Manuskript Mathematik

WIRTSCHAFTSINGENIEURWESEN –
INTERNATIONAL PROJECT ENGINEERING

Dipl. Mathematiker (FH) Roland Geiger
Rosenstr. 23
72631 Aichtal
cs.geiger@t-online.de
www.cs-geiger.de

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

Aussagenlogik und Mengenalgebra

Aussagen

Definition 1:

Eine Aussage ist eine sprachliche Formulierung, die einen bestimmten Sachverhalt feststellt. Eine eindeutig formulierte Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Definition 2:

Eine Aussage ist die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts in Form eines Satzes einer natürlichen oder künstlichen Sprache.

Jede Aussage ist entweder ¨ wahr oder falsch.

Die Wahrheitswerte werden auch als aussagenlogische Konstanten bezeichnet.

Darstellung solcher Aussagen in Wahrheitstabellen.

Definition 3:

Die Wahrheitstabelle zeigt für alle möglichen Zuordnungen von endlich vielen (häufig zwei) Wahrheitswerten zu den aussagenlogisch nicht weiter zerlegbaren Teilaussagen, aus denen die Gesamtaussage zusammengesetzt ist, welchen Wahrheitswert die Gesamtaussage unter der jeweiligen Zuordnung annimmt.

Beispiel 1:

„Nicht A“

A	$\neg A$
w	f
f	w

Negation

„A und B“

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Konjunktion

„A oder B“

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Adjunktion

„Entweder A oder B“

A	B	$A \oplus B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Kontravalenz

„Wenn A, dann B“

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Implikation

„A genau dann, wenn B“

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Koimplikation

Bemerkung 1:

Die Implikation ” Wenn A, dann B“ (”Aus A folgt B“) bedarf noch einer näheren Erklärung. A ist eine hinreichende Bedingung für B. Das heißt, dass Ereignis B tritt sicher ein, wenn A gilt. Umgekehrt ist B eine notwendige Bedingung für A. Nur wenn B überhaupt gilt, dann kann, muss aber nicht, A eintreten. Wir wollen dies mit einem Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 2:

A: „Heinz schwimmt im Wasser.“ B: „Heinz ist nass.“

C: $A \rightarrow B$ „Wenn Heinz im Wasser schwimmt, dann ist er (sicher) nass.“

D: $A \leftarrow B$ „(Nur) Wenn Heinz nass ist, dann kann es sein, dass er im Wasser schwimmt.“ Sicher ist, wenn er nicht nass ist, dann schwimmt er auch nicht im Wasser.

Wenn die Aussage A falsch ist, dann ist die Implikation A → B immer wahr.

Sie ist nur falsch, wenn die Voraussetzung A wahr, aber B falsch ist.
Die Koimplikation A ↔ B fuhrt die hinreichende mit der notwendigen Bedingung zusammen. Man kann sie auch so formulieren: ”

Nur wenn A gilt,dann tritt sicher B ein und umgekehrt.

Aussageverbindungen

Definition 4:

Die Aussagenlogik untersucht den Wahrheitswert von Aussagenverbindungen in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der einzelnen Aussagen. Dabei werden ausschließlich Aussagenverbindungen betrachtet, d.h., der Wahrheitswert der Aussagenverbindung hängt nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen und den verbindenden Junktoren ab.

Dabei wird der Wahrheitswert der Verbindung durch die klassischen Junktoren

$$\begin{array}{rl}
\text{„nicht } A\text{“} & (\neg A), \\
\text{„}A \text{ und } B\text{“} & (A \wedge B), \\
\text{„}A \text{ oder } B\text{“} & (A \vee B), \\
\text{„wenn } A, \text{ dann } B\text{“} & (A \Rightarrow B), \\
\text{„}A \text{ genau dann, wenn } B\text{“} & (A \Leftrightarrow B)
\end{array}$$

bestimmt.

Dabei ist das ” logische oder“ immer als ” einschließendes oder“ zu verstehen. Im Falle der Implikation sind für A ⇒ B auch die folgenden Sprechweisen üblich:

- A impliziert B,
- B ist notwendig für ¨ A sowie
- A ist hinreichend für ¨ B

Grundgesetze der Aussagenlogik

Bemerkung 2:

Zwei aussagenlogische Ausdrucke ¨ A und B heißen logisch äquivalent oder wertverlaufsgleich, in Zeichen: A = B , wenn sie die gleiche Wahrheitsfunktion repräsentieren.

Definition 5:

(a) **Assoziativgesetze**

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C),\\ (A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C).\end{aligned}$$

(b) **Kommutativgesetze**

$$\begin{aligned}A \wedge B &= B \wedge A,\\ A \vee B &= B \vee A.\end{aligned}$$

(c) **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C),\\ A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C).\end{aligned}$$

Mengen

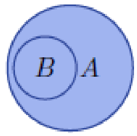
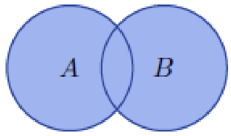
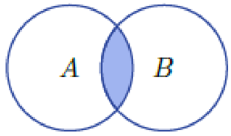
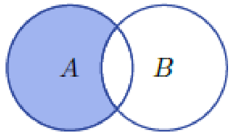
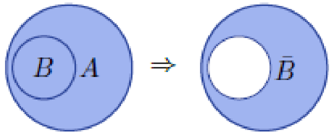
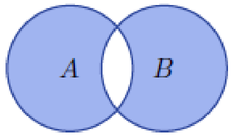
Definition 6:

Der Zusammenschluss mehrerer Objekte, bzw. Elemente, zu einer Einheit nennt man Mengen.

