R^+$

Information: Tiefpunkte $T_{1,2}\left(\pm t\sqrt{3} \mid -\frac{9}{2}t^2\right)$.

Lösung:

(1) $f_t(x) = \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

a) **Nullstellen**: $f(x_N) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \; | \cdot 4t^2 \Leftrightarrow x^4 - 6t^2x^2 = 0$

$x^2\left(x^2 - 6t^2\right) = 0 \qquad N_1(0\,|\,0), \; N_{2,3} = \left(\pm t\sqrt{6}\,|\,0\right)$

Ortskurve der Tiefpunkte:

Es gilt $x_T = \pm t\sqrt{3}$ also ist $t = \pm\frac{x_T}{\sqrt{3}}$

In $y_T = -\frac{9}{4}t^2$ eingesetzt: $y_T = -\frac{9}{4}\left(\pm\frac{x_T}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{9}{4}\cdot\frac{x_T^{\,2}}{3} = -\frac{3}{4}x_T^{\,2}$

Ergebnis: Die Tiefpunkte liegen auf der Kurve C: $y = -\frac{3}{4}x^2$

Einschränkung: Für t werden nur die Werte $t \in \mathbf{R}^+$ eingesetzt. Daher Haben die Tiefpunkte nur positive oder negative Koordinaten. 0 kommt nicht vor. Für die Ortskurve gilt also: C: $y = -\frac{3}{4}x^2$ für $x \neq 0$.

Fläche zwischen K_t und der x-Achse:

$$A = 2\int_{t\sqrt{6}}^{0}\left(\frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)dx = 2\left[\frac{1}{20t^2}x^5 - \frac{1}{2}x^3\right]_{t\sqrt{6}}^{0} = -2\left(\frac{36\sqrt{6}\cdot t^5}{20t^2} - \frac{6\sqrt{6}t^3}{2}\right)$$

$$= -2t^3\sqrt{6}\left(\frac{9}{5} - 3\right) = 2t^3\sqrt{6}\cdot\frac{15-9}{5} = \frac{12}{5}\sqrt{6}t^3$$

Teilflächen:

$$A_1 = \int_0^{t\sqrt{3}}\left[\left(-\frac{3}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4t^2}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)\right]dx = \int_0^{t\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{4t^2}x^4 + \frac{3}{4}x^2\right]dx$$

$$= \left[-\frac{x^5}{20t^2} + \frac{x^3}{4}\right]_0^{t\sqrt{3}} = -\frac{t^5 9\sqrt{3}}{20t^2} + \frac{t^3 3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}t^2 - \frac{9}{20}\sqrt{3}t^3 = \frac{3}{10}\sqrt{3}t^3$$

$$A_2 = A - A_1 = \frac{6}{5}\sqrt{6}t^3 - \frac{3}{10}\sqrt{3}t^3 = \frac{3}{10}\sqrt{3}t^3\left(4\sqrt{2} - 1\right)$$

Teilverhältnis dieser Flächen:

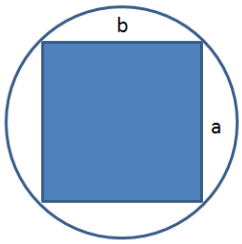
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3\sqrt{3}t^3}{10}\cdot\frac{10}{3\sqrt{3}t^3\left(4\sqrt{2}-1\right)} = \frac{1}{4\sqrt{2}-1}$$

Dieses Teilverhältnis ist unabhängig von t !

Extremwertaufgaben

Aufgabe 308:

Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite (b) und zum Quadrat der Balkendicke (a). In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen?



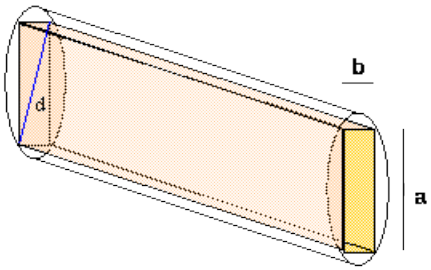
Lösung:

Da ist ein Baumstamm in Form eines Zylinders mit Durchmesser d.

Wenn man daraus einen rechteckigen Balken sägt, dann hat dieser die Dicke a und die Breite b.

Zeichnet man sich den Querschnitt des Balkens in den kreisförmigen Querschnitt des Zylinders, dann sieht man, dass $a^2 + b^2 = d^2$ zu sein hat.

Das ist die Nebenbedingung.



Anmerkung: Es wäre natürlich auch möglich kleinere rechteckige Querschnitte auszusägen, also nur $a^2+b^2 \leq d^2$ zu verlangen. Da aber die Tragfähigkeit zu maximieren ist, und diese mit größerem a und größerem b wächst, kommt das nicht in Betracht. Man tut am besten, wenn man den Zylinderquerschnitt voll ausnutzt.

1. Nun soll die Zielfunktion bestimmt werden. Die Aufgabe sagt, dass die Tragfähigkeit proportional zur Breite b und proportional zum Quadrat der Dicke a ist. Ohne den physikalischen Sinn dieser Aussage zu verstehen oder diskutieren zu wollen, stellt man daraus die Zielfunktion für die Optimierung auf, nämlich a^2*b = maximal.
2. Ich fasse zusammen:

Zielfunktion: a^2*b = maximal

Nebenbedingung: $a^2 + b^2 = d^2$

Mit der Nebenbedingung ersetzt man eine der Unbekannten in der Zielfunktion.

Ich nehme die Ersetzung von a^2 vor, weil ich damit Wurzeln vermeiden kann. Das ergibt die Funktion t der Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Breite b:

$t(b) = (d^2 - b^2) * b$

Die Ableitungen von t(b) lauten:

$t'(b) = -3b^2 + d^2$

$t''(b) = -6b$

Man setzt die Ableitung gleich 0:

$t'(b) = -3b^2 + d^2 = 0 <=> b^2 = d^2 / 3$

Die zweite Ableitung ist für alle in Frage kommenden positiven Breiten negativ. Das zeigt, dass an der Nullstelle der ersten Ableitung tatsächlich ein (lokales) Maximum vorliegt.

3. Aus der Nebenbedingung errechnen wir den dazu gehörenden Wert für a (bzw. a^2).

$a^2 = d^2 - d^2 / 3 = 2/3\ d^2$

4. In der Aufgabe ist für d kein konkreter Wert gegeben. Es wird nach dem Verhältnis von a und b gefragt, also nach a/b.
   Aus $a^2/b^2 = (2/3\ d^2) / (1/3\ d^2) = 2$ folgt, dass a/b = Ö2.
5. Was ist dazu noch zu sagen:
6. Das optimale Verhältnis ist unabhängig vom Durchmesser.
7. Die Formel a/b= Ö2 sagt, dass der Balken 1.41-mal so dick wie breit sein soll. Die Dicke ist damit größer als die Breite. Man muss sich den Balken mit der schmalen Seite als Breite vorstellen.

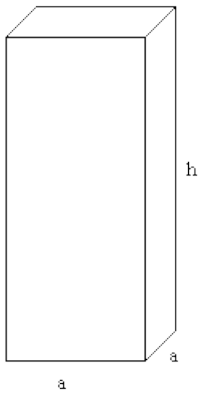
Aufgabe 309:

Aus einem Stück Draht, das 36 cm lang ist, soll eine "Säule" mit quadratischem Grundriss geformt werden. Welches ist das maximal mögliche Volumen der Säule?

Lösung:

In dieser Aufgabe ist eine Länge gegeben (des Drahtes).

Wenn die Säule aus Draht geformt werden soll, ist wohl gemeint, dass mit dem Draht die Kanten der Säule gebildet werden sollen. Der Draht muss ausreichen, um daraus die Gesamtlänge aller Kanten zu bilden.



Die Nebenbedingung lautet

8 a + 4 h = 36

Die "quadratische" Säule hat eine quadratische Grundfläche a*a und eine Höhe h. Das Volumen soll maximiert werden. Wie lautet die Zielfunktion?

Das Volumen einer Säule ist Grundfläche mal Höhe. Die Grundfläche ist a^2, die Hühe h. Als Zielfunktion haben wir:

$V = a^2 * h$

Hinweis (weil die Frage schon mal kam): Hier eine Nebenbedingung mit der Oberfläche zu setzen, entspricht nicht der Aufgabe.

- Indem die Nebenbedingung 8a+4h=36 nach (z.B.) h aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt wird, erhält man die Funktion des Volumens in Abhängigkeit von a:

  $F(a) = a^2 * (9-2a)$

  Die Lösung lautet schließlich: a=h=3.

  Das Volumen der Säule ist maximal, wenn sie ein Würfel (Kubus) ist.

- Eine ähnliche Aufgabe gibt es auch mit der Quaderoberfläche als Nebenbedingung.

  Aus 36cm² Pappe soll eine quadratische Säule maximalen Volumens gebildet werden.

  Hier ist die Nebenbedingung die Oberfläche

  $F = 36 = 4ah+2a^2=36$ oder $ah = (36-2a^2)/4$.

  Das eingesetzt in V ergibt:

  $V = a^2h = a * ah = a*(36-2a^2)/4 = 9a-a^3/2$

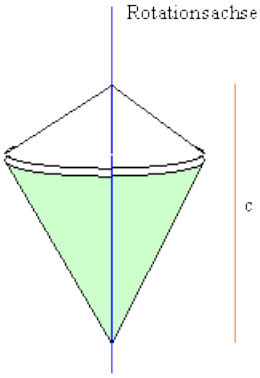
  Ableitung:

  $V'(a) = 9-3/2*a^2 = 0 \Rightarrow a=w(6)$ und $h = w(6)$

  Die Ergebnisse haben eins gemeinsam: in beiden Fällen ist a=h. Die quadratische Säule hat maximales Volumen, wenn sie ein Kubus ist.

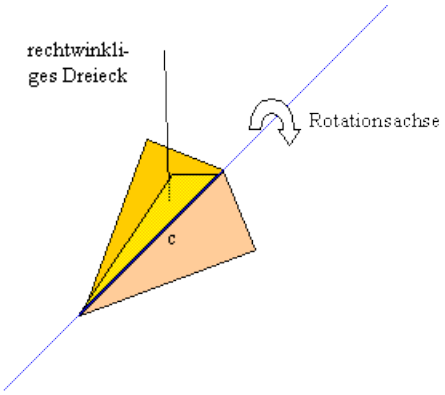
Aufgabe 310:

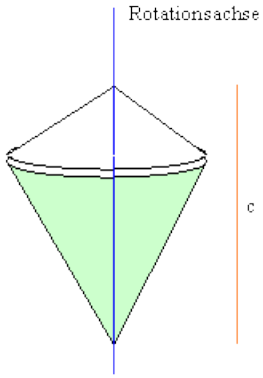
Welches rechtwinkelige Dreieck mit der Hypotenuse c=6 cm erzeugt einen Doppelkegel größten Volumens, wenn man es um die Hypotenuse dreht?



Lösung:

Antwort: Das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck!

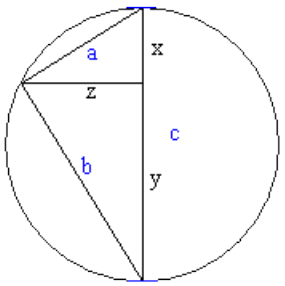




Wo ist nun der "Doppelkegel", dazu noch ein Bild:

Die folgende Skizze zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c (blau) und den Hilfsgrößen x, y, z (schwarz).

Jedes rechtwinklige Dreieck passt in einen Halbkreis. Durch die Aufteilung der gegebenen Hypotenuse c=6 in die Abschnitte x und y ist im Halbkreis genau ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt. Dieses hat die Höhe z.



Der durch Rotation des Dreiecks um die Hypotenuse entstehende Körper besteht aus zwei Kreiskegeln.

Die allgemeine Formel für das Volumen eines Kreiszylinders lautet V = 1/3 * G * h.

Wenn das Dreieck mit den Seiten a, z, x um x rotiert, entsteht ein Kreiskegel mit der Höhe x und der Grundfläche pi * z^2.

Wenn das Dreieck mit den Seiten b, y, z um y rotiert, entsteht ein Kreiskegel mit der Höhe y und der gleichen Grundfläche, nämlich pi * z^2.

Die Summe der Volumina der beiden Kreiskegel beträgt

V = 1/3 pi * z^2 * x + 1/3 pi * z^2 * y

= 1/3 pi * z^2 * (x + y)

= 1/3 pi z^2 * 6

= 2 pi z^2

Das ist eine Formel für das Volumen, die nicht von a, b oder c abhängt, sondern von einer Hilfsgröße z. Man könnte nun versuchen z durch a, b auszudrücken (Pythagoras), aber das ist hier nicht nötig - zum Glück, denn dadurch würde es vermutlich komplizierter.

Wir gehen für den Moment dazu über, das optimale z zu bestimmen.

Beginnen wir mit dem normalen Vorgehen:

Es ist V(z) = 3pi*z^2, V'(z) = 6pi*z und V''(z) = 6pi.

Daraus folgt aber nur, dass bei z=0 ein (lokales) Minimum vorliegt, denn V'(z) = 6pi*z = 0 gilt nur für z = 0.

Gibt es denn kein Maximum? Doch, natürlich gibt es eines. Das Volumen wird umso größer, je größer z ist. Kann denn z beliebig groß werden? Nein, z kann maximal gleich dem Radius des Halbkreises werden, in dem das Dreieck mit der Hypotenuse c=6 einbeschrieben ist. Der Radius dieses Kreises ist gleich c/2. Mit c=6 folgt, dass z maximal 3 sein kann.

Das maximale Volumen wird somit am Rand des Definitionsbereichs von z, nämlich bei z = 3 angenommen.

In diesem Fall ist das rechtwinklige Dreieck a, b, c ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck.

Aufgabe 311:

Die Funktion

$f(x) = -a * x^2 + b$

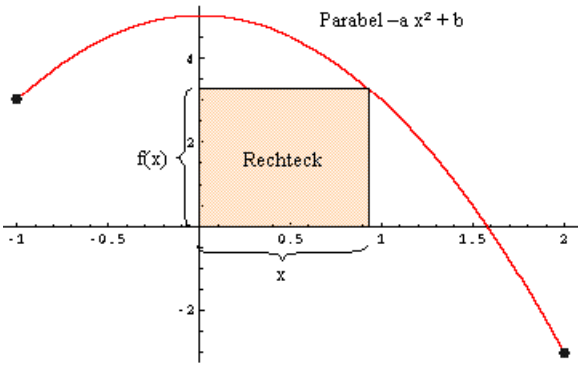
schließt im ersten Quadranten ein Rechteck mit der x und y Achse ein.

Für welches x wird der Flächeninhalt maximal?

Lösung:

Es ist ein Rechteck gesucht, dessen linke untere Ecke im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt, und dessen rechte obere Ecke auf dem Graphen der gegebenen Funktion liegt.
Die rechte obere Ecke soll so gewählt werden, dass die Fläche des Rechtecks maximal wird.

Diese Ecke hat die Koordinaten (x/y) mit $y=-ax^2+b$



Weil die Funktion f(x) bei w(b/a) eine Nullstelle hat (das ist ein Schnittpunkt mit der x-Achse), ist ein x e [0,w(b/a)] gesucht (Definitionsbereich).

Die Fläche in Abhängigkeit von x ist

$F(x) = x * y = x * (-ax^2+b) = -ax^3+bx$

Diese Funktion der Fläche ist zu differenzieren.

$F'(x) = -3ax^2 + b$

Man findet im Definitionsbereich die positive Nullstelle:

$x = w(b/(3a))$

[die negative Nullstelle liegt nicht im ersten Quadraten].

Dieses x ist im zu betrachtenden Intervall (das ist gut), und es ist

$F''(x) = -6ax$

Daher ist F''(w(b/(3a))) negativ, also ist bei x = w(b/(3a)) ein lokales Maximum.

An den Rändern des Intervalls, in dem x nur liegen kann, sind die Flächenwerte 0, darum ist x=w(b/(3a)) in [0,w(b/a)] sogar ein absolutes Maximum.

http://www.mathe-online.at/materialien/matroid/files/ex/ex.html

Aufgabe 312:

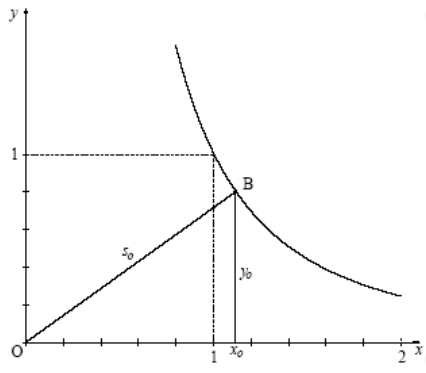
Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \; und \; D_f = R^+$$

Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von f. Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jäger, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung s zwischen dem Bären und dem Schützen durch die x-Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort $B(x_0|y_0)$!

Lösung:

Lösung: (a)



(b) $s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}$

$s'(x) = \dfrac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$

$s'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$

$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$

$\lim\limits_{x \to 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = +\infty$
und nur eine Nullstelle von s' $\Longrightarrow$
relatives Minimum bei B $(x_0 \,|\, y_0)$

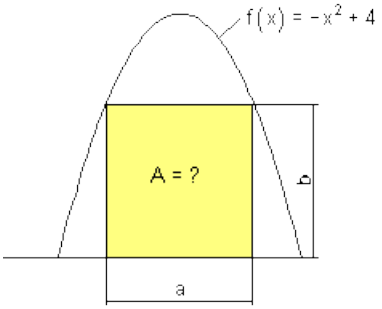
(c) $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1{,}375$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1{,}375\,\text{cm} = 6{,}875\,\text{cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6{,}875\,\text{cm} = 137{,}5\,\text{m}$.

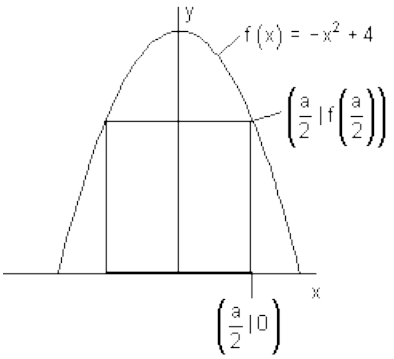
Aufgabe 313:

Für welche Werte von a und b hat das Rechteck den größten Flächeninhalt?

Wie groß ist dieser?



Lösung:



Rechteckfläche: $A = a \cdot b$

Rechteckseite: $b = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 4$

$b = -\frac{a^2}{4} + 4$

$A = a \cdot b = A(a) = a \cdot \left[-\frac{a^2}{4} + 4\right]$

$A(a) = -\frac{a^3}{4} + 4a$

Für welches a hat die Rechteckfläche ihr Maximum?
Die Lösung erfolgt durch Extremwertberechnung.

$A(a) = -\frac{a^3}{4} + 4a \Rightarrow A'(a) = -\frac{3}{4}a^2 + 4 \Rightarrow A(a)'' = -\frac{3}{2}a$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}a^2 + 4 = 0 \mid : \left(-\frac{3}{4}\right)$

$\Leftrightarrow a^2 - \frac{16}{3} = 0 \mid + \frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{3} \mid \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow |a| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow a_{1/2} = \pm\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$

$a_1 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$

Die negative Lösung $-\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$ macht keinen Sinn,
denn eine Rechteckseite kann nicht negativ sein.
Überprüfung auf Extremwert:

$A''(a_1) = A''\left(\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow$ relatives Maximum von $A(a)$ bei $a_1 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$

Eingesetzt in $A(a) = -\frac{a^3}{4} + 4a$

$$A(a_1) = A\left(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^3 + 4\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}$$

$$= \frac{32}{9}\cdot\sqrt{3} \approx 6{,}158\text{FE} \quad \text{(Rechteckfläche)}$$

$$a = a_1 = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} \approx 2{,}309\text{LE} \quad \text{(Länge der Seite a)}$$

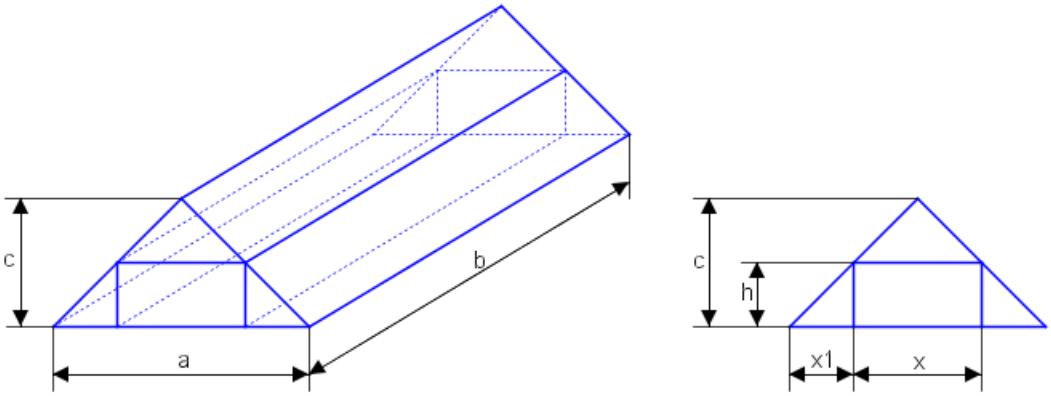
$$b = -\frac{a_1^2}{4} + 4 = -\frac{\left(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4} + 4 = -\frac{\frac{16}{9}\cdot 3}{4} + 4 = -\frac{16}{12} + 4$$

$$= \frac{8}{3} \approx 2{,}667\text{LE} \quad \text{(Länge der Seite b)}$$

Probe: $A = a\cdot b = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{9}\cdot\sqrt{3} \approx 6{,}158\text{FE}$

Aufgabe 314:

Der Dachboden eines Einfamilienhauses (dreiseitiges Prisma) soll ausgebaut werden. Der vorhandene Raum soll bei rechteckigem Zimmerquerschnitt maximal ausgenutzt werden.



Zu wählende Abmessungen: a=8, b=10, c=5

Lösung:

Zielfunktion:

$$V(x,h) = x\cdot h\cdot b$$

Nebenbedingung über ähnliche Dreiecke:

$$\frac{c-h}{c} = \frac{x}{a}$$

aufgelöst nach h:

$$h(x) \equiv c - \frac{c}{a} \cdot x$$

und eingesetzt:

$$V(x, h) = x \cdot \left(c - \frac{c}{a} \cdot x\right) \cdot b$$

ergibt Zielfunktion:

$$Vol(x) \equiv c \cdot b \cdot x - \frac{c \cdot b}{a} \cdot x^2$$

mit speziellen Werten:

$$Vol(x) \rightarrow 50 \cdot x - \frac{25}{4} \cdot x^2$$

Maximum der Zielfunktion:

1. Ableitung:

$$Vol_x(x) := 50 - \frac{25}{2} \cdot x$$

2. Ableitung:

$$Vol_{xx}(x) := \frac{-25}{2}$$

Bedingung für Extremum:

$$50 - \frac{25}{2} \cdot x = 0$$

ergibt x=4

Rauminhalt:

$$Vol(4) = 100$$

D.h. Maximum (4/100)

Zimmerhöhe:

$$h(4) = 2.5$$

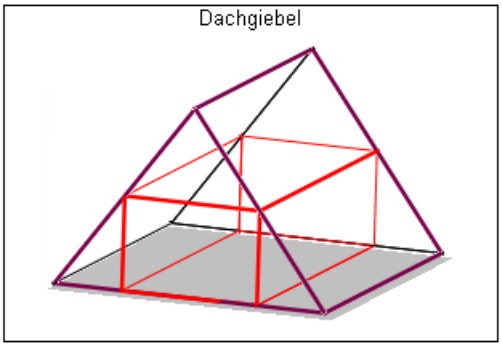
Maximaler Raum für ein Zimmer der Breite x = 4 m, Länge b = 10 m und Höhe h = 2,5 m.

$$V_{max} := 4 \cdot m \cdot 10 \cdot m \cdot 2.5 \cdot m$$

$$V_{max} = 100\, m^3$$

$$k \equiv 16$$

Beide Graphen gleichzeitig animieren von -16 bis 16.



$(M1_x, M1_y, M1_z), (M2_x, M2_y, M2_z), (M3_x, M3_y, M3_z), (M4_x, M4_y, M4_z)$

Zimmerbreite:

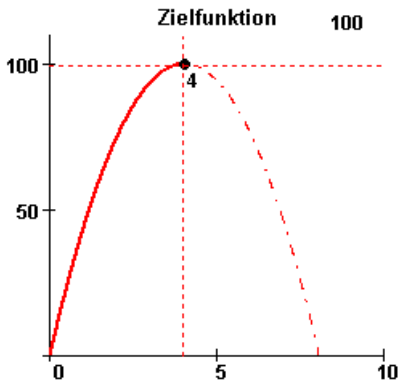
$x = 4$

Zimmerhöhe:

$h = 2.5$

Rauminhalt des Zimmers:

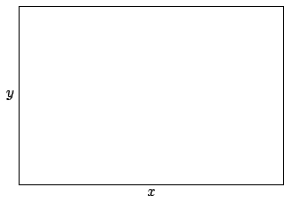
$V_{Zimmer} = 100$



Aufgabe 315:

Mit einer vorhandenen Rolle Zaun (darauf sind 50 m) soll ein möglichst großes Stück Land rechteckig eingezäunt werden. Zielgröße ist die eingezäunte Fläche.

Wie lauten die Maße x und y?



Lösung:

Die Fläche eines Rechtecks ist $F = x \cdot y$, dabei stehen x und y für die Seitenlängen des Rechtecks. F ist also eine Funktion der Seitenlängen.

Die Nebenbedingung ist, dass nur 50 m Zaun vorhanden sind. Um ein Rechteck mit Seitenlängen x und y einzuzäunen braucht man $2x+2y = 50$ (Nebenbedingung) Meter Zaun (den Umfang des Rechtecks).

Zwischen den scheinbar unabhängigen Variablen x und y besteht durch die Nebenbedingung eine Beziehung.

Nun könnte man versuchen, Lösungen zu raten. Mit $x = 5$ und $y = 20$ benötigt man genau 2*20 + 2*5 = 50 m Zaun, und die Fläche beträgt dann 5*20 = 100 m². Raten führt selten zur optimalen Lösung, oder wenn doch, dann fehlt am Ende die Gewissheit (der Beweis) für die Extremaleigenschaft der geratenen Lösung.

Man löse die Nebenbedingung nach y auf:

$y = (50-2x)/2$.

Man stelle die Funktion der Fläche in Abhängigkeit von x auf (durch Einsetzen von y):

$F(x) = x * y = x * (50 - 2x) /2 = 25x-x^2$.

Über die Ableitung $F'(x)$ findet man mögliche lokale Maxima der Funktion $F(x)$:

$F'(x) = 25 - 2x$.

Suche Nullstellen von F':

$F'(x) = 0 = 25 - 2x <=> x = 12,5$.

Wenn x= 12,5 ist, dann ist $y = 12,5$.

Das folgt durch Einsetzen in die Nebenbedingung.

Die Fläche des Rechtecks ist F= 12,5*12,5 = 156,25 m².

Das kann nun (im Allgemeinen) ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum sein.

Durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle des lokalen Extremums erfährt man, ob es ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.

Da $F''(x)$= -2 für alle x negativ ist, liegt bei der Nullstelle der ersten Ableitung ein lokales Maximum vor.

Darum ist x= 12,5 ein guter Kandidat für eine Lösung.

Wieso nur ein guter Kandidat? Man muss untersuchen, ob es sich im Definitionsbereich für x wirklich um das absolute Maximum handelt. Es könnte nämlich an den Rändern des Definitionsbereiches für x noch größere Werte geben.

Man muss die Ränder gesondert untersuchen.

Im Beispiel ist der Definitionsbereich [0 ; 25]. Denn negative x oder negative y sind nicht sinnvoll, weil x und y für Längen stehen.

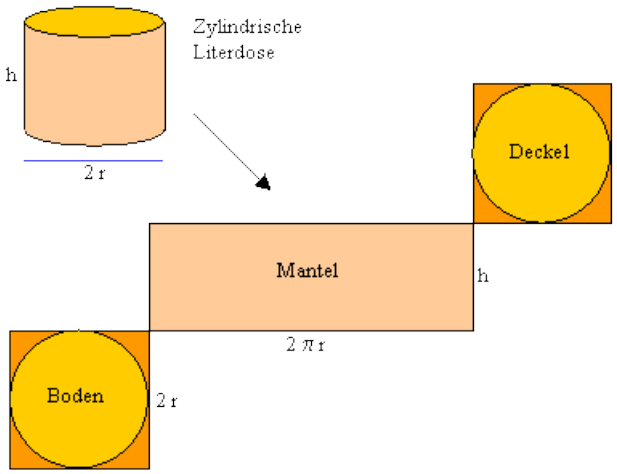
Sowohl für $x = 0$, als auch für $x = 25$ ist der Wert von $F(x) = 0$. $x = 12,5$ ist ein absolutes Maximum im Definitionsbereich.

Bei Verwendung von 50 m Zaun, ist die maximale einzäunbare Fläche gleich 156,25 m².

Aufgabe 316:

Es soll eine Dose mit einem Liter Fassungsvermögen hergestellt werden. Dabei werden Grund- und Deckkreis aus dem umschriebenen Quadrat ausgeschnitten. Wie groß sind die Ausmaße zu wählen, wenn dabei möglichst wenig Blech verwendet werden soll und der Abfall beim Ausstanzen der Grund- und Deckfläche zum verbrauchten Material zählt.

Lösung:



Da Deckel und Boden aus einem quadratischen Blech gestanzt werden, ist die Fläche des verwendeten Blechs:

$F = 2 * (2r)^2 + 2*\pi*r*h$.

Dabei ist $(2r)^2$ die Fläche für den Deckel und Boden (inklusive Abfall) und $2*\pi*r*h$ die Fläche des Mantels. Das Volumen der Dose soll 1 Liter betragen. Ein Liter ist 1 dm^3, darum wählt man als Einheit für alle Längen im Folgenden Dezimeter (dm). Die Formel für das Volumen ist $V = 1 = \pi*r^2 * h$ (Nebenbedingung).

Daraus folgt durch Umformung:

$h = 1/(r^2*\pi)$.

Man erhält die Funktion der Fläche in Abhängigkeit vom Radius r (durch Einsetzen von h):

$F(r) = 8*r^2 + 2*\pi*r*h = 8*r^2+2/r$.

Diese Zielfunktion ist zu minimieren:

$F'(r) = 16r - 2/r^2 = 0 <=> 16r^3 - 2 = 0 <=> 16r^3 = 2 <=> r^3 = 1/8 <=> r = 1/2$.

Das Ergebnis ist $r = 1/2$ dm = 5 cm. Man überprüft nun über die zweite Ableitung, ob 1/2 auch wirklich das Minimum ist:

$F''(r) = 16+4/r^3$.

Einsetzen von r liefert:

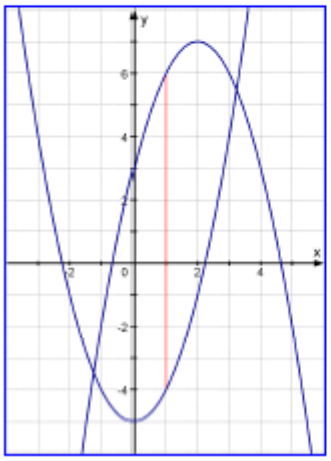
F''(1/2) = 48 > 0, es liegt also wirklich ein Minimum vor.

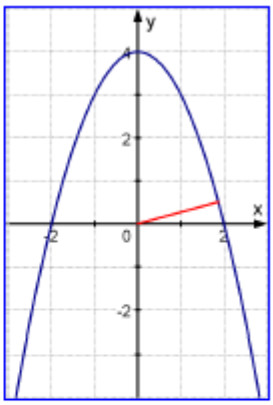
Aufgabe 317:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Parabel als Schaubild der Funktion $f(x) = 4 - x^2$.

Welcher Punkt P dieser Parabel hat vom Ursprung die kürzeste Entfernung ?





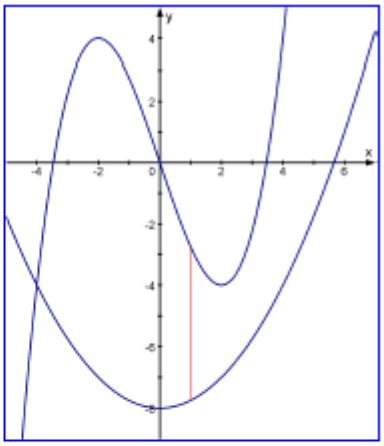
Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch:

$f(x) = x^2 - 5$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 3$

Die Gerade h: x = u schneidet die von den beiden Parabeln begrenzte Fläche.

Für welches u ist die Sehne am längsten ?



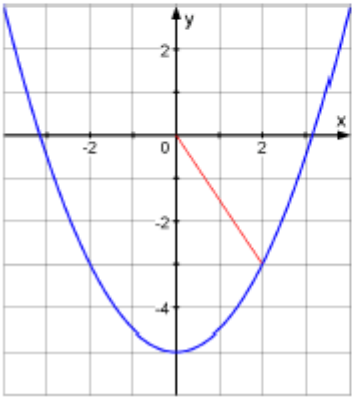
Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8$

Die Gerade mit der Gleichung x = u mit $u > -4$ schneidet die beiden Schaubilder in P und Q.

Für welches u nimmt die Länge der Strecke PQ einen Extremwert an ?

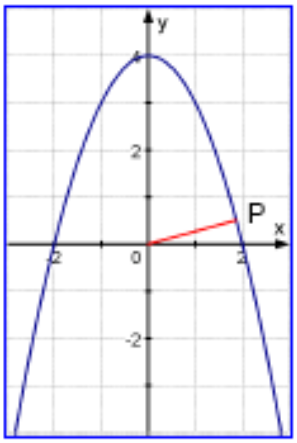


Aufgabe 4

Bestimme die Punkte P (u | v) der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$, deren Abstand zum Ursprung einen Extremwert annimmt.

Lösung:

Lösungen



Aufgabe 1:

Gegeben ist die Parabel als Schaubild der Funktion $f(x) = 4 - x^2$.

Welcher Punkt P dieser Parabel hat vom Ursprung die kürzeste Entfernung ?

Lösung:

Der Punkt habe die Koordinaten P (u | 4 - u^2).
Abstand

$$d(u) = \overline{OP} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{u^2 + \left(4 - u^2\right)^2} = \sqrt{u^2 - 16 - 8u^2 + u^4} = \sqrt{u^4 - 7u^2 - 16}$$

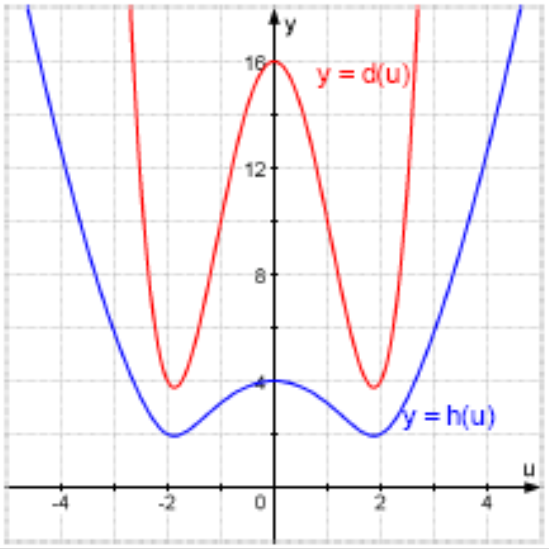
Hilfsfunktion: $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16$.

Hinweise:

Wir sehen uns nun einmal die Schaubilder der beiden Funktionen y = d(u) und y = h(u) genau an.
Man erkennt, daß ihre Extremwerte an denselben Stellen liegen. Dies hat seinen einfachen Grund darin, daß $d(u) = \sqrt{h(u)}$

Gilt und daß die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ Streng monoton wächst. Damit ist garantiert, daß bei Zunahme des Radikanden auch die Wurzel daraus zunimmt. Wenn somit h(u) zunimmt, dann auch d(u).

Daher besitzen h(u) und d(u) dieselben Extremstellen.



Berechnung von Extremwerten von Abständen:

Da die Abstandsfunktion $y = d(u) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ihre Extremstellen genau dort hat, wo dies auch die Hilfsfunktion

$y = h(u) = \left[d(u)\right]^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ hat,

kann man extreme Abstände stets mit dieser Hilfsfunktion berechnen und benötigt somit keine Wurzelfunktion.

Für unsere Aufgabe berechnen wir somit die Extremwerte der Funktion $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16$ mit dem Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

Ableitungen für $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16$

$h'(u) = 4u^3 - 14u$ und $h'(u) = 12u^2 - 14$

Extremwertbedingung: $h'(u_E) = 0 \Leftrightarrow 4u^3 - 14u = 0 \Leftrightarrow 2u\left(2u^2 - 7\right) = 0$

$$u_1 = 0, \quad u_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$$

Kontrollrechnungen: $h''(0) = -14 < 0$

$h''\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}\right) = 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 14 - 14 > 0$

Also haben die Funktionen h und d bei 0 ein relatives Maximum und bei $\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$ relative Minima.

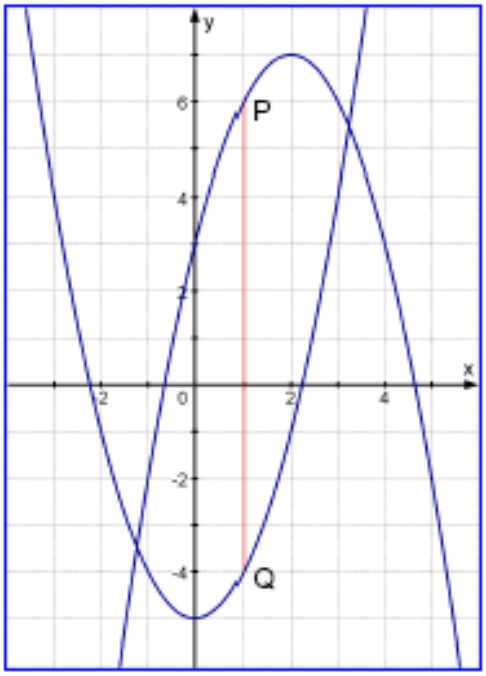
Randwerte: Für $u \to \pm\infty$ geht $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16 \to \infty$.

Ergebnis: Für u = 0 liegt ein relatives Maximum für den Abstand vor,
Für u= $\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$ jedoch absolute Minima.

Es gibt also zwei Punkte, die dem Ursprung am nächsten liegen:
$f\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}\right) = 4 - \frac{1}{4} \cdot 14 = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$: Es sind $P_{1,2}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{14} \mid \frac{1}{2}\right)$.

Berechnung des kürzesten Abstandes:

$$d_{min} = \sqrt{\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^4 - 7 \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}\right) + 16} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{4} + 16} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$



Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch:
$f(x) = x^2 - 5$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 3$
Die Gerade h: x = u schneidet die von den beiden Parabeln begrenzte Fläche.
Für welches u ist die Sehne am längsten ?

Lösung:

Es sei $P\left(u \mid -u^2 + 4x + 3\right)$ und $Q\left(u \mid u^2 - 5\right)$

Zur Festlegung des Definitionsbereiches müssen die Schnittstellen dieser Parabeln berechnet werden.

$x^2 - 5 = -x^2 + 4x + 3$

$2x^2 - 4x - 8 = 0 \quad | : 4$

$\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Berechnung der Streckenlänge:

$$d(u) = y_P - y_Q = \left(-u^2 + 4u + 3\right) - \left(u^2 - 5\right) = -2u^2 + 4u + 8$$

mit dem Definitionsbereich:
(Die Ränder - 2 und 4 schließt man aus, weil dann keine Strecke mehr vorliegt).

Ableitungen: $d'(u) = -4u + 4$ und $f''(u) = -4$

Extremwertbedingung: $d'(u_E) = 0$ d.h. $u_E = 1$

Kontrolle: $d''(1) < 0$

Also hat die Strecke für u = 1 ein relatives Maximum.

Randwerte: $\lim\limits_{u \to -2} d(u) = 0$ und $\lim\limits_{u \to 4} d(u) = 0$

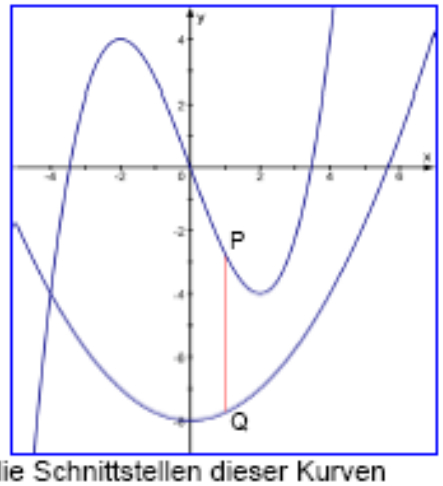
Also liegt für u = 1 ein absolutes Maximum vor.

Größe dieser maximalen Streckenlänge:

$d_{max} = d(1) = 10$

Genau diese Strecke ist oben eingezeichnet.

Aufgabe 3



Gegeben sind die Funktionen
$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ und $g(x)=\frac{1}{4}x^2-8$
Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > -4$ schneidet die beiden Schaubilder in P und Q.
Für welches u nimmt die Länge der Strecke PQ einen Extremwert an ?

Lösung:

Es sei $P\left(u \mid \frac{1}{4}u^3-3u\right)$ und $Q\left(u \mid \frac{1}{4}x^2-8\right)$

Zur Festlegung des Definitionsbereiches müssen die Schnittstellen dieser Kurven berechnet werden.

$$\frac{1}{4}x^3-3x=\frac{1}{4}x^2-8 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-3x+8=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-12x+32=0 \quad (1)$$

Aus der Zeichnung kann man die vermutliche Lösung x = - 4 entnehmen.
Beweis und Ausklammern des Linearfaktors (x+4) mittels Horner-Schema:

	1	-1	-12	32
	0	-4	20	-32
x = - 4	1	-5	8	0

Aus beiden Rechnungen folgt für (1):
$(x+4)(x^2-5x+8)=0$
Weitere Schnittstellen:
$x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-32}}{2} \notin \mathbf{R}$
Es gibt nur einen Schnittpunkt.