Bemerkung 3:

Aufzählende Form einer Menge
$A = \{1,2,3,4, \dots\}$
Beschreibende Form einer Menge
$A = \{\, x \mid x > 2\}$
Leere Menge bzw. Nullmenge
$\emptyset \;\; bzw.\; \{\,\}$

Beziehungen und Operationen von Mengen

Gleichheit zweier Mengen	$A = B$	
Teilmenge	$B \subseteq A$	
echte Teilmenge (wie Teilmenge, es gibt aber mind. ein Element aus A, das nicht in B liegt)	$B \subset A$	
Vereinigung (ODER) (Elemente die in A oder B (oder in beiden) liegen)	$C = A \cup B$	
Schnittmenge (UND) (Elemente die in A und B liegen)	$C = A \cap B$	
Differenz (Elemente aus A, die nicht auch in B liegen)	$C = A \setminus B$	
Komplementärmenge von $B \subseteq A$ (Elemente aus A, die nicht in B liegen)	$\overline{B}_A = A \setminus B$	
Kontravalenz (XOR, exklusives ODER) (Elemente aus A und B, nicht aber im Schnitt)	$\overline{A \cap B}$	

Beispiel 3:

Gegeben sind die Mengen $A = \{2,5,7,8,11,15\}$ und $B = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 8\}$.

Bestimmen Sie:

a)	$C = A \cup B$	$C = \mathbb{N} \setminus \{1,3,4,6\}$
b)	$C = A \cap B$	$C = \{8,11,15\}$
c)	$C = B \setminus A$	$C = B \setminus \{8,11,15\}$
d)	$C = \bar{B}$	$C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Zahlenmengen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,\ldots\} \quad und \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$	
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\right\}$	
Reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{irrationale\ Zahlen\}$	
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	→ Mathematik II
Zusammenhang	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	

Intervalle

Definition 7:

Intervalle sind zusammenhängende Punktmengen ($\in \mathbb{R}$) auf der Zahlengeraden zwischen den Grenzen a und b, wobei gilt $a < b$. Bei der Angabe eines Intervalls muss angegeben werden, ob die Grenzen dazu gehören oder nicht.

$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$	rechtsoffenes Intervall
$(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$	linksoffenes Intervall
$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a,\infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\}$	Beispiel für ein unendliches Intervall
$(-\infty,b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}$	Beispiel für ein unendliches Intervall
$(-\infty,0] = \mathbb{R}^-$	
$[0,\infty) = \mathbb{R}^+$	
$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$	

Summen und Produkte

Summenzeichen

Summen über endliche oder unendliche Reihen können statt mit Auslassungspunkten auch mit dem **Summenzeichen** notiert werden.

Schreibweise mit Auslassungspunkten:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

Schreibweise mit Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

Definition 8:

Die allgemeine Schreibweise einer Summe ist:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Eine Summe besteht ausfolgenden Komponenten:

Σ: Summenzeichen und die Festlegung der Rechenoperation für die Folge

i: Laufindex oder Zählvariable mit Anfangs- und Endwert.

a_i: Berechnungsformel

Beispiel 4:

$$\sum_{i=2}^{7} (i-1) = (2-1) + (3-1) + (4-1) + (5-1) + (6-1) + (7-1)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Rechenregeln

Definition 9:

$$\sum_{i=m}^{n} a = (n - m + 1) \cdot a$$

Beispiel 5:

$$\sum_{i=3}^{7} 4 = (7 - 3 + 1) \cdot a = 7 \cdot 4 = 28$$

Definition 10:

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a$$

Beispiel 6:

$a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 6; a_4 = 9; c = 2$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot a_i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (2 + 4 + 6 + 9) = 2 \cdot (21) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} a_i$$

Definition 11:

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} (a_i) \pm \sum_{i=m}^{n} (b_i)$$

Beispiel 7:

$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6; b_1 = 5; b_2 = -2; b_3 = 4;\ c = 2$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot a_i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (2 + 4 + 6 + 9) = 2 \cdot (21) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} a_i$$

$$\sum_{i=5}^{3} (a_i + b_i) = \sum_{i=5}^{3} (a_i) + \sum_{i=5}^{3} (b_i) = (3 + 5 + 6) + (5 - 2 + 4) = 14 + 7 = 21$$

Definition 12:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{für } k \leq m < n$$

Beispiel 8:

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{i=1}^{2} i^2 + \sum_{i=3}^{4} i^2 = (1^2 + 2^2) + (3^2 + 4^2) = 5 + 25 = 30$$

Folgende Regeln gelten nicht, diese werden aber fälschlicherweise oft verwechselt.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i \text{ mit } m > 1$$

Beispiel 9:

$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6; b_1 = 5; b_2 = -2; b_3 = 4$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i = 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 = 29$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot \sum_{i=1}^{3} b_i = (3 + 5 + 6) \cdot (5 - 2 + 4) = 14 \cdot 70$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2$$

Beispiel 10:

$$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = (3^2 + 5^2 + 6^2) = 9 + 25 + 36 = 70$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2 = (3 + 5 + 6)^2 = 14^2 = 196$$

Produktzeichen

Das Produktzeichen π wird dazu benutzt, um die Schreibung von Produkten abzukürzen.

Definition 13:

$$\prod_{i=1}^{m} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$$

Rechenregeln

Definition 14:

$$\prod_{i=k}^{m} a = a^{m-k+1}$$

Beispiel 11:

$$\prod_{i=1}^{4} 3 = 3^{4-1+1} = 3^4 = 81$$

Definition 15:

$$\prod_{i=k}^{m} c \cdot a_i = c^{m-k+1} \prod_{i=k}^{m} a_i$$

Beispiel 12:

$a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 6$

$$\prod_{i=1}^{3} 5 \cdot a_i = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 11.250$$

$$c^{m-k+1} \prod_{i=k}^{m} a_i = 5^{3-1+1} \prod_{i=1}^{3} a_i = 5^3 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 6) = 125 \cdot 90 = 11.250$$

Definition 16:

$$\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}(\mathrm{a_i}\cdot b_i)=\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}(\mathrm{a_i})\cdot\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}(b_i)$$

Beispiel 13:

$a_1=3; a_2=5; a_3=6; \mathrm{b}_1=5; \mathrm{b}_2=-2; b_3=4$

$$\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}(\mathrm{a_i}\cdot b_i)=(3\cdot 5)\cdot\big(5\cdot(-2)\big)\cdot(6\cdot 4)=15\cdot(-10)\cdot 24=3.600$$

$$\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}(\mathrm{a_i})\cdot\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}(b_i)=(3\cdot 5\cdot 6)\cdot(5\cdot(-2)\cdot 4)=3.600$$

Definition 17:

$$\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}a_i^2=\left(\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}a_i^2\right)^2$$

Beispiel 14:

$a_1=3; a_2=5; a_3=6$

$$\prod_{\mathrm{i=1}}^{3}a_i^2=3^2\cdot 5^2\cdot 6^2=8.100$$

$$\left(\prod_{\mathrm{i=k}}^{\mathrm{m}}a_i^2\right)^2=(3\cdot 5\cdot 6)^2=8.100$$

Fakultät

Eine Multiplikation von verschiedenen Zahlen, beginnend bei Eins und fortlaufend, nennt man auch Fakultät. Dies ist eine verkürzte Schreibweise für das Produktzeichen.

Definition 18:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m = n!$$

Beispiel 15:

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist eine mathematische Funktion, mit der sich eine der Grundaufgaben der Kombinatorik lösen lässt.

Definition 19:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel 16:

$\binom{49}{6} = 13.983.816$

Ausmultiplizieren von Ausdrücken

Kommutativgesetz der Addition (Vertauschungsgesetz)

In einer Summe können wir beliebig Summanden vertauschen, ohne dass sich ihr Wert ändert. Die Buchstaben a und b seien beliebige Zahlen, dann gilt immer:

$a + b = b + a$

Beispiel 17:

$47 + 84 = 84 + 47 = 131$

Das Kommutativgesetz gilt für eine beliebig große Anzahl von Summanden. Dies kann man auch nutzen, um in größeren Termen Rechenvorteile zu bekommen.

Kommutativgesetz der Subtraktion (Vertauschungsgesetz)

Das Kommutativgesetz gilt bei der Subtraktion nicht.

$a - b \neq b - a$

Kommutativgesetz der Multiplikation (Vertauschungsgesetz)

Auch in einem Produkt können wir beliebig Faktoren vertauschen. Allgemein schreiben wir das Gesetz wieder mit Buchstaben. Für diese Buchstaben kann man beliebige Zahlen einsetzen. Es seien a und b wieder beliebige Zahlen, dann gilt:

$a \cdot b = b \cdot a$

Ein einfaches Beispiel: $12 \cdot 8 = 8 \cdot 12 = 96$

Da auch das Kommutativgesetz der Multiplikation für eine beliebig große Anzahl von Faktoren gilt, können wir es nutzen, um durch gezieltes Vertauschen Vorteile zu erlangen.

Assoziativgesetz der Addition(Verbindungsgesetz)

In einer Summe aus drei oder mehr Summanden können wir beliebige Teile in Klammern setzen und damit zeigen, dass wir sie zuerst rechnen wollen. Andererseits, falls in einer Summe aus mehr als zwei Summanden Klammern stehen, können wir diese auch weglassen.

Wir zeigen ein beliebiges Beispiel, die Summe aus $a + b + c$. Es gilt:

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

Beispiel 18:

$54 + 23 + 77 = (54 + 23) + 77 = 54 + (23 + 77) = 154$

Assoziativgesetz der Subtraktion

Die Subtraktion ist grundsätzlich nicht assoziativ und das Assoziativgesetz der Subtraktion ist im Grunde eine Abwandlung des Assoziativgesetzes der Addition.