Mittels Polynomdivision hätte man diese Rechnung durchführen müssen:

$$(x^3-x^2-12x-32):(x+4)=x^2-5x+8$$
$$-(x^3+4x^2)$$
$$-5x^2-12x$$
$$-(-5x^2-20x)$$
$$8x-32$$
$$-(8x-32)$$
$$0$$

Berechnung der Streckenlänge:
$d(u)=y_P-y_Q=\left(\frac{1}{4}u^3-3u\right)-\left(\frac{1}{4}u^2-8\right)=\frac{1}{4}u^3-3u-\frac{1}{4}u^2+8$ mit $\mathbf{D}=]-4;\infty[$

Ableitungen: $d'(u)=\frac{3}{4}u^2-\frac{1}{2}u-3$ und $d''(u)=\frac{3}{2}u-\frac{1}{2}$

Extremwertbedingung: $d'(u_E)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}u^2-\frac{1}{2}u-3=0 \quad |\cdot 2$

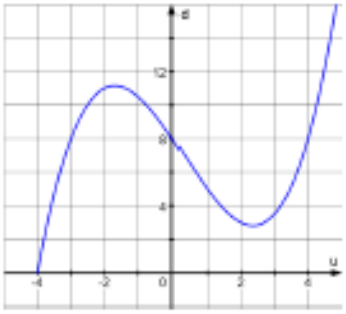
$\frac{3}{2}u^2-u-6=0$ ergibt $u_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+36}}{3}=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{37}\approx\begin{cases}2{,}36\\-1{,}7\end{cases}$

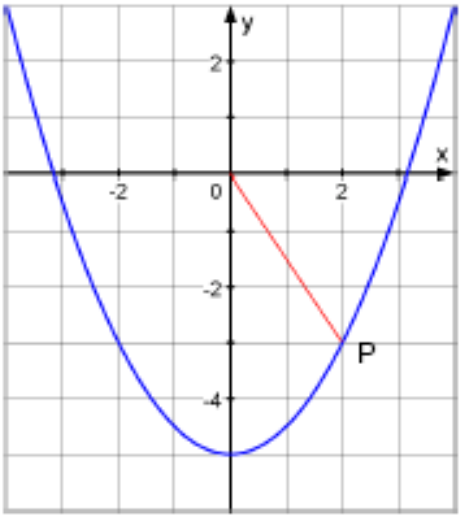
Kontrollrechnungen: $d''(2{,}36)=1{,}35>0$ d.h. relatives Minimum

$d''(-1{,}7)=-1{,}7<0$ d.h. relatives Maximum.

Randwerte: $\lim\limits_{u\to -4} d(u)=0$ und für $u\to\infty$

folgt $A(u)\to\infty$, d.h.
es gibt nur relative Extremwerte:
$d_{min}=d(2{,}36)\approx 2{,}81$ und $d_{max}=d(-1{,}7)\approx 11{,}15$





Aufgabe 4

Bestimme die Punkte P (u | v) der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$, deren Abstand zum Ursprung einen Extremwert annimm

Lösung.

Es sei $P\left(u \mid \frac{1}{2}u^2 - 5\right)$.

Abstand zum Ursprung:

$$d(u) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{u^2 + \left(\frac{1}{2}u^2 - 5\right)^2}$$

Durch Quadrieren entsteht die Hilfsfunktion h mit denselben Extremstellen:

$$h(u) = u^2 + \left(\frac{1}{2}u^2 - 5\right)^2 = u^2 + \frac{1}{4}u^4 - 5u^2 + 25 = \frac{1}{4}u^4 - 4u^2 + 25$$

Definitionsbereich dazu: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$

Ableitungen: $h'(u) = u^3 - 8u$ und $h''(u) = 3u^2 - 8$

Extremwertbedingung: $h'(u_E) = 0 \Leftrightarrow u\left(u^2 - 8\right) = 0$

Lösungen: $x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{8}$.

Kontrollrechnung: $h''(0) = -8 < 0$ d.h. relatives Maximum.

$h''\left(\pm\sqrt{8}\right) = 3 \cdot 8 - 8 > 0$ relatives Minimum.

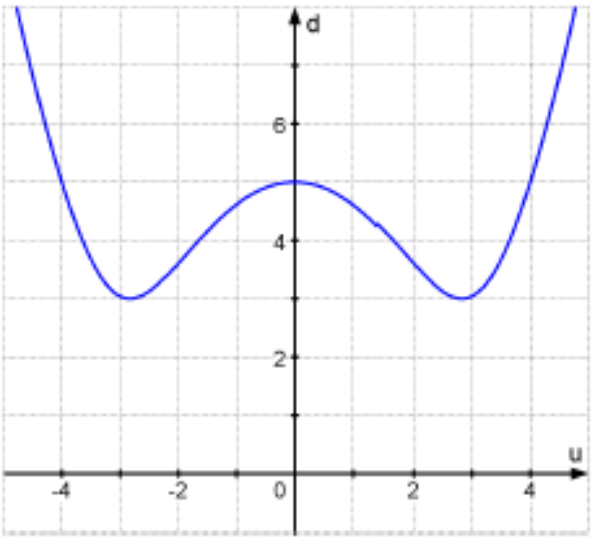
Randwerte: Für $u \to \pm\infty$ folgt $h(u) \to \infty$.

Also haben h und damit auch d bei $x_{2,3} = \pm\sqrt{8}$ ihr absolutes Minimum und bei 0 ein relatives Maximum.

$$d_{min} = d\left(\pm\sqrt{8}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot 64 - 32 + 25} = \sqrt{9} = 3$$

$$d_{max} = d(0) = 5$$

Die rechte Abbildung zeigt das Schaubild der Distanzfunktion d. Man erkennt deutlich die 3 Extremstellen bzw. Extremwerte.



Aufgabe 318:

Abstand

Es sind die zwei Funktionen $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = (2x+1)e^{-x}$ gegeben. Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(u \geq 0)$ schneidet das Schaubild von f in P und das von g in Q. Wir bestimmen die Abstandsfunktion z zwischen den beiden Punkten.

Lösung:

Extremwertaufgaben

- Bestimmung der Zielfunktion
- Bestimmung des Extremwerts der Zielfunktion

$f'(x) = 0 \qquad f''(x) < 0$

Beispiele:

Abstand (Siehe Aufgabenstellung)

$f(x) = e^{-x} \qquad g(x) = (2x+1)\,e^{-x}$

⋮

$z(u) = g(u) - f(u) = (2u-1)\,e^{-u} - e^{-u} = 2u\,e^{-u}$

Produktregel

$z'(u) = 2 \cdot e^{-u} + 2u\,(-1)\,e^{-u}$

$z'(u) = 2 \cdot (1-u)\,e^{-u}$

$z''(u) = -2 \cdot e^{-u} + 2(1-u) \cdot (-1) \cdot e^{-u}$

$z''(u) = -2 \cdot e^{-u} - 2(1-u) \cdot e^{-u}$

$z''(u) = -2 \cdot e^{-u} - 2 \cdot e^{-u} + 2u\,e^{-u}$

$z''(u) = -4 \cdot e^{-u} + 2u\,e^{-u}$

$z''(u) = 2(u-2)\,e^{-u}$

$z'(u) = 0 \qquad 2(1-u) \cdot e^{-u} = 0$

$\Rightarrow u = 1$

$z''(1) = 2(1-2)\,e^{-1} = -2 \cdot e^{-1} < 0$

$\Rightarrow$ HP von z

$\Rightarrow$ $x = 1$ ist die gesuchte max. Länge des Strecke

Aufgabe 319:

Umfang

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch einen Kurvenpunkt $P(u|v)$ $(u > 0)$ begrenzen mit den Achsen ein Rechteck. Der Umfang des Rechtecks soll durch eine Zielfunktion in Abhängigkeit von u beschrieben werden. Dabei gilt allgemein für den Umfang von Rechtecken

$$U = 2a + 2b,$$

Lösung:

Umfang:

$f(x) = 1 + \frac{4}{x}$ $\quad P(u|v)$

$u = 2a + 2b$

$z(u) = 2u + 2v$

$= 2u + 2\left(1 + \frac{4}{u}\right)$

$= 2u + 2 + \frac{8}{u}$

$z(u) = 2u + 2 + \frac{8}{u}$

$z'(u) = 2 - \frac{8}{u^2}$

$z''(u) = \frac{16}{u^3}$

$z'(u) = 0 \quad 2 - \frac{8}{u^2} = 0 \quad | \cdot u^2$

$2u^2 - 8 = 0$

$u^2 = 4$

$u = \pm 2$

$\Rightarrow u = +2$ (wegen des Def. bereichs)

$z''(2) = \frac{16}{8} = 2 > 0 \Rightarrow$ TP

$\Rightarrow f(2) = 3$, dass z beim Punkt $P(2|3)$ den minimalsten Wert $z(2) = 10$ annimmt.

Aufgabe 320:

Flächeninhalt

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ und $g(x) = e^{-x}$. Die senkrechte Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(u \geq 0)$ schneidet die Schaubilder von f und g in den Punkten P und Q. Der Ursprung O und die Punkte P und Q bilden ein Dreieck. Wie sieht dann die Zielfunktion aus, die den Flächeninhalt des Dreiecks beschreibt?

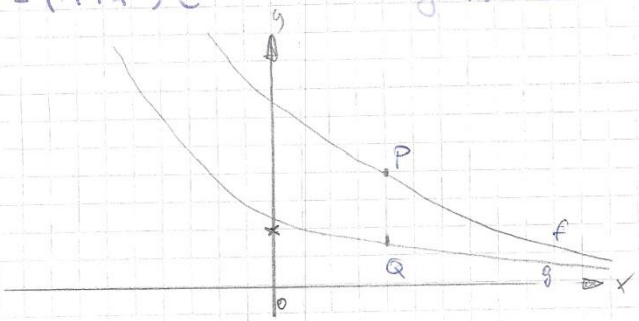
Für die Fläche A von beliebigen Dreiecken gilt die Formel

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Lösung:

Flächeninhalt

$f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ $\quad g(x) = e^{-x}$



$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$g: \overline{PQ}$ $\quad f(u) = (1+u^2)e^{-u}$

$g(u) = e^{-u}$

$g = f(u) - g(u) = (1+u^2)e^{-u} - e^{-u}$

$g = u^2 e^{-u}$

$h: u$

$z(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} u^2 e^{-u} \cdot u = \frac{1}{2} u^3 e^{-u}$

$z'(u) = \frac{3}{2} u^2 e^{-u} + \frac{1}{2} u^3 (-1) e^{-u}$

$= \frac{3}{2} u^2 e^{-u} - \frac{1}{2} u^3 e^{-u}$

$= (\frac{3}{2} u^2 - \frac{1}{2} u^3) e^{-u}$

$z''(u) = (\frac{6}{2} u - \frac{3}{2} u^2) e^{-u} + (\frac{3}{2} u^2 - \frac{1}{2} u^3)(-1) e^{-u}$

$= 3u e^{-u} - \frac{3}{2} u^2 e^{-u} - \frac{3}{2} u^2 e^{-u} + \frac{1}{2} u^3 e^{-u}$

$= (\frac{1}{2} u^3 - 3u^2 + 3u) e^{-u}$

$z'(u) = \left(\frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}u^3\right)e^{-u} = 0$

$u^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}u\right) = 0$

$u = 0$ → Am Rand fällt weg

$u = 3$

$z''(u) = \left(\frac{1}{2}u^3 - 3u^2 + 3u\right)e^{-u}$

$z''(3) = \left(\frac{1}{2}\cdot 3^3 - 3\cdot 3^2 + 9\right)e^{-3}$

$z''(3) = \left(\frac{27}{2} - 27 + 9\right)e^{-3}$

$z''(3) = -\frac{9}{2}e^{-3} < 0 \Rightarrow$ HP

Das ergibt dann mit der fraglichen $x = 3$ für die Zielfunktion den maximalen Wert

$z(3) = \frac{27}{2}e^{-3}$

Aufgabe 321:

Oberfläche

Der Punkt $P(u|v)$ $(u > 0)$ soll ein Punkt auf der Kurve der Funktion $f(x) = \frac{3}{x^3} - 1$ sein. Die Punkte P, $Q(u|-1)$, $R(0|-1)$ und $S(0|v)$ bilden ein Rechteck. Die Zielfunktion soll die Oberfläche des Zylinders beschreiben,

der entsteht, wenn sich das Rechteck um die Seite RS dreht (die auf der y-Achse liegt).

Die Oberfläche eines Zylinders hat die Formel

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh,$$

Lösung:

Oberfläche

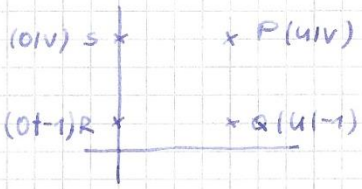
$f(x) = \frac{3}{x^3} - 1$ $\quad P(u|v) \in f(x)$

Die Punkte $P, Q(u|-1), R(0|-1)$ und $S(0|v)$ bilden ein Rechteck.

Zielfkt soll die Oberfläche des Zylinders beschreiben, der entsteht, wenn sich das Rechteck um die Seite RS dreht (die auf der y-Achse liegt.

Oberfläche des Zylinders

$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$



$r = u$

Wegen $v = f(u) = \frac{3}{u^3} - 1 > -1$

liegt $P(u|v)$ über $Q(u|-1)$

Skizze

$h = v - (-1) = v + 1$

$v = \frac{3}{u^2} - 1$

$h = \frac{3}{u^3}$

$$z(u) = 2\pi u^2 + 2\pi u \frac{3}{u^3} = 2\pi u^2 + \frac{6\pi}{u^2} \qquad u>0$$

$$z'(u) = 4\pi u - \frac{12\pi}{u^3}$$

$$z''(u) = 4\pi + \frac{36\pi}{u^4}$$

$$z'(u) = 0 = 4\pi u - \frac{12\pi}{u^3}$$

$$4\pi u - \frac{12\pi}{u^3} = 0 \quad |\cdot u^3$$

$$4\pi u^4 - 12\pi = 0$$

$$u^4 = \frac{12\pi}{4\pi} = 3$$

$$u_1 = +\sqrt[4]{3} \qquad (u_2 = -\sqrt[4]{3}) \notin D \ (u>0)$$

$$z''(\sqrt[4]{3}) = 4\pi + \frac{36\pi}{(\sqrt[4]{3})^4} = 4\pi + 12\pi = 16\pi > 0$$

$\Rightarrow$ z hat einen minimalen Wert

$$z(\sqrt[4]{3}) = 2\pi(\sqrt[4]{3})^2 + \frac{6\pi}{(\sqrt[4]{3})^2}$$

$$= 2\pi\sqrt{3} + \frac{6\pi}{\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi\sqrt{3} + \sqrt{\frac{36}{3}}\cdot\pi = 2\pi\sqrt{3} + \sqrt{3\cdot 4}\cdot\pi$$

$$= 2\pi\sqrt{3} + 2\pi\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} = 21{,}77$$

Dabei ist der Punkt P(u|v), für den z minimal wird, bestimmt durch die beiden Koordinaten

$u = \sqrt[4]{3}$ und $v = f(u) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3 - 1$

Aufgabe 322:

Volumen

Für $0 \leq u \leq \sqrt{2}$ soll $P(u|v)$ ein Kurvenpunkt von $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ sein und Q der Punkt mit den Koordinaten $(-u|v)$. P und Q begrenzen mit dem Ursprung O ein Dreieck, das bei Rotation um die y-Achse einen Kegel erzeugt. Gesucht ist die Zielfunktion, die das Volumen des Kegels beschreibt.

Dazu wieder zuerst die allgemeine Formel für das Volumen von Kegeln:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Lösung:

Volumen

$0 \le u \le \sqrt{2}$ soll $P(u|v)$ ein Kurvenpunkt von $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ sein und $Q(-u|v)$.
Punkt Q begrenzen mit dem Ursprung ein A, das bei Rotation um die y-Achse einen Kegel erzeugt.
Gesucht ist eine Zielfunktion, die das Volumen des Kegels beschreibt.

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 h$$

$r = u \qquad h = v$

Einsetzen in die Volumenformel:

$$V(u) = \frac{1}{3}\pi u^2 v = \frac{1}{3}\pi u^2 (u^4 - 4u^2 + 4)$$

$$= \frac{1}{3}\pi (u^6 - 4u^4 + 4u^2)$$

$$V'(u) = \frac{1}{3}\pi (6u^5 - 16u^3 + 8u)$$

$$V''(u) = \frac{1}{3}\pi (30u^4 - 48u^2 + 8)$$

$V'(u) = 0$

$\frac{1}{3}\pi (6u^5 - 16u^3 + 8u) = 0 \quad | \cdot \frac{3}{\pi}$

$u(6u^4 - 16u^2 + 8) = 0$

$u = 0$ $\qquad u = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ $\qquad u = \pm\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{4}{3}}$ nur im inneren des Def.-Bereichs

$$V''\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi \left(30\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right)^4 - 48\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right)^2 + 8\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(30 \cdot \frac{4}{3} - 48 \cdot \frac{2}{3} + 8\right) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{40}{3} - \frac{96}{3} + \frac{24}{3}\right) = -\frac{32}{9}\pi$$

$z''\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = -\tfrac{32}{9}\pi < 0$

z hat dort einen max. Wert

$z\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \tfrac{1}{3}\pi\left(\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right)^6 - 4\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^4 + 4\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2\right)$

$= \tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{2^3}{3^3} - 4\tfrac{2^2}{3^2} + 4\cdot\tfrac{2}{3}\right)$

$= \tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{8}{27} - \tfrac{16}{9} + \tfrac{8}{3}\right)$

$= \tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{8}{27} - \tfrac{48}{27} + \tfrac{72}{27}\right)$

$= \tfrac{1}{3}\pi\cdot\tfrac{32}{27} = \tfrac{32}{81}\pi$

Das Volumen wird also Maximal für den Punkt $P(u|v)$ mit $u = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ und

$v = f(u)$

$= u^4 - 4u^2 + 4$

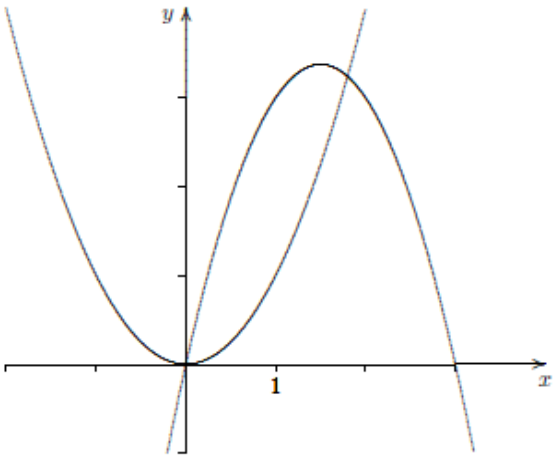
$= \tfrac{4}{9} - 4\cdot\tfrac{2}{3} + 4 = \tfrac{4}{9} - \tfrac{8}{3} + 4 = \tfrac{4}{9} - \tfrac{24}{9} + \tfrac{36}{9} = \tfrac{16}{9}$

Aufgabe 323:

Gegeben sind die Funktionen $f(x)=x^2$ und $g(x)=-1{,}5x(x-3)$.

An welcher Stelle zwischen den beiden Schnittpunkten ist der Abstand der Funktionswerte maximal? Wie groß ist dieser Abstand der beiden Funktionen an diesem Punkt?

Lösung:



$-\frac{3}{2}x(x-3)-x^2=z$

$-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-x^2=z$

$f(x)=-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x$

$f'(x)=-\frac{10}{2}x+\frac{9}{2}$

$f'(x)=0$

$-\frac{10}{2}x+\frac{9}{2}=0$

$-\frac{10}{2}x=-\frac{9}{2}$

$x=99$

$f''(x)=-\frac{10}{2}<0 \Rightarrow HP$

für $\Rightarrow x=99$ erhält man ein Maximum.

Lösung:

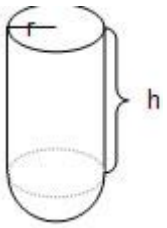
$x_{max} = 0{,}9$

$d(x_{max}) = 2{,}025$

Aufgabe 324:

Ein Kessel besteht aus einem Zylinder. Oben auf den Zylinder ist ein Deckel aufgesetzt. Am unteren Ende ist eine Halbkugel aufgesetzt.

Wie sind seine Maße zu wählen, damit er mit Deckel und Halbkugel bei einer Oberfläche von 150 dm² ein möglichst großes Volumen hat?



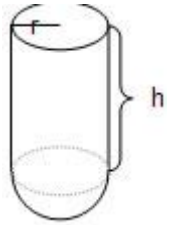
Lösung:

Kugel: $O = 4\pi r^2$ $V = 4/3\pi r^3$

Mantel (Zylinder): $O = 2\pi rh$

Deckel: $O = \pi r^2$

Volumen Zylinder: $V = \pi r^2 \cdot h$



Hauptbedingung:

$V(r, h) = 0{,}5 \cdot 4/3\pi r^3 + \pi r^2 \cdot h$

Volumen = Hälfte Kugel + Zylinder

Nebenbedingung:

$150 = 2\pi rh + \pi r^2 + 0{,}5 \cdot 4\pi r^2 \mid : 2\pi r$

Gewünschte Oberfläche = Mantel Zylinder + Deckel + Oberfläche halbe Kugel

$$\frac{150}{2\pi r} = h + 0{,}5r + 1{,}0r$$

$$\frac{150}{2\pi r} = h + 1{,}5r$$

$$\frac{150}{2\pi r} - 1{,}5r = h$$

Zielfunktion:

$$V(r) = 0{,}5 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \cdot \left(\frac{150}{2\pi r} - 1{,}5r\right)$$

$$V(r) = -\frac{5}{6}\pi r^3 + 75r \cdot$$

$$V'(r) = -\frac{15}{6}\pi r^2 + 75$$

$$0 = -\frac{15}{6}\pi r^2 + 75$$

$$0 = r^2 - \frac{30}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{30}{\pi}}$$

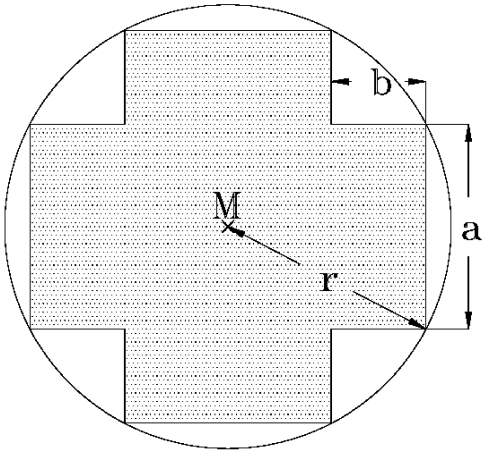
X_1=3,09 x_2=-3,09 (ausgeschlossen)

$$h = \frac{150}{2\pi r} - 1{,}5r = 3{,}09$$

Aufgabe 325:

Eine Spule mit dem Radius r (r = 0,2m) soll zur Vergrößerung der Induktivität mit einem kreuzförmigen Eisenkern gefüllt werden.

Bestimmen Sie die Abmessungen a und b des Eisenkerns so, dass sich möglichst viel Eisen im Innern der Spule befindet.



Lösung:

Hauptbedingung: $A(a;b) = a^2 + 4ab$ soll maximal werden

Nebenbedingungen: $< P > (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a + b)^2 = r^2$

Zielfunktion: $A(a) = a^2 + 4a \cdot \left(-\frac{1}{2}a + \sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}a)^2}\right) = 2a \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} - a^2$ mit $D_a = [0; 2r]$ soll maximal werden

Lösung: Das absolute Maximum des Eisenkerns liegt bei $a \approx 1{,}0515 \cdot r$ und $b \approx 0{,}3249 \cdot r$.

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

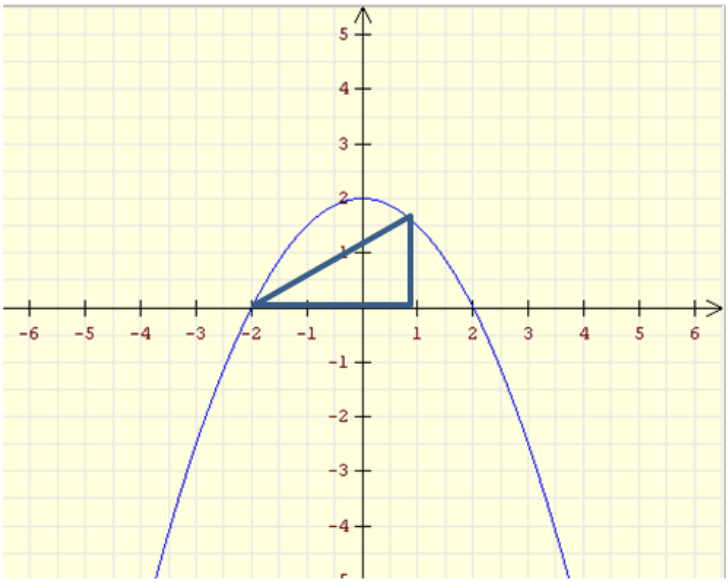
Aufgabe 326:

P(u|v) sei ein beliebiger Punkt auf der Parabel mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \text{ mit } -2 \leq x \leq 2$$

Bestimmen Sie P so, dass das Dreieck ABP mit A(-2|0) und B(u|0) den größtmöglichen Flächeninhalt hat. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

Lösung:



Zielfunktion:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Nebenbedingungen:

Grundseite des Dreiecks:

$$g = u + 2$$

Höhe des Dreiecks:

$$h = f(u)$$

$$h = -\frac{1}{2}u^2 + 2$$

In die Zielfunktion einsetzen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (u + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2 + 2\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u^3 + 2u - u^2 + 4\right)$$

$$A = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$$

Die Zielfunktion zweimal ableiten:

$$A = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$$

$$A' = -\frac{3}{4}u^2 - u + 1$$

$$A'' = -\frac{3}{2}u - 1$$

Extremwert bestimmen:

$$A' = 0$$

$$A' = -\frac{3}{4}u^2 - u + 1$$

$$-\frac{3}{4}u^2 - u + 1 = 0$$

$$-3u^2 - 4u + 4 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$u_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4}}{2 \cdot (-3)}$$

$$u_{1/2} = \frac{4 \pm 8}{-6}$$

$$u_1 = \frac{4 + 8}{-6} = -2$$

$$u_1 = -2$$

Keine plausible Lösung.

$$u_2 = \frac{4 - 8}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}$$

Überprüfung auf Maximum oder Minimum:

$$u_2 = \frac{2}{3}$$

$$A'' = -\frac{3}{2}u - 1$$

$$A''\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right) - 1 < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

Lösung bestimmen:

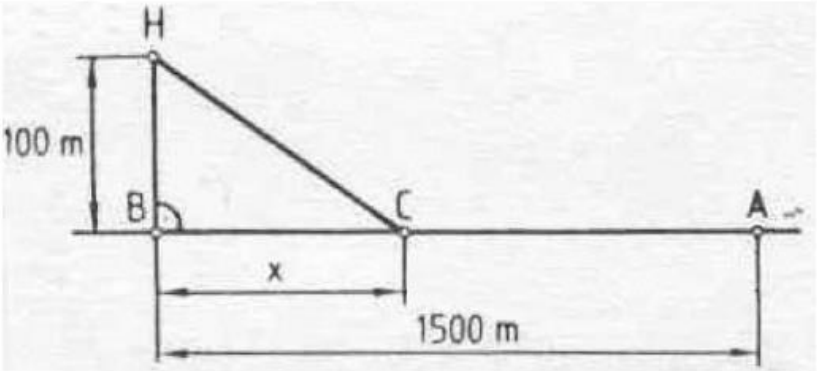
$$A = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$$

$$A = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right) + 2$$

$$A = 2{,}37$$

Aufgabe 327:

Die Reichenau Waldsiedlung liegt 100m abseits einer geradlinigen Straße, die von dem Fernheizkraftwerk Brennhütte wegführt. Auf dieser geradlinigen Straße verläuft auch das städtische Fernheizleitungssystem. Die Siedlung soll an das städtische Fernheizsystem angeschlossen werden. Ein Meter Verlegung kostet längs der Straße 1000 Euro, im Gelände hingegen 1400 Euro. Berechnen Sie denjenigen Wert für die Streckenlänge x, für den die gesamten Kosten für die Verlegung der Fernwärmeleitung von H über C nach A minimal werden und geben Sie die minimalen Kosten an.



Lösung:

Zielfunktion:

$$K(x) = 1400 \cdot \overline{HC} + 1000 \cdot \overline{CA}$$

Soll minimal werden.

Nebenbedingungen:

$$(\overline{HC})^2 = 100^2 + x^2$$

$$\overline{CA} = 1500 - x$$

Eingesetzt in die Zielfunktion:

$$K(x) = 1400 \cdot \sqrt{100^2 + x^2} + 1000 \cdot (1500 - x)$$

$$K(x) = 1400 \cdot \sqrt{100^2 + x^2} + 1.500.000 - 1000x$$

Die Funktion K(x) soll minimal werden im Definitionsbereich von:

$\mathbb{D}_x = [0; 1500]$

Bilden der ersten Ableitung:

$$K'(x) = \frac{1400}{2 \cdot \sqrt{100^2 + x^2}} \cdot 2x - 1000$$

$$K'(x) = \frac{1400x}{\sqrt{100^2 + x^2}} - 1000 = \frac{1400x - 1000 \cdot \sqrt{100^2 + x^2}}{\sqrt{100^2 + x^2}}$$

$$1400x - 1000 \cdot \sqrt{100^2 + x^2} = 0$$

$$1400x = 1000 \cdot \sqrt{100^2 + x^2} \quad |(\quad)^2$$

$$1.960.000x^2 = 1.000.000 \cdot (100^2 + x^2)$$

$$1.960.000x^2 = 10.000.000.000 \cdot +1.000.000x^2$$

$$960.000x^2 = 10.000.000.000$$

$$x^2 = 10.416{,}67$$

$$x = \pm 102{,}06$$

Negativer Wert ist außerhalb des Definitionsbereichs, deshalb:

$$x = +102{,}06$$

Bestätigung des Minimums durch einen Vorzeichen Wechsel:

$$K'(100) = \frac{1400 \cdot 100}{\sqrt{100^2 + 100^2}} - 1000 = -10{,}05$$

$$K'(100) = \frac{1400 \cdot 105}{\sqrt{100^2 + 105^2}} - 1000 = 13{,}79$$

Also handelt es sich um ein Minimum.

Berechnung der Kosten:

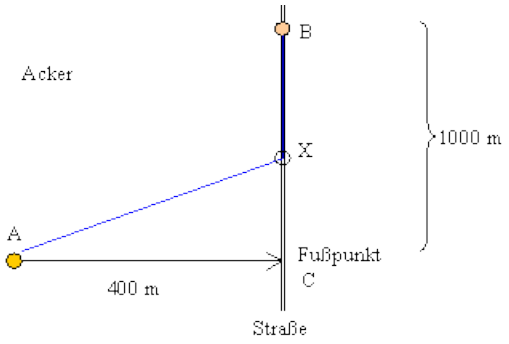
$$K(x) = 1400 \cdot \sqrt{100^2 + 102{,}06^2} + 1.500.000 - 1000 \cdot 102{,}06 = 1.597.979{,}59 \text{ Euro}$$

Aufgabe 328:

Ein Acker liegt an einer geradlinigen Straße. Ein Fußgänger befindet sich auf dem Acker im Punkt A und möchte möglichst schnell zu einem Punkt B auf der Straße gelangen. Der Fußpunkt C des Lotes von A auf die Straße hat von A die Entfernung 400m und die Entfernung B nach C betrage 1000m. Auf der Straße kann sich der Fußgänger doppelt so schnell fortbewegen wie auf dem Acker.

a) (10) Welchen Weg soll er einschlagen, damit er so schnell wie möglich am Ziel B ankommt?

b) (5) Was ändert sich, wenn die Entfernung von B nach C 100m beträgt.

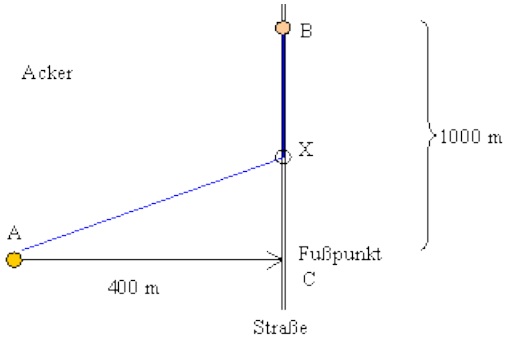


Lösung:

Der Weg des Fußgängers von A nach B besteht aus 2 Teilen (blaue Linien).

Einem geraden Weg von A zu einem Punkt X auf der Straße.

Dabei hat X die Entfernung x von C mit 0<=x<=1000, und als zweitem Teilstück den Weg von X nach B (auf der Straße).



Der Weg von A nach X führt über den Acker, der Weg von X nach B über die Straße.

Die Länge des Weges von A nach X ist y = wurzel(400^2+x^2).

Die Länge des Weges von X nach B ist 1000-x.

Da A auf dem Acker nur halb so schnell vorwärtskommt wie auf der Straße, ist folgende Funktion zu minimieren:

f(x) = 2*y+(1000-x)

[die 2 drückt aus, dass zurückzulegende Meter auf dem Acker doppelt zählen.] Mit der Nebenbedingung

y = wurzel(400^2+x^2)

ergibt sich:

f(x) = 2*wurzel(400^2+x^2) + (1000 - x) = min!

Die Ableitung der Funktion f(x) lautet f'(x)=2x/wurzel(400^2+x^2)-1.

Als Lösung von f'(x)=0 findet man: x = wurzel(400^2/3) = 230,94...

Die Weglänge über den Acker beträgt darum etwas mehr als 461,8 m.

Wenn aber der Abstand zwischen B und C nur 100m beträgt, dann lautet die zu minimierende Funktion: f(x)=2*wurzel(400^2+x^2)+100-x.

Davon die Ableitung ist die gleiche wie vorhin schon betrachtet, und die Ableitung hat für 0<=x<=100 keine Nullstelle.

Also gibt es in diesem Fall kein lokales Minimum. Die Funktion ist im ganzen Intervall [0,100] streng monoton. Der Minimalwert liegt dann am Rand des Definitionsbereichs, also entweder bei x=0 oder bei x=100.

Für x=0 erhalte ich f(x) = 2*400+100 = 900

und für x=100 ist f(x) = 2*412+100-100 = 824.

Der Wert für x=100 ist der kleinere.

Folglich führt der zeitlich kürzeste Weg von A nach B auf gerader Linie direkt über den Acker.

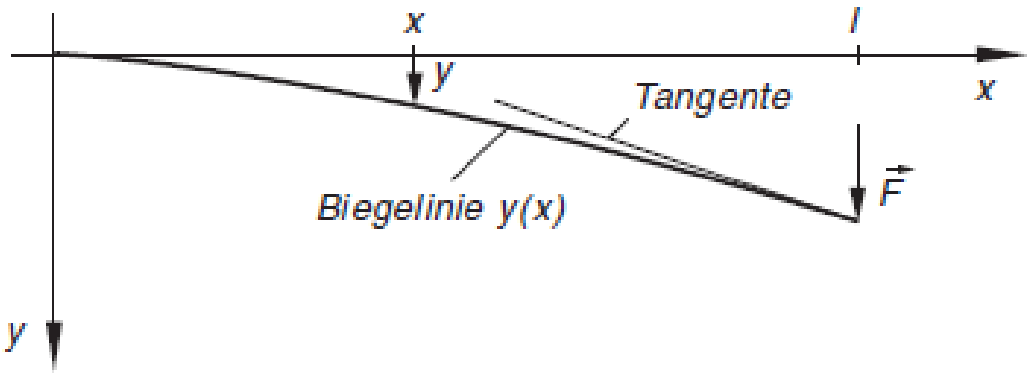
Aufgabe 329:

Die Biegelinie eines einseitig eingespannten und am freien Ende durch eine Kraft vom Betrage F auf Biegung beanspruchten Balkens der Länge l lautet wie folgt

$$y(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}\left(l \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \quad (0 \le x \le l)$$

Wobei E und I positive Konstanten sind.

An welcher Stelle des Balkens ist die Durchbiegung am größten und wo ist Sie am kleinsten?

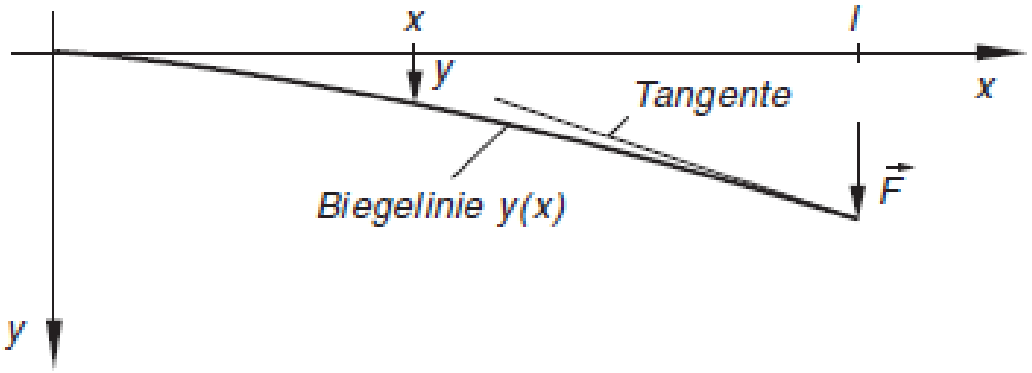


Lösung:

Die Biegelinie eines einseitig eingespannten und am freien Ende durch eine Kraft vom Betrage F auf Biegung beanspruchten Balkens der Länge l lautet wie folgt:

$$y(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}\left(l \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \quad (0 \le x \le l)$$

E und l sind positive Konstanten. An welcher Stelle des Balkens ist die Durchbiegung y am größten?



Zunächst ermitteln wir die im Intervall $0 \le x \le l$ gelegenen relativen Extremwerte:

$$y(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}\left(l \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \quad (0 \le x \le l)$$

$$y'(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}(2 \cdot l \cdot x - x^2)$$

$$y''(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}(2 \cdot l - 2x) = \frac{F}{E \cdot I}(l - x)$$

$$y'(x) = 0$$

$$2 \cdot l \cdot x - x^2 = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2 \cdot l$$

Der zweite Wert ($x_2 = 2l$) liegt außerhalb des Intervalls und kommt daher nicht in Frage. An der Stelle $x_1 = 0$, d. h. an der Einspannstelle ist die Durchbiegung des Balkens wegen

$$y''(x_1 = 0) = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} > 0$$

am kleinsten.

Physikalisch gesehen ist wegen der Einspannung eine Durchbiegung nicht möglich.

Die Maximale Durchbiegung erfährt der Balken daher am rechten Randpunkt x=l, d. h. am freien Ende, wo auch die Kraft einwirkt.

$$y_{max}(x = l) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}\left(l \cdot l^2 - \frac{1}{3}l^3\right) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2}{3}l^3 = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Substituiere zurück: $w = t^2 + 1$.

Komplexe Zahlen

Aufgabe 330:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $2\cdot 3i$ b) $-3i\cdot 6i$ c) $(-3i)\cdot(-4i)$ d) $i^3\cdot 4i^2$

e) $i^5\cdot i$ f) $\dfrac{4i^3}{2i^5}$ g) $\dfrac{4i^2}{5i}$ h) $1+\dfrac{1}{i^2}$

i) $i^6+\dfrac{3}{i^2}$ j) $\dfrac{1}{(-i)^3}-i$ k) $\dfrac{2}{i}+\dfrac{3}{i^3}$ l) $(2i^3)^{-3}$

Lösung:

a) $2\cdot 3i=6i$

b) $-3i\cdot 6i=-18i^2=-18\cdot(-1)=18$

c) $(-3i)\cdot(-4i)=12\cdot i^2=12\cdot(-1)=-12$

d) $i^3\cdot 4i^2=4\cdot i^5=4\cdot i^4\cdot i=4i$, denn $i^4=1$

e) $i^5\cdot i=i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$

f) $\dfrac{4i^3}{2i^5}=\dfrac{2}{i^2}=\dfrac{2}{-1}=-2$

g) $\dfrac{4i^2}{5i}=\dfrac{4i}{5}=\dfrac{4}{5}i$

h) $1+\dfrac{1}{i^2}=1+\dfrac{1}{-1}=1+(-1)=0$

i) $i^6+\dfrac{3}{i^2}=i^4\cdot i^2+\dfrac{3}{i^2}=1\cdot(-1)+\dfrac{3}{-1}=-1-3=-4$

j) $\dfrac{1}{(-i)^3}-i=\dfrac{1\cdot i}{-i^3\cdot i}-i=\dfrac{i}{-i^4}-i=\dfrac{i}{-1}-i=-i-i=-2i$

k) $\dfrac{2}{i}+\dfrac{3}{i^3}=\dfrac{2\cdot i}{i\cdot i}+\dfrac{3\cdot i}{i^3\cdot i}=\dfrac{2i}{-1}+\dfrac{3i}{1}=-2i+3i=i$

l) $(2i^3)^{-3}=2^{-3}i^{-9}=\dfrac{1}{8i^9}=\dfrac{1}{8\cdot\underbrace{i^4\cdot i^4}_{=1}\cdot i}=\dfrac{1}{8i}=\dfrac{1\cdot i}{8\cdot i\cdot i}=\dfrac{i}{8i^2}=\dfrac{i}{-8}=-\dfrac{1}{8}i$

Aufgabe 331:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\sqrt{-36}$ b) $\sqrt{-169}$ c) $\sqrt{-48}$ d) $\sqrt{-3^3}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{-2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$ g) $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$ h) $\dfrac{24}{\sqrt{-12}+\sqrt{-18}}$.

Lösung:

a) $\sqrt{-36} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1} = 6\mathrm{i}$

b) $\sqrt{-169} = \sqrt{169}\cdot\sqrt{-1} = 13\mathrm{i}$

c) $\sqrt{-48} = \sqrt{-16\cdot 3} = 4\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$

d) $\sqrt{-3^3} = \sqrt{-3^2}\cdot\sqrt{-3} = -3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = -3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{-2}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{-2} = -2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

f) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}{\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} = \dfrac{3\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = \dfrac{3\mathrm{i}}{-1} = -3\mathrm{i}$

oder $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}{-3} = -3\mathrm{i}$

g) $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}}{2\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}} = 2$

oder $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}} = \sqrt{\dfrac{-32}{-8}} = \sqrt{4} = 2$!!!!

h) $\dfrac{24}{\sqrt{-12}+\sqrt{-18}} = \dfrac{24\cdot(\sqrt{-12}-\sqrt{-18})}{(\sqrt{-12}+\sqrt{-18})\cdot(\sqrt{-12}-\sqrt{-18})} = \dfrac{24\cdot(2\sqrt{3}\,\mathrm{i}-3\sqrt{2}\,\mathrm{i})}{-12-(-18)} =$

$= \dfrac{24(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})\,\mathrm{i}}{6} = 4(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})\,\mathrm{i} = (8\sqrt{3}-12\sqrt{2})\,\mathrm{i}$

oder $\dfrac{24}{\sqrt{-12}+\sqrt{-18}} = \dfrac{24}{2\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}+3\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}} = \dfrac{24\cdot(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})\,\mathrm{i}}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\,\mathrm{i}\cdot(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})\,\mathrm{i}}$

$= \dfrac{(48\sqrt{3}-72\sqrt{2})\cdot\mathrm{i}}{(12-18)\cdot\mathrm{i}^2} = \dfrac{48\sqrt{3}-72\sqrt{2}}{6}\mathrm{i} = (8\sqrt{3}-12\sqrt{2})\cdot\mathrm{i}$

Aufgabe 332:

Führen Sie folgende Additionen durch:

a) $(12+15i)+(7+4i)$ b) $(-2+5i)+(7-2i)$ c) $(-3-i)+(1-5i)$

d) $(5+2i)+(-5-2i)$ e) $(7-3i)+(-7+9i)$ f) $(1+i)+(-2-i)$

g) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$ $z_1+z_1^*=?$ h) $z_2=5-8i$, $z_2+z_2^*=?$

Lösung:

a) $(12+15i)+(7+4i)=19+19i$

b) $(-2+5i)+(7-2i)=5+3i$

c) $(-3-i)+(1-5i)=-2-6i$

d) $(5+2i)+(-5-2i)=0+0i=0$

e) $(7-3i)+(-7+9i)=0+6i=6i$

f) $(1+i)+(-2-i)=-1$

g) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$ $z_1+z_1^*=-13+i\cdot\sqrt{3}+\left(-13-i\sqrt{3}\right)=-26$

h) $z_2=5-8i$, $z_2+z_2^*=5-8i+(5+8i)=10$

Aufgabe 333:

Führen Sie folgende Subtraktionen durch:

a) $(12+15i)-(7+4i)$ b) $(-2+5i)-(7-2i)$ c) $(-3-i)-(1-5i)$

d) $(5+2i)-(-5-2i)$ e) $(7-3i)-(-7+9i)$ f) $(1+i)-(-2-i)$

g) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$, $z_1-z_1^*=?$ h) $z_2=5-8i$, $z_2-z_2^*=?$

Lösung:

a) $(12+15i)-(7+4i)=5-11i$

b) $(-2+5i)-(7-2i)=-9+7i$

c) $(-3-i)-(1-5i)=-4+4i$

d) $(5+2i)-(-5-2i)=10+4i$

e) $(7-3i)-(-7+9i)=14-12i$

f) $(1+i)-(-2-i)=3+2i$

g) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}\ ,\ z_1-z_1^*=-13+i\cdot\sqrt{3}-(-13-i\cdot\sqrt{3})=2\sqrt{3}\cdot i$

h) $z_2=5-8i\ ,\ z_2-z_2^*=5-8i-(5+8i)=-16\,i$

Aufgabe 334:

Führen Sie folgende Multiplikationen durch:

a) $(2+3i)(4+7i)$ b) $(3-8i)(5+2i)$ c) $(12-i)(1-12i)$

d) $(-3+2i)(6-2i)$ e) $(5+2i)(5-2i)$ f) $(-2-7i)(-3-8i)$

Lösung:

a) $(2+3i)(4+7i)=8+14i+12i+21i^2=8+26i-21=-13+26\,i$

b) $(3-8i)(5+2i)=15+6i-40i-16\,i^2=15-34i+16=31-34\,i$

c) $(12-i)(1-12i)=12-144\,i-i+12\,i^2=12-145\,i-12=-145\,i$

d) $(-3+2i)(6-2i)=-18+6i+12i-4i^2=-18+18i+4=-14+18\,i$

e) $(5+2i)(5-2i)=25-10i+10i-4\,i^2=25+4=29$

f) $(-2-7i)(-3-8i)=6+16\,i+21i+56\,i^2=6+37\,i-56=-50+37\,i$

Aufgabe 335:

Bringen Sie das Ergebnis auf die Form a + bi

a) $\frac{4}{8+3i}$ b) $\frac{i}{4-i}$ c) $\frac{2+3i}{2-3i}$ d) $\frac{4+2i}{2+4i}$

e) $\frac{8-8i}{2+2i}$ f) $\frac{1-i}{i-2}$ g) $\frac{12+5i}{13-8i}$ h) $\frac{1-4i}{5+6i}$

Lösung:

a) $\frac{4}{8+3i}=\frac{4\cdot(8-3i)}{(8+3i)\cdot(8-3i)}=\frac{4\cdot(8-3i)}{64-9i^2}=\frac{32-12i}{64+9}=\frac{32-12i}{73}=\frac{32}{73}-\frac{12}{73}i$

b) $\frac{i}{4-i}=\frac{i\cdot(4+i)}{(4-i)\cdot(4+i)}=\frac{4i+i^2}{16-i^2}=\frac{4i-1}{16+1}=\frac{-1+4i}{17}=-\frac{1}{17}+\frac{4}{17}i$

c) $\frac{2+3i}{2-3i}=\frac{(2+3i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)}=\frac{4+12i+9i^2}{4-9i^2}=\frac{4+12i-9}{4+9}=\frac{-5+12i}{13}=-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$

d) $\frac{4+2i}{2+4i}=\frac{(4+2i)\cdot(2-4i)}{(2+4i)\cdot(2-4i)}=\frac{8-16i+4i-8i^2}{4-16\cdot i^2}=\frac{16-12i}{4+16}=\frac{16}{20}-\frac{12}{20}i=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

e) $\frac{8-8i}{2+2i}=\frac{8(1-i)^2}{2(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{4(1-2i+i^2)}{1-i^2}=\frac{4(1-2i-1)}{2}=2\cdot(-2i)=-4i$

f) $\frac{1-i}{i-2}=\frac{(1-i)(i+2)}{(i-2)(i+2)}=\frac{i+2-i^2-2i}{i^2-4}=\frac{i+2+1-2i}{-1-4}=\frac{3-i}{-5}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$

g) $\frac{12+5i}{13-8i}=\frac{(12+5i)\cdot(13+8i)}{(13-8i)\cdot(13+8i)}=\frac{156+96i+65i+40i^2}{169-64\cdot i^2}=\frac{116+161i}{169+64}=\frac{116}{233}+\frac{161}{233}i$

h) $\frac{1-4i}{5+6i}=\frac{(1-4i)\cdot(5-6i)}{(5+6i)\cdot(5-6i)}=\frac{5-6i-20i+24i^2}{25-36i^2}=\frac{-19-26i}{25+36}=-\frac{19}{61}-\frac{26}{61}i$

Aufgabe 336:

Berechnen Sie die Kehrwerte zu diesen Zahlen:

a) $-4+5\cdot i$ b) $-12-5i$ c) $\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$ d) $\frac{2}{7}\sqrt{6}-\frac{5}{7}$

Lösung:

a) $z = -4 + 5 \cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|} = \frac{-4 - 5i}{\sqrt{41}} = -\frac{4}{\sqrt{41}} - \frac{5}{\sqrt{41}}i$

b) $z = -12 - 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{144 + 25} = 13 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{-12 + 5i}{13} = -\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$

c) $z = \frac{5}{13} - \frac{12}{13}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{25}{169} + \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = z^* = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$

d) $z = \frac{2}{7}\sqrt{6} - \frac{5}{7} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{4}{49} \cdot 6 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = z^* = \frac{2}{7}\sqrt{6} + \frac{5}{7}$

Aufgabe 337:

Verwenden Sie die üblichen Binomischen Gesetze.

a) $\frac{3 + 2i}{(5 - 3i)^2}$ b) $\frac{2 + 10i}{(4 + i)^2}$ c) $\frac{3 - i}{(3 + i)^3}$ d) $\left(\frac{2 + 7i}{3 - 2i}\right)^2$

e) $(2 + 4i)^3 = (2 + 4i)^2 \cdot (2 + 4i) =$ f) $(5 - i)^3$ g) $(3 + 2i)^4$

h) $\frac{(4 + 5i)^3}{2 - 2i}$

Lösung:

a) $$\frac{3+2i}{(5-3i)^2}=\frac{3+2i}{25-30i+9i^2}=\frac{3+2i}{16-30i}=\frac{(3+2i)\cdot(16+30i)}{(16-30i)\cdot(16+30i)}=\frac{48+90i+32i+60i^2}{256+900}$$
$$=\frac{48+122i-60}{1156}=\frac{-12+122i}{1156}=-\frac{6}{578}+\frac{61}{578}i$$

b) $$\frac{2+10i}{(4+i)^2}=\frac{2+10i}{16+8i+i^2}=\frac{2+10i}{15+8i}=\frac{(2+10i)\cdot(15-8i)}{(15+8i)\cdot(15-8i)}=\frac{30-16i+150i-80i^2}{225+64}$$
$$=\frac{110+134i}{289}=\frac{110}{289}+\frac{134}{289}i$$

c) $$\frac{3-i}{(3+i)^3}=\frac{3-i}{9+6i+i^2}=\frac{3-i}{8+6i}=\frac{(3-i)\cdot(8-6i)}{(8+6i)\cdot(8-6i)}=\frac{24-18i-8i+6i^2}{64+36}$$
$$=\frac{18-26i}{100}=\frac{9}{50}-\frac{13}{50}i$$

d) $$\left(\frac{2+7i}{3-2i}\right)^2=\left(\frac{(2+7i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)}\right)^2=\left(\frac{6+4i+21i-14}{9+4}\right)^2=\left(\frac{-8+25i}{13}\right)^2=$$
$$=\frac{64-400i+625i^2}{169}=\frac{-561-400i}{169}=-\frac{561}{169}-\frac{400}{169}i$$

oder so: $$\left(\frac{2+7i}{3-2i}\right)^2=\frac{4+28i-49}{9-12i-4}=\frac{(-45+28i)\cdot(5+12i)}{(5-12i)\cdot(5+12i)}=\frac{-225-540i+140i-336}{25+144}=$$
$$=\frac{-561-400i}{169}=-\frac{561}{169}-\frac{400}{169}i$$

e) $$(2+4i)^3=(2+4i)^2\cdot(2+4i)=(4+16i-16)\cdot(2+4i)=(-12+16i)\cdot(2+4i)=$$
$$=-24-48i+32i-64=-88-16i$$

f) $$(5-i)^3=(5-i)^2\cdot(5-i)=(25-10i+i^2)(5-i)=(24-10i)(5-i)=$$
$$=120-24i-50i+10i^2=110-76i$$

g) $$(3+2i)^4=(9+12i-4)^2=(5+12i)^2=25+120i-144=-119+120i$$

h) $$\frac{(4+5i)^3}{2-2i}=\frac{(16+40i-25)(4+5i)\cdot(2+2i)}{(2-2i)\cdot(2+2i)}=\frac{(-9+40i)(8+8i+10i-10)}{4+4}=$$
$$=\frac{(-9+40i)(-2+18i)}{8}=\frac{18-162i-80i-720}{8}=-\frac{702}{8}-\frac{242}{8}i$$
$$=-\frac{351}{4}-\frac{121}{4}i$$

Aufgabe 338:

Berechnen Sie die Lösungsmengen mit komplexen Zahlen für diese quadratischen Gleichungen:

a) $x^2+6x+10=0$ b) $x^2-3x+9=0$

c) $\frac{1}{2}x^2-3x+29=0$ d) $x^2+5x+7=0$

e) $3x^2-4x+2=0$ f) $\frac{3}{2}x^2+4x+8=0$

g) $x^2+7x+19=0$ h) $\frac{1}{8}x^2+3x+20=0$

Lösung:

a) $x^2+6x+10=0$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-6\pm 2i}{2}=-3\pm i$$

$$\mathbf{L}=\{-3+i;-3-i\}$$

b) $x^2-3x+9=0$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-36}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-27}}{2}=\frac{3\pm 3\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\mathbf{L}=\left\{\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

c) $\frac{1}{2}x^2-3x+29=0$

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 29}=3\pm\sqrt{9-58}=3\pm\sqrt{-49}=3\pm 7i$$

$$\mathbf{L}=\{3\pm 7i\}$$

d) $x^2+5x+7=0$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-49}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{-24}}{2}=\frac{-5\pm2\sqrt{6}\cdot i}{2}=-\frac{5}{2}\pm i\sqrt{6}$$

$$L=\left\{-\tfrac{5}{2}\pm i\sqrt{6}\right\}$$

e) $3x^2-4x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot3\cdot2}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{4\pm2\sqrt{2}\cdot i}{6}=\frac{2}{3}\pm i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$L=\left\{\frac{2}{3}\pm i\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$$

f) $\frac{3}{2}x^2+4x+8=0$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot\frac{3}{2}\cdot8}}{3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-48}}{3}=\frac{-4\pm\sqrt{-32}}{3}=\frac{-4\pm4\sqrt{2}\cdot i}{3}=-\frac{4}{3}\pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\,i$$

$$\mathbf{L}=\left\{-\frac{4}{3}\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\,i\right\}$$

g) $x^2+7x+19=0$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-76}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{-27}}{2}=\frac{-7\pm3\sqrt{3}\cdot i}{2}=-\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$\mathbf{L}=\left\{-\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i\right\}$$

h) $\frac{1}{8}x^2+3x+20=0$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot\frac{1}{8}\cdot20}}{\frac{1}{4}}=4\cdot\left(-3\pm\sqrt{9-10}\right)=4\cdot\left(-3\pm\sqrt{-1}\right)=-12\pm4i$$

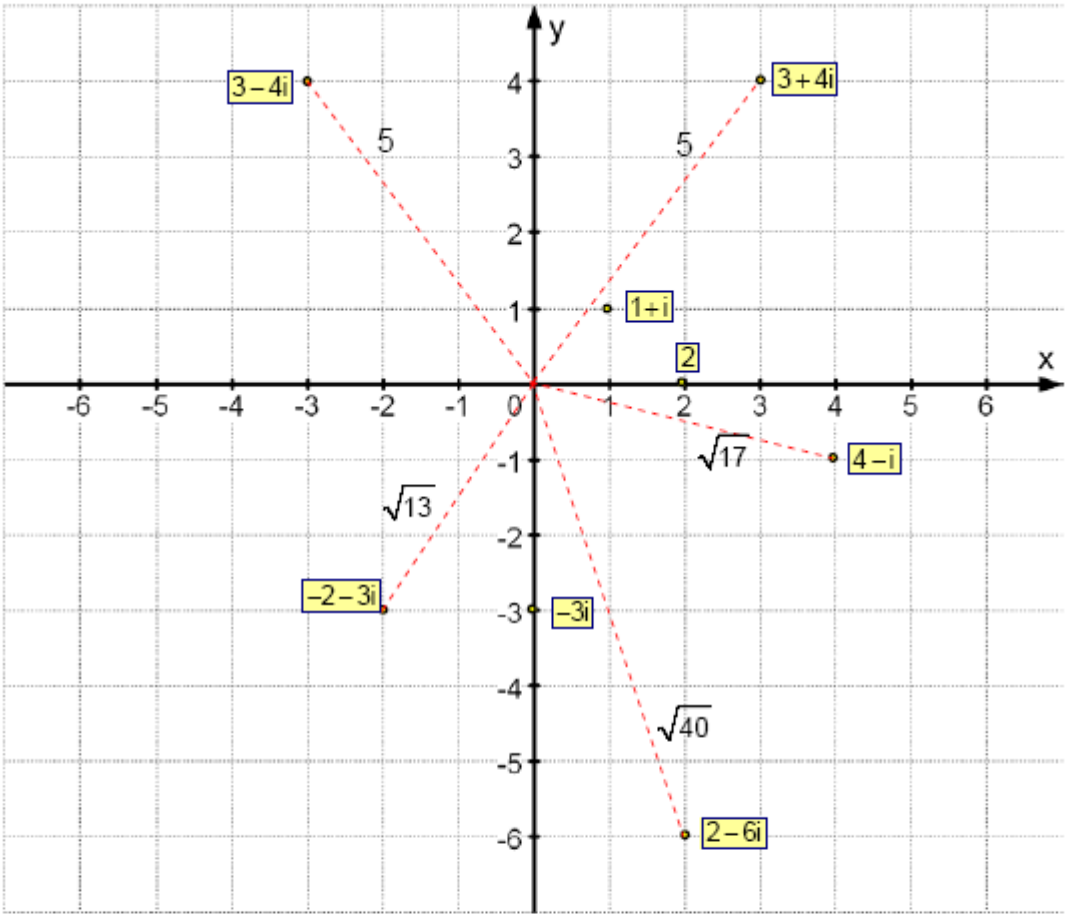
$$\mathbf{L}=\left\{-12\pm4i\right\}$$

Aufgabe 339:

Zeichne die zu diesen komplexen Zahlen gehörenden Punkte in ein Achsenkreuz der Gauß'schen Ebene ein und berechne ihre Betrag:

a)	4 – i	b)	3 + 4i	c)	- 3 + 4i	d)	-2 – 3i
e)	- 3i	f)	2 –6i	g)	1 + i	h)	2

Lösung:



a)	$\lvert 4-i\rvert = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$	b)	$\lvert 3+4i\rvert = \sqrt{9+16} = 5$
c)	$\lvert -3+4i\rvert = \sqrt{9+16} = 5$	d)	$\lvert -2-3i\rvert = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
e)	$\lvert -3i\rvert = 3$	f)	$\lvert 2-6i\rvert = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$
g)	$\lvert 1+i\rvert = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$	h)	$\lvert 2\rvert = 2$

Aufgabe 340:

Berechnen Sie die Polarkoordinaten zu folgenden komplexen Zahlen:

(a)	z = 12 – 5 i	(b)	- 6 + 8 i	(c)	$-\sqrt{11}-5i$
(d)	$-1-\sqrt{3}$	(e)	1 – i	(f)	$5-i\sqrt{24}$

Lösung:

(a) $z = 12 - 5\,i$

$|z| = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$,

$\varphi' = \arctan\left|\frac{-5}{8}\right| = \arctan\frac{5}{8} = 32^\circ$

z liegt im 4. Feld, also wird $\varphi = 360^\circ - \varphi' = 348^\circ$.

(b) $-6 + 8\,i$

$|z| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{8}{-6}\right| = \arctan\frac{4}{3} = 53{,}13^\circ$

z liegt im 2. Feld, also folgt $\varphi = 180^\circ - \varphi' = 126{,}87^\circ$

(c) $-\sqrt{11} - 5i$

$|z| = \sqrt{11+25} = \sqrt{36} = 6$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{-5}{-\sqrt{11}}\right| = \arctan\frac{5}{\sqrt{11}} = 56{,}44^\circ$

z liegt im 3. Feld, also gilt $\varphi = 180^\circ + \varphi' = 236{,}44^\circ$

(d) $-1 - \sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ$

z liegt im 3. Feld, also gilt $\varphi = 180^\circ + \varphi' = 240^\circ$

(e) $1 - i$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{-1}{1}\right| = \arctan 1 = 45^\circ$

z liegt im 4. Feld, also folgt $\varphi = 360^\circ - \varphi' = 315^\circ$

(f) $5 - i\sqrt{24}$

$|z| = \sqrt{25+24} = \sqrt{49} = 7$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{-\sqrt{24}}{5}\right| = \arctan\frac{\sqrt{24}}{5} = 44{,}42^\circ$

z liegt im 4. Feld, also gilt $\varphi = 360^\circ - \varphi' = 315{,}58^\circ$

Aufgabe 341:

Folgende komplexe Zahlen sind durch Polarkoordinaten gegeben. Berechne Sie ihre Kartesischen Koordinaten.

(a) $[12\,;60^\circ]$ (b) $[\sqrt{32}\,;135^\circ]$ (c) $[15\,;180^\circ]$

(d) $[4\,;90^\circ]$ (e) $[8\,;210^\circ]$ (f) $[\sqrt{18}\,;330^\circ]$

(g) $[\sqrt{5}\,;115^\circ]$ (h) $[\sqrt{24}\,;300^\circ]$ (i) $[6\,;218^\circ]$

Lösung:

(a) $[12;60^\circ]$ $z = 12\cdot(\cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ) = 12\cdot\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 6 + i\cdot 6\sqrt{2}$

(b) $[\sqrt{32};135^\circ]$ $z = \sqrt{32}\cdot(\cos 135^\circ + i\cdot\sin 135^\circ) = 4\sqrt{2}\cdot(-\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)$
$z = 4\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -4 + i\cdot 4$

(c) $[15;180^\circ]$ $z = 15\cdot(\cos 180^\circ + i\cdot\sin 180^\circ) = 15\cdot(-1 + i\cdot 0) = -15$

(d) $[4;90^\circ]$ $z = 4\cdot(\cos 90^\circ + i\cdot\sin 90^\circ) = 4\cdot(0 + i\cdot 1) = i\cdot 4$

(e) $[8;210^\circ]$ $z = 8\cdot(\cos 210^\circ + i\cdot\sin 210^\circ) = 8\cdot(-\cos 30^\circ - i\cdot\sin 30^\circ)$
$z = 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} - i\cdot 4$

(f) $[\sqrt{18};330^\circ]$ $z = \sqrt{18}\cdot(\cos 330^\circ + i\cdot\sin 330^\circ) = \sqrt{18}\cdot(\cos 30^\circ - i\cdot\sin 30^\circ)$
$z = 3\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{6} - i\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(g) $[\sqrt{5};115^\circ]$ $z = \sqrt{5}\cdot(\cos 115^\circ + i\cdot\sin 115^\circ) = \sqrt{5}\cdot(-\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)$
$z = \sqrt{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{10} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{10}$

(h) $[\sqrt{24};300^\circ]$ $z = \sqrt{24}\cdot(\cos 300^\circ + i\cdot\sin 300^\circ) = 2\sqrt{6}\cdot(\cos 60^\circ - i\cdot\sin 60^\circ)$
$z = 2\sqrt{6}\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \sqrt{6} - i\cdot\sqrt{18} = \sqrt{6} - i\cdot 3\sqrt{2}$

(i) $[6;218^\circ]$ $z = 6(\cos 118^\circ + i\cdot\sin 118^\circ) = 6\cdot(-\cos 62^\circ + i\cdot\sin 62^\circ)$
$z = -2{,}817 + i\cdot 5{,}300$

Aufgabe 342:

Stellen Sie in der Form $|z| = E(\varphi)$dar:

a) $z = 3 - 4i$ b) $z = -\frac{4}{5} - i\cdot\frac{3}{5}$ c) $z = \sqrt{3} + i$ d) $z = 3 + i\sqrt{27}$

Lösung:

a) $z = 3 - 4i$

$|z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{-4}{3}\right| = \arctan\frac{4}{3} = 53{,}13^\circ$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi = 360^\circ - \varphi' = 306{,}85^\circ$

Ergebnis: $z = 3 - 4i = 5 \cdot E(306{,}85^\circ)$

b) $z = -\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}$

$|z| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$

$\varphi' = \arctan\left|\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}\right| = \arctan\frac{3}{4} = 36{,}87^\circ$

Da z im 3. Feld liegt, folgt $\varphi = 180^\circ + \varphi' = 216{,}87^\circ$

Ergebnis: $z = -\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5} = E(216{,}87^\circ)$

c) $z = \sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$

$z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot E(30^\circ)$

d) $z = 3 + i\sqrt{27}$

$|z| = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

$\varphi = \arctan\frac{\sqrt{27}}{3} = \arctan\frac{3\sqrt{3}}{3} = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ$

$z = 3 + i\sqrt{27} = 6 \cdot E(60^\circ)$

Aufgabe 343:

Berechnen Sie diese komplexen Zahlen:

a) $z = E(30^\circ) \cdot E(60^\circ)$ b) $z = E(45^\circ)^3$ c) $z = E(240^\circ)^2$

d) $z = E(-\frac{1}{3}\pi)$ e) $z = \frac{1}{E(135^\circ)}$ f) $z = \frac{E(\frac{1}{6}\pi)}{E(\frac{2}{3}\pi)}$

Lösung:

a) $z = E(30^\circ)\cdot E(60^\circ) = E(30^\circ + 60^\circ) = E(90^\circ) = \cos 90^\circ + i\cdot\sin 90^\circ = 0 + i\cdot 1 = i$

b) $z = E(45^\circ)^3 = E(3\cdot 45^\circ) = E(135^\circ) = \cos 135^\circ + i\cdot\sin 135^\circ = -\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ$

$z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $z = E(240^\circ)^2 = E(2\cdot 240^\circ) = E(480^\circ) = E(480^\circ - 360^\circ) = E(120^\circ)$

$z = -\cos 30^\circ + i\cdot\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{1}{2}$

d) $z = E\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = E(-60^\circ + 360^\circ) = E(300^\circ) = \cos 300^\circ + i\cdot\sin 300^\circ$

$z = \cos 60^\circ - i\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e) $z = \frac{1}{E(135^\circ)} = E(135^\circ)^{-1} = E(-135^\circ) = E(-135^\circ + 360^\circ) = E(225^\circ)$

$z = \cos 225^\circ + i\cdot\sin 225^\circ = -\cos 45^\circ - i\cdot\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f) $z = \frac{E\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{E\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = E\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = E\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{4}{6}\pi\right) = E\left(-\frac{3}{6}\pi\right) = E\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = E(-90^\circ + 360^\circ)$

$z = E(270^\circ) = \cos 270^\circ + i\cdot\sin 270^\circ = 0 + i\cdot(-1) = -i$

Aufgabe 344:

Berechne aus $z_1 = 1{,}5\cdot E(60^\circ)$ und $z_2 = 3\cdot E(135^\circ)$ das Produkt $z_3 = z_1\cdot z_2$.

Konstruiere den Vektorpfeil dieses Ergebnis auch über eine Drehstreckung.

Und als Nebenprodukt bestimme noch $\sin 195^\circ$ und $\cos 195^\circ$.

Lösung:

1. Berechnung:

$z_1 = 1{,}5\cdot E(60^\circ) = \frac{3}{2}\cdot(\cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ) = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{3}{4} + i\cdot\frac{3}{4}\sqrt{3}$

$z_2 = 3\cdot E(135^\circ) = 3\cdot(\cos 135^\circ + i\cdot\sin 135^\circ) = 3\cdot(-\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)$

$= 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$z_3 = z_1\cdot z_2 = \left(\frac{3}{4} + i\cdot\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{9}{8}\sqrt{2} + i\cdot\frac{9}{8}\sqrt{2} - i\cdot\frac{9}{8}\sqrt{6} + i^2\cdot\frac{9}{8}\sqrt{6}$

$= -\frac{9}{8}\sqrt{2} - \frac{9}{8}\sqrt{6} + i\cdot\left(\frac{9}{8}\sqrt{2} - \frac{9}{8}\sqrt{6}\right)$

2. Berechnung:

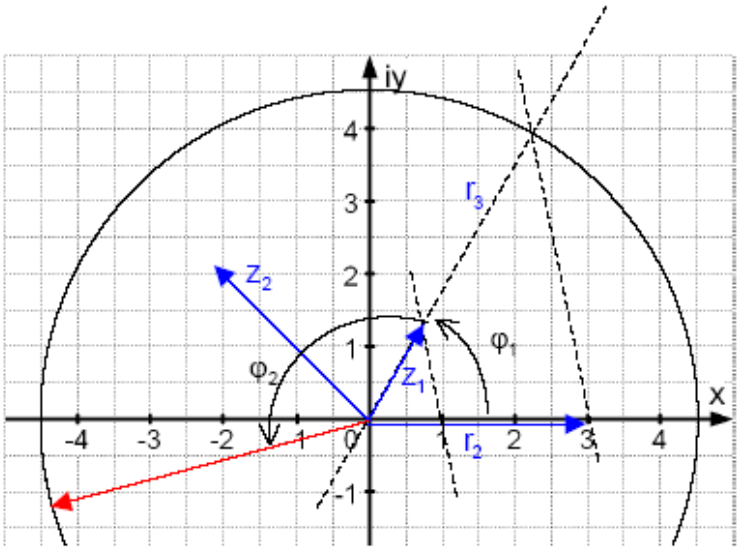
$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = 1{,}5 \cdot E(60^\circ) \cdot 3 \cdot E(135^\circ) = 4{,}5 \cdot E(195^\circ) = 4{,}5 \cdot (\cos 195^\circ + i \cdot \sin 195^\circ)$$

Vergleich beider Ergebnisse liefert

$\frac{9}{2} \cdot \cos 195^\circ = -\frac{9}{8}\sqrt{2} - \frac{9}{8}\sqrt{6} \quad | \cdot \frac{2}{9}$ ergibt $\cos 195^\circ = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} = -\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})$

$\frac{9}{2} \cdot \sin 195^\circ = \frac{9}{8}\sqrt{2} - \frac{9}{8}\sqrt{6} \quad | \cdot \frac{2}{9}$ ergibt $\sin 195^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

Konstruktion dieser Multiplikation als Drehstreckung:
z_1 wird mit dem Faktor $r_2 = |z_2| = 3$ gestreckt und dann um 135° gedreht.



Aufgabe 345:

Was bedeutet eine Multiplikation einer Zahl mit

a) $-i$ b) $-\frac{4}{3} + i \cdot \frac{3}{5}$ c) $\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2} - i \cdot 2\sqrt{2}$ f) $-\sqrt{48} + i \cdot 4$

Lösung:

a) $-i$ Wegen $|-i|=1$ und $\varphi=270^\circ$ bedeutet die Multiplikation mit $-i$ eine Drehung um 270°.

b) $-\frac{4}{3}+i\cdot\frac{3}{5}$ Wegen $\left|-\frac{4}{3}+i\cdot\frac{3}{5}\right|=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}}=1$ und

$$\varphi'=\arctan\left|\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}\right|=\arctan\frac{3}{4}=36{,}87^\circ$$

also $\varphi=180^\circ-\varphi'=143{,}13^\circ$
bedeutet diese Multiplikation eine Drehung um $143{,}13^\circ$.

c) $\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$ Wegen $\left|\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}\right|=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$ und

$$\varphi'=\arctan\left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|=\arctan 1=45\ \Rightarrow\ \varphi=315^\circ$$

bedeutet diese Multiplikation eine Drehstreckung mit dem Faktor 2 und dem Drehwinkel 315°.

d) $2\sqrt{2}+i\cdot 2\sqrt{2}$ Wegen $\left|2\sqrt{2}+i\cdot 2\sqrt{2}\right|=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$ und

$\varphi=\arctan\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\arctan 1=45^\circ$ bedeutet diese Multiplikation eine Drehstreckung mit dem Faktor 4 und dem Drehwinkel 45°.

e) $2\sqrt{2}-i\cdot 2\sqrt{2}$ Wegen $\left|2\sqrt{2}-i\cdot 2\sqrt{2}\right|=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$ und

$$\varphi'=\arctan\left|\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right|=\arctan 1=45^\circ\ \Rightarrow\ \varphi=315^\circ$$

bedeutet diese Multiplikation eine Drehstreckung mit dem Faktor 4 und dem Drehwinkel 135°.

f) $-\sqrt{48}+i\cdot 4$ Wegen $\left|-\sqrt{48}+i\cdot 4\right|=\sqrt{48+16}=\sqrt{64}=8$ und

$$\varphi'=\arctan\left|\frac{4}{-\sqrt{48}}\right|=\arctan\frac{4}{4\sqrt{3}}=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=30^\circ\ \Rightarrow\ \varphi=150^\circ$$

bedeutet diese Multiplikation eine Drehstreckung mit dem Faktor 8 und dem Drehwinkel 150°.

Aufgabe 346:

In Punkt z_1 in der Gaußschen Ebene wurde durch eine Drehstreckung abgebildet. Welcher Multiplikation hat dies entsprochen ?

a) $k=2$ und $\varphi=270^\circ$ b) $k=0{,}5$ und $\varphi=60^\circ$

c) $k=4$ und $\varphi=135^\circ$ d) $k=8$ und $\varphi=75^\circ$

(Anleitung zu d: $\sin 75^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ und $\cos 75^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

Lösung:

a) $k = 2$ und $\varphi = 270^\circ$

Der zweite Faktor ist $z_2 = 2 \cdot E(270^\circ) = 2 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$

$z_2 = 2 \cdot (0 + i \cdot (-1)) = -2i$

b) $k = 0{,}5$ und $\varphi = 60^\circ$

Der zweite Faktor ist $z_2 = \frac{1}{2} \cdot E(60^\circ) = 2 \cdot (\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)$

$z_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1 + i \cdot \sqrt{3}$

c) $k = 4$ und $\varphi = 135^\circ$

Der zweite Faktor ist $z_2 = 4 \cdot E(135^\circ) = 4 \cdot (\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)$

$z_2 = 4 \cdot (-\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}$

d) $k = 8$ und $\varphi = 75^\circ$

(Anleitung zu d: $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ und $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Der zweite Faktor ist $z_2 = 8 \cdot E(75^\circ) = 8 \cdot (\cos 75^\circ + i \cdot \sin 75^\circ)$

$z_2 = 8 \cdot \left[\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\right] = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i \cdot 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

Aufgabe 347:

Löse zeichnerisch und rechnerisch:

a) $(3 + i \cdot 4) \cdot (1 + i)$ b) $(5 + i \cdot 2)(3 - i \cdot 4)$

Lösung:

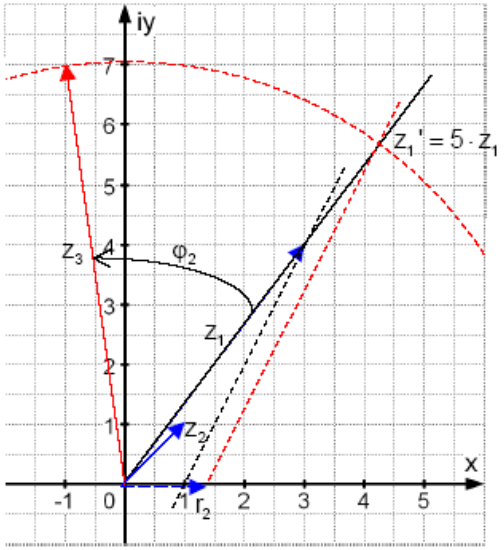
a) $z_1 \cdot z_2 = (3+i\cdot 4)\cdot(1+i) = 3+i\cdot 3+i\cdot 4-4 = -1+i\cdot 7$

$|z_1| = |3+i\cdot 4| = \sqrt{9+16} = 5, \quad \varphi_1 = \arctan\frac{4}{3} = 53{,}13^\circ.$

$|z_2| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \varphi_2 = \arctan\frac{1}{1} = \arctan 1 = 45^\circ$

$z_1 \cdot z_2 = 5\cdot\sqrt{2}\cdot E(98{,}13^\circ)$

Graphische Lösung als Drehstreckung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ und dem Drehwinkel 45°:



b) $z_3 = z_1 \cdot z_2 = (5+i\cdot 2)(3-i\cdot 4) = 15-i\cdot 20+i\cdot 6-i^2\cdot 8 = 23-i\cdot 14$

$|z_1| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \approx 5{,}39 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \arctan\frac{2}{5} = 21{,}8^\circ$

$|z_2| = \sqrt{9+16} = 5, \quad \text{und}$

$\varphi_2' = \arctan\left|\frac{-4}{3}\right| = \arctan\frac{4}{3} = 53{,}13^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 360^\circ - \varphi_2' = 306{,}87^\circ$

$|z_3| = \sqrt{23^2+14^2} = \sqrt{725} = \sqrt{25\cdot 29} = 5\sqrt{29} \approx 26{,}9 \quad \text{und}$

$\varphi_3' = \arctan\left|\frac{-14}{23}\right| = \arctan\frac{14}{23} = 31{,}33^\circ \Rightarrow \varphi_3 = 360^\circ - \varphi_3' = 328{,}67^\circ$

Somit lauten unsere Zahlen in der Polarform:

$z_1 = 5+i\cdot 2 = \sqrt{29}\cdot E(21{,}8^\circ), \quad z_2 = 5\cdot E(306{,}87^\circ) \quad \text{und}$
$z_3 = 5\sqrt{29}\cdot E(328{,}67^\circ)$

Aufgabe 348:

Berechnen Sie mit Polarkoordinaten und auf die übliche Art.

a) $\dfrac{0,9-i\cdot 1,2}{2-i\cdot 1,5}$ b) $\dfrac{8-i\cdot 6}{8+i\cdot 15}$ c) $\dfrac{-5-i\cdot 3}{2-i\cdot 7}$

Lösung:

a)

$z_1 = 0,9-i\cdot 1,2 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{0,81+1,44} = \sqrt{2,25} = 1,5$ und

$\varphi_1' = \arctan\left|\dfrac{-1,2}{0,9}\right| = \arctan\dfrac{12}{9} = \arctan\dfrac{4}{3} = 53,13^\circ$

Da z_1 im 4. Feld liegt, folgt $\varphi_1 = 360^\circ - 53,13^\circ = 306,87^\circ$

$z_1 = 1,5\cdot E(306,87^\circ)$

$z_2 = 2-i\cdot 1,5 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ und

$\varphi_2' = \arctan\left|\dfrac{-1,5}{2}\right| = \arctan\dfrac{3}{4} = 36,87^\circ$

Da z_2 im 4. Feld liegt, folgt $\varphi_2 = 360^\circ - 36,87^\circ = 323,13^\circ$

$z_2 = \frac{5}{2}\cdot E(323,13^\circ)$

Division in Polardarstellung:

$$z_3 = \frac{|z_1|\cdot E(306,87)}{|z_2|\cdot E(323,13^\circ)} = \frac{1,5}{\frac{5}{2}}\cdot E(306,87^\circ - 323,13^\circ) = \frac{3}{5}\cdot E(-16,26^\circ)$$

$$= \tfrac{3}{5}\cdot E(-16,26^\circ + 360^\circ) = \tfrac{3}{5}E(343,74^\circ) = \tfrac{3}{5}\cdot(\cos 343,74^\circ + i\cdot\sin 343,74^\circ)$$

$$= 0,576 - i\cdot 0,168$$

Division in der x-y-Koordinatenform:

$$z_3 = \frac{0,9-i\cdot 1,2}{2-i\cdot 1,5} = \frac{(0,9-i\cdot 1,2)\cdot(2+i\cdot 1,5)}{(2-i\cdot 1,5)\cdot(2+i\cdot 1,5)} = \frac{1,8+1,8-i\cdot 2,4+i\cdot 1,35}{4+2,25}$$

$$= \frac{3,6-i\cdot 1,05}{6,25} = \frac{360-i\cdot 105}{625} = \frac{72}{125} - i\cdot\frac{21}{125} \approx 0,576 - i\cdot 0,168$$

b)

$$z_1 = 8 - i \cdot 6 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \quad \text{und}$$

$$\varphi_1' = \arctan\left|\frac{-6}{8}\right| = \arctan\frac{3}{4} = 36{,}87^\circ$$

Da z_1 im 4. Feld liegt, folgt $\varphi_1 = 360^\circ - 36{,}87^\circ = 323{,}13^\circ$

$$z_1 = 10 \cdot E(323{,}13^\circ)$$

$$z_2 = 8 + i \cdot 15 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17 \quad \text{und}$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{15}{8} = 61{,}93^\circ$$

$$z_2 = 17 \cdot E(61{,}93^\circ)$$

Division in Polardarstellung:

$$z_3 = \frac{|z_1| \cdot E(323{,}13^\circ)}{|z_2| \cdot E(61{,}93^\circ)} = \frac{10}{17} \cdot E(323{,}13^\circ - 61{,}93^\circ) = \frac{10}{17} \cdot E(261{,}20^\circ)$$

$$= \tfrac{10}{17} \cdot (\cos 261{,}2^\circ + i \cdot \sin 261{,}2^\circ) \approx -0{,}09 - i \cdot 0{,}58$$

Division in der x-y-Koordinatenform:

$$z_3 = \frac{8 - i \cdot 6}{8 + i \cdot 15} = \frac{(8 - i \cdot 6) \cdot (8 - i \cdot 15)}{(8 + i \cdot 15) \cdot (8 - i \cdot 15)} = \frac{64 - 90 - i \cdot 48 - i \cdot 120}{64 + 225} =$$

$$= \frac{-26 - i \cdot 168}{289} = -\frac{26}{289} - i \cdot \frac{168}{289}$$

$$\frac{-5-i\cdot 3}{2-i\cdot 7}$$

$z_1 = -5-i\cdot 3 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ und

$$\varphi_1' = \arctan\left|\frac{-3}{-5}\right| = \arctan 0{,}6 = 30{,}96^\circ$$

Da z_1 im 3. Feld liegt, folgt $\varphi_1 = 180^\circ + 30{,}96^\circ = 210{,}96^\circ$

$$z_1 = \sqrt{34}\cdot E(210{,}96^\circ)$$

$z_2 = 2-i\cdot 7 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$ und

$$\varphi_2' = \arctan\left|\frac{-7}{2}\right| = \arctan 3{,}5 = 74{,}05^\circ$$

Da z_2 im 4. Feld liegt, folgt $\varphi_2 = 360^\circ - 74{,}05^\circ = 285{,}95^\circ$

$$z_2 = \sqrt{53}\cdot E(285{,}95^\circ)$$

Division in Polardarstellung:

$$z_3 = \frac{\sqrt{34}\cdot E(210{,}96^\circ)}{\sqrt{53}\cdot E(285{,}95^\circ)} = \sqrt{\frac{34}{53}}\cdot E(210{,}96^\circ - 285{,}95^\circ) \approx 0{,}8\cdot E(-75^\circ)$$

$$= 0{,}8\cdot E(-75^\circ + 360^\circ) = 0{,}8\cdot E(285^\circ) \approx 0{,}207 - i\cdot 0{,}773$$

Division in der x-y-Koordinatenform:

$$z_3 = \frac{-5-i\cdot 3}{2-i\cdot 7} = \frac{(-5-i\cdot 3)\cdot(2+i\cdot 7)}{(2-i\cdot 7)\cdot(2+i\cdot 7)} = \frac{-10+21-i\cdot 6-i\cdot 35}{4+49} = \frac{11-i\cdot 41}{53}$$

$$= \frac{11}{53} - i\cdot\frac{41}{53}$$

Aufgabe 349:

Berechnen Sie die ersten 4 Potenzen und stellen sie zeichnerisch dar:

a) $z = \frac{1}{2}+i$ b) $1-i$ c) $\frac{4}{5}-i\cdot\frac{3}{5}$ d) $1{,}2+i\cdot 0{,}5$ e) $\frac{1}{2}-i\cdot 2$

Lösung:

a) $z = \frac{1}{2} + i$

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ und $\varphi = \arctan\frac{1}{\frac{1}{2}} = \arctan 2 = 63{,}43^\circ$

$z = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot E(63{,}43^\circ)$

$z^2 = \frac{5}{4} \cdot E(2 \cdot 63{,}43^\circ) = \frac{5}{4} \cdot E(126{,}86^\circ) = \frac{5}{4} \cdot (\cos 126{,}86^\circ + i \cdot \sin 126{,}86^\circ)$
$\approx -0{,}75 + i$

oder so: $z^2 = \left(\frac{1}{2} + i\right)^2 = \frac{1}{4} + i + i^2 = -\frac{3}{4} + i$

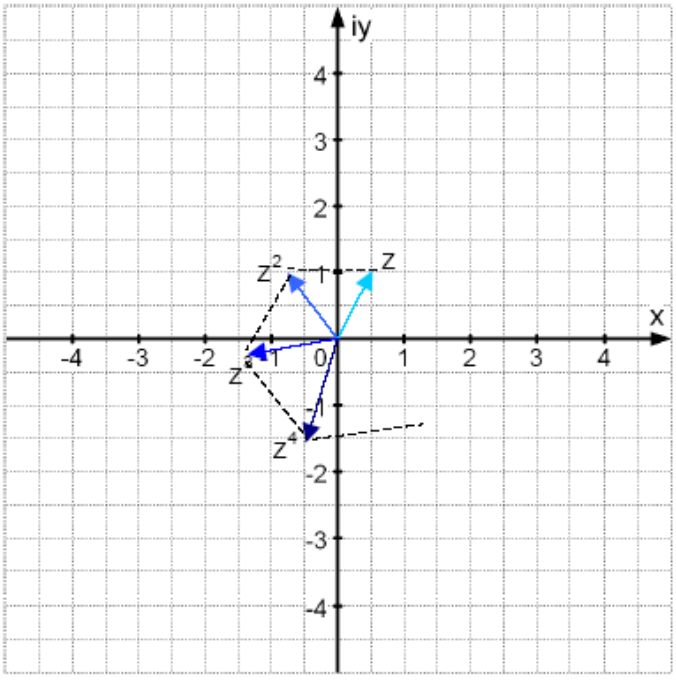
$z^3 = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot E(3 \cdot 63{,}43^\circ) = 1{,}25^{1{,}5} \cdot E(190{,}29^\circ) \approx -1{,}375 - i \cdot 0{,}25$

oder so: $z^3 = \left(\frac{1}{2} + i\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\right) = \left(-\frac{3}{4} + i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + i\right) = -\frac{3}{8} - 1 + i \cdot \frac{1}{2} - i \cdot \frac{3}{4} = -\frac{11}{8} - i \cdot \frac{1}{4}$

$z^4 = \frac{25}{16} \cdot E(4 \cdot 63{,}43^\circ) = \frac{25}{16} \cdot E(253{,}72^\circ) \approx -0{,}438 - i \cdot 1{,}5$

oder so: $z^4 = \left(\left(\frac{1}{2} + i\right)^2\right)^2 = \left(-\frac{3}{4} + i\right)^2 = \frac{9}{16} - 1 - i \cdot \frac{3}{2} = -\frac{7}{16} - i \cdot \frac{3}{2} = 0{,}4375 - i \cdot 1{,}5$

Man kann hier auch eine logarithmische Spirale einzeichnen.



b) $z = 1 - i$ mit $|z| = \sqrt{2}$ und $\varphi' = \arctan\left|\frac{-1}{1}\right| = \arctan 1 = 45^\circ$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

Also folgt $z = \sqrt{2} \cdot E(315^\circ)$.