Wir müssen allerdings beachten, dass wenn wir beim Klammern ein Minus vor der Klammer haben, wir das Rechenzeichen umdrehen müssen, also plus zu minus und minus zu plus. Wenn wir 20 – 8 – 2 rechnen wollen, könnten wir 8 – 2 klammern. Hier haben wir dann aber den Fall, dass ein „–“ vor der Klammer ist und müssen das Rechenzeichen umdrehen, also statt minus rechnen wir plus.

Beispiel 19:

$20 - 8 - 2$

$= 20 - (8 + 2)$

$= 20 - 10$

$= 10$

Assoziativgesetz der Multiplikation

Für beliebige reelle Zahlen x, y, z gilt

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

die **Reihenfolge** in der man Produkte berechnet, spielt also keine Rolle.

Beispiel 20:

$2 \cdot (3 \cdot 7) = (2 \cdot 3) \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Das Distributivgesetz ist im Grunde ein Gesetz zum **Ausmultiplizieren von Klammern**.

Das bedeutet, man hat ein Produkt (oder Quotienten) aus einer Zahl und einer Klammer – oder auch aus zwei Klammern. In diesen Klammern stehen Summen oder Differenzen. Das Distributivgesetz regelt die Verteilung des Faktors auf die Summanden.

Wir beginnen mit dem „Standard“-Fall, ein Faktor mal eine Summe in Klammern.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c = ab - ac$

Wir sehen, jeder Summand in der Klammer wird mit dem Faktor multipliziert, es ist, als ob man den Faktor in die Klammer reinzieht.

Beispiel 21:

$5 \cdot (5 + 15) = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 15 = 25 + 75 = 100$

$5 \cdot (5 - 15) = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 15 = 25 - 75 = -50$

Kommutativgesetz

Vom Kommutativgesetz der Multiplikation her wissen wir, dass wir bei den ersten beiden Fällen Klammer und Faktor vertauschen dürften, also

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a = ab + ac$

$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a = ab - ac$

Beispiel 22:

$(5 + 15) \cdot 5 = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 15 = 25 + 75 = 100$

$(5 - 15) \cdot 5 = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 15 = 25 - 75 = -50$

Da dieses Vertauschen für die Division nicht zulässig ist, nehmen wir für den nächsten Fall die Buchstaben d, e und f. Das soll zeigen, dass es sich um andere Zahlen handelt.

$(d + e) : f = d : f + e : f$

$(d - e) : f = d : f - e : f$

Beispiel 23:

$$(12 + 4) : 3 = 12 : 3 + 4 : 3 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

ist anders als

$$3 : (12 + 4) = 3 : 16 = \frac{3}{16}$$

Nur eine Klammer

Jedes Glied der Summe bzw. der Differenz in der Klammer muss mit dem Faktor vor(oder hinter!) der Klammer multipliziert werden.

Wenn eine Zahl mit einer Klammer, in der Summe oder Differenz steht, muss jeder Summand bzw. sowohl Minuend als auch der Subtrahend mit dieser Zahl multipliziert werden.

Entsprechend geht man vor, wenn eine Variable oder ein längerer Term mit einer solchen Klammermultipliziert werden soll.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$

Beispiel 24:

$18 \cdot (x + y) = 18 \cdot x + 18 \cdot y = 18x + 18y$

Beispiel 25:

$(-18) \cdot (x + y) = -18 \cdot x - 18 \cdot y = -18x - 18y$

Klammer mal Klammer

Wenn der Term, mit dem die Klammer multipliziert werden soll, selbst eine Klammer mit einer Summe oder Differenz ist, muss jedes Glied der ersten Summe bzw. Differenz mit jedem Glied der zweiten Summe bzw. Differenz multipliziert werden.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = ac + ad + bc + bd$$

Beispiel 26:

$$(3a + 2b) \cdot (5x - 10y) = 15ax - 30ay + 10bx - 20by)$$

Beispiel 27:

$$(-2a - 3c) \cdot (-3b - 4d) = +6ab + 8ad + 9bc + 12cd$$

Produkt in der Klammer

Wenn in der Klammer ein Produkt steht (anstatt einer Summe oder Differenz), darf man nicht jeden Faktor des Produkts in der Klammermultiplizieren, sondern nur einen (welcher ist egal).

$$a \cdot (x \cdot y) = axy$$

Beispiel 28:

$2 \cdot (x + y) = 2x + 2y$ aber

$2 \cdot (x \cdot y) = 2xy$ aber nicht $2x \cdot 2z = 4xy$

Beispiel 29:

$$0{,}5 \cdot (x \cdot 12y) = 6xy$$

Die Klammer kann laut Assoziativgesetz weggelassen werden.

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Die Faktoren dürfen nach dem Kommutativgesetz vertauscht werden.

$$a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c) = c \cdot (a \cdot b)$$

Bruchrechnung

Grundlagen des Bruchrechnens

Kürzen von Brüchen

Brüche werden gekürzt, indem man den Zähler und den Nenner durch die gleiche Zahl dividiert, umgangssprachlich auch das Kürzen von Brüchen genannt.