$z^2 = (1-i)^2 = 1 - i \cdot 2 + i^2 = -i \cdot 2$

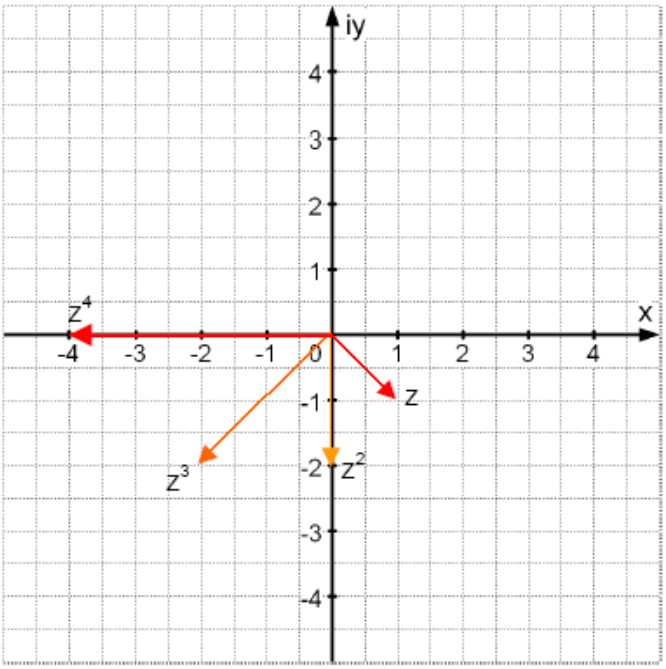
oder so: $z^2 = 2 \cdot E(2 \cdot 315^\circ) = 2 \cdot E(630^\circ - 360^\circ) = 2 \cdot E(270^\circ)$

$z^3 = (1-i)^3 = (1-i)^2 \cdot (1-i) = -i \cdot 2 \cdot (1-i) = -i \cdot 2 + i^2 \cdot 2 = -2 - i \cdot 2$

oder so: $z^3 = \sqrt{2}^3 \cdot E(3 \cdot 315^\circ) = 2\sqrt{2} \cdot E(945^\circ - 720^\circ) = 2\sqrt{2} \cdot E(225^\circ)$

$z^4 = (1-i)^4 = (1-i)^2 \cdot (1-i)^2 = (-i \cdot 2)^2 = i^2 \cdot 4 = -4$

oder so: $z^4 = \sqrt{2}^4 \cdot E(4 \cdot 315^\circ) = 4 \cdot E(1260^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = 4 \cdot E(180^\circ)$



c) $z = \frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}$ mit $|z| = \sqrt{\frac{16}{26} + \frac{9}{25}} = 1$ und $\varphi' = \arctan\left|\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}\right| = \arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}87^\circ$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi = 360^\circ - 36{,}87^\circ = 323{,}13^\circ$

Also folgt $z = E(323{,}13^\circ)$.

$z^2 = \left(\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - i \cdot \frac{24}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} - i \cdot \frac{24}{25}$

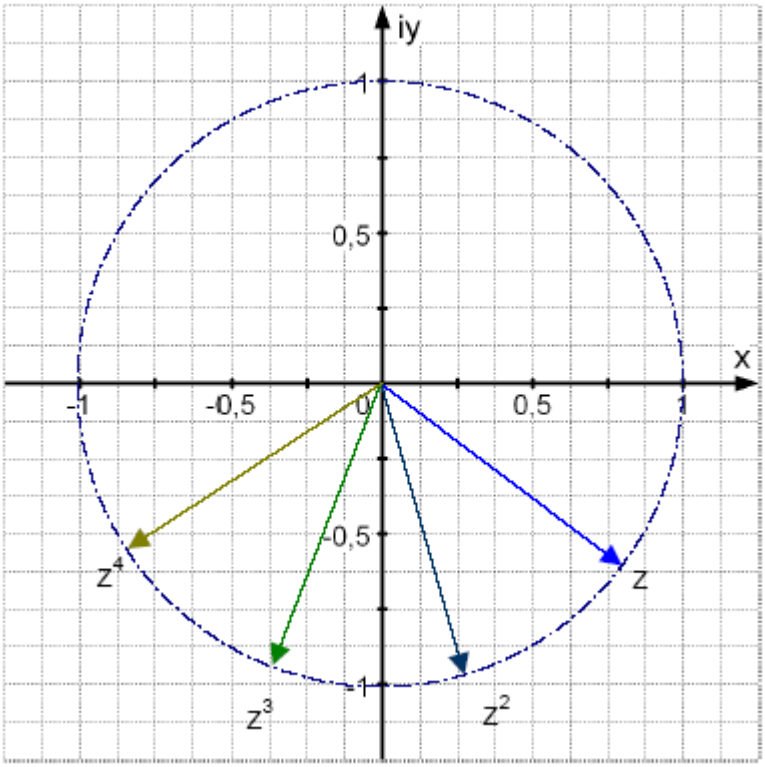
oder so: $z^2 = 1^2 \cdot E(2 \cdot 323{,}13^\circ) = E(646{,}26^\circ - 360^\circ) = E(286{,}26^\circ)$

$z^3 = \left(\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{7}{25} - i\frac{24}{25}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{28}{125} - \frac{72}{125} - i \cdot \left(\frac{21}{125} + \frac{96}{125}\right) = -\frac{44}{125} - i \cdot \frac{117}{125}$

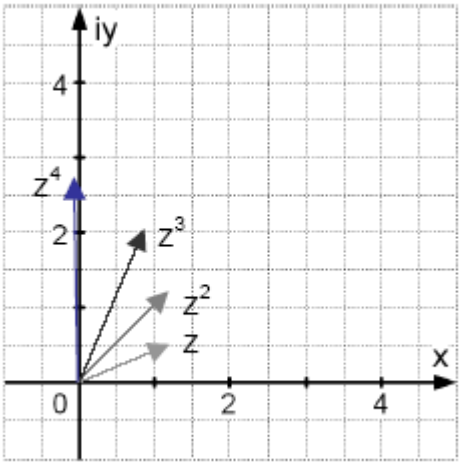
oder so: $z^3 = 1^3 \cdot E(3 \cdot 323{,}13^\circ) = E(969{,}39^\circ - 720^\circ) = E(249{,}39^\circ)$

$z^4 = \left[\left(\frac{4}{5} - i \cdot \frac{3}{5}\right)^2\right]^2 = \left[\frac{7}{25} - i\frac{24}{25}\right]^2 = \frac{49}{625} - \frac{576}{625} - i \cdot \frac{336}{625} = -\frac{527}{625} - i \cdot \frac{336}{625}$

oder so: $z^4 = 1^4 \cdot E(4 \cdot 323{,}13^\circ) = E(1292{,}52^\circ - 1080^\circ) = E(212{,}52^\circ)$



Diese Potenzen liegen wegen $|z| = 1$ alle auf dem (hier vergrößert dargestellten) Einheitskreis.



e) $z=\frac{1}{2}-i\cdot 2$ mit $|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{17}\approx 2{,}06$ und

$\varphi'=\arctan\left|\frac{-2}{\frac{1}{2}}\right|=\arctan 4=75{,}96^\circ$. Da z im 4. Feld liegt, folgt

$\varphi=360^\circ-75{,}96^\circ=284{,}04^\circ$ Also ist $z=\frac{1}{2}\sqrt{17}\cdot E(284{,}04^\circ)$

$z^2=\left(\frac{1}{2}-i\cdot 2\right)^2=\frac{1}{4}-4-i\cdot 2=-\frac{15}{4}-i\cdot 2$

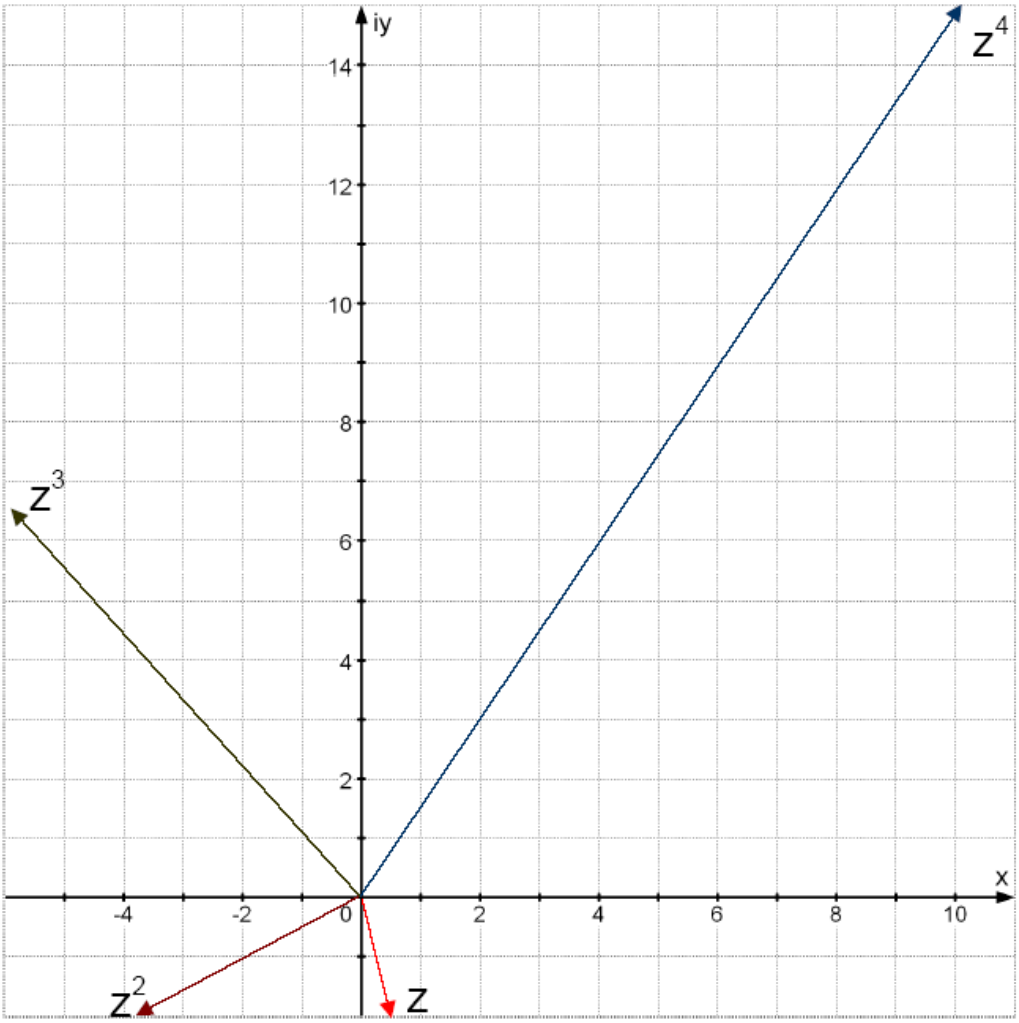
oder so: $z^2=\frac{17}{4}\cdot E(2\cdot 284{,}04^\circ)=\frac{17}{4}\cdot E(568{,}08^\circ-360^\circ)=\frac{17}{4}\cdot E(208{,}08^\circ)$

$z^3=\left(\frac{1}{2}-i\cdot 2\right)^2\left(\frac{1}{2}-i\cdot 2\right)=\left(-\frac{15}{4}-i\cdot 2\right)\left(\frac{1}{2}-i\cdot 2\right)=-\frac{15}{8}-4+i\cdot\left(\frac{15}{2}-1\right)=-\frac{47}{8}+i\cdot\frac{13}{2}$

oder so: $z^3=\left(\frac{17}{4}\right)^{1{,}5}\cdot E(3\cdot 284{,}04^\circ)=8{,}76\cdot E(852{,}11^\circ-720^\circ)=8{,}76\cdot E(132{,}11^\circ)$

$z^4=\left[\left(\frac{1}{2}-i\cdot 2\right)^2\right]^2=\left[-\frac{15}{4}-i\cdot 2\right]^2=\frac{225}{16}-4+i\cdot 15=\frac{161}{16}+i\cdot 15$

oder so: $z^3=\left(\frac{17}{4}\right)^2\cdot E(4\cdot 284{,}04^\circ)=\frac{289}{16}\cdot E(1136{,}61^\circ-1080^\circ)=18{,}06\cdot E(56{,}14^\circ)$



Aufgabe 350:

Berechnen Sie folgende Quadratwurzeln über Polarkoordinaten:

a)	$\sqrt{-4+3i}$	b)	$\sqrt{-i}$	c)	$\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}$
d)	$\sqrt{5+5i}$	e)	$\sqrt{-5+5i}$	f)	$\sqrt{-5-5i}$
g)	$\sqrt{4i}$	h)	$\sqrt{6-8i}$	i)	$\sqrt{-2\sqrt{3}+2i}$
j)	$\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$	k)	$\sqrt{4+i\sqrt{17}}$	l)	$\sqrt{17-4i}$

Lösung:

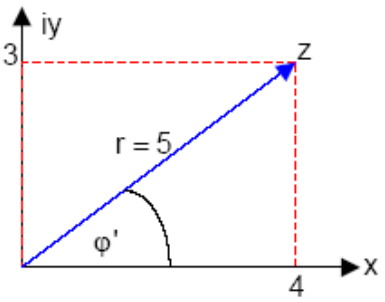
a) $\sqrt{-4+3i}$ $\quad |z| = \sqrt{16+9} = 5\,,\quad \varphi' = \arctan\left|\frac{3}{4}\right| = \arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}87^\circ$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $z \approx 5 \cdot E(323{,}13^\circ)$

$$\sqrt{z} \approx \sqrt{5 \cdot E(323{,}13^\circ)} = \sqrt{5} \cdot E\left(\tfrac{1}{2} \cdot 323{,}13^\circ\right) = \sqrt{5} \cdot E(161{,}57^\circ)$$

$$\sqrt{z} \approx \sqrt{5} \cdot (\cos 161{,}57^\circ + i \cdot \sin 161{,}57^\circ) = -2{,}12 + i \cdot 0{,}71$$

Exakte Berechnung mit trigonometrischer Umformung:



$$\sqrt{z} = \sqrt{5} \cdot E\left(\underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot (360^\circ - \varphi')}_{\alpha}\right) = \sqrt{5} \cdot E\left(180^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi'\right)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{5} \cdot \left(\cos\left(180^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi'\right) + i \cdot \sin\left(180^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi'\right)\right)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{5} \cdot \left(-\cos\tfrac{1}{2}\varphi' + \sin\tfrac{1}{2}\varphi'\right)$$

Der Abbildung entnimmt man, daß folgendes gilt:

$\cos\varphi' = \frac{4}{5}$ also ist $\cos\frac{1}{2}\varphi' = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\varphi' = \frac{3}{5}$ also ist $\sin\frac{1}{2}\varphi' = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi'}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$$\sqrt{z} = \sqrt{5} \cdot \left(-\cos\tfrac{1}{2}\varphi' + \sin\tfrac{1}{2}\varphi'\right) = \sqrt{5}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}(-3+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-3+i)$$

b) $\sqrt{-i}$ $\quad |-i| = 1$ und $\varphi = 270^\circ$

$$\sqrt{-i} = \sqrt{1 \cdot E(270^\circ)} = E(135^\circ) = (\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

c) $\sqrt{1 - i \cdot \sqrt{3}}$ $\quad |z| = \sqrt{1+3} = 2$ und $\varphi' = \arctan\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$$\sqrt{1 - i \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{2 \cdot E(300^\circ)} = \sqrt{2} \cdot E(150^\circ) = \sqrt{2} \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$$

$$= \sqrt{2} \cdot (-\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) = \sqrt{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{6} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

d) $\sqrt{5 + i \cdot 5}$ $\quad |z| = \sqrt{25+25} = 2\sqrt{5}$ und $\varphi = \arctan\frac{5}{5} = \arctan 1 = 45^\circ$

$$\sqrt{5+5i} = \sqrt{2\sqrt{5} \cdot E(22{,}5^\circ)} = \sqrt{2\sqrt{5}} \cdot (\cos 22{,}5^\circ + i \cdot \sin 22{,}5^\circ) = 1{,}95 + i \cdot 0{,}81$$

e) $\sqrt{-5+5i}$ $\quad |z| = 2\sqrt{5}\,,\quad \varphi = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$$\sqrt{-5+5i} = \sqrt{2\sqrt{5} \cdot E(135^\circ)} = \sqrt{2\sqrt{5}} \cdot (\cos 67{,}5^\circ + i \cdot \sin 67{,}5^\circ)$$

$$\approx 0{,}81 + i \cdot 1{,}95$$

f) $\sqrt{-5 - i \cdot 5}$ $\quad |z| = 2\sqrt{5}$ und $\varphi = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

$$\sqrt{-5-i\cdot 5}=\sqrt{2\sqrt{5}\cdot E(225^\circ)}=\sqrt{2\sqrt{5}}\cdot E(112{,}5^\circ)$$
$$=\sqrt{2\sqrt{5}}\cdot(\cos 112{,}5^\circ+i\cdot\sin 112{,}5^\circ)=-0{,}81+i\cdot 1{,}95$$

g) $\sqrt{4i}$ $\quad |4i|=4$ und $\varphi=90^\circ$.

$$\sqrt{4i}=\sqrt{4\cdot E(90^\circ)}=2\cdot E(45^\circ)=2\cdot(\cos 45^\circ+i\cdot\sin 45^\circ)$$
$$=2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$$

h) $\sqrt{6-i\cdot 8}$ $\quad |z|=\sqrt{36+64}=10$ und $\varphi'=\arctan\frac{4}{3}=53{,}13^\circ$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi=360^\circ-53{,}13^\circ=306{,}87^\circ$

$$\sqrt{6-i\cdot 8}\approx\sqrt{10\cdot E(306{,}87^\circ)}=\sqrt{10}\cdot E(153{,}44^\circ)$$
$$=\sqrt{10}\cdot(\cos 153{,}44^\circ+i\cdot\sin 153{,}44^\circ)=-2{,}83+i\cdot 1{,}41$$

Exakte Berechnung der Wurzel:

Hier haben wir wieder dieselbe Situation wie auf Seite 3:
Dort wurde berechnet:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi'=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\text{und}\quad\cos\tfrac{1}{2}\varphi'=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Dies ergibt

$$\sqrt{6-i\cdot 8}=\sqrt{10}\cdot(-\cos\tfrac{1}{2}\varphi'+i\cdot\sin\tfrac{1}{2}\varphi')=\sqrt{10}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{2}\cdot(2+i)=2\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$$

i) $\sqrt{-2\sqrt{3}+i\cdot 2}$ mit $|z|=\sqrt{12+4}=4$, $\varphi'=\arctan\left|\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right|=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=30^\circ$

Da z im 2. Feld liegt, folgt $\varphi=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

$$\sqrt{-2\sqrt{3}+i\cdot 2}=\sqrt{4\cdot E(150^\circ)}=2\cdot E(75^\circ)=2\cdot(\cos 75^\circ+i\cdot\sin 75^\circ)$$
$$=0{,}518+i\cdot 1{,}932$$

Exakte Berechnung der Wurzel:

Laut Formelsammlung ist $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$. Also folgt:

$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d.h. $\sin 15^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$. Ferner folgt aus $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos 15^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$

d.h. $\cos 75^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. Damit folgt nun exakt dieses:

$$\sqrt{-2\sqrt{3}+i\cdot 2}=2\cdot(\cos 75^\circ+i\cdot\sin 75^\circ)=2\cdot\left(\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i\cdot\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left((\sqrt{6}-\sqrt{2})+i\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left((\sqrt{3}-1)+i\cdot(\sqrt{3}-1)\right)$$

j) $\sqrt{2\sqrt{3}-i\cdot 2}$ mit $|z|=\sqrt{12+4}=4$, $\varphi=360^\circ-30^\circ=330^\circ$

$$\sqrt{2\sqrt{3}-i\cdot 2}=\sqrt{4\cdot E(330^\circ)}=2\cdot E(115^\circ)=2\cdot(\cos 115^\circ+i\cdot\sin 115^\circ)$$
$$=0{,}-845+i\cdot 1{,}813$$

k) $\sqrt{4+i\sqrt{17}}$ mit $|z|=\sqrt{16+17}=\sqrt{33}$ und $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{17}}{4}=45{,}87^\circ$

$$\sqrt{4+i\sqrt{17}}=\sqrt{\sqrt{33}\cdot E(45{,}87^\circ)}=\sqrt[4]{33}\cdot E(22{,}93^\circ)$$
$$=\sqrt[4]{33}\cdot(\cos 22{,}93^\circ+i\cdot\sin 22{,}93^\circ)=2{,}21+i\cdot 0{,}93$$

l) $\sqrt{17-4i}$ mit $|z|=\sqrt{305}$, $\varphi'=\arctan\frac{4}{17}=13{,}24^\circ$.

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi=360^\circ-13{,}24^\circ=346{,}75^\circ$

$$\sqrt{17-4i}=\sqrt{\sqrt{305}\cdot E(346{,}75^\circ)}=\sqrt[4]{305}\cdot E(173{,}38^\circ)$$
$$=\sqrt[4]{305}\cdot(\cos 173{,}38^\circ+i\cdot\sin 173{,}38^\circ)=-4{,}15+i\cdot 0{,}48$$

Aufgabe 351:

a) $\sqrt[3]{i}$ b) $\sqrt[3]{-1-i}$ c) $\sqrt[3]{-27i}$

d) $\sqrt[3]{8\cdot E(120^\circ)}$ e) $\sqrt[3]{64\cdot E(240^\circ)}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

Lösung:

a) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{E(90^\circ)} = E\left(\frac{1}{3}\cdot 90^\circ\right) = E(30^\circ) = (\cos 30^\circ + i\cdot\sin 30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{1}{2}$

b) $\sqrt[3]{-1-i}$ $\quad |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ und $\varphi' = \arctan\left|\frac{-1}{-1}\right| = \arctan 1 = 45^\circ$.

Da sich z im 3. Feld befindet, folgt $\varphi = 180^\circ + \varphi' = 225^\circ$

$\sqrt[3]{-1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot E(225^\circ)} = \sqrt[6]{2}\cdot E\left(\frac{1}{3}\cdot 225^\circ\right) = \sqrt[6]{2}\cdot E(75^\circ) =$

$= \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 75^\circ + i\cdot\sin 75^\circ) = 0{,}29 + i\cdot 1{,}08$

c) $\sqrt[3]{-i\cdot 27} = \sqrt[3]{27\cdot E(270^\circ)} = 3\cdot E\left(\frac{1}{3}\cdot 270^\circ\right) = 3\cdot E(90^\circ) = 3\cdot(\cos 90^\circ + i\cdot\sin 90^\circ) = i\cdot 3$

d) $\sqrt[3]{8\cdot E(120^\circ)} = 2\cdot E(40^\circ) = 2\cdot(\cos 40^\circ + i\cdot\sin 40^\circ) = 1{,}532 + i\cdot 1{,}286$

e) $\sqrt[3]{64\cdot E(240^\circ)} = 4\cdot E(80^\circ) = 4\cdot(\cos 80^\circ + i\cdot\sin 80^\circ) = 0{,}695 + i\cdot 3{,}939$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ $\quad |z| = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2} = \sqrt{1} = 1$

und $\varphi' = \arctan\left|\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right| = \arctan 1 = 45^\circ$

Da z im 4. Feld liegt, gilt $\varphi = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

$z = 1\cdot E(315^\circ)$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt[3]{E(315^\circ)} = E\left(\frac{1}{3}\cdot 315^\circ\right) = E(105^\circ)$

$= (\cos 105^\circ + i\cdot\sin 105^\circ) = -0{,}259 + i\cdot 0{,}966$

Aufgabe 352:

a) $\sqrt[4]{2i}$ b) $\sqrt[4]{-1+i}$ c) $\sqrt[4]{\frac{3}{5} - i\cdot\frac{4}{5}}$

d) $\sqrt[4]{16\cdot E(120^\circ)}$ e) $\sqrt[4]{-1}$ f) $\sqrt[4]{-7 + i\cdot 2\sqrt{2}}$

Lösung:

a) $\sqrt[4]{2i} = \sqrt[4]{2 \cdot E(90^\circ)} = \sqrt[4]{2} \cdot E\left(\frac{1}{4} \cdot 90^\circ\right) = \sqrt[4]{2} \cdot E(22{,}5^\circ) = \sqrt[4]{2} \cdot (\cos 22{,}5^\circ + i \cdot \sin 22{,}5^\circ)$
$= 1{,}1 + i \cdot 0{,}46$

b) $\sqrt[4]{-1+i}$ mit $|z| = \sqrt{2}$ und $\varphi = 180^\circ - \arctan 1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
$\sqrt[4]{-1+i} = \sqrt[4]{2 \cdot E(135^\circ)} = \sqrt[4]{2} \cdot E\left(\frac{1}{4} \cdot 135^\circ\right) = \sqrt[4]{2} \cdot E(33{,}75^\circ)$
$= \sqrt[4]{2} \cdot (\cos 33{,}75^\circ + i \cdot \sin 33{,}75^\circ) = 0{,}99 + i \cdot 0{,}66$

c) $\sqrt[4]{\frac{3}{5} - i \cdot \frac{4}{5}}$ mit $|z| = 1$ und $\varphi = 360^\circ - \arctan \frac{4}{3} = 360^\circ - 53{,}10^\circ = 306{,}87^\circ$
$\sqrt[4]{\frac{3}{5} - i \cdot \frac{4}{5}} = E\left(\frac{1}{4} \cdot 306{,}87^\circ\right) = (\cos 76{,}72^\circ + i \cdot \sin 76{,}72^\circ) = 0{,}23 + i \cdot 0{,}97$

d) $\sqrt[4]{16 \cdot E(120^\circ)} = 4 \cdot E(30^\circ) = 4 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + i \cdot 2$

e) $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1 \cdot E(270^\circ)} = E(67{,}5^\circ) = (\cos 67{,}5^\circ + i \cdot \sin 67{,}5^\circ) = 0{,}38 + i \cdot 0{,}92$

f) $\sqrt[4]{-7 + i \cdot 2\sqrt{2}}$ $|z| = \sqrt{49 + 8} = \sqrt{57}$ und $\varphi' = \arctan\left|\frac{2\sqrt{2}}{-7}\right| = 22^\circ$

Da z im 2. Feld liegt, folgt $\varphi = 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$
$z = \sqrt{57} \cdot E(158^\circ)$

$\sqrt[4]{-7 + i \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{57} \cdot E(158)} = \sqrt[8]{57} \cdot E(39{,}5^\circ) = \sqrt[8]{57} \cdot (\cos 39{,}5^\circ + i \cdot \sin 39{,}5^\circ)$

$= 1{,}28 + i \cdot 1{,}05$

Aufgabe 353:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

a) $\frac{1}{\sqrt{2-i}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3} - i \cdot 2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{-i}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{4i}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[4]{-3+4i}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[6]{1-i}}$

Lösung:

a) $\frac{1}{\sqrt{2-i}}$ mit $|2-i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ und $\varphi'=\arctan\left|\frac{-1}{2}\right|=\arctan\frac{1}{2}=26{,}57^\circ$

z liegt im 4. Feld, also gilt $\varphi=360^\circ-\varphi'=333{,}43^\circ$

Daher ist $z=2-i=\sqrt{5}\cdot E(333{,}43^\circ)$

$$\frac{1}{\sqrt{2-i}}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}\cdot E(333{,}43^\circ)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\cdot E\left(-\tfrac{1}{2}\cdot 333{,}43^\circ\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\cdot E(-166{,}72^\circ+360^\circ)$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\cdot E(193{,}28^\circ)=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\cdot(\cos 193{,}28^\circ+i\cdot\sin 193{,}28^\circ)\approx -0{,}65-i\cdot 0{,}15$$

b) $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-i\cdot 2}}$ $|2\sqrt{3}-i\cdot 2|=\sqrt{12+4}=4$ und $\varphi'=\arctan\left|\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right|=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=30^\circ$

z liegt im 4. Feld, also gilt $\varphi=360^\circ-\varphi'=330^\circ$

$$\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-i\cdot 2}}=\frac{1}{\sqrt{4\cdot E(330^\circ)}}=\frac{1}{2}\cdot E\left(-\frac{1}{2}\cdot 330^\circ\right)=\frac{1}{2}\cdot E(-165^\circ+360^\circ)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot E(195^\circ)=\frac{1}{2}\cdot(\cos 195^\circ+i\cdot\sin 195^\circ)=-0{,}48-i\cdot 0{,}13$$

c) $$\frac{1}{\sqrt[3]{-i}}=\frac{1}{\sqrt[3]{E(270^\circ)}}=E\left(-\tfrac{1}{3}\cdot 270^\circ\right)=E(-90^\circ+360^\circ)=E(270^\circ)$$

$$=(\cos 270^\circ+i\cdot\sin 270^\circ)=-i$$

d) $$\frac{1}{\sqrt[4]{4i}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4\cdot E(90^\circ)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\cdot E\left(-\tfrac{1}{4}\cdot 90^\circ\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot E(-22{,}5^\circ+360^\circ)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot E(337{,}5^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos 337{,}5^\circ+i\cdot\sin 337{,}5^\circ)=0{,}65-i\cdot 0{,}27$$

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{-3+4i}}$ mit $|-3+4i|=\sqrt{9+16}=5$ und $\varphi'=\arctan\frac{4}{3}=53{,}13^\circ$

Da z im 2. Feld liegt folgt $\varphi=180^\circ-\varphi'=126{,}87^\circ$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{-3+4i}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4\cdot E(126{,}87^\circ)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\cdot E\left(-\tfrac{1}{4}\cdot 126{,}87^\circ+360^\circ\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot E(328{,}28^\circ)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos 328{,}28^\circ+i\cdot\sin 328{,}28^\circ)=0{,}60-i\cdot 0{,}37$$

f) $\frac{1}{\sqrt[6]{1-i}}$ mit $|1-i|=\sqrt{2}$ $\varphi=360^\circ-\arctan 1=360^\circ-45^\circ=315^\circ$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{1-i}}=\frac{1}{\sqrt[6]{\sqrt{2}\cdot E(315^\circ)}}=\ldots=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\cdot E(307{,}5^\circ)=0{,}57-i\cdot 0{,}75$$

Aufgabe 354:

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

a) $(3-4i)^{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt{6-i\cdot 3\sqrt{5}}^{3}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{2}$

d) $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{-1-i\cdot\sqrt{3}}\right)^{2}}$ e) $\sqrt[4]{-8i}^{3}$ f) $\sqrt{\frac{i}{1-i}}^{5}$

Lösung:

a) $(3-4i)^{\frac{2}{3}}$ $|3-4i|=\sqrt{9+16}=4$ und $\varphi'=\arctan\left|\frac{-4}{3}\right|=\arctan\frac{4}{3}=53{,}13^{\circ}$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi=360^{\circ}-\varphi'=306{,}87^{\circ}$

$$(3-4i)^{\frac{2}{3}}=\left[4\cdot E(306{,}87^{\circ})\right]^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}\cdot E\left(\tfrac{2}{3}\cdot 306{,}87^{\circ}\right)=\sqrt[3]{16}\cdot E(204{,}58^{\circ})$$
$$=\sqrt[3]{16}\cdot(\cos 204{,}58^{\circ}+i\cdot\sin 204{,}58^{\circ})=-2{,}29-i\cdot 1{,}05$$

b) $\sqrt{6-i\cdot 3\sqrt{5}}^{3}$ $|6-i\cdot 3\sqrt{5}|=\sqrt{36+45}=\sqrt{81}=9$

$\varphi'=\arctan\left|\frac{-3\sqrt{5}}{6}\right|=\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}=48{,}19^{\circ}$

Da z im 4. Feld liegt, folgt $\varphi=360^{\circ}-\varphi'=311{,}81^{\circ}$

$$\sqrt{6-i\cdot 3\sqrt{5}}^{3}=\sqrt{9\cdot E(311{,}81^{\circ})}^{3}=3^{3}\cdot E\left(\tfrac{3}{2}\cdot 311{,}81^{\circ}\right)=27\cdot E(467{,}72^{\circ})$$
$$=27\cdot E(107{,}72^{\circ})=27\cdot(\cos 107{,}72^{\circ}+i\cdot\sin 107{,}72^{\circ})=-8{,}22+i\cdot 25{,}72$$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{2}$ $\left|\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$ und $\varphi=\arctan 1=45^{\circ}$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}^{2}=\sqrt[3]{E(45^{\circ})^{2}}=E\left(\tfrac{2}{3}\cdot 45^{\circ}\right)=E(30^{\circ})=(\cos 30^{\circ}+i\cdot\sin^{\circ}30)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+i\cdot\tfrac{1}{2}$$

d) $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{-1-i\cdot\sqrt{3}}\right)^{2}}$ $|-1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$ und $\varphi'=\arctan\sqrt{3}=60^{\circ}$

Da z im 2. Feld liegt, folgt $\varphi=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{-1-i\cdot\sqrt{3}}\right)^{2}}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2\cdot E(120^{\circ})}\right)^{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot E\left(-\tfrac{2}{3}\cdot 120^{\circ}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot E(-80^{\circ}+360^{\circ})$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot E(280^{\circ})=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot(\cos 280^{\circ}+i\cdot\sin 280^{\circ})=0{,}11-i\cdot 0{,}62$$

e) $\sqrt[4]{-8i}^3 = \sqrt[4]{8\cdot E(270^\circ)}^3 = \sqrt[4]{8}^3 \cdot E\left(\frac{3}{4}\cdot 270^\circ\right) = \sqrt[4]{8}^3 \cdot E(202{,}5^\circ)$

$= \sqrt[4]{8}^3 \cdot (\cos 202{,}5^\circ + i\cdot \sin 202{,}5^\circ) = -4{,}39 - i\cdot 1{,}82$

f) $\sqrt{\frac{i}{1-i}}^5$ $\quad z = \frac{i}{1-i} = \frac{i\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\varphi' = \arctan\left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right| = \arctan 1 = 45^\circ$

Da z im 2. Feld liegt: $\varphi = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1\cdot E(135^\circ)} = E\left(\frac{1}{5}\cdot 135^\circ\right) = E(27^\circ) = (\cos 27^\circ + i\cdot \sin 27^\circ) \approx 0{,}89 + i\cdot 0{,}45$

Aufgabe 355:

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

a) $z^3=i$

b) $z^3=-i$

Stellen Sie diese Lösungen auch auf dem Einheitskreis dar.

Lösung:

(a) Die Gleichung $z^3 = i$:

Mit dem Ansatz $z = r \cdot E(\varphi)$ folgt $z^3 = r^3 \cdot E(\varphi)^3 = r^3 \cdot E(3\varphi) = i$.
Wegen $|E(3\varphi)| = 1$ und $r > 0$ folgt $r = 1$ und somit
$E(3\varphi) = i$ d.h. $\boxed{\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi) = i}$

Herleitung einer Lösungsformel:

Man erhält eine erste Lösung, wenn man φ so bestimmt, daß
$\cos(3\varphi) = 0$ und $\sin(3\varphi) = 1$ wird. Das klappt, wenn $3\varphi = \frac{1}{2}\pi \triangleq 90^\circ$ ist,
also $\varphi = 30^\circ$ bzw. im Bogenmaß: $\varphi = \frac{1}{6}\pi$.

Wegen der Periodizität der Funktion E ist $3\varphi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi = \frac{4k+1}{2}\pi$

Also folgt: $\boxed{\varphi_k = \frac{4k+1}{6}\pi}$, k ganzzahlig.

Man beachte jedoch, daß die Lösungen im Intervall $0 \le \varphi < 2\pi$ liegen müssen.

Für k = 0: $\varphi_0 = \frac{1}{6}\pi \triangleq 30^\circ$
Für k = 1: $\varphi_1 = \frac{5}{6}\pi \triangleq 150^\circ$
Für k = 2: $\varphi_2 = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2} \triangleq 270^\circ$

} Die Winkel-Differenzen sind genau 120°.
Beachte: $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$!

Für k = 3 liegt $\varphi_3 = \frac{13}{6}\pi > 2\pi$ außerhalb des Definitionsbereiches.

Berechnung der zugehörigen Lösungen:

$z_0 = E\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\frac{1}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}$
$z_1 = E\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\frac{5}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}$
$z_2 = E\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\frac{3}{2}\pi + i \cdot \sin\frac{3}{2}\pi = 0 + i \cdot (-1) = -i$

Diese drei Zahlen bilden die Lösungsmenge der Gleichung $z^3 = i$.

$$\mathbb{L} = \left\{ \pm\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2} ; -i \right\}$$

Die graphische Darstellung folgt auf Seite 15 zusammen mit (2b)

(b) Die Gleichung $z^3 = -i$ wird nach demselben Prinzip gelöst wie $z^3 = i$.

Es folgt $E(3\varphi) = -i$ d.h. $\boxed{\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi) = -i}$

Man erhält eine erste Lösung, wenn man φ so bestimmt, daß $\cos(3\varphi) = 0$ und $\sin(3\varphi) = -1$ wird. Das klappt, wenn $3\varphi = \frac{3}{2}\pi \triangleq 270^\circ$ ist, also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ bzw. $\varphi = 90^\circ$. Wegen der Periodizität der Funktion E sind dann auch $3\varphi = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi = \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi = \frac{4k+3}{2}\pi$ Lösungen von $E(3\varphi) = -i$.

Also folgt: $\boxed{\varphi_k = \frac{4k+3}{6} \cdot \pi}$, k ganzzahlig.
Man beachte jedoch, daß die Lösungen im Intervall $0 \le \varphi < 2\pi$ liegen müssen.

Für k = 0: $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi \triangleq 90^\circ$
Für k = 1: $\varphi_1 = \frac{7}{6}\pi \triangleq 210^\circ$
Für k = 2: $\varphi_2 = \frac{11}{6}\pi \triangleq 330^\circ$
(Für k = 3: $\varphi_3 = \frac{15}{6}\pi > 2\pi$ liegt außerhalb des Definitionsbereiches.)

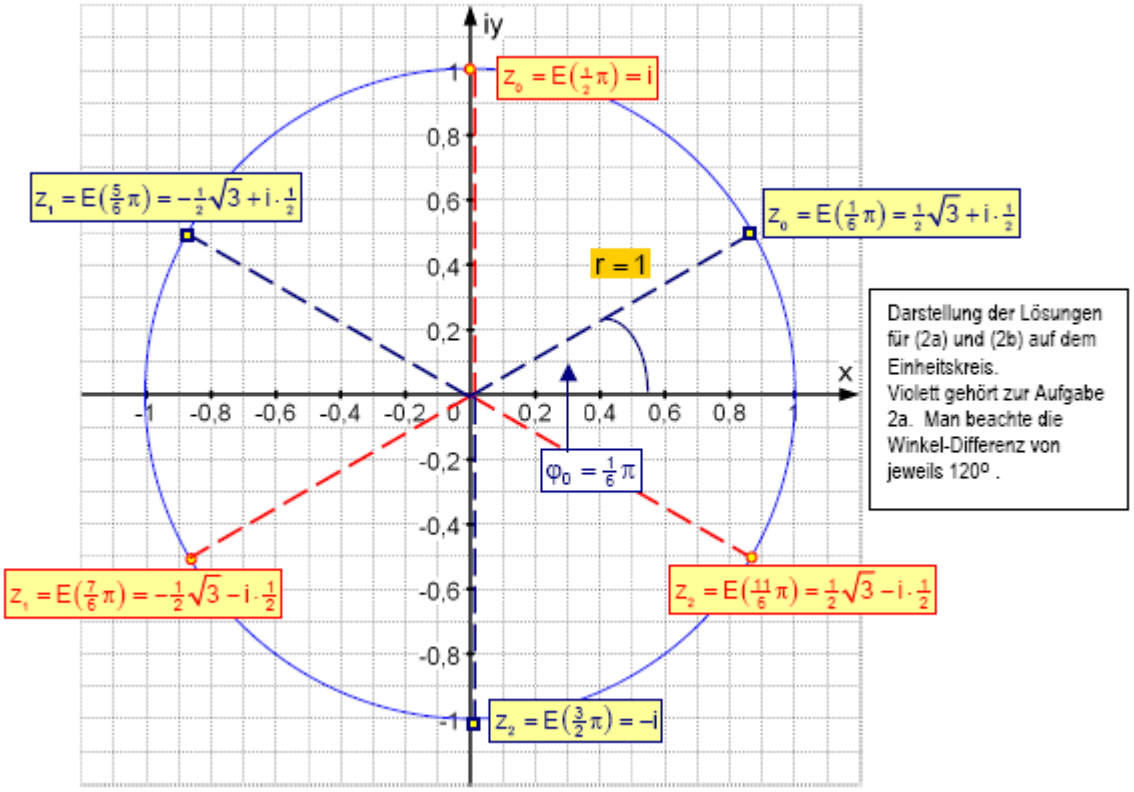
Berechnung der zugehörigen Lösungen:

$z_0 = E\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\frac{1}{2}\pi + i \cdot \sin\frac{1}{2}\pi = 0 + i \cdot 1 = i$

$z_1 = E\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \cos\frac{7}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - i \cdot \frac{1}{2}$

$z_2 = E\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \cos\frac{11}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{11}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - i \cdot \frac{1}{2}$

$\boxed{\mathbb{L} = \left\{ i; -\frac{1}{2}\sqrt{3} - i \cdot \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3} - i \cdot \frac{1}{2} \right\}}$



Darstellung der Lösungen für (2a) und (2b) auf dem Einheitskreis.
Violett gehört zur Aufgabe 2a. Man beachte die Winkel-Differenz von jeweils 120°.

Aufgabe 356:

Es sind reelle Zahlen *a* und *b* so zu bestimmen, dass

$(a+bi)^2 = 3+4i$ gilt.

Lösung:

$$a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i$$
$$(a^2 - b^2) + 2abi = 3 + 4i$$

Wir vergleichen Real- und Imaginärteil und erhalten:

$$a^2 - b^2 = 3$$
$$2ab = 4 \text{ oder } b = 2/a$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a^2 - 4/a^2 &= 3 \\ a^4 - 4 &= 3a^2 \\ a^4 - 3a^2 - 4 &= 0 \\ (a^2 - 4)(a^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten a2 = 4 und a2 = -1.

Da a reell sein soll, können wir die Lösung a2 = -1 nicht gebrauchen.

Ergebnis: a = ± 2.

Für a = 2 ergibt sich b = 1, und für a = -2 erhalten wir b = -1.

Aufgabe 357:

Berechnen Sie

a) (2) $w_1=z_1+z_2$ und $w_2=z_1-z_2$ mit $z_1=4+3i$ und $z_2=5-4i$

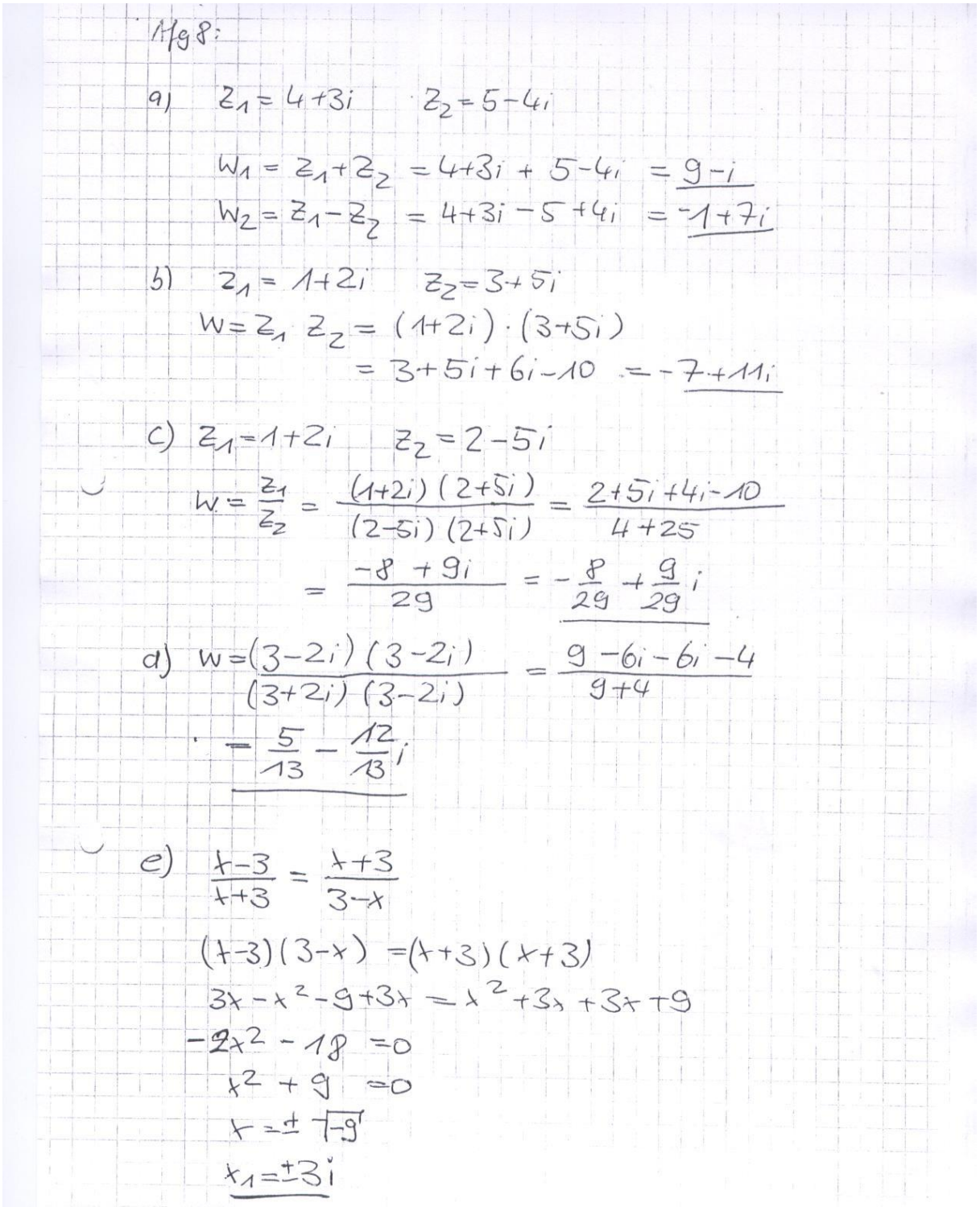
b) (2) $w= z_1 \cdot z_2$ mit $z_1=1+2i$ und $z_2=3+5i$

c) (2) $w=\frac{z_1}{z_2}$ mit $z_1=1+2i$ und $z_2=2-5i$

d) (2) $w=\frac{3-2i}{3+2i}$

e) (2) Lösen Sie die folgende Gleichung in C: $\frac{x-3}{x+3}=\frac{x+3}{3-x}$

Lösung:



Alg 8:

a) $z_1 = 4+3i \quad z_2 = 5-4i$

$w_1 = z_1 + z_2 = 4+3i+5-4i = \underline{9-i}$

$w_2 = z_1 - z_2 = 4+3i-5+4i = \underline{-1+7i}$

b) $z_1 = 1+2i \quad z_2 = 3+5i$

$w = z_1 \cdot z_2 = (1+2i)\cdot(3+5i)$

$= 3+5i+6i-10 = \underline{-7+11i}$

c) $z_1 = 1+2i \quad z_2 = 2-5i$

$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+5i+4i-10}{4+25}$

$= \frac{-8+9i}{29} = \underline{-\frac{8}{29} + \frac{9}{29}i}$

d) $w = \frac{(3-2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{9-6i-6i-4}{9+4}$

$= \underline{\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i}$

e) $\frac{x-3}{x+3} = \frac{x+3}{3-x}$

$(x-3)(3-x) = (x+3)(x+3)$

$3x - x^2 - 9 + 3x = x^2 + 3x + 3x + 9$

$-2x^2 - 18 = 0$

$x^2 + 9 = 0$

$x = \pm\sqrt{-9}$

$\underline{x_1 = \pm 3i}$

Aufgabe 358:

Berechnen Sie folgende Gleichung: $z^4 = 1$

Lösung:

1. Lösungsweg (über Gleichungen)

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$z_{1,2} = \pm 1 \qquad z_{3,4} = \pm i$$

Ergebnis: $\mathbf{L} = \{ \pm 1; \pm i \}$

Aufgabe 359:

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen z=2+i und w=-2-2i. Berechnen Sie $\frac{z}{w}$ und bringen es in die Form a+bi.

Lösung:

$$\frac{z}{w} = \frac{(2+i)}{(-2-2i)} = \frac{(2+i)(-2-2i)}{(-2-2i)(-2-2i)} = \frac{-4+4i-2i-2}{4-4i+4i+4} = \frac{-6+2i}{8} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$$

Aufgabe 360:

Gegeben ist eine komplexe Zahl z=1+i. Berechnen Sie z^4.

Lösung:

z=(1+i)

$z^4=(1+i)^4=(1+i)^2(1+i)^2=(1+2i+i^2)(1+2i+i^2)=(1+2i-1)\ (1+2i-1)=(2i)(2i)=-4$

Aufgabe 361:

Zeigen Sie in den komplexen Zahlen durch Umformung, dass folgender Sachverhalt gilt

$$z = \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = 1 + i$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} &= \frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1} \\
&= \frac{3(-1)^{15}-(-1)^9 i}{-1+2i} \\
&= \frac{-3+i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} \\
&= \frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} \\
&= \frac{5+5i}{5} \\
&= 1+i
\end{aligned}$$

Aufgabe 362:

Es sei $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Zeigen Sie in den komplexen Zahlen durch Umformung, dass folgender Sachverhalt gilt

$(z^*)^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
(\bar{z})^4 &= \left(\overline{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i} \right)^4 \\
&= (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i)^4 \\
&= [(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i)^2]^2 \\
&= [\tfrac{1}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i + \tfrac{3}{4} i^2]^2 \\
&= (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i)^2 \\
&= \tfrac{1}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i + \tfrac{3}{4} i^2 \\
&= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i
\end{aligned}
$$

Aufgabe 363:

Berechnen Sie folgende Gleichungen in den komplexen Zahlen.

$$2\underline{x} + j3\underline{x} = 19 - j4$$

$$3\underline{x} - j5\underline{x} = -6 + j10$$

$$2\underline{x} + j3\underline{x} = -13 + j13$$

$$5\underline{x} - j2\underline{x} = -1 + j12$$

$$5\underline{x} - j5\underline{x} = 50$$

$$(5 - j4) \cdot (2\underline{x} + j2) = 52 + j24$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
2\underline{x} + j3\underline{x} &= 19 - j4 \quad | \ \underline{x} \text{ ausklammern} \\
\underline{x} \cdot (2 + j3) &= 19 - j4 \quad | : (2 + j3) \\
\underline{x} &= \frac{19 - j4}{2 + j3} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(19 - j4) \cdot (2 - j3)}{(2 + j3) \cdot (2 - j3)} \\
\underline{x} &= \frac{38 - j57 - j8 + j^2 12}{4 - j^2 9} \\
\underline{x} &= \frac{38 - j57 - j8 - 12}{4 + 9} \\
\underline{x} &= \frac{26 - j65}{13} \\
\underline{x} &= \frac{26}{13} - j\frac{65}{13} \\
\underline{x} &= 2 - j5 \\
L &= \{2 - j5\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3\underline{x} - j5\underline{x} &= -6 + j10 \\
\underline{x} \cdot (3 - j5) &= -6 + j10 \quad | : (3 - j5) \\
\underline{x} &= \frac{-6 + j10}{3 - j5} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(-6 + j10) \cdot (3 + j5)}{(3 - j5) \cdot (3 + j5)} \\
\underline{x} &= \frac{-18 - j30 + j30 + j^2 50}{9 - j^2 25} \\
\underline{x} &= \frac{-18 - j30 + j30 - 50}{9 + 25} \\
\underline{x} &= \frac{-68}{34} \\
\underline{x} &= -2 \\
L &= \{-2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\underline{x} + j3\underline{x} &= -13 + j13 \\
\underline{x} \cdot (2 + j3) &= -13 + j13 \quad | : (2 + j3) \\
\underline{x} &= \frac{-13 + j13}{2 + j3} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(-13 + j13) \cdot (2 - j3)}{(2 + j3) \cdot (2 - j3)} \\
\underline{x} &= \frac{-26 + j39 + j26 - j^2 39}{4 - j^2 9} \\
\underline{x} &= \frac{-26 + j39 + j26 + 39}{4 + 9} \\
\underline{x} &= \frac{13 + j65}{13} \\
\underline{x} &= \frac{13}{13} + j\frac{65}{13} \\
\underline{x} &= 1 + j5 \\
L &= \{1 + j5\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5\underline{x} - j2\underline{x} &= -1 + j12 \\
\underline{x} \cdot (5 - j2) &= -1 + j12 \quad | : (5 - j2) \\
\underline{x} &= \frac{-1 + j12}{5 - j2} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(-1 + j12) \cdot (5 + j2)}{(5 - j2) \cdot (5 + j2)} \\
\underline{x} &= \frac{-5 - j2 + j60 + j^2 24}{25 - j^2 4} \\
\underline{x} &= \frac{-5 - j2 + j60 - 24}{25 + 4} \\
\underline{x} &= \frac{-29 + j58}{29} \\
\underline{x} &= -\frac{29}{29} + j\frac{58}{29} \\
\underline{x} &= -1 + j2 \\
L &= \{-1 + j2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5\underline{x} - j5\underline{x} &= 50 \\
\underline{x} \cdot (5 - j5) &= 50 \quad | : (5 - j5) \\
\underline{x} &= \frac{50}{5 - j5} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{50 \cdot (5 + j5)}{(5 - j5) \cdot (5 + j5)} \\
\underline{x} &= \frac{250 + j250}{25 - j^2 25} \\
\underline{x} &= \frac{250 + j250}{25 + 25} \\
\underline{x} &= \frac{250 + j250}{50} \\
\underline{x} &= \frac{250}{50} + j\frac{250}{50} \\
\underline{x} &= 5 + j5 \\
L &= \{5 + j5\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5-j4)\cdot(2\underline{x}+j2) &= 52+j24 \\
10\underline{x}+j10-j8\underline{x}-j^2 8 &= 52+j24 \quad |j^2=-1 \\
10\underline{x}+j10-j8\underline{x}+8 &= 52+j24 \quad |-8-j10 \\
10\underline{x}-j8\underline{x} &= 44+j14 \\
(10-j8)\underline{x} &= 44+j14 \quad |:(10-j8) \\
\underline{x} &= \frac{44+j14}{10-j8} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(44+j14)(10+j8)}{(10-j8)(10+j8)} \\
\underline{x} &= \frac{440+j352+j140+j^2 112}{100-j^2 64} \quad |j^2=-1 \\
\underline{x} &= \frac{440+j352+j140-112}{100+64} \\
\underline{x} &= \frac{328+j492}{164} \\
\underline{x} &= \frac{328}{164}+j\frac{492}{164} \\
\underline{x} &= 2+j3 \\
L &= \{2+j3\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 364:

Berechnen Sie folgende Gleichungen in den komplexen Zahlen.

$$\frac{60\underline{x}-j50}{3-j2}=15\underline{x}+25$$

$$\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1}=\frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2}$$

$$\frac{2\underline{x}-j2}{2\underline{x}+j4}-\frac{\underline{x}+1-j}{3\underline{x}+j6}=\frac{\underline{x}+2-j}{4\underline{x}+j8}$$

Lösung:

$$\frac{60\underline{x} - j50}{3 - j2} = 15\underline{x} + 25$$

Da im Nenner kein Term mit $\underline{x}$ vorkommt, gibt es für den Definitionsbereich keine Einschränkungen.

$$D = \mathbb{C}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
\frac{60\underline{x} - j50}{3 - j2} &= 15\underline{x} + 25 \quad | \cdot (3 - j2) \\
60\underline{x} - j50 &= (15\underline{x} + 25)(3 - j2) \\
60\underline{x} - j50 &= 45\underline{x} - j30\underline{x} + 75 - j50 \quad | + j50 - 45\underline{x} + j30\underline{x} \\
15\underline{x} + j30\underline{x} &= 75 \\
(15 + j30)\underline{x} &= 75 \quad | : (15 + j30) \\
\underline{x} &= \frac{75}{15 + j30} \\
\underline{x} &= \frac{75 \cdot (15 - j30)}{(15 + j30) \cdot (15 - j30)} \\
\underline{x} &= \frac{1125 - j2250}{225 + 900} \\
\underline{x} &= \frac{1125 - j2250}{1125} \\
\underline{x} &= \frac{1125}{1125} - j\frac{2250}{1125} \\
\underline{x} &= 1 - j2 \\
L &= \{1 - j2\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1}=\frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2}$$

In beiden Nennern tauchen Terme mit $\underline{x}$ auf. Somit müssen die $\underline{x}$-Werte aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, für die der eine oder der andere Nenner Null wird. Für den ersten Nenner ist das der Fall für $\underline{x}=-j$ und für den zweiten Nenner für $\underline{x}=-1-j2$. Also sieht der Definitionsbereich so aus:

$$D=\mathbb{C}\setminus\{-j;-1-j2\}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.
Gleichungen mit Brüchen bekommt man bekanntlich am besten in den Griff, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Da die beiden Nenner teilerfremd sind, ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner.

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1} &= \frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2} \quad |\cdot(\underline{x}+j1)\cdot(\underline{x}+1+j2)\\
(\underline{x}-3+j2)(\underline{x}+1+j2) &= (\underline{x}-2+j5)(\underline{x}+j1)\\
\underline{x}^2+\underline{x}+j2\underline{x}-3\underline{x}-3-j6+j2\underline{x}+j2-4 &= \underline{x}^2+j\underline{x}-2\underline{x}-j2+j5\underline{x}-5\\
\underline{x}^2-2\underline{x}+j4\underline{x}-7-j4 &= \underline{x}^2-2\underline{x}+j6\underline{x}-5-j2\\
j4\underline{x}-7-j4 &= j6\underline{x}-5-j2 \quad |-j6\underline{x}+7+j4\\
-j2\underline{x} &= 2+j2 \quad |:(-j2)\\
\underline{x} &= \frac{2+j2}{-j2}\\
\underline{x} &= \frac{(2+j2)\cdot j}{(-j2)\cdot j}\\
\underline{x} &= \frac{j2-2}{2}\\
\underline{x} &= j\frac{2}{2}-\frac{2}{2}\\
\underline{x} &= j-1\\
L &= \{-1+j\}
\end{aligned}$$

$$\frac{2\underline{x}-j2}{2\underline{x}+j4}-\frac{\underline{x}+1-j}{3\underline{x}+j6}=\frac{\underline{x}+2-j}{4\underline{x}+j8}$$

Gleichungen mit Brüchen bekommt man bekanntlich am besten in den Griff, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Führen wir also eine Nenneranalyse durch, wie von Reellen Bruchgleichungen gewohnt.

$$\begin{array}{rcccll}
2\underline{x}+j4 & = & 2 & \cdot(\underline{x}+j2) & EF=2\cdot 3=6\\
3\underline{x}+j6 & = & 3 & \cdot(\underline{x}+j2) & EF=2^2=4\\
4\underline{x}+j8 & = & 2^2 & \cdot(\underline{x}+j2) & EF=3\\
\hline
HN & = & 2^2\cdot 3 & \cdot(\underline{x}+j2) &
\end{array}$$

Aus dem Ansatz $(\underline{x}+j2)=0$ ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{C}\setminus\{-j2\}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
\frac{2\underline{x}-j2}{2\underline{x}+j4}-\frac{\underline{x}+1-j}{3\underline{x}+j6} &= \frac{\underline{x}+2-j}{4\underline{x}+j8} && |\cdot HN\\
(2\underline{x}-j2)\cdot 6-(\underline{x}+1-j)\cdot 4 &= (\underline{x}+2-j)\cdot 3\\
12\underline{x}-j12-4\underline{x}-4+j4 &= 3\underline{x}+6-j3\\
8\underline{x}-4-j8 &= 3\underline{x}+6-j3 && |+4+j8-3\underline{x}\\
5\underline{x} &= 10+j5 && |:5\\
\underline{x} &= 2+j\\
L &= \{2+j\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 365:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der komplexen Lineargleichungssysteme!

$$\begin{aligned}(-5+j3)\underline{x}+(2+j)\underline{y} &= -19-j12\\ (2-j)\underline{x}+(2+j4)\underline{y} &= -3-j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3+j2)\underline{x}-(5+j2)\underline{y} &= -20+j17\\ (2-j3)\underline{x}+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3-j5)\underline{x}-(1-j3)\underline{y} &= 0\\ (6-j10)\underline{x}+(2+j5)\underline{y} &= 7-j23\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix}(-19-j12) & (2+j)\\ (-3-j) & (2+j4)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(-5+j3) & (2+j)\\ (2-j) & (2+j4)\end{vmatrix}}\\ \underline{x} &= \frac{(-19-j12)\cdot(2+j4)-(-3-j)\cdot(2+j)}{(-5+j3)\cdot(2+j4)-(2-j)\cdot(2+j)}\\ \underline{x} &= \frac{(-38-j76-j24+48)-(-6-j3-j2+1)}{(-10-j20+j6-12)-(4+j2-j2+1)}\\ \underline{x} &= \frac{-38-j76-j24+48+6+j3+j2-1}{-10-j20+j6-12-4-j2+j2-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \frac{15-j95}{-27-j14}\\ \underline{x} &= \frac{(15-j95)\cdot(-27+j14)}{(-27-j14)\cdot(-27+j14)}\\ \underline{x} &= \frac{-405+j210+j2565+1330}{729+196}\\ \underline{x} &= \frac{925+j2775}{925}\\ \underline{x} &= 1+j3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-5+j3)\underline{x}+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \\
(-5+j3)(1+j3)+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \\
-5-j15+j3-9+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \\
-14-j12+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \quad |+14+j12 \\
(2+j)\underline{y} &= -5 \quad |:(2+j) \\
\underline{y} &= \frac{-5}{2+j} \\
\underline{y} &= \frac{-5(2-j)}{(2+j)(2-j)} \\
\underline{y} &= \frac{-10+j5}{4+1} \\
\underline{y} &= \frac{-10+j5}{5} \\
\underline{y} &= -2+j
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$L=\{(1+j3|-2+j)\}$$

$$
\begin{aligned}
(3+j2)\underline{x}-(5+j2)\underline{y} &= -20+j17 \quad |\cdot(1-j2) \\
(2-j3)\underline{x}+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \quad |\cdot(5+j2) \\
\hline
(3+j2)(1-j2)\underline{x}-(5+j2)(1-j2)\underline{y} &= (-20+j17)(1-j2) \\
(2-j3)(5+j2)\underline{x}+(1-j2)(5+j2)\underline{y} &= (2-j3)(5+j2) \\
\hline
(3-j6+j2+4)\underline{x}-(5-j10+j2+4)\underline{y} &= -20+j40+j17+34 \\
(10+j4-j15+6)\underline{x}+(5+j2-j10+4)\underline{y} &= 10+j4-j15+6 \\
\hline
(7-j4)\underline{x}-(9-j8)\underline{y} &= 14+j57 \\
(16-j11)\underline{x}+(9-j8)\underline{y} &= 16-j11 \quad |+ \\
\hline
(23-j15)\underline{x} &= 30+j46 \\
\underline{x} &= \frac{30+j46}{23-j15} \\
\underline{x} &= \frac{(30+j46)(23+j15)}{(23-j15)(23+j15)} \\
\underline{x} &= \frac{690+j450+j1058-690}{529+225} \\
\underline{x} &= \frac{j1508}{754} \\
\underline{x} &= j2
\end{aligned}
$$

Die Lösung für $\underline{y}$ bestimmen wir, indem wir den gefundenen Wert $\underline{x}=j2$ in die zweite Ausgangsgleichung einsetzen.

$$
\begin{aligned}
(2-j3)\underline{x}+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \\
(2-j3)\cdot j2+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \\
j4+6+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \quad |-j4-6 \\
(1-j2)\underline{y} &= -4-j7 \quad |:(1-j2) \\
\underline{y} &= \frac{-4-j7}{1-j2} \\
\underline{y} &= \frac{(-4-j7)(1+j2)}{(1-j2)(1+j2)} \\
\underline{y} &= \frac{-4-j8-j7+14}{1+4} \\
\underline{y} &= \frac{10-j15}{5} \\
\underline{y} &= 2-j3
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L=\{(j2|2-j3)\}}$$

$$
\begin{aligned}
(3-j5)\underline{x}-(1-j3)\underline{y} &= 0 \quad |-(3-j5)\underline{x} \\
-(1-j3)\underline{y} &= -(3-j5)\underline{x} \quad |\cdot(-1) \\
(1-j3)\underline{y} &= (3-j5)\underline{x} \quad |:(1-j3) \\
\underline{y} &= \frac{(3-j5)\underline{x}}{1-j3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6-j10)\underline{x}+(2+j5)\underline{y} &= 7-j23 \\
(6-j10)\underline{x}+(2+j5)\frac{(3-j5)\underline{x}}{1-j3} &= 7-j23 \quad |\cdot(1-j3) \\
(6-j10)(1-j3)\underline{x}+(2+j5)(3-j5)\underline{x} &= (7-j23)(1-j3) \\
6\underline{x}-j18\underline{x}-j10\underline{x}-30\underline{x}+6\underline{x}-j10\underline{x}+j15\underline{x}+25\underline{x} &= 7-j21-j23-69 \\
7\underline{x}-j23\underline{x} &= -62-j44 \\
(7-j23)\underline{x} &= -62-j44 \quad |:(7-j23) \\
\underline{x} &= \frac{-62-j44}{7-j23} \\
\underline{x} &= \frac{(-62-j44)(7+j23)}{(7-j23)(7+j23)} \\
\underline{x} &= \frac{-434-j1426-j308+1012}{49+529} \\
\underline{x} &= \frac{578-j1734}{578} \\
\underline{x} &= 1-j3
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis können wir nun in die umgestellte erste Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \frac{(3-j5)\underline{x}}{1-j3} \\ \underline{y} &= \frac{(3-j5)(1-j3)}{1-j3} \quad | \text{ Kürzen!} \\ \underline{y} &= 3-j5 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$L = \{(1-j3|3-j5)\}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 366:

Lösen Sie folgende Gleichung in den Komplexen Zahlen.

$$\frac{x-3+2i}{x+i}=\frac{x-2+5i}{x+1+2i}$$

$$\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1}=\frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2}$$

In beiden Nennern tauchen Terme mit $\underline{x}$ auf. Somit müssen die $\underline{x}$-Werte aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, für die der eine oder der andere Nenner Null wird. Für den ersten Nenner ist das der Fall für $\underline{x}=-j$ und für den zweiten Nenner für $\underline{x}=-1-j2$. Also sieht der Definitionsbereich so aus:

$$D=\mathbb{C}\setminus\{-j;-1-j2\}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.
Gleichungen mit Brüchen bekommt man bekanntlich am besten in den Griff, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Da die beiden Nenner teilerfremd sind, ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner.

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1} &= \frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2} \quad |\cdot(\underline{x}+j1)\cdot(\underline{x}+1+j2)\\
(\underline{x}-3+j2)(\underline{x}+1+j2) &= (\underline{x}-2+j5)(\underline{x}+j1)\\
\underline{x}^2+\underline{x}+j2\underline{x}-3\underline{x}-3-j6+j2\underline{x}+j2-4 &= \underline{x}^2+j\underline{x}-2\underline{x}-j2+j5\underline{x}-5\\
\underline{x}^2-2\underline{x}+j4\underline{x}-7-j4 &= \underline{x}^2-2\underline{x}+j6\underline{x}-5-j2\\
j4\underline{x}-7-j4 &= j6\underline{x}-5-j2 \quad |-j6\underline{x}+7+j4\\
-j2\underline{x} &= 2+j2 \quad |:(-j2)\\
\underline{x} &= \frac{2+j2}{-j2}\\
\underline{x} &= \frac{(2+j2)\cdot j}{(-j2)\cdot j}\\
\underline{x} &= \frac{j2-2}{2}\\
\underline{x} &= j\frac{2}{2}-\frac{2}{2}\\
\underline{x} &= j-1\\
L &= \{-1+j\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 367:

Lösen Sie folgende Gleichung in den komplexen Zahlen. Bestimmen Sie auch eine Definitionsmenge.

$$\frac{\mathrm{x}-3+2\mathrm{i}}{\mathrm{x}+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{x}-2+5\mathrm{i}}{\mathrm{x}+1+2\mathrm{i}}$$

Lösung:

$$\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1}=\frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2}$$

In beiden Nennern tauchen Terme mit $\underline{x}$ auf. Somit müssen die $\underline{x}$-Werte aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, für die der eine oder der andere Nenner Null wird. Für den ersten Nenner ist das der Fall für $\underline{x}=-j$ und für den zweiten Nenner für $\underline{x}=-1-j2$. Also sieht der Definitionsbereich so aus:

$$D=\mathbb{C}\setminus\{-j;-1-j2\}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.
Gleichungen mit Brüchen bekommt man bekanntlich am besten in den Griff, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Da die beiden Nenner teilerfremd sind, ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner.

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1} &= \frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2} \quad |\cdot(\underline{x}+j1)\cdot(\underline{x}+1+j2)\\
(\underline{x}-3+j2)(\underline{x}+1+j2) &= (\underline{x}-2+j5)(\underline{x}+j1)\\
\underline{x}^2+\underline{x}+j2\underline{x}-3\underline{x}-3-j6+j2\underline{x}+j2-4 &= \underline{x}^2+j\underline{x}-2\underline{x}-j2+j5\underline{x}-5\\
\underline{x}^2-2\underline{x}+j4\underline{x}-7-j4 &= \underline{x}^2-2\underline{x}+j6\underline{x}-5-j2\\
j4\underline{x}-7-j4 &= j6\underline{x}-5-j2 \quad |-j6\underline{x}+7+j4\\
-j2\underline{x} &= 2+j2 \quad |:(-j2)\\
\underline{x} &= \frac{2+j2}{-j2}\\
\underline{x} &= \frac{(2+j2)\cdot j}{(-j2)\cdot j}\\
\underline{x} &= \frac{j2-2}{2}\\
\underline{x} &= j\frac{2}{2}-\frac{2}{2}\\
\underline{x} &= j-1\\
L &= \{-1+j\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 368:

Lösen Sie folgendes LGs in den komplexen Zahlen.

$(-5+3\mathrm{i})\mathrm{x}+(2+\mathrm{i})\mathrm{y}=-19-12\mathrm{i}$

$(2-\mathrm{i})\mathrm{x}+(2+4\mathrm{i})\mathrm{y}=-3-\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}
(-5+j3)\underline{x}+(2+j)\underline{y} &= -19-j12\\
(2-j)\underline{x}+(2+j4)\underline{y} &= -3-j
\end{aligned}$$

Lösung:

Zur Erinnerung: Ein Gleichungssystem in der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

hat die Lösungen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Das gleiche gilt natürlich auch für komplexe Lineargleichungssysteme. Das wenden wir nun auf unser Gleichungssystem an.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (-19-j12) & (2+j) \\ (-3-j) & (2+j4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-5+j3) & (2+j) \\ (2-j) & (2+j4) \end{vmatrix}} \\ \underline{x} &= \frac{(-19-j12)\cdot(2+j4) - (-3-j)\cdot(2+j)}{(-5+j3)\cdot(2+j4) - (2-j)\cdot(2+j)} \\ \underline{x} &= \frac{(-38-j76-j24+48) - (-6-j3-j2+1)}{(-10-j20+j6-12) - (4+j2-j2+1)} \\ \underline{x} &= \frac{-38-j76-j24+48+6+j3+j2-1}{-10-j20+j6-12-4-j2+j2-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 369:

Berechnen Sie in den komplexen Zahlen z. Bringen Sie das Ergebnis in die Form a+bi.

a) (3)

$\mathbb{D} = \mathbb{C}$

$2 - 9\mathrm{i} = (1 - 2\mathrm{i})(\mathrm{z} - 3 + 4\mathrm{i})$

b) (3)

$\mathbb{D} = \mathbb{C}$

$\frac{3-2i}{z} = 5 + \mathrm{i}$

c) (4)

$\mathbb{D} = \mathbb{C}$

$\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{z}} + \frac{20}{4+3\mathrm{i}} = 3 - i$

Lösung:

a) (3)

$2 - 9\mathrm{i} = (1 - 2\mathrm{i})(\mathrm{z} - 3 + 4\mathrm{i})$

$2 - 9i = z - 3 + 4i - 2iz + 6i - 8i^2$

$2 - 9i = z - 3 + 4i - 2iz + 6i + 8$

$z - 2iz = -19i + 3$

$z(1 - 2i) = (-3 - 19i)$

$$z = \frac{(-3 - 19i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{-3 - 6i - 19i + 38}{5} = \frac{35 - 25i}{5} = 7 - 5i$$

b) (3)

$$\frac{3 - 2i}{z} = 5 + \mathrm{i}$$

$(3 - 2i) = (5 + i) \cdot z$

$$z = \frac{(3 - 2i) \cdot (5 - i)}{(5 + i) \cdot (5 - i)} = \frac{15 - 3i - 10i - 2}{26} = \frac{13 - 13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

c) (4)

$$\frac{1 - \mathrm{i}}{\mathrm{z}} + \frac{20}{4 + 3\mathrm{i}} = 3 - i$$

$(1 - i)(4 + 3i) + 20z = (3 - i)(4 + 3i) \cdot z$

$4 + 3i - 4i + 3 + 20z = (3 - i)(4 + 3i) \cdot z$

$7 - i + 20z = (3 - i)(4 + 3i) \cdot z$

$7 - i = (3 - i)(4 + 3i) \cdot z - 20z$

$z[(3 - i)(4 + 3i) - 20] = (7 - i)$

$$z = \frac{(7 - i)}{(3 - i)(4 + 3i) - 20} = \frac{(7 - i)}{12 + 9i - 4i + 3 - 20} = \frac{(7 - i) \cdot (-5 - 5i)}{(-5 + 5i) \cdot (-5 - 5i)}$$

$$= \frac{-35 - 35i + 5i - 5}{50} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\,i$$

Lineare Optimierung (grafische Lösung)

Aufgabe 370:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB: $x_1 \leq 6$
$2x_1 + x_2 \leq 16$
$x_1 + 4x_2 \leq 36$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 371:

Gegeben ist das LOP

Z: Min $z=3x_1+4x_2$

NB: $2x_1 + 5x_2 \geq 25$
$4x_1 + 4x_2 \geq 32$
$6x_1 + 2x_2 \geq 24$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 372:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

NB: $x_1 \leq 6$
$x_1 + x_2 \geq 4$
$2x_1 + x_2 \leq 16$
$x_1 + 4x_2 \leq 36$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 373:

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB: $x_1 \leq 6$
$x_1 + x_2 \geq 4$
$2x_1 + x_2 \leq 16$
$x_1 + 4x_2 \leq 36$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 374:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 375:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Min $z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 4x_2 = 36$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Aufgabe 376:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=8x_1+4x_2$

NB:
$$3x_1 + 5x_2 \le 32$$
$$4x_1 + 4x_2 \le 32$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 28$$

Aufgabe 377:

Gegeben ist folgendes LOP

Z: Max $z=2x_1+3x_2$

NB:
$$6x_2 \le 30$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 36$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 38$$

Aufgabe 378:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

$$2x_1 - x_2 \geq 6$$

NB: $x_1 - x_2 \leq 1$

$$-2x_1 + x_2 \geq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 379:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=4x_1+2x_2$

$$2x_1 - x_2 \leq 6$$

NB: $x_1 - x_2 \leq 1$

$$-2x_1 + x_2 \leq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 380:

Gegeben sie folgendes LOP

Z: Max $z=-3x_1+2x_2$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

NB: $-x_1 + x_2 \leq 4$

$$-2x_1 + x_2 \leq 3$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Aufgabe 381:

Lösen Sie folgendes LOP.

a) Max. $F(x,y) = 4x + 3y$

$$\begin{aligned} x + 3y &\le 9 \\ -x + 2y &\ge 2 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

b) Max. $F(x,y) = x + y$

$$\begin{aligned} 5x + y &\le 10 \\ x + 2y &\le 6 \\ x - y &\ge 1 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

c) Max. $F(x,y) = x - y$

$$\begin{aligned} 2x - y &\le 0 \\ x + 2y &\le 1 \\ 2x + y &\ge 2 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

d) Max. $F(x,y) = 2x + y$

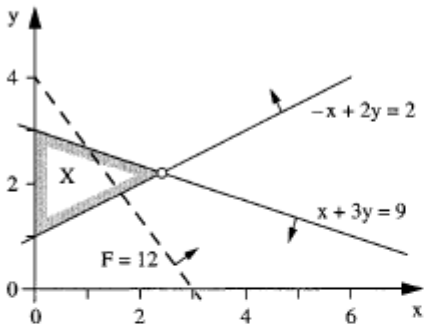
$$\begin{aligned} -x + y &\le 1 \\ x + 3y &\ge 6 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

Lösung:

a) Optimale Lösung:

$x^* = 2.4, y^* = 2.2$

$F^* = 16.2$

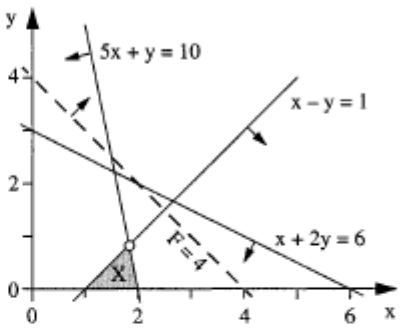


b) Optimale Lösung:

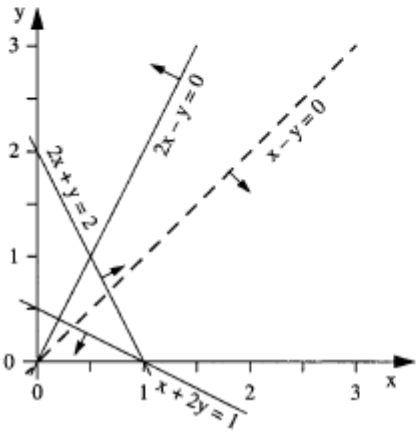
$x^* = 11/6 = 1.833$

$y^* = 5/6 = 0.833$

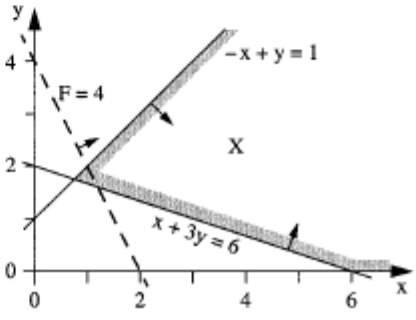
$F^* = 8/3 = 2.67$



c) Es existiert keine zulässige Lösung.



d) Der zulässige Bereich ist unbeschränkt. Der Zielfunktionswert lässt sich beliebig steigern; somit ist keine optimale Lösung angebbar.



Aufgabe 382:

Ein Gärtner möchte einen 100 qm großen Garten mit Rosen und/oder Nelken bepflanzen.

Er möchte max. 720 Euro an Arbeits- und Materialkosten investieren und höchstens 60qm für Nelken reservieren.

Folgende Tabelle enthält weitere Daten des Problems.

	Rosen	Nelken
Arbeits- und Materialkosten (in Euro/qm)	6	9
Gewinn	1	2

Wie viele qm sollen mit jeder Sorte bepflanzt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird?

Lösung:

x1: mit Rosen zu bepflanzende Fläche

x2: mit Nelken zu bepflanzende Fläche

Damit erhalten wir folgendes Modell

Max Z=x1+2x2

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$6x_1 + 9x_2 \leq 720$$
$$x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zielfunktion umgeformt

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{1}} + \frac{X_2}{\frac{Z}{2}} = 1$$

P(30,60) Z=150

Aufgabe 383:

Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten.

Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 Euro je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 Euro je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 Euro für die Zelte ausgeben.

Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?

Lösung:

Diese Aufgabenstellung ist in zwei Teile unterteilt:

Zunächst erfahren wir Bedingungen, die die Lösung beeinflussen, danach wird das Ziel bestimmt. Um die Lösung übersichtlicher zu gestalten ordnen wir zunächst den beiden Zelten Variablen zu, nämlich

x = 10-Personenzelte

y = 15-Personenzelte

Der nächste Schritt besteht in dem Umformen der Bedingungen in mathematische Formeln. Dadurch erhalten wir folgende Ungleichungen:

x >= 0

y >= 0

(da von beiden Zelten ja eine Anzahl größer null oder auch gar keines gekauft wird)

x <= 5

y <= 4

(da höchstens 5 bzw. 4 Zelte gekauft werden können)

Außerdem wissen wir, dass der Jugendgruppe nur 1800 Euro zur Verfügung stehen und dass die Zelte 200 Euro bzw. 400 Euro kosten.