Beispiel 30:

$$\frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3}$$

Erweitern von Brüchen

Brüche werden erweitert, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert, umgangssprachlich auch das Erweitern von Brüchen genannt.

Beispiel 31:

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{14}{18}$$

Gleichnamig machen (auf den gleichen Nenner bringen)

Mehrere Brüche werden auf den gleichen Nenner gebracht, indem man sie so erweitert, dass sie im Anschluss den gleichen Nenner besitzen. Dieser gleiche Nenner wird auch als Hauptnenner bezeichnet (Abkürzung: HN).

Der Hauptnenner ist auch das kleinste gemeinsame Vielfache (Abkürzung: kgV) der verschiedenen Hauptnenner.

Wichtig: Sollte auf Anhieb kein kgV gefunden werden, so kann man auch alle Nenner einfach miteinander multiplizieren. Dabei erhält man natürlich wesentlich größere Zahlen, die dann einen erhöhten Rechenaufwand erfordern.

Beispiel 32:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

$$\mathrm{kgv}(4; 6) = 12$$

Addition von Brüchen

Brüche werden addiert, indem man sie auf den gleichen Hauptnenner bringt und anschließend die Zähler addiert. Im Anschluss kann eventuell noch gekürzt werden.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$$

$$\mathrm{kgv}(4;6)=12$$

Subtraktion von Brüchen

Brüche werden subtrahiert, indem man sie auf den gleichen Hauptnenner bringt und anschließend die Zähler subtrahiert. Im Anschluss kann eventuell noch gekürzt werden.

Beispiel 33:

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\frac{9}{12}-\frac{10}{12}=-\frac{1}{12}$$

$$\mathrm{kgv}(4;6)=12$$

Multiplikation von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Im Anschluss kann eventuell noch gekürzt werden.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Beispiel 34:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 5}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Division von Brüchen

Zwei Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert. Im Anschluss kann eventuell noch gekürzt werden.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Beispiel 35:

$$\frac{2}{3}:\frac{2}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

Doppelbruch

Einen Doppelbruch kann man auf die Division von Brüchen zurückführen.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Gemischte Brüche

Bei gemischten Brüchen stellt man den ganzzahligen Anteil und den Rest eines Bruches dar. Diese gemischte Darstellung kann man wieder in die Bruchdarstellung überführen.

Beispiel 36:

$$3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

Im Anschluss kann man dann die gewohnten Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nach obigen Gesetzmäßigkeiten durchführen.

Hinweis:

Dabei ist zu beachten, dass nicht die gemischte Bruchdarstellung zum Rechnen herangezogen wird, denn dabei können Rechenfehler entstehen.

Beispiel 37:

$$3\frac{1}{2}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Diese Vorgehensweise ist falsch und führt natürlich auch zum falschen Ergebnis.

Umwandlung von Brüchen in die Dezimalschreibweise

Man kann einen Bruch natürlich auch in eine Dezimalschreibweise umformen. Dabei sollte man immer beachten, ob durch die Umwandlung ein Genauigkeitsverlust entsteht. Ist dies der Fall, sollte dies nicht durchgeführt werden.

Hinweis:

Hier ist zu behandeln, wie Brüche in den Taschenrechner einzugeben sind. Dabei ist auf das Modell zu achten.

Beispiel 38:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33$$

Nicht ratsam diesen Bruch in Dezimalschreibweise umzuwandeln.

$$\frac{5}{4} = 1{,}25$$

Dieser Bruch kann ohne Bedenken in eine Dezimalschreibweise umgewandelt werden.

Potenzen

Bezeichnungen

$a^n = c$

a: Basis

n: Hochzahl, Exponent

c: Potenzwert

Die Potenzgesetze ermöglichen uns, Potenzen mit ähnlichen Eigenschaften zusammenzufassen, zum Beispiel das Zusammenfassen von Potenzen mit der gleichen Basis oder Potenzen mit dem gleichen Exponenten.

Addition und Subtraktion von Potenzen

$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$

Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten können addiert oder subtrahiert werden.

Beispiel 39:

$3x^3 + 4x^3 - 5x^3 = 2x^3$

Potenzgesetze

$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \;\; (\text{n mal a})$

Eine Potenz ist eine Multiplikation gleicher Faktoren (Basis), bei der der Exponent die Anzahl der Faktoren angibt.

Beispiel 40:

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$

Dieses auch in den Taschenrechner eingeben.

Wichtig ist der Hinweis, dass es zu folgender Rechnung keine Gesetzmäßigkeit gibt, und damit die Rechnung falsch ist. Dieses wird sehr häufig verwechselt.

$3 + 3 + 3 \neq 3^3$

$a^0 = 1$

Beispiel 41:

$3^0 = 1$

Beispiel 42:

$0^0 = \text{nicht definiert}$

$a^1 = a$

Beispiel 43:

$3^1 = 3$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert indem man die Hochzahlen addiert und die Basis beibehält.

Einfache Beispiele

Beispiel 44:

$$3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die Berechnung

$$3^3 \cdot 3^2 = 3^{3\cdot 2} = 3^6$$

zu einem falschen Ergebnis führt.