Daraus ergibt sich folgende Ungleichung:

200x+400y<=1800

Diese Bedingung formen wir zur besseren Handhabung in

x+2y<=9 um.

Um diese Voraussetzungen in ein Koordinatensystem einzufügen, werden sie zunächst in Gleichungen umgewandelt:

x=0

y=0

x=5

y=4

x+2y=9

Graphische Lösung

In einem Koordinatensystem sieht das dann folgendermaßen aus:

Dadurch erhalten wir die hier gelb gefärbte, denn nur die Punkte dieses Bereiches erfüllen die Bedingungen.

Von diesen zulässigen Lösungen muss nun das Wertepaar (x/y) bestimmt werden, mit dem die Jugendgruppe die meisten Personen unterbringen kann.

Dafür stellen wir zunächst die sog. Zielfunktion auf:

10*x+15*y=Z

(wobei Z die Menge der Personen ist)

Durch Umstellen dieser Zielfunktion mit drei Variablen erhalten wir die Formel

$$\frac{x}{\frac{Z}{10}}+\frac{y}{\frac{Z}{15}}=1$$

Wählen von Z=60

die wir in das Koordinatensystem einfügen.

Jetzt geben wir beliebige Werte für Z ein, bis eine Funktion nur noch einen Punkt mit der Menge der zulässigen Lösungen gemeinsam hat. Dieser Punkt kennzeichnet das Wertepaar, mit dem die meisten Personen untergebracht werden können (siehe roter Kreis).

Das hier abzulesende Ergebnis P(5,2) (5 Zehnpersonenzelte und 2 Fünfzehnpersonenzelte) lässt sich auch rechnerisch überprüfen, indem man die Probe macht:

5*200 Euro+2*400 Euro=1800 Euro

Aufgabe 384:

Eine kleine Motoradfabrik baut und verkauft die beiden Typen Mofa und Lofa. Während die Produktionskosten für ein Mofa 5.000 Euro betragen, belaufen sie sich bei der Lofa nur auf 3.000 Euro pro Stück. Insgesamt können pro Tag nicht mehr als 30.000 Euro für die Produktion ausgegeben werden.

Für die Fertigung der Mofas rechnet die Arbeitsvorbereitung mit einer Arbeitszeit von 30 Stunden, für die der Lofas setzt sie hingegen 60 Stunden an. Pro Tag stehen maximal 480 Arbeitsstunden zur Verfügung. Vom Mofa sollen pro Tag maximal 3 Stück gefertigt werden.

Marktanalysen zeigen, dass pro Tag mindestens 4 Lofas abgesetzt werden müssen und unbegrenzt Mofas abgesetzt werden können. Der Verkaufspreis der Lofas liegt bei 5.000 Euro, der der Mofas bei 10.000 Euro pro Stück.

Wie viel Mofas und Lofas sollen täglich produziert werden, um das Umsatzmaximum zu erreichen? Wie groß ist dieser maximale Umsatz?

Lösung:

Zielfunktion:		$Z = 10.000\,M + 5.000\,L \rightarrow \text{Max.}$		
Nebenbedingungen:				
Produktionskosten	I	$5.000\,M + 3.000\,L \leq 30.000$	$\rightarrow$	$L \leq 10 - \frac{5}{3}M$
Arbeitsstunden	II	$30\,M + 60\,L \leq 480$	$\rightarrow$	$L \leq 8 - \frac{1}{2}M$
max. Produktion	III	$M \leq 3$	$\rightarrow$	$M \leq 3$
Mindestverkauf	IV	$L \geq 4$	$\rightarrow$	$L \geq 4$
Nichtnegat.-bed.:	V / VI	$M, L \geq 0$		

Errechnen des Gewinnmaximums: Schnittpunkt der Geraden I und III

$M = 3$ $\quad L = 10 - \frac{5}{3} M$

$L = 10 - 5 = 5$

Ermitteln des Gewinns: $\mathbf{Z(M, L) = 10.000\ M + 5.000\ L \rightarrow Max.}$

$= 10.000 \cdot 3 + 5.000 \cdot 5$

$= 55.000$

Aufgabe 385:

Eine Tischlerei erhält einen Auftrag, für den unterschiedliche Holzplatten mit der folgenden Stückzahl zu verwenden sind:

10 Platten der Größe A,

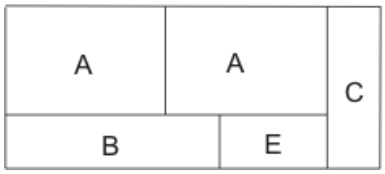
12 Platten der Größe B,

8 Platten der Größe C,

4 Platten der Größe D.

Die Tischlerei bezieht dazu aus einem Sägewerk zwei Holzplattentypen I und II, die auf vorgegebene Weise (Abbildung 1) zu zerschneiden sind.

Typ I



Typ II

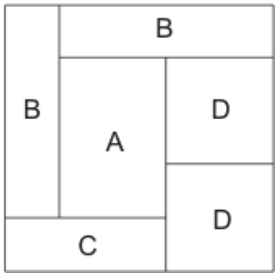


Abbildung 1: Zerlegung der Holzplattentypen.

Der Preis einer Platte des Typs I beträgt 300 Euro und der einer Platte des Typs II 200 Euro. Aus Lager- und Verkaufsgründen sollten nicht mehr als 16 Platten der Größe D und nicht mehr als 5 Platten der Größe E gelagert werden.

Es ist zu ermitteln, wie viel Platten I und II gekauft werden müssen, damit der Auftrag ausgeführt werden kann und der Gesamteinkaufspreis der Platten so gering wie möglich ausfällt.

Lösung:

Das gegebene Problem ist dergestalt, dass wir es graphisch in der Ebene lösen können. Dazu werden zuerst kalkülmäßig die Zielfunktion und die Nebenbedingungen formuliert. Die Nebenbedingungen sind Ungleichungen. Die graphische Veranschaulichung der Nebenbedingungen ergibt Schnitte von Halbebenen, deren Ergebnis im vorliegenden Fall ein begrenztes Gebiet ist, der so genannte **zulässige Bereich** (Abbildung 2). Der zulässige Bereich enthält alle Punkte der Ebene, deren Koordinaten die Nebenbedingungen erfüllen. Als Repräsentation der Zielfunktion wird eine

Optimierungsgerade eingeführt. Diese wird so lange parallel in Optimierungsrichtung verschoben (der Absolutwert der verschobenen Gerade muss kleiner werden, weil die Zielfunktion minimiert werden soll), bis die Optimierungsgerade eben noch den zulässigen Bereich tangiert. Dieser "letzte" Berührungspunkt der Optimierungsgerade mit dem zulässigen Bereich ist der optimale Punkt, seine Koordinaten sind die gesuchten Werte x und y.

Lineare Funktionen besitzen die Eigenschaft der Konvexität. Daher können wir den Sachverhalt nutzen, dass der "letzte" gemeinsame Punkt der Optimierungsgerade mit dem zulässigen Bereich ein Eckpunkt ist. Es reicht demzufolge aus, die Gerade in alle Eckpunkte parallel zu verschieben und dabei den Absolutwert der Gerade, die Ordinate des Schnittpunktes mit der Ordinatenachse, zu betrachten (Abbildung 2).

Es bezeichne x die Anzahl der einzukaufenden Platten des Typs I, es bezeichne y die Anzahl der einzukaufenden Platten des Typs II.

Modellieren wir die im Aufgabentext angegebenen Aussagen in Formeln, entsteht das folgende Optimierungsproblem. Die zugehörige Zielfunktion lautet:

$G = 300\,x + 200y = \text{Min!}$ (1)

Als Nebenbedingungen ergeben sich die Ungleichungen

(A) $2x + y \geq 10$

(B) $x + 2y \geq 12$

(C) $x + y \geq 8$

(D) $2y \geq 4$

(D') $2y \leq 16$

(E) $x \leq 5$

(N) $x, y \geq 0$, x, y ganzzahlig

Zur besseren graphischen Darstellbarkeit wird (1) und (2) umgeformt, es entsteht als Zielfunktion

$y = -3/2x + G^*$

Als Nebenbedingungen entstehen die Ungleichungen für ganze x und y

(A) $y \geq -2x + 10$

(B) $y \geq -0{,}5x + 6$

(C) $y \geq -x + 8$

(D) $y \geq 2$

(D') $y \leq 8$

(E) $0 \leq -x + 5$

(N) $x, y \geq 0$.

Durch den Eintrag in ein Koordinatensystem in der Ebene gelangen wir nun zum zulässigen Bereich durch den Schnitt der Halbebenen, die in (4) definiert sind (Abbildung 2).

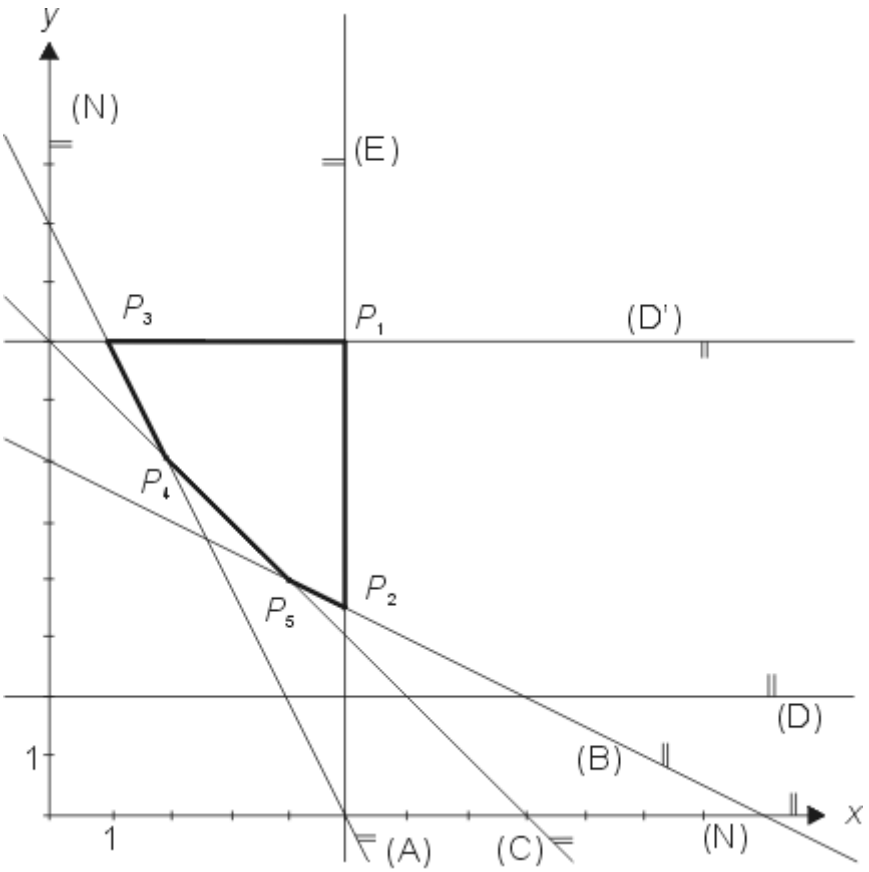


Abbildung 2: Ermittlung des zulässigen Bereichs.

Als Eckpunkte des zulässigen Bereiches ergeben sich die Koordinatentupel P_1=(5, 8), P_2=(5, 3.5), P_3=(1, 8), P_4=(2, 6) und P_5=(4, 4). Da an eine Lösung des Optimierungsproblems die Forderung der Ganzzahligkeit gestellt wird, werden die Eckpunkte mit nichtganzzahligen Koordinaten (im Beispiel P_2) nicht weiter berücksichtigt.

Zeichnen wir im Koordinatensystem eine Schar von Parallelen, die verschiedenen G^* entsprechen, so dass jeweils die (ganzzahligen!) Eckpunkte des zulässigen Bereichs auf den Geraden liegen (Abbildung 3), ergeben sich die Absolutwerte der Geraden mit $G_1^* = 15.5$; $G_3^* = 9.5$; $G_4^* = 9$ und $G_5^* = 10$.

Betrachten wir aufgrund der Minimierung von G^* die **Optimierungsrichtung** in Richtung der negativen y-Achse, erkennen wir, dass G^* den Minimalwert annimmt und gerade noch den zulässigen Bereich in dem Eckpunkt (x, y) = (2, 6) tangiert, wenn $G^* = G_4^* = 9$ gilt.

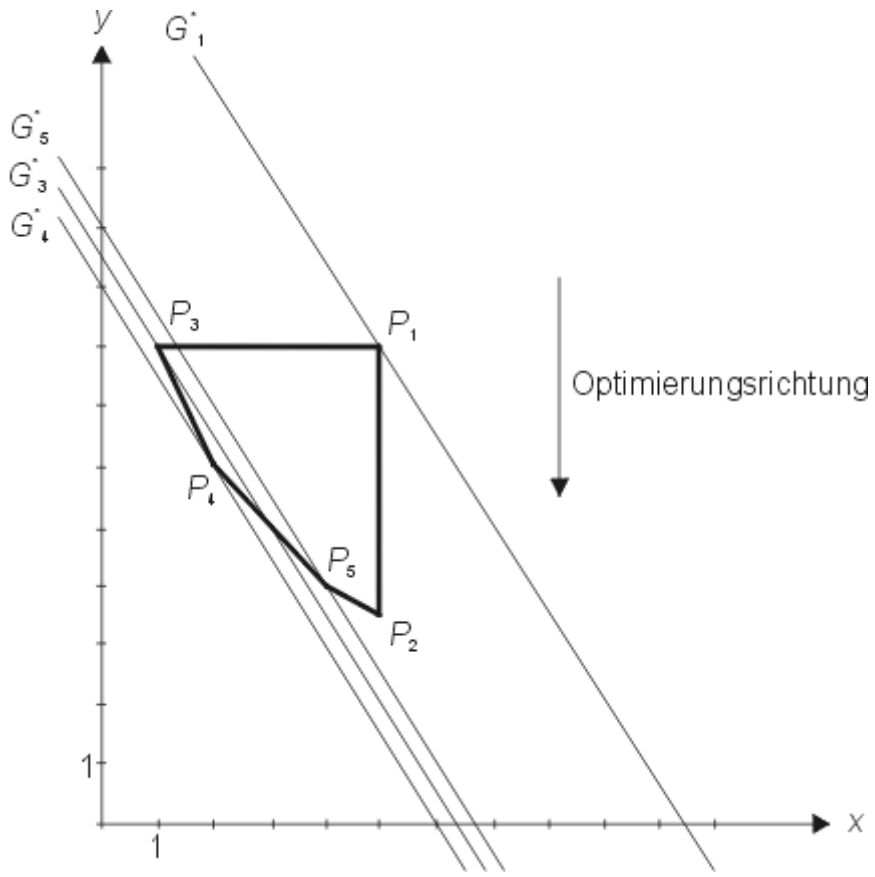


Abbildung 3: Suchen der Optimalstelle durch Minimierung.

Also besitzt das lineare Optimierungsproblem folgende Lösung: Es sind genau 2 Platten des Typs I und 6 Platten des Typs II einzukaufen, der Einkaufswert beträgt G = 1800 DM.

Graphische Lösungen bieten sich bei zweidimensionalen Problemen aber auch an, wenn nur die Nebenbedingungen linear sind und die Zielfunktion beispielsweise quadratisch auftritt. Nicht unerwähnt bleiben soll das graphische Lösen dreidimensionaler linearer Optimierungsprobleme. Einfache räumliche Aufgaben unterstreichen die Komplexität der mathematischen Optimierung, schulen das Vorstellungsvermögen und sind in komplizierterer Form ein hervorragender Einstieg in vieldimensionale Problematiken, hinarbeitend auf die Simplexmethode.

Aufgabe 386:

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit zwei tiermehlfreien Futtersorten A und B (z.B. Rüben und Heu). Die Tagesrationen eines Rindes müssen die Nährstoffe 1,2 und 3 im Umfang von mindestens 6,12 bzw. 4 g enthalten.

Die Nährstoffgehalte in g pro kg und Preise in GE pro kg der beiden Sorten zeigt die folgende Tabelle:

	Sorte A	Sorte B	Tagesbedarf
Nährstoff 1	2	1	6
Nährstoff 2	2	4	12
Nährstoff 3	0	4	4
Preis in GE/kg	5	7	

Wie viele kg von Sorte A bzw. B muss jede Tagesration enthalten, wenn sie unter Einhaltung der Nährstoffbedingungen die Kosten minimal sein sollten.

Lösung:

Mit den Variablen

x_1: kg von Sorte A pro Tagesration

x_2: kg von Sorte B pro Tagesration

lautet das Optimierungsproblem

Min $Z=5\,x_1+7x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$4x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Umformung der Zielfunktion

$$Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\frac{x_1}{\frac{Z}{5}} + \frac{x_2}{\frac{Z}{7}} = 1$$

P(2,2), Z=24 GE

Aufgabe 387:

Ein Hersteller produziert zwei Sortimente eines Artikels, der aus Teilen besteht, die geschnitten, zusammengebaut und fertig gestellt werden müssen.

Der Unternehmer weiß, dass er so viele Artikel verkaufen kann, wie er produziert. Sortiment 1 benötigt 25 Minuten zum Zerschneiden, 60 Minuten zum Zusammenbau und

68 Minuten, um es verkaufsfertig zu machen. Es erzielt 30 Euro Gewinn. Für Sortiment 2 braucht man 75 Minuten zum Schneiden, 60 Minuten für den Zusammenbau und 34 Minuten, zur Fertigstellung. Dieses Sortiment erzielt einen Gewinn von 40 Euro. Es stehen nicht mehr als 450 Minuten zum, Zerschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau und 476 Minuten zum Fertigstellen pro Tag zur Verfügung.

Nun stellt sich dem Unternehmer die Frage, wie viele Artikel von jedem Sortiment jeden Tag produziert werden müssen, um den Gewinn zu maximieren.

Lösung:

Als erstes müssen wir wieder die Angaben in Ungleichungen umändern und Variablen verteilen.

Es seien x die Anzahl der Artikel aus Sortiment 1 und y die Anzahl der Artikel aus Sortiment zwei.

Die Werte für x und y können nicht negativ sein, sondern nur Beträge größer oder gleich null annehmen:

x >= 0

y >= 0

Die Zuschneide-, Zusammenbau- und Fertigstellungszeiten führen zu folgenden Ungleichungen:

25x+75y <= 450 x+3y<=18

60x+60y <= 480 x+y<=8

68x+34y <= 476 2x+y<=14

Graphische Lösung:

In einer Grafik repräsentieren diese drei Ungleichungen die Flächen unterhalb den vorgegebenen Linien, während die ersten beiden Ungleichungen genau auf den Achsen liegen, und damit die Fläche abgrenzen:

Das Problem besteht nun darin, Werte für x und y zu finden, die alle Randbedingungen erfüllen und den Gewinn maximieren. Um dies zu erreichen müssen wir zunächst wieder die Zielfunktion aufstellen:

30*x+40*y = Z

Nun wird diese Funktion in eine Form umgeschrieben, die in ein Koordinatensystem eingetragen werden kann.

$\frac{x}{\frac{Z}{30}}+\frac{y}{\frac{Z}{40}}=1$ Man wählt z=120

Jetzt gibt man wieder beliebige Werte für Z ein, bis eine der entstehenden Funktionen den möglichen Bereich nur noch in einem Punkt schneidet. Dieser Punkt kennzeichnet das Wertepaar, mit dem eine optimale Anzahl an Sortimenten hergestellt wird.

Dieses Ergebnis (3 / 5) lässt sich wieder mit der Probe überprüfen:

3*30 Euro+5*40 Euro=290 Euro. Der Unternehmer sollte also drei Artikel aus Sortiment 1 und fünf Artikel aus Sortiment 2 herstellen, um die Arbeitszeit optimal auszunutzen und den Gewinn dabei zu maximieren.

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 388:

Ein Unternehmen gewinnt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) zwei Mineralien (M_1,M_2). Eine Tonne M_1 wird aus 6 Tonnen R_1, 4 Tonnen R2 und 4 Tonnen R3 hergestellt; eine Tonne M_2 ergibt sich aus 3 Tonnen R_1, 4 Tonnen R_2 und 12 Tonnen R_3. Pro Woche stehen maximal 60 Tonnen R_1, 44 Tonnen R_2 und 84 Tonnen R_3 zur Verfügung. Eine Tonne M_1 bzw. M_2 wirft einen Gewinn von 200 € bzw. 300 € ab.

a) Lösen Sie dieses Problem grafisch. (6,5)

b) Was würde sich für das Optimum ergeben, wenn zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen verlangt würde, dass von M_2 mindestens 8 Tonnen erzeugt werden müssten?

Lösung:

Das entsprechende lineare Optimierungsproblem lautet in Grundform:

Max Z = $200x_1+300x_2$

$$\frac{\frac{x_1}{Z}}{200}+\frac{\frac{x_2}{Z}}{300}=1$$

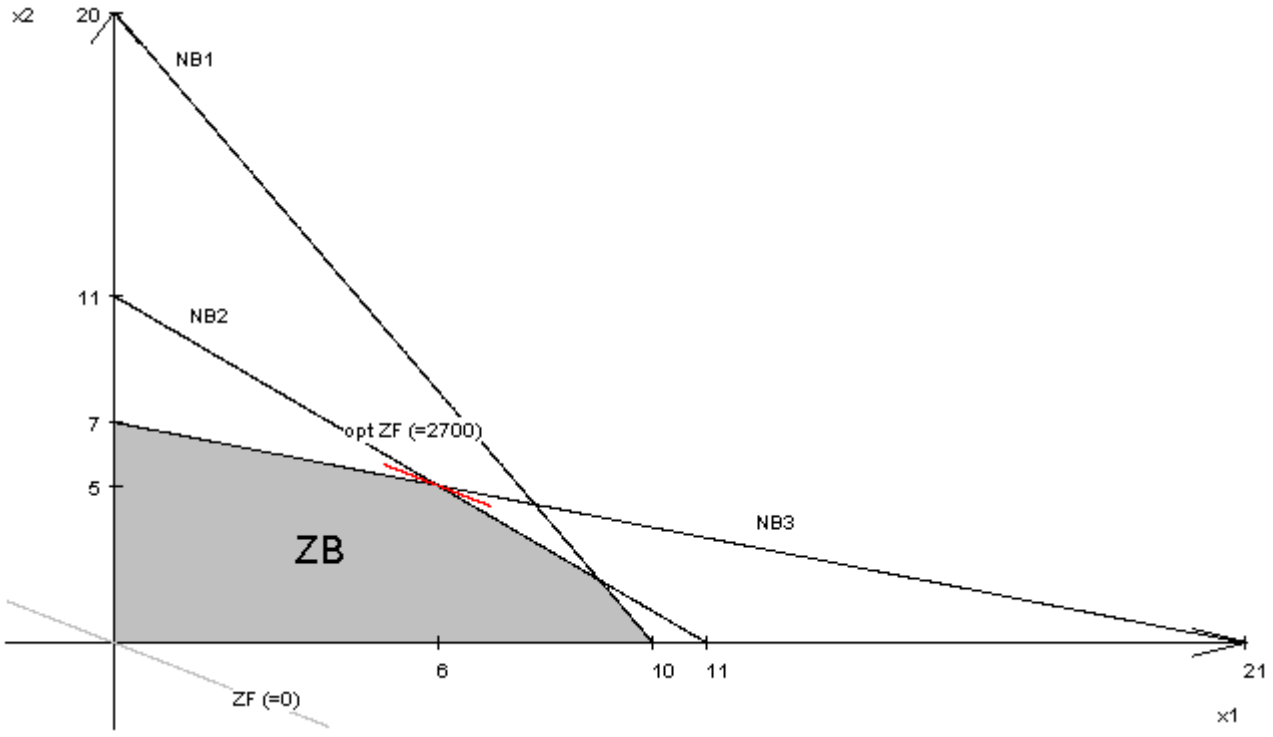
$6x_1+3x_2<60$

$4x_1+4x_2<44$

$4x_1+12x_2<84$

$x_1,x_2>=0$

Grafische Lösung für a)



Der Grafik entnimmt man, dass der Optimalpunkt in dieser Aufgabe eindeutig der Schnittpunkt der zweiten und der dritten Nebenbedingungsgeraden ist. Diesen bestimmt man als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$4x_1 + 4x_2 = 44$$
$$4x_1 + 12x_2 = 84$$

Hieraus ergibt sich die optimale Lösung $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (6,5)$.

D.h. es ist unter den beschriebenen Bedingungen gewinnmaximal 6 Tonnen des Minerals 1 und 5 Tonnen des Minerals 2 herzustellen.

Der maximaleGewinnbeträgt G* = 200[€/to]×6[to] + 300[€/to]×5[to] = 2700,-€. Die Rohstoffe R_2 und R_3 werden bei dieser Produktion vollständig verbraucht. (geometrisch: das Optimum ist der Schnittpunkt von NB2 und NB3), während von Rohstoff 1 noch Restkapazität verbleibt.

Lösung für b)

Die Nebenbedingungen widersprechen sich.

Dies führt dazu, dass der zulässige Bereich leer ist.

Aufgabe 389:

Bestimmen Sie für folgendes LOP-Problem die minimale Lösung. Verwenden Sie hierzu die grafische Lösung. Zeichnen Sie dort die gefundene Lösung ein. Die x_1-Werte und die x_2-Werte brauchen Sie für die minimale Lösung nicht zu bestimmen.

Z:

$2x_1 - x_2 \rightarrow \text{Min}$

NB:

$2x_1 + 6x_2 \leq 10$

$-x_1 - x_2 \leq 2$

$3x_1 - 6x_2 \leq 9$

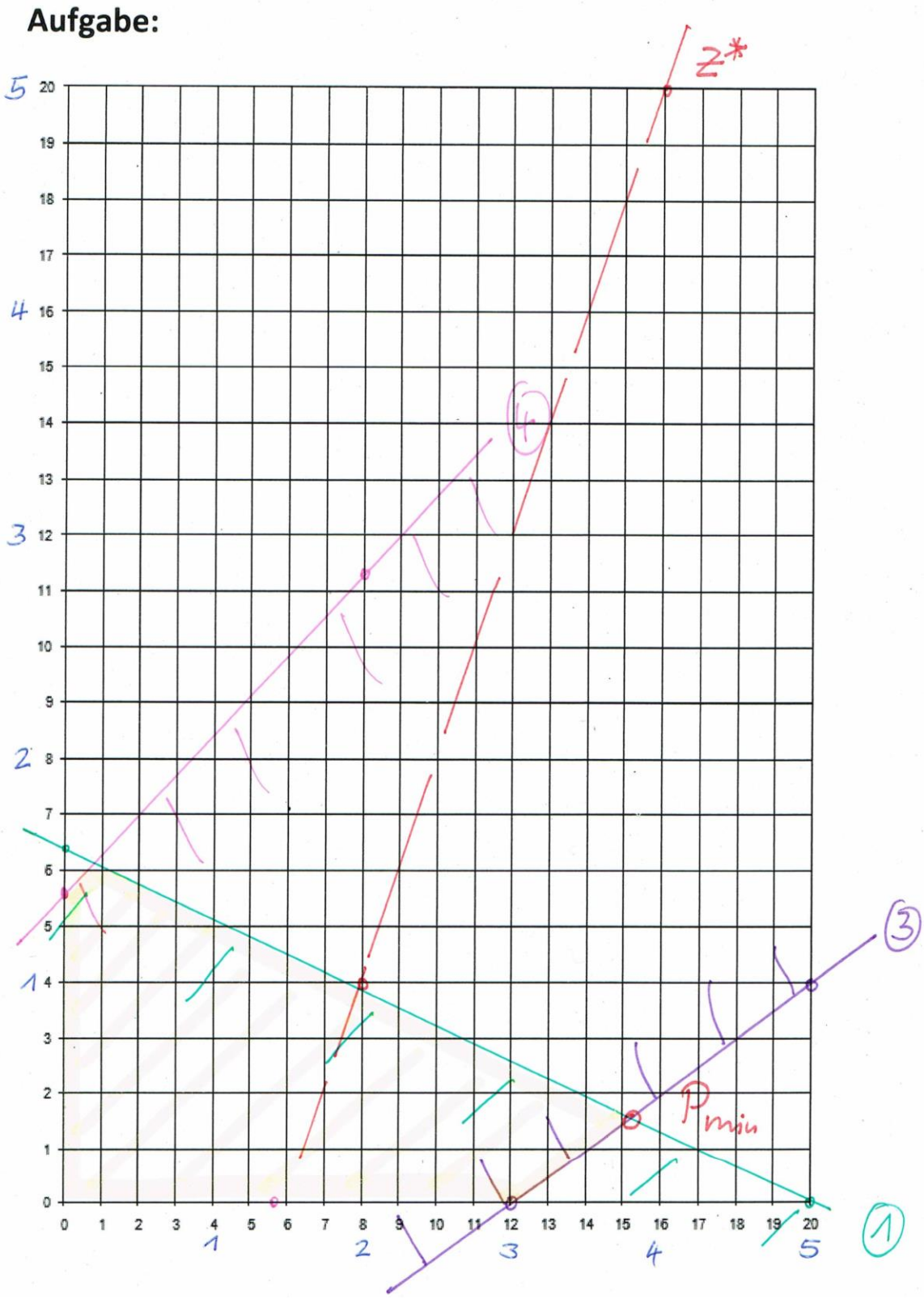
$-4x_1 + 5x_2 \leq 6$

NNB:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

Die zweite Bedingung spielt für die Lösung keine Rolle.



Aufgabe 390:

Eine Schulklasse mit 29 Schülern und 6 Begleitpersonen (mit Führerschein) möchte einen Ausflug machen. Um zu ihrem Ausflugsziel zu kommen, können sie Kleinbusse mit 8 Sitzplätzen bzw. Autos mit 5 Sitzplätzen mieten, die von den Begleitpersonen gefahren werden sollen. Die Busse kosten 50 € am Tag, die Autos 20 € am Tag.

Wie viele Busse bzw. Autos müssen die Schüler mieten, um möglichst preisgünstig den Ausflug machen zu können?

Lösung:

x: Anzahl Busse

y: Anzahl PKW

Z:

$50x + 20y \rightarrow \text{Min}$

NB:

$8x + 5y \geq 35$

$x + y \leq 6$

NNB:

$x, y \geq 0$

$P(2|4)$

$Z = 180$

Aufgabe 391:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der grafischen Lösungsvariante.

$Z: x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

Nebenbedingungen:

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

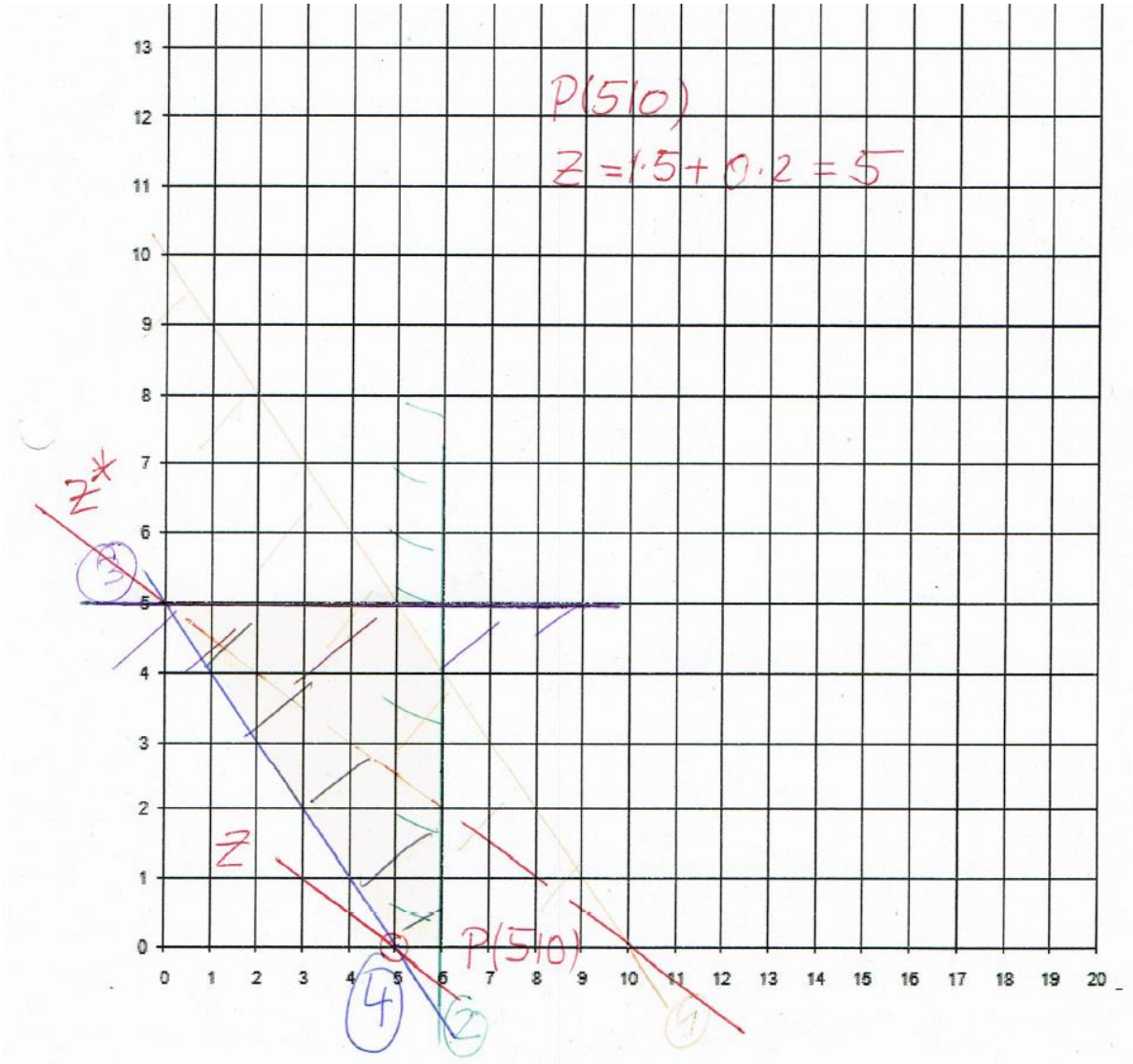
$5x_1 + 5x_2 \geq 25$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

a)



Lineare Optimierung (rechnerische Lösung)

Aufgabe 392:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=3x_1+2x_2$

$$2x_1 + x_2 \le 100$$

NB: $x_1 + x_2 \le 80$

$$x_1 \le 40$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Lösung:

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die Strukturvariablen des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 80$$
$$x_1 + x_5 = 40$$

Durch Umformung ergibt sich folgende Darstellung:

$$x_3 = 100 - 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 80 - x_1 - x_2$$
$$x_5 = 40 - x_1$$
$$Z = 0 + 3x_1 + 2x_2$$

Dadurch folgt die erste zulässige Lösung:

$$x_3 = 100$$
$$x_4 = 80$$
$$x_5 = 40$$
$$x_1 = x_2 = 0$$
$$Z = 0$$

Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 3 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um 2 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_1 neue Basisvariable.

x_1 kann maximal den Wert 40 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt $x_3=20 > 0$; $x_4=10 > 0$; x_5 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

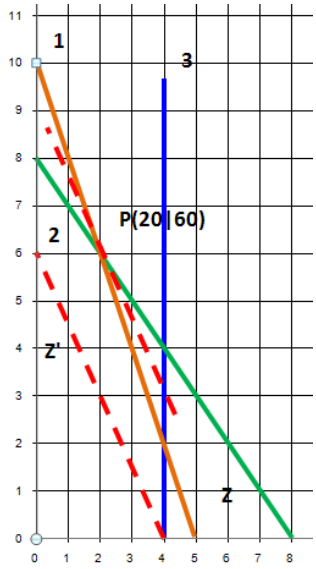
Man erhält sie durch einsetzen von $x_1=40-x_5$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_3 = 100 - 2(40 - x_5) - x_2 = 20 - x_2 + 2x_5$$
$$x_4 = 80 - (40 - x_5) - x_2 = 40 + x_5 - x_2$$
$$x_5 = 40 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = 40 - x_5$$
$$Z = 0 + 3(40 - x_5) + 2x_2 = 120 + 2x_2 - 3x_5$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 40 - x_5$$
$$x_3 = 20 - x_2 + 2x_5$$
$$x_4 = 40 + x_5 - x_2$$
$$x_2 = x_5 = 0$$
$$Z = 120 + 2x_2 - 3x_5$$

Vergleichen wir die gefundene Zwischenlösung (**$x_1=40$; $x_2=0$**; $x_3=20$; $x_4=40$; $x_5=0$)



Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_2 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 20 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (**$x_1=40$; $x_2=20$**; $x_3=0$; $x_4=20$; $x_5=0$) und neue Nichtbasisvariable, x_3 bleibt Nichtbasisvariable.

Man erhält sie durch einsetzen von $x_2 = 20 - x_3 + 2x_5$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_1 = 40 - x_5$$
$$x_3 = 20 - x_2 + 2x_5 \Leftrightarrow x_2 = 20 - x_3 + 2x_5$$
$$x_4 = 40 + x_5 - (20 - x_3 + 2x_5) = 20 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = x_5 = 0$$
$$Z = 120 + 2(20 - x_3 + 2x_5) - 3x_5 = 160 - 2x_3 + x_5$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 40 - x_5$$
$$x_2 = 20 - x_3 + 2x_5$$
$$x_4 = 20 + x_3 - x_5$$
$$x_2 = x_5 = 0$$
$$Z = 160 - 2x_3 + x_5$$

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_5 neue Basisvariable.

x_5 kann maximal den Wert 20 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (**x_1=20; x_2=60**; x_3=0; x_4=0; x_5=20) und neue Nichtbasisvariable, x_4 bleibt Nichtbasisvariable.

Man erhält sie durch einsetzen von $x_5 = 20 + x_3 - x_4$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_1 = 40 - (20 + x_3 - x_4) = 20 - x_3 - x_4$$
$$x_2 = 20 - x_3 + 2(20 + x_3 - x_4) = 60 + x_3 - x_4$$
$$x_4 = 20 + x_3 - x_5 \Leftrightarrow x_5 = 20 + x_3 + x_4$$
$$x_2 = x_4 = 0$$
$$Z = 160 - 2x_3 + 20 + x_3 - x_4 = 180 - x_3 - x_4$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 20 - x_3 - x_4$$
$$x_2 = 60 + x_3 - x_4$$
$$x_5 = 20 + x_3 + x_4$$
$$x_3 = x_4 = 0$$
$$Z = 180 - x_3 - x_4$$

Diese Basislösung mit **x_1=20; x_2=60**; x_3=0; x_4=0; x_5=20 und Z=180 ist optimal, denn eine Erhöhung von x_3 bzw. x_4 würde zu einer Verminderung des Gewinns führen.

Aufgabe 393:

Lösen Sie folgendes LOP-Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

Z: Max $Z=x_1+3x_2$

NB:
$$x_1 + x_2 \le 15$$
$$x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 36$$
$$x_1 \le 10$$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Lösung:

Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die Strukturvariablen des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als erste zulässige Lösung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$
$$x_2 + x_4 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 36$$
$$x_1 + x_6 = 10$$

Durch Umformung ergibt sich folgende Darstellung:

$$x_3 = 15 - x_1 - x_2$$
$$x_4 = 12 - x_2$$
$$x_5 = 36 - 3x_1 - 2x_2$$
$$x_6 = 10 - x_1$$
$$Z = 0 + x_1 + 3x_2$$

Dadurch folgt die erste zulässige Lösung:

$$x_3 = 15$$
$$x_4 = 12$$
$$x_5 = 36$$
$$x_6 = 10$$
$$x_1 = x_2 = 0$$
$$Z = 0$$

Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um 3 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_1 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 12 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt x_1=0; x_2=12; x_3=15; x_4=; x_4 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable x_5=36; x_6=10.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

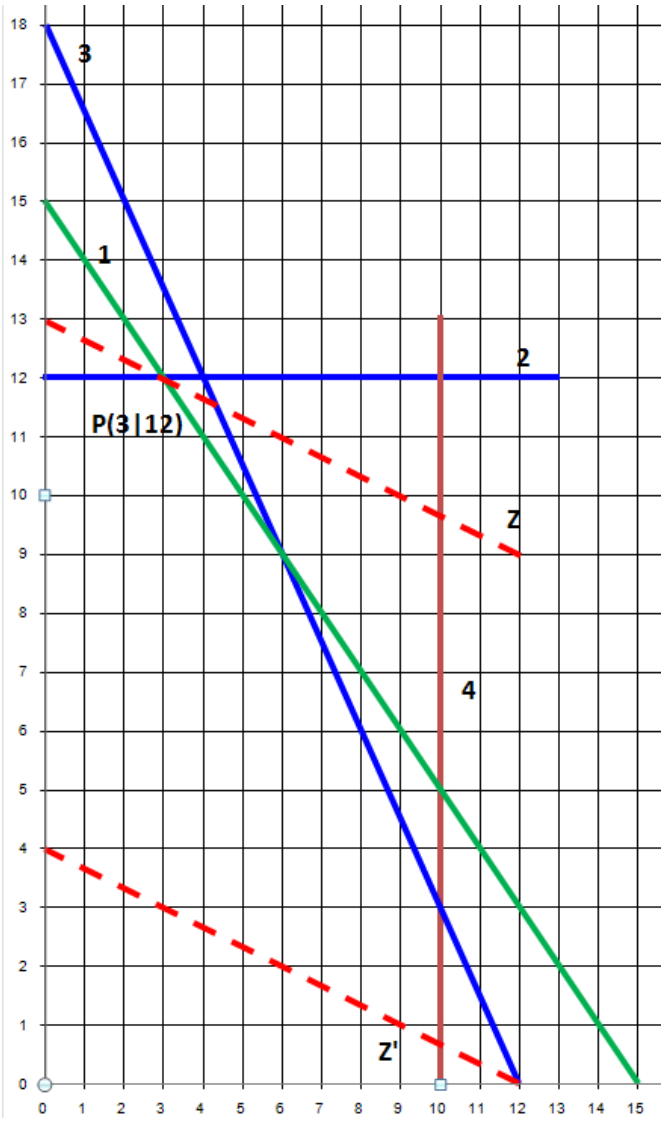
Man erhält sie durch einsetzen von x_2=12-x_4 in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_3 = 15 - x_1 - (12 - x_4) = 3 - x_1 + x_4$$
$$x_4 = 12 - x_2 \Leftrightarrow x_2 = 12 - x_4$$
$$x_5 = 36 - 3x_1 - 2(12 - x_4) = 12 - 3x_1 + 2x_4$$
$$x_6 = 10 - x_1$$
$$Z = 0 + x_1 + 3(12 - x_4) = 36 + x_1 - 3x_4$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_2 = 12 - x_4$$
$$x_3 = 3 - x_1 + x_4$$
$$x_5 = 12 - 3x_1 + 2x_4$$
$$x_6 = 10 - x_1$$
$$Z = 36 + x_1 - 3x_4$$

Vergleichen wir die gefundene Zwischenlösung (**x_1=0; x_2=12**; x_3=3; x_4=0; x_5=12; x_6=10)



Aus den obigen Gleichungen wird ersichtlich:

Der Gewinn Z wächst um 1 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und wächst um -3 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes verspricht. In unserem Beispiel wird daher x_1 neue Basisvariable.

x_1 kann maximal den Wert 3 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt x_1=3; x_2=12; x_3=15; x_4=; x_4 wird 0 und neue Nichtbasisvariable, x_2 bleibt Nichtbasisvariable x_5=36; x_6=10.