Bemerkung:

$$(-a)^n = \left\{\begin{matrix} a^n \ \text{ falls n gerade} & \rightarrow & (-3)^2 = 3^2 = 9 \\ -a^n \ \text{ falls n ungerade} & \rightarrow & (-3)^3 = -3^3 = -27 \end{matrix}\right\}$$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert indem man die Hochzahlen subtrahiert und die Basis beibehält.

Beispiel 45:

$$\frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3} = 3^5$$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\cdot n}$$

Beispiel 46:

$$(4^2)^3 = 4^6$$

Division von Potenzen mit ungleicher Basis aber gleichem Exponenten

Potenzen mit ungleicher Basis aber gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad b \neq 0$$

Beispiel 47:

$$\frac{30^3}{10^3} = \left(\frac{30}{10}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Multiplikation von Potenzen mit ungleicher Basis aber gleichem Exponenten

Potenzen mit ungleicher Basis aber dem gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.

$$\mathrm{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$$

Beispiel 48:

$$12^3 \cdot 3^3 = (12 \cdot 3)^3$$

Wechseln der Potenz zwischen Zähler und Nenner

$$\mathrm{\frac{1}{a^m} = a^{-m}}$$

Setzt man eine Potenz vom Zähler in den Nenner oder umgekehrt, so ändert sich das Vorzeichen des Exponenten.

Beispiel 49:

$$\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

Wurzeln

Grundlagen

Das Wurzelziehen (oder Radizieren) ist die Umkehrung des Potenzierens. Daher sind die Wurzelgesetze den Potenzgesetzen sehr ähnlich. Die Wurzel aus einer positiven Zahl ergibt wieder eine positive Zahl. Aus einer negativen Zahl lassen sich keine Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten ziehen. Wurzeln lassen sich nach bestimmten Regeln multiplizieren, dividieren, radizieren und potenzieren. Im Folgenden werden wir uns anhand von Beispielen mit den Wurzelgesetzen vertraut machen.

Bezeichnungen

Das Wurzelziehen (in der Mathematik auch das Radizieren genannt) ist die Umkehrung der Potenzrechnung. Wenn $a^n = x$ ist, so ergibt wieder die n-te Wurzel aus x wieder a.

Man hat sich auf folgende Schreibweise verständigt:

$$\sqrt[n]{x} = a$$

n: Wurzelexponent

x: Radikand oder Wurzelbasis

a: Wurzelwert

Bei der ersten Wurzel wird einfach das Wurzelzeichen weggelassen.

$$\sqrt[1]{x} = x$$

Die zweite Wurzel wird als Quadratwurzel oder einfach nur als die Wurzel bezeichnet und der Wurzelexponent weggelassen.

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

Bei allen anderen Wurzeln muss der Wurzelexponent hingeschrieben werden, um eine eindeutige Berechnung zu ermöglichen.

Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten

Potenzen mit einer geraden Hochzahl (Exponent) sind immer auch positive Zahlen. Aus diesem Grund lassen sich bei geraden Wurzelexponenten n die n-te Wurzel nur aus positiven Zahlen ($x \geq 0$) ziehen. Das Ergebnis ist dann wieder eine positive Zahl.

Beispiel 50:

$\sqrt[4]{16} = 2$

$2^4 = 16$

Es ist aber auch $(-2)^4 = 16.$

Nach der Definition der Wurzel wurde festgelegt, dass bei einem positiven Radikant x das Ergebnis der n-ten Wurzel aus x eine nichtnegative Zahl sein muss.

Wurzeln mit ungeradem Wurzelexponenten

Bei einem ungeraden Wurzelexponenten kann man die n-te Wurzel sowohl aus einer positiven als auch aus einer negativen Zahl ziehen.

Im Fall eines positiven Radikanden ist das Ergebnis wieder eine positive Zahl.

Im Fall eines negativen Radikanden ist das Ergebnis eine negative Zahl.

Beispiel 51:

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

In diesem Beispiel handelt es sich um Kubikwurzeln, weil der Wurzelexponent n=3 ist.

Quadratwurzeln

Wenn der Wurzelexponent n=2 ist, so spricht man von sogenannten Quadratwurzeln. Dabei wird in der Schreibweise die zwei im Allgemeinen weggelassen.

Als Sprechweise hat sich für die Quadratwurzel auch der einfachere Begriff "Wurzel" eingebürgert.

$\sqrt[2]{\mathrm{x}} = \sqrt{\mathrm{x}}$

Aus Quadratzahlen lassen sich sehr einfach die Wurzeln ziehen. Als der Ergebnis dieser Rechnung erhalten wir eine natürliche Zahl.

Wenn wir aber die Wurzel aus einer nicht quadratischen Zahl ziehen, so erhalten wir als Ergebnis dieser Rechnung eine irrationale Zahl, die nicht als Bruch geschrieben werden kann.

Sollte die Wurzel keine Quadratzahl sein, so sollte die Wurzel nicht ausgerechnet werden. Auch kann sie im Ergebnis stehen bleiben.