Damit erhalten wir eine zweite zulässige Basislösung:

Man erhält sie durch einsetzen von $x_1=3-x_3+x_4$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung.

$$x_2 = 12 - x_4$$
$$x_3 = 3 - x_1 + x_4 \Leftrightarrow x_1 = 3 - x_3 + x_4$$
$$x_5 = 12 - 3(3 - x_3 + x_4) + 2x_4 = 3 + 3x_3 - 3x_4$$
$$x_6 = 10 - (3 - x_3 + x_4) = 7 + x_3 - x_4$$
$$Z = 36 + (3 - x_3 + x_4) - 3x_4 = 39 - x_3 - 2x_4$$

Damit ergeben sich folgende Zwischenlösungen:

$$x_1 = 3 - x_3 + x_4$$
$$x_2 = 12 - x_4$$
$$x_5 = 3 + 3x_3 - 3x_4$$
$$x_6 = 7 + x_3 - x_4$$
$$Z = 39 - x_3 - 2x_4$$

Diese Basislösung mit **$x_1=3$; $x_2=12$**; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=3$; $x_6=7$ und $Z=39$ ist optimal, denn eine Erhöhung von x_3 bzw. x_4 würde zu einer Verminderung des Gewinns führen.

Aufgabe 394:

Gegeben sei das LOP

Z: Max $z=2.000x_1+3.000x_2$

NB: $x_1 \le 6$

$2x_1 + x_2 \le 16$

$x_1 + 4x_2 \le 36$

NNB: $x_1, x_2 \ge 0$

Lösung:

$Z = 2.000 x_1 + 3.000 x_2 \rightarrow Max$

NB: $x_1 \leq 6$

$2x_1 + x_2 \leq 16$

$x_1 + 4x_2 \leq 36$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

Um weandlung Lineares Ungleichungssystem in LGS

$x_1 + x_3 = 6$ $\quad x_3 = 6 - x_1$ (0)

$2x_1 + x_2 + x_4 = 16$ $\quad x_4 = 16 - 2x_1 - x_2$ (16)

$x_1 + 4x_2 + x_5 = 36$ $\quad x_5 = 36 - x_1 - 4x_2$ (36)

Erste zulässige Lösung

$x_1, x_2 = 0$; $x_3 = 6$; $x_4 = 16$; $x_5 = 36$

Meiste Spalten bei x_2

Max Wert für x_2 ermitteln $\Rightarrow x_2 = 9$

Die Gleichungen umformen:

$x_5 = 36 - x_1 - 4x_2$

$4x_2 = 36 - x_1 - x_5$

$x_2 = 9 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5$ (diese in die anderen Gleichungen einsetzen)

$x_4 = 16 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = -2x_1 - 9 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5 = 7 - \frac{7}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5$

$x_4 = 7 - \frac{7}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5$

$x_3 = 6 - x_1$

$Z = 0 + 2000x_1 + 3000x_2 = 0 + 2000x_1 +$

$+ 3000\left(9 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5\right)$

$Z = 2000x_1 + 27.000 - 750x_1 - 750x_5$

$Z = 27.000 + 1250x_1 - 750x_5$

Zusammfassung der gleichung und nächste verbesserte Lösung:

$x_2 = 9 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5$ (9)

$x_4 = 7 - \frac{7}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5$ (4) ✓

$x_3 = 6 - x_1$ (6)

$z = 27.000 + 1250x_1 - 750x_5$

Verbesserte Lösung

$x_1 = x_5 = 0$; $x_2 = 9$; $x_4 = 7$; $x_3 = 6$

Weiter verbesserte optimale Lösung nur durch x_1 in der Zielfunktion möglich (meistes gewinn Max wert für $x_1 = 4$)

Die gleichungen umformen

~~$x_3 = 6 - x_1$~~ $\Rightarrow$ ~~$x_1 = 6 - x_3$~~ $x_1 = 6 - x_3$

(diese direkt einsetzen)

~~$x_4 = 7 - \frac{7}{4}(6 - x_3) - \frac{1}{4}x_5 = 7 - 10{,}5 + \frac{7}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5$~~

~~$x_4 = -3{,}5 + \frac{7}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5$~~

$x_4 = 7 - \frac{7}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_5$

$\frac{7}{4}x_1 = 7 - x_4 - \frac{1}{4}x_5$

$x_1 = 4 - \frac{4}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5$

$x_2 = 9 - \frac{1}{4}(4 - \frac{4}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5) - \frac{1}{4}x_5$

$x_2 = 9 - 1 + \frac{1}{7}x_4 + \frac{1}{28}x_5 - \frac{1}{4}x_5$

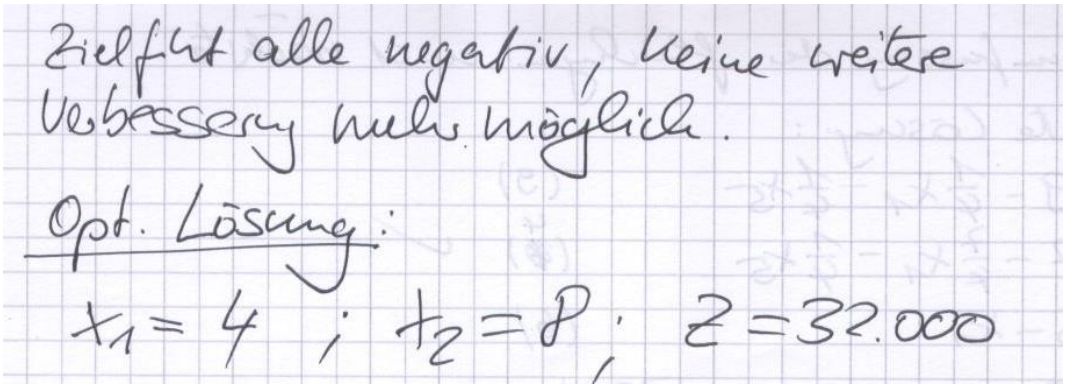
$x_2 = 8 + \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{28}x_5$

$x_3 = 6 - x_1 = 6 - 4 + \frac{4}{7}x_4 + \frac{1}{7}x_5$

$x_3 = 2 + \frac{4}{7}x_4 + \frac{1}{7}x_5$

$z = 27.000 + 1250(4 - \frac{4}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5) - 750x_5$ Rückse

$= 32.000 - \frac{4}{7}x_4 + 1250 - \frac{1250}{7}x_5 - 750x_5$ →



Aufgabe 395:

Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten. Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 Euro je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 Euro je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 Euro für die Zelte ausgeben.

Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?

Lösung:

Aufgabe 6:

$z = 10x_1 + 15x_2 \rightarrow \text{Max}$

NB: $x_1 \leq 5$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 9$

LGS:

$x_1 + x_3 \leq 5$	$x_3 = 5 - x_1$	(3)
$x_2 + x_4 \leq 4$	$x_4 = 4 - x_2$	(4)
$x_1 + 2x_2 + x_5 = 9$	$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2$	(5)

Meiste Gewinn bei $x_2 \Rightarrow x_2$

$x_4 = 4 - x_2 \Rightarrow x_2 = 4 - x_4$ (1)

$x_3 = 5 - x_1$ (5)

$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2 = 9 - x_1 - 2(4 - x_4) = 9 - x_1 - 8 + 2x_4$

$x_5 = 1 - x_1 + 2x_4$ (7)

$z = 10x_1 + 15x_2 = 10x_1 + 15(4 - x_4)$

$z = 60 + 10x_1 - 15x_4$

Verbesserung bei $x_1 \Rightarrow x_1 = 1$

$x_1 = 5 - x_3$

$x_2 = 4 - x_4$

$z = 60 + 10 \cdot (5 - x_3) - 15x_4$

$z = 60 + 50 - 10x_3 - 15x_4$

$z = 110 - 10x_3 - 15x_4$

$x_5 = 1 - x_1 + 2x_4$

$x_1 = 1 + 2x_4 - x_5$ (1)

$x_2 = 4 - x_4$ (4)

$x_3 = 5 - x_1 = 5 - 1 - 2x_4 + x_5$

$x_3 = 4 - 2x_4 + x_5$ (2)

$z = 60 + 10x_1 - 15x_4$

$z = 60 + 10(1 + 2x_4 - x_5)$

$z = 60 + 10 + 20x_4 - 10x_5$

$z = 70 + 20x_4 - 10x_5$

Meiste Zuwachs bei x_4 $\Rightarrow$ $x_4 =$

~~$x_1 = 1 + 2x_4 - x_5$~~

$x_3 = 4 - 2x_4 + x_5$

$2x_4 = 4 - x_3 + x_5$

$x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$

$x_1 = 1 + 2(2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5) - x_5$

$x_1 = 5 + \ldots$

$x_2 = 4 - 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$

$x_2 = 4 + \ldots$

$z = 70 + 20(2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5) - 10x_5$

$z = 110 - 10x_3 + 10x_5 - 10x_5$

$z = 110 - 10x_3$

$\Rightarrow$ Lösung: $x_1 = 5$; $x_2 = 2$; $z = 110$

Aufgabe 396:

Lösen Sie folgende Aufgaben auf die rechnerische Variante.

a)

$$z = 21x_1 + 24x_2 -> \max$$
$$3x_1 + x_2 \le 33$$
$$x_1 + x_2 \le 13$$
$$5x_1 + 8x_2 \le 80$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

b)

$$z = 40x_1 + 30x_2 -> \max$$
$$x_1 + 3x_2 \le 16$$
$$2x_1 + x_2 \le 17$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 23$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

c)

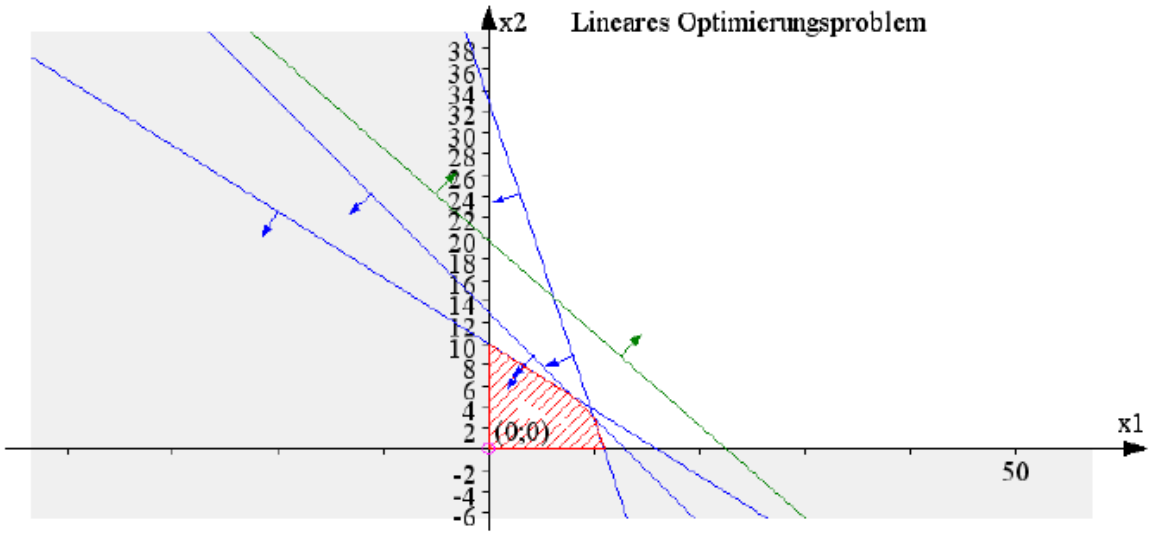
$$z = 12x_1 + 18x_2 -> \max$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 33$$
$$x_1 + x_2 \le 15$$
$$x_1 + 3x_2 \le 27$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

d)

$$z = 18x_1 + 6x_2 -> \max$$
$$-4x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 15$$
$$x_1 - 4x_2 \le 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

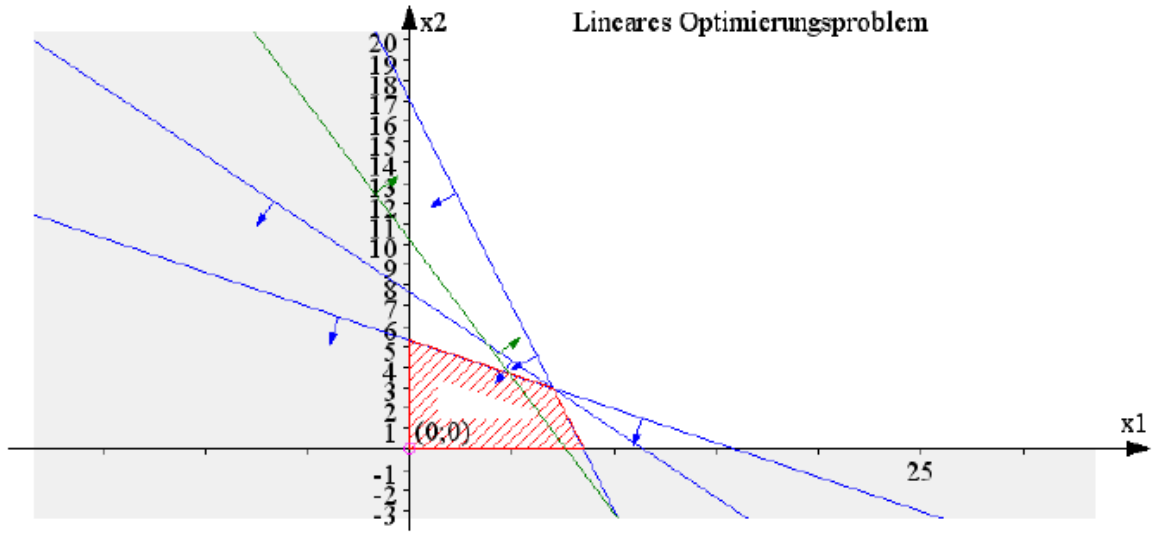
Lösung:

a)



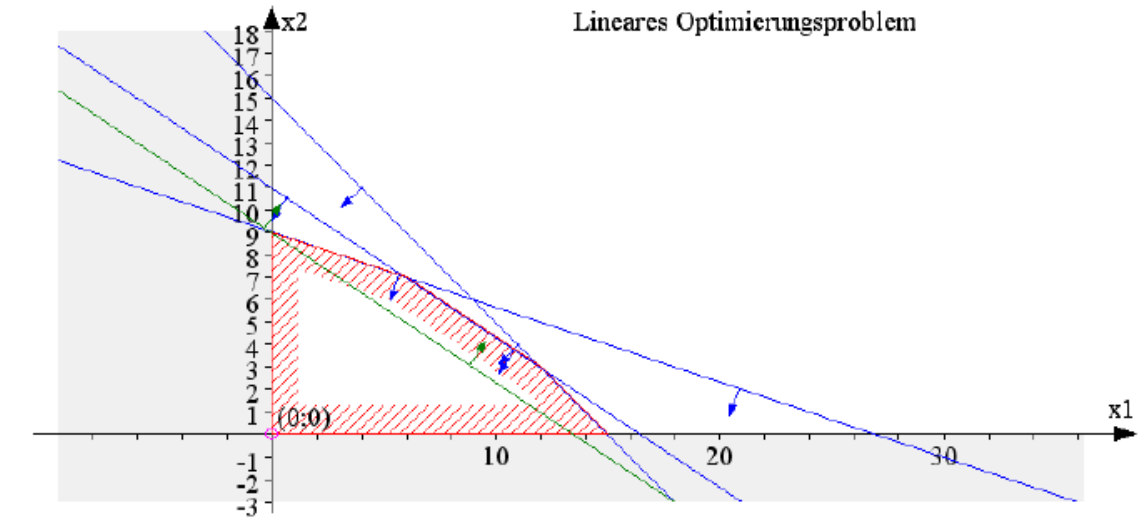
$$x^* = (8,\ 5)^T, \qquad z^* = 288$$

b)



$$x^* = (7,\ 3)^T, \qquad z^* = 370$$

c)



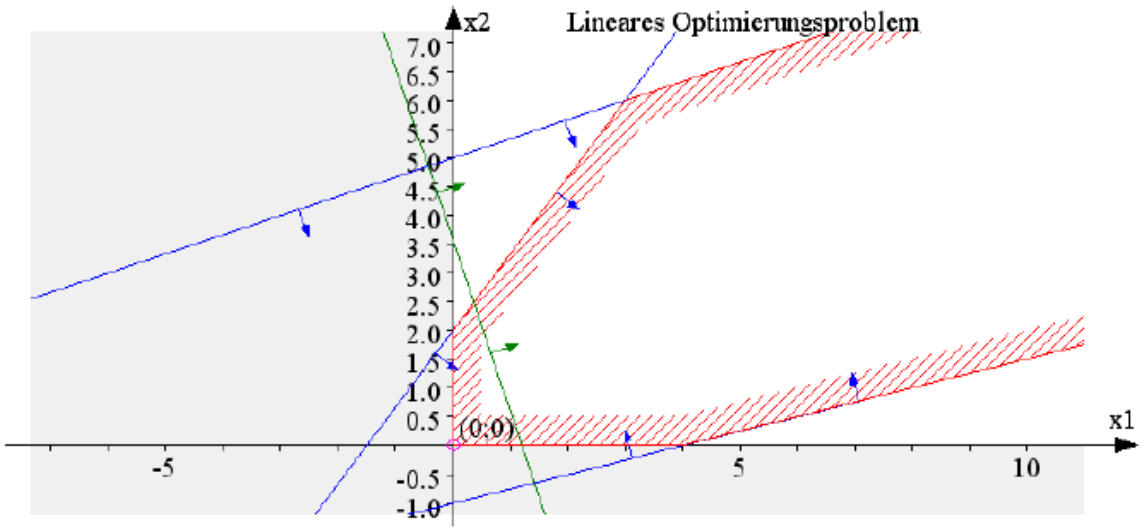
Mehrdeutige Lösung:

$$x^* = \alpha x^{*1} + (1-\alpha) x^{*2}, \quad 0 \le \alpha \le 1, \qquad z^* = 198,$$

mit

$$x^{*1} = (6 \quad 7)^T, \qquad x^{*2} = (12 \quad 3)^T$$

d)



Die Zielfunktion ist auf der Menge der zulässigen Lösungen nicht beschränkt. Damit hat das Problem keine (endliche) Optimallösung.

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 397:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in rechnerischen Form.

Z: $3x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-2x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

$x_3 = 2 + 2x_1 - x_2$ (-)

$x_4 = 7 + x_1 - 2x_2$ (-)

$x_5 = 6 - x_1$ (6) ✓

$x_6 = 5 - x_2$ -

$Z = 3x_1 + x_2 = 0$

max. Zugewinn bei x_1

$x_5 = 6 - x_1 \Rightarrow x_1 = 6 - x_5$ (-)

$x_3 = 2 + 2(6 - x_5) - x_2$

$x_3 = 14 - 2x_5 - x_2$ (14)

$x_4 = 7 + (6 - x_5) - 2x_2$

$x_4 = 13 - x_5 - 2x_2$ ($13/2$)

$x_6 = 5 - x_2$ (5) ✓

$Z = 3(6 - x_5) + x_2$

$Z = 18 - 3x_5 + x_2$

max. Zugewinn mit x_2

$x_6 = 5 - x_2 \Rightarrow x_2 = 5 - x_6$

$x_3 = 14 - 2x_5 - 5 + x_6$

$x_3 = 9 - 2x_5 + x_6$

$x_4 = 13 - x_5 - 2(5 - x_6)$

$x_4 = 3 - x_5 + 2x_6$

$x_1 = 6 - x_5$

$Z = 18 - 3x_5 + 5 - x_6$

$Z = 23 - 3x_5 - x_6$

Lösung:

$x_1 = 6$

$x_2 = 5$

$Z = 23$

Aufgabe 398:

Berechnen Sie die optimale Lösung folgendes Optimierungsproblem mit der rechnerischen Lösungsvariante nach Simplex (nicht in Tabellenform).

Z:

$3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

NB:

$x_1 + x_2 \leq 70$

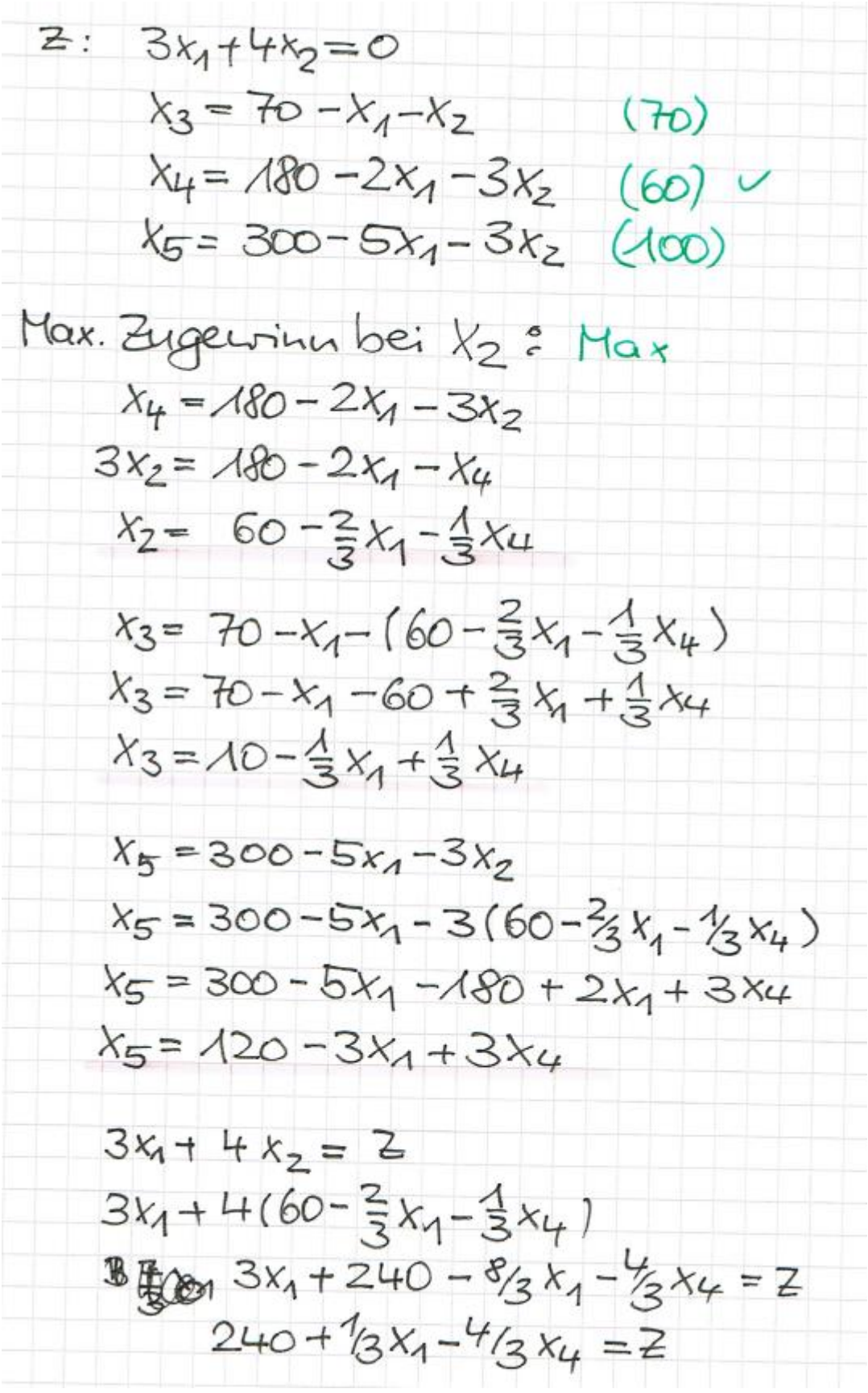
$2x_1 + 3x_2 \leq 180$

$5x_1 + 3x_2 \leq 300$

NNB:

$x_1; x_2 \geq 0$

Lösung:



$240 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 = z$

$x_2 = 60 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4$ (90)

$x_3 = 10 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4$ (30) ✓

$x_5 = 120 - 3x_1 + 3x_4$ (40)

Max Zugewinn bei x_1: Max

$x_3 = 10 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4$

$\frac{1}{3}x_1 = 10 - x_3 + \frac{1}{3}x_4$

$x_1 = 30 - 3x_3 + x_4$

$240 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4 = z$

$240 + \frac{1}{3}(30 - 3x_3 + x_4) - \frac{4}{3}x_4 = z$

$240 + 10 - x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_4 = z$

$250 - x_3 - x_4 = z$

Keine Verbesserung mehr möglich

Variablen berechnen

$x_1 = 30$

$x_2 = 60 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4$

$x_2 = 60 - \frac{2}{3}(30 - 3x_3 + x_4) - \frac{1}{3}x_4$

$x_2 = 40 + 2x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_4$

$x_2 = 40 + 2x_3 - x_4$

$\mathbb{L} = \{(30; 40)\}$

Lineare Optimierung (Pivot-Tabelle)

Aufgabe 399:

Ein Lackierbetrieb soll Stühle lackieren. Es sollen zwei verschiedene Farbversionen (hell und dunkel) hergestellt werden. Insgesamt stehen 20 Stühle zur Verfügung. Von der hellen Version können höchstens 12 Stühle hergestellt werden. Für die helle Version werden 2 Arbeitsstunden benötigt, für die dunkle Version dagegen nur 1 Arbeitsstunde. Insgesamt stehen 30 Arbeitsstunden zur Verfügung. Beim anschließenden Verkauf bringt ein Stuhl der dunklen Version 75.00 €, ein Stuhl der hellen Version 100.00 € Gewinn.

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode.

Lösung:

x_1: Anzahl der hellen Stühle,
x_2: Anzahl der dunklen Stühle.

Das Modell:

$$z = 100x_1 + 75x_2 \rightarrow \max!$$
$$x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1 \le 12$$
$$2x_1 + x_2 \le 30$$
$$x_1, x_2 \ge 0: \text{ ganz.}$$

Die Normalform:

$$z = 100x_1 + 75x_2 \rightarrow \max!$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$
$$x_1 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 30$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5$$
$$x_1, x_2: \text{ ganz.}$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	1	1	0	0	20
x_4	**1**	0	0	1	0	12
x_5	2	1	0	0	1	30
z	**-100**	-75	0	0	0	0
x_3	0	1	1	-1	0	8
x_1	1	0	0	1	0	12
x_5	0	**1**	0	-2	1	6
z	0	**-75**	0	100	0	1200
x_3	0	0	1	**1**	-1	2
x_1	1	0	0	1	0	12
x_2	0	1	0	-2	1	6
z	0	0	0	**-50**	75	1650
x_4	0	0	1	1	-1	2
x_1	1	0	-1	0	1	10
x_2	0	1	2	0	-1	10
z	0	0	50	0	25	1750

Aufgabe 400:

Ein Betrieb stellt ein Produkt nach drei verschiedenen Verfahren A, B, C her. Die folgende Tabelle zeigt die erforderlichen Einsatzmengen pro Produkteinheit für die einzelnen Verfahren und die maximal verfügbaren Einsatzmengen:

	A	B	C	Verfügbare Einsatzmengen
Rohstoff [kg]	10	8	5	500
Produktionszeit [h]	5	10	10	400
Lagerraum [ME_r]	0	5	10	600

Die Gewinne bei der Produktion durch die Verfahren A, B und C betragen 20 €, 25 € bzw. 15 €.

Es soll ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm aufgestellt werden. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode. (rechnerische Simplexmethode)

Lösung:

x_1: Produktionsmenge nach A,
x_2: Produktionsmenge nach B,
x_3: Produktionsmenge nach C.

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 &\rightarrow \max! \\
10x_1 + 8x_2 + 5x_3 &\le 500 \\
5x_1 + 10x_2 + 10x_3 &\le 400 \\
5x_2 + 10x_3 &\le 600 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 &\rightarrow \max! \\
10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 &= 500 \\
5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + x_5 &= 400 \\
5x_2 + 10x_3 + x_6 &= 600 \\
x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,6&.
\end{aligned}
$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_4	10	8	5	1	0	0	500
x_5	5	**10**	10	0	1	0	400
x_6	0	5	10	0	0	1	600
z	-20	**-25**	-15	0	0	0	0
x_4	6	0	-3	1	$-\frac{4}{5}$	0	180
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{10}$	0	40
x_6	$-\frac{5}{2}$	0	5	0	$-\frac{1}{2}$	1	400
z	$-\frac{15}{2}$	0	10	0	$\frac{5}{2}$	0	1000
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	0	30
x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	25
x_6	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{6}$	1	475
z	0	0	$\frac{25}{4}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{3}{2}$	0	1225

$$x^* = (30 \quad 25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 475)^T, \qquad z^* = 1225 \text{ €}$$

Aufgabe 401:

Eine Unternehmung produziere zwei Produkte ,P_1 und P_2. Dazu sei ein einziger Produktionsfaktor verwendet, dessen verfügbare Menge 10 ME beträgt. Zur Herstellung einer Einheit des Produktes P_1 bzw. P_2 werden 1 ME bzw. 2 ME des Produktionsfaktors benötigt.

Von den beiden Produkten sollen insgesamt mindestens 2 ME hergestellt werden

Der Gewinn pro ME des Produkts P_1 bzw. P_2 beträgt 3 GE bzw. 2 GE.

Gesucht ist das Produktionsprogramm mit maximalem Gewinn. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Lösung:

$x_i,\ i=1,\ 2$: Produktionsmenge P_i

Das Modell:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to Max!$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Vorbereitung des Modells für die Simplexmethode:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to Max!$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$
$$\tilde{z} = -x_5 \to Max!$$
$$x_5 = 2 - x_1 - x_2 + x_4$$
$$\tilde{z} = -2 + x_1 + x_2 - x_4 \to Max!$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	2	1	0	0	10
x_5	**1**	1	0	-1	1	2
z	-3	-2	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	-1	-1	0	1	0	-2
x_3	0	1	1	**1**	-1	8
x_1	1	1	0	-1	1	2
z	0	1	0	-3	3	6
$\tilde{z}$	0	0	0	0	1	0
x_4	0	1	1	**1**		8
x_1	1	2	1	0		10
z	0	4	3	0		30

Aufgabe 402:

Ein Betrieb stellt zwei Artikel A_1 und A_2 auf den Maschinengattungen M_1 und M_2 her.

Außerdem müssen gelernte Montagekräfte eingesetzt werden. Die vorhandenen Informationen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst:

	A_1	A_2	Kapazität pro Tag
M_1	5	2	24 h
M_2	1	5	24 h
Montagegruppe	6	6	36 h
Gewinn/Stück in €	500	800	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das entsprechende Modell dar.

2. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Lösung:

Sei

$x_i,\ i=1,\ 2:$ Artikelmenge A_i

Das Modell:

$$z = 500x_1 + 800x_2 \rightarrow Max!$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 24$$
$$x_1 + 5x_2 \le 24$$
$$6x_1 + 6x_2 \le 36$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Die Normalform:

$$z = 500x_1 + 800x_2 \rightarrow \max!$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$$
$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 24$$
$$6x_1 + 6x_2 + x_5 = 36$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	5	2	1	0	0	24
x_4	1	**5**	0	1	0	24
x_5	6	6	0	0	1	36
z	-500	**-800**	0	0	0	0
x_3	$\frac{23}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{72}{5}$
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{24}{5}$
x_5	$\frac{24}{5}$	0	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{36}{5}$
z	**-340**	0	0	160	0	3840
x_3	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{23}{4}$	$\frac{15}{2}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	0	$\frac{150}{2}$	$\frac{425}{6}$	4350

$$x^* = \left(\frac{3}{2} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{15}{2} \quad 0 \quad 0\right)^T, \qquad z^* = 4350 \text{ €}$$

Aufgabe 403:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

Z: $x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 6$

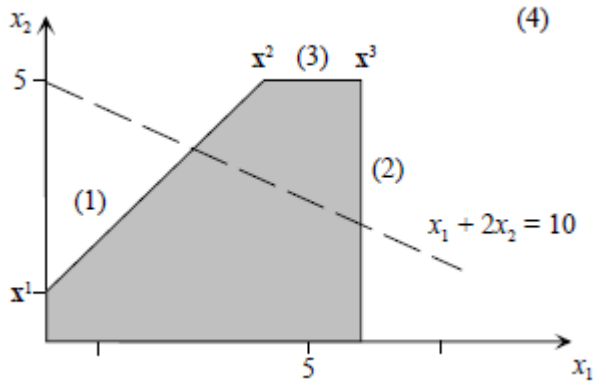
$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

a)



Die zum letzten Tableau gehörige Basislösung ist $(x_1, \ldots, x_5) = (\underline{4}, \underline{5}, 0, \underline{2}, 0)$, in vollkommener Übereinstimmung mit der zuvor konstruierten Lösung (9.4.12).

b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	-1	1	1	0	0	1	(1)*(-1)+(3)
x_4	1	0	0	1	0	6	
x_5	0	1	0	0	1	5	
Ziel	-1	-2	0	0	0	0	(1)*2+Zi
x_2	-1	1	1	0	0	1	(3)+(1)
x_4	1	0	0	1	0	6	
x_5	1	0	-1	0	1	4	
Ziel	-3	0	2	0	0	2	
x_2	0	1	0	0	1	5	
x_4							
x_1	1	0	-1	0	1	4	
Ziel	0	0	-1	0	3	14	(3)*3+Zi

Aufgabe 404:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$Z: x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-x_1 + x_2 \leq 1$

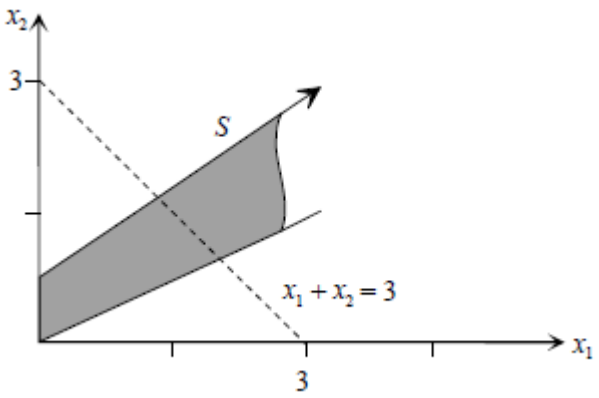
$0{,}5x_1 - x_2 \leq 0$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

a)



b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Berechnung
x_3	-1	1	1	0	1	
x_4	0,5	-1	0	1	0	(1)+(2)
Ziel	-1	-1	0	0	0	(1)+Zi
x_2	-1	1	1	0	1	
x_4	-0,5	0	1	1	1	
Ziel	-2	0	1	0	1	
Ziel						

Aufgabe 405:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$Z: 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-2x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Berechnung
x_3	-2	1	1	0	0	0	2	(3)*2+(1)
x_4	-1	2	0	1	0	0	7	(3)+(2)
x_5	1	0	0	0	1	0	6	
x_6	0	1	0	0	0	1	5	
Ziel	-3	-1	0	0	0	0	0	(3)*3+Zi
x_3	0	1	1	0	2	0	14	(4)*(-1)+(1)
x_4	0	2	0	1	1	0	13	(4)*(-2)+(2)
x_1	1	0	0	0	1	0	6	
x_6	0	1	0	0	0	1	5	
Ziel	0	-1	0	0	3	0	18	(4)+Zi
x_3	0	0	1	0	2	-1	9	
x_4	0	0	0	1	1	-2	3	
x_1	1	0	0	0	1	0	6	
x_2	0	1	0	0	0	1	5	
Ziel	0	0	0	0	3	1	23	

$x_1 = 6; x_2 = 5; Z = 23$

Aufgabe 406:

Eine Firma stelle 2 verschiedene Produkte her. Es stehen 3 Maschinen A, B, C zur Verfügung. Maschine A hat eine maximale monatliche Laufzeit (Kapazität) von 170 Stunden, Maschine B von 150 Stunden und Maschine C von 180 Stunden.

Eine Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 liefert einen Deckungsbeitrag von 300 Euro, eine ME von Produkt 2 dagegen 500 Euro.

Fertigt man 1 ME von Produkt 1, benötigt man dafür zunächst 1 Stunde die Maschine A und danach 1 Stunde die Maschine B.

1 ME von Produkt 2 belegt nacheinander 2 Stunden Maschine A, 1 Stunde Maschine B und 3 Stunden Maschine C.

Die Firma möchte den Deckungsbeitrag maximieren:

Eventuelle Fixkosten sind unabhängig von der Produktionsmenge und können daher einfach am Ende der Berechnung vom Gesamtdeckungsbeitrag abgezogen werden, um den Gewinn zu erhalten.

Lösung:

Z: $300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

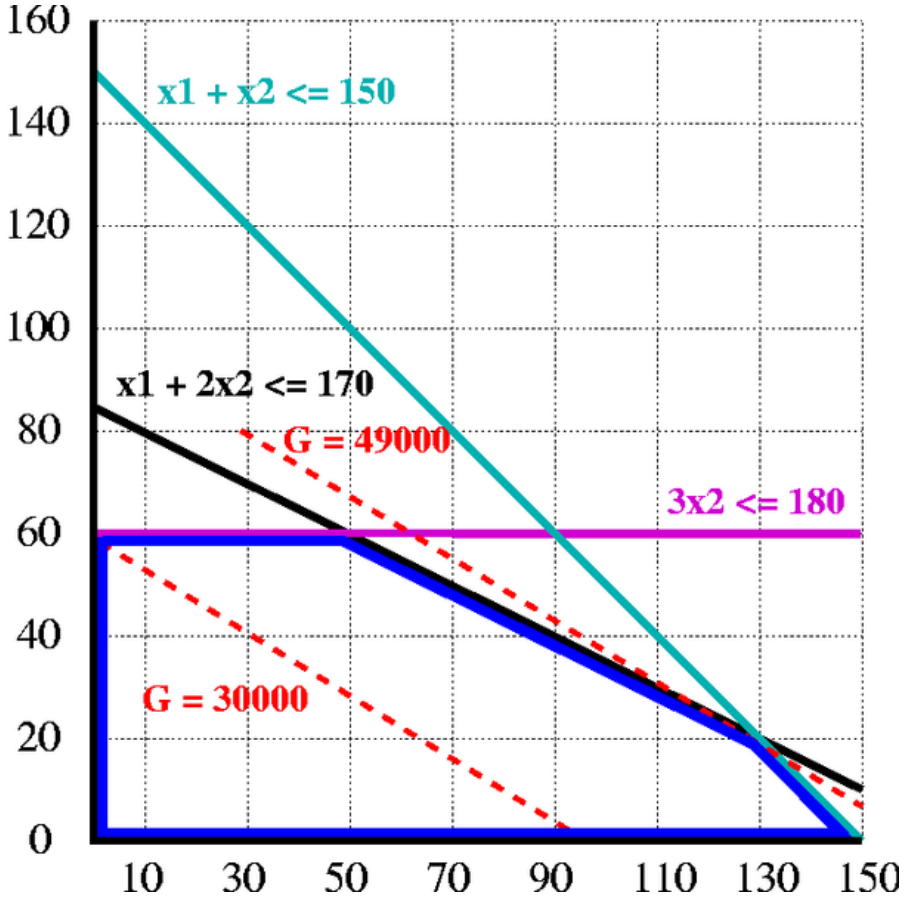
$x_1 + 2x_2 \leq 170$

$x_1 + x_2 \leq 150$

$3x_2 \leq 180$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	1	2	1	0	0	170	(3)*(-2/3)+(1)
x_4	1	1	0	1	0	150	(3)/(-3)+2
x_5	0	3	0	0	1	180	:3
Ziel	-300	-500	0	0	0	0	(3)*500/3+Zi
x_3	1	0	1	0	-2/3	50	
x_4	1	0	0	1	-1/3	90	(1)*(-1)+(2)
x_2	0	1	0	0	1/3	60	
	-300	0	0	0	500/3	30000	(1)*300+Zi
x_1	1	0	1	0	-2/3	50	(2)*(+2)+(1)
x_4	0	0	-1	1	1/3	40	*3
x_2	0	1	0	0	1/3	60	(2)*(-1)+(3)
Ziel	0	0	300	0	-100/3	45000	(2)*100+Zi
x_1	1	0	-1	2	0	130	
x_5	0	0	-3	3	1	120	
x_2	0	1	1	-1	0	20	
Ziel	0	0	200	100	0	49000	

Aufgabe 407:

Eine Bergwerksgesellschaft besitzt zwei verschiedene Gruben (bzw. Minen), in denen bestimmte Erzarten gefördert werden. Die Gruben befinden sich in verschiedenen Landesteilen und verfügen über unterschiedliche Kapazitäten. Nach dem Brechen werden bei Erz drei Klassen unterschieden, grob- mittel- und feinkörniges Erz.

Nach jeder Erzart besteht eine gewisse Nachfrage. Die Bergwerksgesellschaft konzentriert sich darauf, einem Hüttenwerk mindestens 12t grob-, 8t mittel- und 24t feinkörniges Erz zu liefern.

Die Betriebskosten für die Gruben sind 200 GE (Geldeinheiten) pro Tag bei Grube 1 und 160 GE bei Grube 2. In der Grube 1 werden dabei pro Tag 6t grob-, 2t mittel- und 4t feinkörniges Erz gefördert, während die zweite Grube eine tägliche Leistung von 2t grob-, 2t mittel- und 12t feinkörnigem Erz hat.

Wie viele Tage sollte jede der Gruben pro Woche befahren werden, um die Aufträge der Firma auf wirtschaftliche Weise zu erfüllen?

Lösen Sie dieses Problem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

Lösung:

$Z: 200x_1 + 160x_2 \rightarrow \text{Min}$

Nebenbedingungen:

$6x_1 + 2x_2 \geq 12$

$2x_1 + 2x_2 \geq 8$

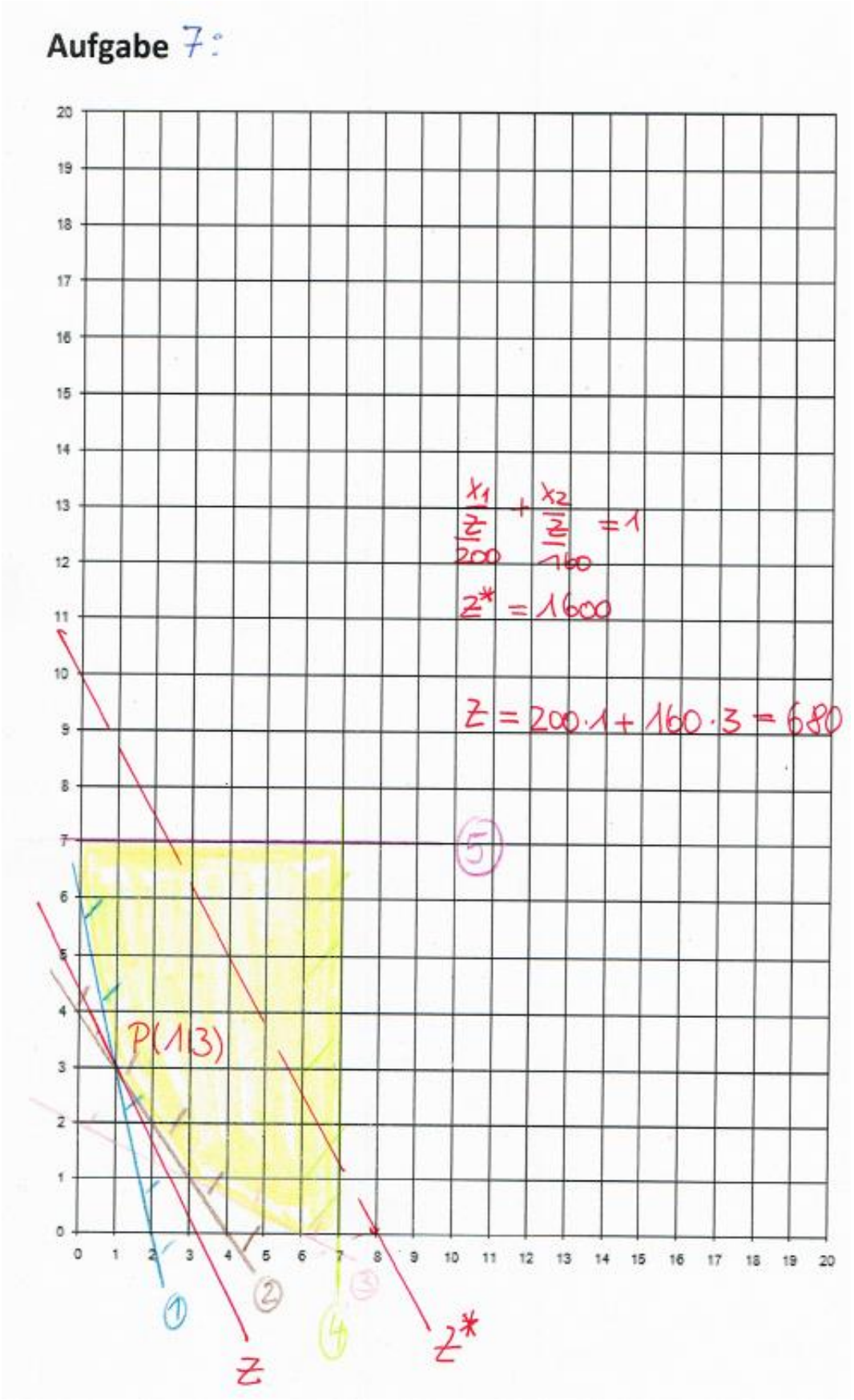
$4x_1 + 12x_2 \geq 24$

$x_1 \leq 7$

$x_2 \leq 7$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$



Aufgabe 408:

Ein Betrieb kann sein Produkt nach zwei Verfahren aus Grundstoffen A und B [t] sowie Energie W [kWh] herstellen. Für 1 t des Produktes wird benötigt:

	1. Verfahren	2. Verfahren	verfügbar
A	4	1	20
B	0	4	40
W	2	3	12

Die Gesamtproduktion soll maximiert werden. Lösen Sie dieses Problem mit dem Simplexalgorithmus in Pivot-Tabellenform

Lösung:

$Z: x_1 + x_2 \rightarrow Max$

Nebenbedingungen:

$4x_1 + x_2 \leq 20$

$4x_2 \leq 10$

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	4	1	1	0	0	20	:4
x_4	0	4	0	1	0	10	
x_5	2	3	0	0	1	12	(1)*(-0,5)+(3)
Ziel	-1	-1	0	0	0	0	(1)*0,25+Zi
x_1	1	0,25	0,25	0	0	5	(3)*(-1/10)+(1)
x_4	0	4	0	1	0	10	(3)*(-8/5)+(2)
x_5	0	2,5	-0,5	0	1	2	:2,5
Ziel	0	-0,75	0,25	0	0	5	(3)*(6/20)+Zi
x_1	1	0	0,3	0	-0,1	4,8	
x_4	0	0	0,8	1	-1,6	6,8	
x_2	0	1	-0,2	0	0,4	0,8	
Ziel	0	0	0,1	0	0,3	5,6	

Aufgabe 409:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

Zielfunktion:

$Z: 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \rightarrow max$

Nebenbedingungen:

$x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 4$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 6$

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 8$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	Berechnung
x_6	1	0	2	1	2	1	0	0	4	(2):(-2)+(1)
x_7	2	2	1	0	1	0	1	0	6	:2
x_8	1	2	0	2	1	0	0	1	8	(2):(-2)+(3)
Ziel	-2	-1	-1	-2	-2	0	0	0	0	(2)+(Zi)
x_6	0	-1	1,5	1	1,5	1	-0,5	0	1	
x_1	1	1	0,5	0	0,5	0	0,5	0	3	
x_8	0	1	-0,5	2	0,5	0	-0,5	1	5	(1)*(-2)+(3)
Ziel	0	1	0	-2	-1	0	1	0	6	(1)*2+(Zi)
x_4	0	-1	1,5	1	1,5	1	-0,5	0	1	(3):3+(1)
x_1	1	1	0,5	0	0,5	0	0,5	0	3	(3)/(-3)+(2)
x_8	0	3	-3,5	0	-2,5	-2	0,5	1	3	:3
Ziel	0	-1	3	0	2	2	0	0	8	(3):3+(Zi)
x_4	0	0	1/3	1	2/3	1/3	-1/3	1/3	2	
x_1	1	0	5/3	0	4/3	2/3	1/3	-1/3	2	
x_2	0	1	-7/6	0	-5/6	-2/3	1/6	1/3	1	
Ziel	0	0	11/6	0	7/6	4/3	1/6	1/3	9	

Aufgabe 410:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$Z: 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$x_1 + x_2 \geq 8$

$3x_1 + x_2 \geq 12$

$x_1 + x_2 \leq 10$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	-1	-1	1	0	0	-8	(2)*(-1)+(1)
x_4	-3	-1	0	1	0	-12	*(-1)
x_5	1	1	0	0	1	10	(2)+(3)
Ziel	-2	-1	0	0	0	0	(2)*(-1)+(Zi)
x_3	2	0	1	-1	0	4	(3)+(1)
x_2	3	1	0	-1	0	12	(3)*(3/2)+(2)
x_5	-2	0	0	1	1	-2	:(-2)
Ziel	1	0	0	-1	0	12	(3)/(-2)+(Zi)
x_3	0	0	1	0	1	2	
x_2	0	1	0	0,5	1,5	9	*2
x_1	1	0	0	-0,5	-0,5	1	(2)+(3)
Ziel	0	0	0	-0,5	0,5	11	(2)+(Zi)
x_3	0	0	1	0	1	2	
x_4	0	2	0	1	3	18	
x_1	1	1	0	0	1	10	
Ziel	0	1	0	0	2	20	

Aufgabe 411:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$Z: -x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$2x_1 + 2x_2 \geq 3$

$-2x_1 + 2x_2 \geq 2$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Berechnung
x_3	-2	-2	1	0	-3	:-2
x_4	2	-2	0	1	-2	(1)+(2)
Ziel	1	4	0	0	0	(1)/2+(Zi)
x_1	1	1	-0,5	0	1,5	(2)/4+(1)
x_4	0	-4	1	1	-5	:-4
Ziel	0	3	0,5	0	-1,5	(2)*(3/4)+(Zi)
x_1	1	0	-0,25	0,25	0,25	
x_2	0	1	-0,25	-0,25	1,25	
Ziel	0	0	1,25	0,75	-5,25	

Aufgabe 412:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$Z: x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$x_1 \leq 6$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$2x_1 + x_2 \leq 16$

$x_1 + 4x_2 \leq 36$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Berechnung
x_3	1	0	1	0	0	0	6	
x_4	-1	-1	0	1	0	0	-4	*-1
x_5	2	1	0	0	1	0	16	(2)+(3)
x_6	1	4	0	0	0	1	36	(2)*4+(4)
Ziel	-1	-3	0	0	0	0	0	(2)*-3+(Zi)
x_3	1	0	1	0	0	0	6	
x_2	1	1	0	-1	0	0	4	(4):4+(2)
x_5	1	0	0	1	1	0	12	(4):-4+(3)
x_6	-3	0	0	4	0	1	20	:4
Ziel	2	0	0	-3	0	0	12	(4):4/3+(Zi)
x_3	1	0	1	0	0	0	6	(3)*-4/7+(1)
x_2	1/4	1	0	0	0	1/4	9	(3)/-7+(2)
x_5	7/4	0	0	0	1	-1/4	7	*4/7
x_4	-3/4	0	0	1	0	1/4	5	(3)*3/7+(4)
Ziel	-1/4	0	0	0	0	3/4	27	(3)/7+(zi)
x_3	0	0	1	0	-4/7	1/7	2	
x_2	0	1	0	0	-1/7	2/7	8	
x_1	1	0	0	0	4/7	-1/7	4	
x_4	0	0	0	1	3/7	1/7	8	
Ziel	0	0	0	0	1/7	5/7	28	

Aufgabe 413:

Ein Lackierbetrieb soll Stühle lackieren. Es sollen zwei verschiedene Farbversionen (hell und dunkel) hergestellt werden. Insgesamt stehen 20 Stühle zur Verfügung. Von der hellen Version können höchstens 12 Stühle hergestellt werden. Für die helle Version werden 2 Arbeitsstunden benötigt, für die dunkle Version dagegen nur 1 Arbeitsstunde. Insgesamt stehen 30 Arbeitsstunden zur Verfügung. Beim anschließenden Verkauf bringt ein Stuhl der dunklen Version 75.00 €, ein Stuhl der hellen Version 100.00 € Gewinn.

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode.

Lösung:

x_1: Anzahl der hellen Stühle,
x_2: Anzahl der dunklen Stühle.

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 100x_1 + 75x_2 &\rightarrow \max! \\
x_1 + x_2 &\le 20 \\
x_1 &\le 12 \\
2x_1 + x_2 &\le 30 \\
x_1, x_2 \ge 0 &: \text{ ganz.}
\end{aligned}
$$

Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 100x_1 + 75x_2 &\rightarrow \max! \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \\
x_1 + x_4 &= 12 \\
2x_1 + x_2 + x_5 &= 30 \\
x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5 & \\
x_1, x_2 : \text{ ganz.} &
\end{aligned}
$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	1	1	0	0	20
x_4	**1**	0	0	1	0	12
x_5	2	1	0	0	1	30
z	**-100**	-75	0	0	0	0
x_3	0	1	1	-1	0	8
x_1	1	0	0	1	0	12
x_5	0	**1**	0	-2	1	6
z	0	**-75**	0	100	0	1200
x_3	0	0	1	**1**	-1	2
x_1	1	0	0	1	0	12
x_2	0	1	0	-2	1	6
z	0	0	0	**-50**	75	1650
x_4	0	0	1	1	-1	2
x_1	1	0	-1	0	1	10
x_2	0	1	2	0	-1	10
z	0	0	50	0	25	1750

Aufgabe 414:

Ein Betrieb stellt ein Produkt nach drei verschiedenen Verfahren A, B, C her. Die folgende Tabelle zeigt die erforderlichen Einsatzmengen pro Produkteinheit für die einzelnen Verfahren und die maximal verfügbaren Einsatzmengen:

	A	B	C	Verfügbare Einsatzmengen
Rohstoff [kg]	10	8	5	500
Produktionszeit [h]	5	10	10	400
Lagerraum [ME_r]	0	5	10	600

Die Gewinne bei der Produktion durch die Verfahren A, B und C betragen 20 €, 25 € bzw. 15 €.

Es soll ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm aufgestellt werden. Lösen Sie das Modell nach der Simplexmethode. (rechnerische Simplexmethode)

Lösung:

x_1: Produktionsmenge nach A,
x_2: Produktionsmenge nach B,
x_3: Produktionsmenge nach C.

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 &\rightarrow \max! \\
10x_1 + 8x_2 + 5x_3 &\le 500 \\
5x_1 + 10x_2 + 10x_3 &\le 400 \\
5x_2 + 10x_3 &\le 600 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 &\rightarrow \max! \\
10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 &= 500 \\
5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + x_5 &= 400 \\
5x_2 + 10x_3 + x_6 &= 600 \\
x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,6&.
\end{aligned}
$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_4	10	8	5	1	0	0	500
x_5	5	**10**	10	0	1	0	400
x_6	0	5	10	0	0	1	600
z	-20	**-25**	-15	0	0	0	0
x_4	6	0	-3	1	$-\frac{4}{5}$	0	180
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{10}$	0	40
x_6	$-\frac{5}{2}$	0	5	0	$-\frac{1}{2}$	1	400
z	$-\frac{15}{2}$	0	10	0	$\frac{5}{2}$	0	1000
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	0	30
x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	25
x_6	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{6}$	1	475
z	0	0	$\frac{25}{4}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{3}{2}$	0	1225

$$x^* = (30 \quad 25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 475)^T, \qquad z^* = 1225 \text{ €}$$

Aufgabe 415:

Eine Unternehmung produziere zwei Produkte ,P_1 und P_2. Dazu sei ein einziger Produktionsfaktor verwendet, dessen verfügbare Menge 10 ME beträgt. Zur Herstellung einer Einheit des Produktes P_1 bzw. P_2 werden 1 ME bzw. 2 ME des Produktionsfaktors benötigt.

Von den beiden Produkten sollen insgesamt mindestens 2 ME hergestellt werden

Der Gewinn pro ME des Produkts P_1 bzw. P_2 beträgt 3 GE bzw. 2 GE.

Gesucht ist das Produktionsprogramm mit maximalem Gewinn. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Lösung:

$x_i,\ i=1,\ 2$: Produktionsmenge P_i

Das Modell:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to Max!$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Vorbereitung des Modells für die Simplexmethode:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to Max!$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$
$$\tilde{z} = -x_5 \to Max!$$
$$x_5 = 2 - x_1 - x_2 + x_4$$
$$\tilde{z} = -2 + x_1 + x_2 - x_4 \to Max!$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	2	1	0	0	10
x_5	**1**	1	0	-1	1	2
z	-3	-2	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	-1	-1	0	1	0	-2
x_3	0	1	1	**1**	-1	8
x_1	1	1	0	-1	1	2
z	0	1	0	-3	3	6
$\tilde{z}$	0	0	0	0	1	0
x_4	0	1	1	**1**		8
x_1	1	2	1	0		10
z	0	4	3	0		30

Aufgabe 416:

Ein Betrieb stellt zwei Artikel A_1 und A_2 auf den Maschinengattungen M_1 und M_2 her.

Außerdem müssen gelernte Montagekräfte eingesetzt werden. Die vorhandenen Informationen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst:

	A_1	A_2	Kapazität pro Tag
M_1	5	2	24 h
M_2	1	5	24 h
Montagegruppe	6	6	36 h
Gewinn/Stück in €	500	800	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das entsprechende Modell dar.

2. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmethode.

Lösung:

Sei

$x_i,\ i=1,\ 2:$ Artikelmenge A_i

Das Modell:

$$z = 500x_1 + 800x_2 \rightarrow Max!$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 24$$
$$x_1 + 5x_2 \le 24$$
$$6x_1 + 6x_2 \le 36$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Die Normalform:

$$z = 500x_1 + 800x_2 \rightarrow \max!$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$$
$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 24$$
$$6x_1 + 6x_2 + x_5 = 36$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	5	2	1	0	0	24
x_4	1	**5**	0	1	0	24
x_5	6	6	0	0	1	36
z	-500	**-800**	0	0	0	0
x_3	$\frac{23}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{72}{5}$
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{24}{5}$
x_5	$\frac{24}{5}$	0	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{36}{5}$
z	**-340**	0	0	160	0	3840
x_3	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{23}{4}$	$\frac{15}{2}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{2}$
z	0	0	0	$\frac{150}{2}$	$\frac{425}{6}$	4350

$$x^* = \left(\frac{3}{2} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{15}{2} \quad 0 \quad 0\right)^T, \qquad z^* = 4350 \text{ €}$$

Aufgabe 417:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

Z: $x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 6$

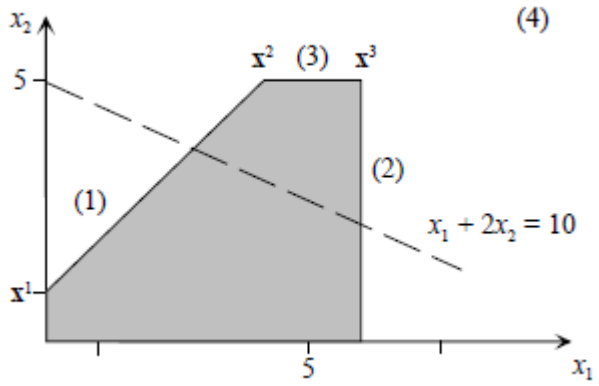
$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

a)



Die zum letzten Tableau gehörige Basislösung ist $(x_1, \ldots, x_5) = (\underline{4}, \underline{5}, 0, \underline{2}, 0)$, in vollkommener Übereinstimmung mit der zuvor konstruierten Lösung (9.4.12).

b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	-1	1	1	0	0	1	(1)*(-1)+(3)
x_4	1	0	0	1	0	6	
x_5	0	1	0	0	1	5	
Ziel	-1	-2	0	0	0	0	(1)*2+Zi
x_2	-1	1	1	0	0	1	(3)+(1)
x_4	1	0	0	1	0	6	
x_5	1	0	-1	0	1	4	
Ziel	-3	0	2	0	0	2	
x_2	0	1	0	0	1	5	
x_4							
x_1	1	0	-1	0	1	4	
Ziel	0	0	-1	0	3	14	(3)*3+Zi

Aufgabe 418:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit der

a) grafischen Lösungsvariante

b) mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$Z: x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-x_1 + x_2 \leq 1$

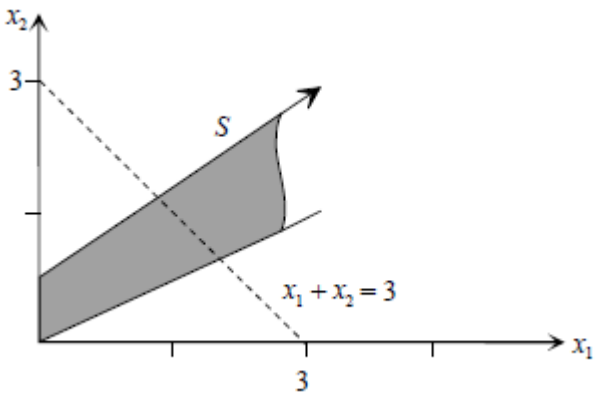
$0{,}5x_1 - x_2 \leq 0$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

a)



b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Berechnung
x_3	-1	1	1	0	1	
x_4	0,5	-1	0	1	0	(1)+(2)
Ziel	-1	-1	0	0	0	(1)+Zi
x_2	-1	1	1	0	1	
x_4	-0,5	0	1	1	1	
Ziel	-2	0	1	0	1	
Ziel						

Aufgabe 419:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

$Z: 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$-2x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 5$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Berechnung
x_3	-2	1	1	0	0	0	2	(3)*2+(1)
x_4	-1	2	0	1	0	0	7	(3)+(2)
x_5	1	0	0	0	1	0	6	
x_6	0	1	0	0	0	1	5	
Ziel	-3	-1	0	0	0	0	0	(3)*3+Zi
x_3	0	1	1	0	2	0	14	(4)*(-1)+(1)
x_4	0	2	0	1	1	0	13	(4)*(-2)+(2)
x_1	1	0	0	0	1	0	6	
x_6	0	1	0	0	0	1	5	
Ziel	0	-1	0	0	3	0	18	(4)+Zi
x_3	0	0	1	0	2	-1	9	
x_4	0	0	0	1	1	-2	3	
x_1	1	0	0	0	1	0	6	
x_2	0	1	0	0	0	1	5	
Ziel	0	0	0	0	3	1	23	

$x_1 = 6; x_2 = 5; Z = 23$

Aufgabe 420:

Eine Firma stelle 2 verschiedene Produkte her. Es stehen 3 Maschinen A, B, C zur Verfügung. Maschine A hat eine maximale monatliche Laufzeit (Kapazität) von 170 Stunden, Maschine B von 150 Stunden und Maschine C von 180 Stunden.

Eine Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 liefert einen Deckungsbeitrag von 300 Euro, eine ME von Produkt 2 dagegen 500 Euro.

Fertigt man 1 ME von Produkt 1, benötigt man dafür zunächst 1 Stunde die Maschine A und danach 1 Stunde die Maschine B.

1 ME von Produkt 2 belegt nacheinander 2 Stunden Maschine A, 1 Stunde Maschine B und 3 Stunden Maschine C.

Die Firma möchte den Deckungsbeitrag maximieren:

Eventuelle Fixkosten sind unabhängig von der Produktionsmenge und können daher einfach am Ende der Berechnung vom Gesamtdeckungsbeitrag abgezogen werden, um den Gewinn zu erhalten.

Lösung:

Z: $300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

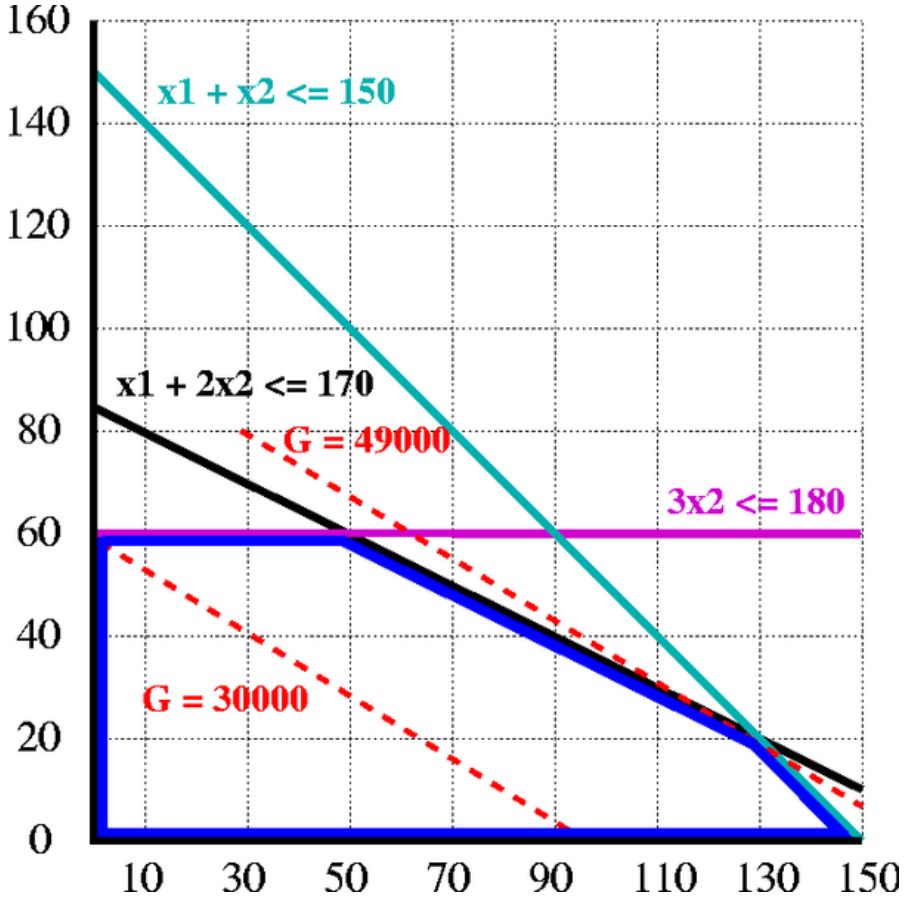
$x_1 + 2x_2 \leq 170$

$x_1 + x_2 \leq 150$

$3x_2 \leq 180$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	1	2	1	0	0	170	(3)*(-2/3)+(1)
x_4	1	1	0	1	0	150	(3)/(-3)+2
x_5	0	3	0	0	1	180	:3
Ziel	-300	-500	0	0	0	0	(3)*500/3+Zi
x_3	1	0	1	0	-2/3	50	
x_4	1	0	0	1	-1/3	90	(1)*(-1)+(2)
x_2	0	1	0	0	1/3	60	
	-300	0	0	0	500/3	30000	(1)*300+Zi
x_1	1	0	1	0	-2/3	50	(2)*(+2)+(1)
x_4	0	0	-1	1	1/3	40	*3
x_2	0	1	0	0	1/3	60	(2)*(-1)+(3)
Ziel	0	0	300	0	-100/3	45000	(2)*100+Zi
x_1	1	0	-1	2	0	130	
x_5	0	0	-3	3	1	120	
x_2	0	1	1	-1	0	20	
Ziel	0	0	200	100	0	49000	

Aufgabe 421:

Eine Bergwerksgesellschaft besitzt zwei verschiedene Gruben (bzw. Minen), in denen bestimmte Erzarten gefördert werden. Die Gruben befinden sich in verschiedenen Landesteilen und verfügen über unterschiedliche Kapazitäten. Nach dem Brechen werden bei Erz drei Klassen unterschieden, grob- mittel- und feinkörniges Erz.

Nach jeder Erzart besteht eine gewisse Nachfrage. Die Bergwerksgesellschaft konzentriert sich darauf, einem Hüttenwerk mindestens 12t grob-, 8t mittel- und 24t feinkörniges Erz zu liefern.

Die Betriebskosten für die Gruben sind 200 GE (Geldeinheiten) pro Tag bei Grube 1 und 160 GE bei Grube 2. In der Grube 1 werden dabei pro Tag 6t grob-, 2t mittel- und 4t feinkörniges Erz gefördert, während die zweite Grube eine tägliche Leistung von 2t grob-, 2t mittel- und 12t feinkörnigem Erz hat.

Wie viele Tage sollte jede der Gruben pro Woche befahren werden, um die Aufträge der Firma auf wirtschaftliche Weise zu erfüllen?

Lösen Sie dieses Problem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

Lösung:

$Z: 200x_1 + 160x_2 \rightarrow \text{Min}$

Nebenbedingungen:

$6x_1 + 2x_2 \geq 12$

$2x_1 + 2x_2 \geq 8$

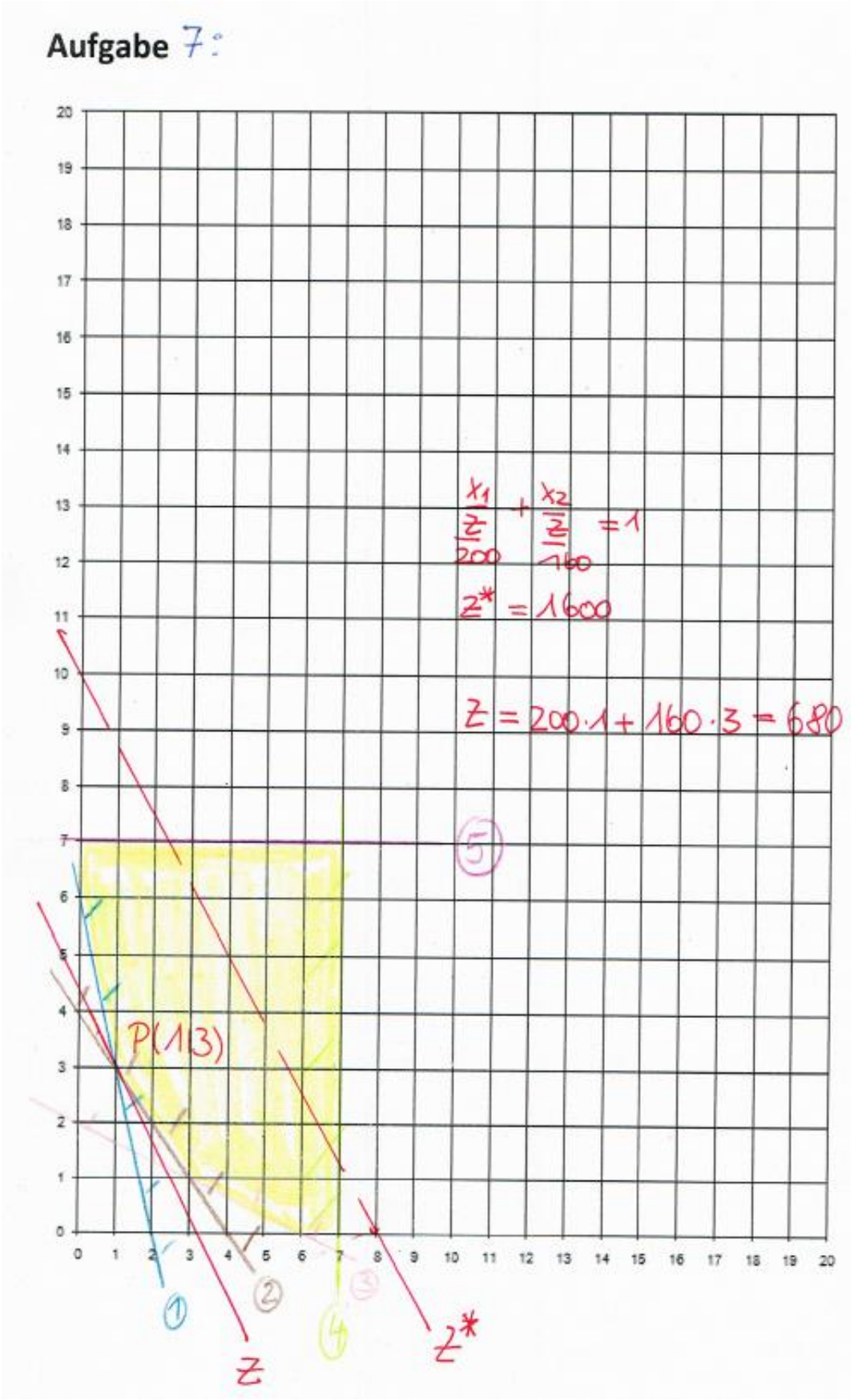
$4x_1 + 12x_2 \geq 24$

$x_1 \leq 7$

$x_2 \leq 7$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$



Aufgabe 422:

Ein Betrieb kann sein Produkt nach zwei Verfahren aus Grundstoffen A und B [t] sowie Energie W [kWh] herstellen. Für 1 t des Produktes wird benötigt:

	1. Verfahren	2. Verfahren	verfügbar
A	4	1	20
B	0	4	40
W	2	3	12

Die Gesamtproduktion soll maximiert werden. Lösen Sie dieses Problem mit dem Simplexalgorithmus in Pivot-Tabellenform

Lösung:

$Z: x_1 + x_2 \rightarrow Max$

Nebenbedingungen:

$4x_1 + x_2 \leq 20$

$4x_2 \leq 10$

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	4	1	1	0	0	20	:4
x_4	0	4	0	1	0	10	
x_5	2	3	0	0	1	12	(1)*(-0,5)+(3)
Ziel	-1	-1	0	0	0	0	(1)*0,25+Zi
x_1	1	0,25	0,25	0	0	5	(3)*(-1/10)+(1)
x_4	0	4	0	1	0	10	(3)*(-8/5)+(2)
x_5	0	2,5	-0,5	0	1	2	:2,5
Ziel	0	-0,75	0,25	0	0	5	(3)*(6/20)+Zi
x_1	1	0	0,3	0	-0,1	4,8	
x_4	0	0	0,8	1	-1,6	6,8	
x_2	0	1	-0,2	0	0,4	0,8	
Ziel	0	0	0,1	0	0,3	5,6	

Aufgabe 423:

Bestimmen Sie die Lösung des LOP's mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform

Zielfunktion:

$Z: 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \rightarrow max$

Nebenbedingungen:

$x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 4$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 6$

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 8$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	Berechnung
x_6	1	0	2	1	2	1	0	0	4	(2):(-2)+(1)
x_7	2	2	1	0	1	0	1	0	6	:2
x_8	1	2	0	2	1	0	0	1	8	(2):(-2)+(3)
Ziel	-2	-1	-1	-2	-2	0	0	0	0	(2)+(Zi)
x_6	0	-1	1,5	1	1,5	1	-0,5	0	1	
x_1	1	1	0,5	0	0,5	0	0,5	0	3	
x_8	0	1	-0,5	2	0,5	0	-0,5	1	5	(1)*(-2)+(3)
Ziel	0	1	0	-2	-1	0	1	0	6	(1)*2+(Zi)
x_4	0	-1	1,5	1	1,5	1	-0,5	0	1	(3):3+(1)
x_1	1	1	0,5	0	0,5	0	0,5	0	3	(3)/(-3)+(2)
x_8	0	3	-3,5	0	-2,5	-2	0,5	1	3	:3
Ziel	0	-1	3	0	2	2	0	0	8	(3):3+(Zi)
x_4	0	0	1/3	1	2/3	1/3	-1/3	1/3	2	
x_1	1	0	5/3	0	4/3	2/3	1/3	-1/3	2	
x_2	0	1	-7/6	0	-5/6	-2/3	1/6	1/3	1	
Ziel	0	0	11/6	0	7/6	4/3	1/6	1/3	9	

Aufgabe 424:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$Z: 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$x_1 + x_2 \geq 8$

$3x_1 + x_2 \geq 12$

$x_1 + x_2 \leq 10$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Berechnung
x_3	-1	-1	1	0	0	-8	(2)*(-1)+(1)
x_4	-3	-1	0	1	0	-12	*(-1)
x_5	1	1	0	0	1	10	(2)+(3)
Ziel	-2	-1	0	0	0	0	(2)*(-1)+(Zi)
x_3	2	0	1	-1	0	4	(3)+(1)
x_2	3	1	0	-1	0	12	(3)*(3/2)+(2)
x_5	-2	0	0	1	1	-2	:(-2)
Ziel	1	0	0	-1	0	12	(3)/(-2)+(Zi)
x_3	0	0	1	0	1	2	
x_2	0	1	0	0,5	1,5	9	*2
x_1	1	0	0	-0,5	-0,5	1	(2)+(3)
Ziel	0	0	0	-0,5	0,5	11	(2)+(Zi)
x_3	0	0	1	0	1	2	
x_4	0	2	0	1	3	18	
x_1	1	1	0	0	1	10	
Ziel	0	1	0	0	2	20	

Aufgabe 425:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$Z: -x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$2x_1 + 2x_2 \geq 3$

$-2x_1 + 2x_2 \geq 2$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Berechnung
x_3	-2	-2	1	0	-3	:-2
x_4	2	-2	0	1	-2	(1)+(2)
Ziel	1	4	0	0	0	(1)/2+(Zi)
x_1	1	1	-0,5	0	1,5	(2)/4+(1)
x_4	0	-4	1	1	-5	:-4
Ziel	0	3	0,5	0	-1,5	(2)*(3/4)+(Zi)
x_1	1	0	-0,25	0,25	0,25	
x_2	0	1	-0,25	-0,25	1,25	
Ziel	0	0	1,25	0,75	-5,25	

Aufgabe 426:

Lösen Sie folgendes Problem mit dem Simplex-Algorithmus in Pivot-Tabellenform.

Zielfunktion:

$Z: x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$x_1 \leq 6$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$2x_1 + x_2 \leq 16$

$x_1 + 4x_2 \leq 36$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x_1, x_2 \geq 0$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Berechnung
x_3	1	0	1	0	0	0	6	
x_4	-1	-1	0	1	0	0	-4	*-1
x_5	2	1	0	0	1	0	16	(2)+(3)
x_6	1	4	0	0	0	1	36	(2)*4+(4)
Ziel	-1	-3	0	0	0	0	0	(2)*-3+(Zi)
x_3	1	0	1	0	0	0	6	
x_2	1	1	0	-1	0	0	4	(4):4+(2)
x_5	1	0	0	1	1	0	12	(4):-4+(3)
x_6	-3	0	0	4	0	1	20	:4
Ziel	2	0	0	-3	0	0	12	(4):4/3+(Zi)
x_3	1	0	1	0	0	0	6	(3)*-4/7+(1)
x_2	1/4	1	0	0	0	1/4	9	(3)/-7+(2)
x_5	7/4	0	0	0	1	-1/4	7	*4/7
x_4	-3/4	0	0	1	0	1/4	5	(3)*3/7+(4)
Ziel	-1/4	0	0	0	0	3/4	27	(3)/7+(zi)
x_3	0	0	1	0	-4/7	1/7	2	
x_2	0	1	0	0	-1/7	2/7	8	
x_1	1	0	0	0	4/7	-1/7	4	
x_4	0	0	0	1	3/7	1/7	8	
Ziel	0	0	0	0	1/7	5/7	28	

Wiederholungsaufgaben und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 427:

Der Waschzuber KG stellt Handtücher, Badetücher und Duschhandtücher her. Für die Herstellung werden drei Maschinen (A, B und C) benötigt.

Die Bearbeitungszeit für ein Handtuch beträgt 2 Minuten auf Maschine A, 6 Minuten auf Maschine B und 1 Minute auf Maschine C.

Die Bearbeitungszeit für ein Badetuch beträgt 2 Minuten auf Maschine A, 8 Minuten auf Maschine B und 2 Minuten auf Maschine C.

Die Bearbeitungszeit eines Duschhandtuches beträgt 1 Minute auf Maschine A, 2 Minuten auf Maschine B und 1 Minute auf Maschine C.

Pro Woche kann Maschine A maximal 1400 Minuten betrieben werden, Maschine B 4400 Minuten und Maschine C 1000 Minuten.

Ein Handtuch wird für 12 Euro, ein Badetuch für 15 Euro und ein Duschhandtuch für 5 Euro verkauft.

Wie viele Hand-/Bade-/Duschhandtücher müssen produziert werden, damit der Umsatz maximal wird?

Lösung dieses Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus in Pivot-Tabellenform.

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Berechnung
x_4	2	2	1	1	0	0	1400	(3)*-1+(1)
x_5	6	8	2	0	1	0	4400	(3)*-4+(2)
x_6	1	2	1	0	0	1	1000	:2
Ziel	-12	-15	-5	0	0	0	0	(3)*7,5+(Z)
x_4	1	0	0	1	0	-1	400	(2)*-0,5+(1)
x_5	2	0	-2	0	1	-4	400	:2
x_2	0,5	1	0,5	0	0	0,5	500	(2)*-0,25+(3)
Ziel	-4,5	0	2,5	0	0	7,5	7500	(2)*4,5/2+(Z)
x_4	0	0	1	1	-0,5	1	200	
x_1	1	0	-1	0	0,5	-2	200	(1)+(2)
x_2	0	1	1	0	-0,25	1,5	400	(1)*-1+(3)
Ziel	0	0	-2	0	2,25	-1,5	8400	(1)*2+(Z)
x_3	0	0	1	1	-0,5	1	200	
x_1	1	0	0	1	0	-1	400	
x_2	0	1	0	-1	0,25	0,5	200	
Ziel	0	0	0	2	1,25	0,5	8800	
Ergebnis:	x_1=400	x_2=200	x_3=200	Z=8800				

Aufgabe 428:

Ein Landwirt besitzt einen Stall für 10 Kühe und 20 ha Land. Pro Jahr kann er 2400 Arbeitsstunden (Ah) aufwenden. Um eine Kuh zu unterhalten benötigt er pro Jahr 0,5 ha Land, sowie 200 Ah. Der Anbau von 1 ha Weizen erfordert 100 Ah.

Durch eine Kuh erzielt er im Jahr 350,- € und 1 ha Weizen bringt ihm im gleichen Zeitraum260,- € Gewinn.

In diesem Zusammenhang soll die Frage beantwortet werden, mit wie vielen Kühen und wie viel ha Weizen sein Gewinn maximal wird? Ermitteln Sie die Lösung anhand des Simplex-Algorithmus in Pivot-Darstellung.

Lösung:

Zunächst werden die oben genannten Bedingungen in mathematische Form gebracht. Dabei entspricht x_1 der Anzahl an Kühen und x_2 der Fläche auf der Weizen angebaut wird.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
x_3	1	0	1	0	0	10		
x_4	0,5	1	0	1	0	20	(2)mal 2 plus (1)	
x_5	200	100	0	0	1	2400	(1) mal -200 plus (3)	
Z	-350	-260	0	0	0	0	(1) mal 350 plus Z	
	x_3	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
x_1	1	0	1	0	0	10		
x_4	0	2	-1	2	0	30	(3) / -50 plus (2)	
x_5	0	100	-200	0	1	400	:100	
Z	0	-260	350	0	0	3500	(3)*2,6+Ziel	
	x_3	x_5	x_3	x_4	x_5	b		
x_1	1	0	1	0	0	10		
x_4	0	0	3	2	-0,02	22		
x_2	0	1	-2	0	0,01	4		
Z	0	0	-170	0	2,6	4540		