Umrechnung von Wurzeln in Potenzen

Für das Umrechnen von Wurzeln in Potenzen oder umgekehrt gelten folgende Regeln:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{a}}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Beispiel 52:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$$

$$32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$$

Addition/Subtraktion von Wurzeln

Die Addition von Wurzel ist zwar grundsätzlich möglich, damit aber diese Rechenoperation durchgeführt werden kann, müssen der Radikand und der Wurzelexponent übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, so kann die Addition nicht durchgeführt werden.

$$u \cdot \sqrt[n]{x} \pm v \cdot \sqrt[n]{x} = (u \pm v) \cdot \sqrt[n]{x}$$

Beispiel 53:

$$6 \cdot \sqrt[4]{3} - 2 \cdot \sqrt[4]{3} = (6 - 2) \cdot \sqrt[4]{3} = 4 \cdot \sqrt[4]{3}$$

Multiplizieren von Wurzeln

Die Wurzeln haben alle den gleichen Radikanden, aber unterschiedliche Wurzelexponenten. Es muss folgende Regel angewendet werden:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = \sqrt[n \cdot m]{x^{m+n}}$$

Dies erfolgt ausfolgender Herleitung:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{m+n}}$$

Beispiel 54:

$$\sqrt{64} \cdot \sqrt[3]{64} = \sqrt[2 \cdot 3]{64^{2+3}} = \sqrt[6]{64^5} = 32$$

Die Wurzeln haben den gleichen Wurzelexponenten, aber unterschiedliche Radikanden. Man kann die Radikanden multiplizieren und aus dem Produkt die Wurzel ziehen:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

Analog gilt wie oben die folgende Herleitung:

$$x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

Beispiel 55:

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$$

Umgekehrt kann man auch die Wurzel ziehen, indem die Radikanden in einzelne Faktoren zerlegt und aus den einzelnen Faktoren die Wurzel zieht.

$$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

Beispiel 56:

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

Da die dritte Wurzel aus 3 eine irrationale Zahl ergibt, lässt man die 3 unter der Wurzel stehen und rechnet sie auf keinen Fall aus. (Teilweises radizieren)

Dividieren von Wurzeln

Die Wurzeln haben den gleichen Radikanden, aber unterschiedliche Wurzelexponenten. Es muss folgende Regel angewendet werden:

$$\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{m-n}}$$

Bei Potenzen mit gleicher Grundzahl gilt natürlich analog das gleiche:

$$\frac{x^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} = x^{\frac{n-m}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{x^{n-m}}$$

Beispiel 57:

$$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[8]{81^2} = \sqrt[8]{6.561} = 3$$

Die Wurzeln haben den gleichen Wurzelexponenten, aber unterschiedliche Radikanden. Dann können die Radikanden dividiert werden und aus dem Ergebnis die Wurzel gezogen werden.

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

Das gleiche gilt für Potenzen mit unterschiedlicher Basis:

$$\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{m}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\frac{x}{y}}$$

Beispiel 58:

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Umgekehrt kann die Wurzel aus einem Bruch ziehen, im dem man sie einzeln aus Zähler und Nenner zieht.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$$

Sonderfall beim Dividieren

Wenn der Radikand im Zähler gleich 1 ist, ergibt sich natürlich auch für seinen Wurzelwert gleich1 und damit vereinfacht sich der Bruch folgendermaßen:

$$\sqrt[m]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

Beispiel 59:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

Radizieren einer Wurzel

Man kann die Wurzel aus einem Wurzelterm ziehen, indem man die Wurzelexponenten multipliziert. Das Produkt ergibt den Wurzelexponenten des Radikanden zu x:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

Das gleiche gilt natürlich auch hier für die Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

Beispiel 60:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{32768}} = \sqrt[15]{32768} = 2$$

Potenzieren einer Wurzel

Ein Wurzelterm wird potenziert, indem der Radikand potenziert wird. Es wird also die Wurzel aus der Potenz des Radikanden gezogen:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Das gleiche gilt natürlich auch hier für die Potenzen:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Beispiel 61:

$$\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$$

Kürzen von Wurzeln

Exponenten und Wurzelexponenten lassen sich gegeneinander kürzen.

$$\sqrt[r\cdot n]{x^{r\cdot m}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Beispiel 62:

$$\sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$$

Binomische Formeln

Wir wissen ja wie man Klammern auflösen kann. Hierbei gibt es drei ganz wichtige Sonderfälle, die sehr häufig auftreten. Die Auflösung der Klammern kann recht einfach durch Anwendung der Binomischen Formeln erreicht werden. Diese Binomischen Formeln wollen wir in dem Folgenden uns anschauen.

Binomische Formel

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dabei ist nur die linke und die rechte Seite des Ausdrucks relevant, den man sich merken sollte. Die untere Darstellung nennt man auch die 1. Binomische Formel.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beispiel 63:

$$(2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Auch hier ist wieder die nur die Linke und die rechte Seite relevant. Die untere Darstellung nennt man auch die 2. Binomische Formel.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Beispiel 64:

$$(2x-3)^2 = (2x-3)(2x-3) = 4x^2 - 6x - 6x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$$

3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Auch hier ist wieder die nur die Linke und die rechte Seite relevant. Die untere Darstellung nennt man auch die 3. Binomische Formel.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Beispiel 65:

$$(2x+3)(2x-3) = 4x^2 - 6x + 6x - 9 = 4x^2 - 9$$

Pascalsches Dreieck

Definition 20:

Hat man ein Binom der Form $(a+b)^n$ so kann man dies ganz einfach berechnen.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \ldots \end{array}$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Beispiel 66:

Berechnen Sie $(2+5)^3$.

Beispiel 67:

Entwickeln Sie $(x-4)^4$.

Logarithmen

Einführung

Als erstes muss geklärt werden, für was ein Logarithmus gebraucht wird. Dazu sollte folgendes einführendes Beispiel gemacht werden.

Beispiel 68:

$2^x = 8$

Wie an diesem Beispiel erkennt, ist es bei einfachen Zahlen leicht die Lösung zu finden. Nimmt man aber ein Beispiel, bei dem keine gerade Zahl als Lösung herauskommt, so haben wir jetzt die Schwierigkeit die Lösung zu finden.

$7^x = 11$

Dies bedeutet folgendes:

Ein Logarithmus wird immer dann benötigt, wenn die Unbekannte in der Potenz steht.

Solche oben dargestellten Gleichungen kann man mittels den Logarithmen umformen.

Umformungsregel:

$\mathrm{a^x = b} \quad \rightarrow \quad \mathrm{x = \log_a b}$

Bezeichnungen $(\mathbf{a^x = b})$:

x: Exponent

a: Basis

b: Potenzwert

Bezeichnungen $(\mathbf{x = \log_a b})$:

a: Logarithmusbasis

b: Numerus

x: Logarithms

Daraus ergibt sich folgende Aussage:

Der Logarithmus von b zur Basis a ist der Exponent x, mit dem man eine Basis a potenzieren muss, um den Potenzwert (Numerus) b zu erhalten.

Dabei gelten folgende Einschränkungen:

$\mathrm{a, b > 0 \ \wedge b \neq 1}$

Beispiel 69:

$3^x = 9 \quad \rightarrow \quad \log_3 9 = x$

Logarithmengesetze

Logarithmieren und Potenzieren zur gleichen Basis b heben sich also gegenseitig auf.

Beispiel 70:

$a^x = b \quad \rightarrow \quad x = \log_a b$

$a^{\log_a b} = b$

Als Zahlenbeispiel:

$2^{\log_2 100} = 100$

Basiswechselsatz

Wenn ein Logarithmus zu einer bestimmten Basis nicht bekannt ist, oder nicht berechnet werden kann, so kann er mit dem Basiswechselsatz in den Quotienten zweier Logarithmen zur Basis c umgewandelt werden.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dieser Basiswechselsatz wird hauptsächlich zum Berechnen von Logarithmen mit dem Taschenrechner benutzt. In vielen Taschenrechnern hat es nur bestimmte Logarithmen.

Bezeichnungen für Logarithmen

Dekadischer oder 10er-Logarithmus:

Einen Logarithmus zur Basis 10 wir als der dekadische Logarithmus bezeichnet.

Es wird dazu folgende Schreibweise verwendet:

$\log_{10}(b) = \lg(b)$

Natürlicher Logarithmus:

Einen Logarithmus zur Basis e wird als natürlicher Logarithmus bezeichnet.

Es wird dazu folgende Schreibweise verwendet:

$\log_e(b) = \ln(b)$

Binärer Logarithmus:

Einen Logarithmus zur Basis 2 wird binärer oder dualer Logarithmus genannt.

Es wird dazu folgende Schreibweise verwendet:

$\log_2(b) = \mathrm{lb}(b)$

Achtung:

Auf Taschenrechner wird sehr häufig der dekadische Logarithmus mit log bezeichnet. Hier muss einfach aufgepasst werden.

Beispiel 71:

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner.

$$\log_3 7 = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} = 1{,}7712$$

Logarithmus eines Produkts

Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert.

$$\log_a(u \cdot v) = \log_2(u) + \log_v(v)$$

Beispiel 72:

$$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(4) + \log_2(8) = 2 + 3 = 5$$

Logarithmus eines Quotienten

Ein Quotient wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren des Zählers und des Nenners subtrahiert.

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

Beispiel 73:

$$\log_3\left(\frac{56}{8}\right) = \log_3(56) - \log_3(8) = 3{,}6640 - 1{,}8928 = 1{,}7712$$

Logarithmus einer Potenz

Eine Potenz wird logarithmiert, indem der Exponent mit dem Logarithmus der Basis multipliziert wird.

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$$

Beispiel 74:

$$\log_8(4^2) = 2 \cdot \log_8(4)$$

Logarithmus einer Wurzel

Eine Wurzel wird logarithmiert, indem man den Kehrwert des Wurzelexponenten mit dem Logarithmus des Radikanden multipliziert.

$$\log_a\left(\sqrt[n]{b}\right) = \log_a\left(b^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$$

Beispiel 75:

$$\log_4 \sqrt[3]{27} = \log_4(27^{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4} \cdot \log_4(27)$$

Kehrwertsätze des Logarithmus

Man kann einen Logarithmus berechnen, indem man die Basis mit dem Numerus vertauscht und dann den Kehrwert bildet.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Beispiel 76:

$$\log_7(5) = \frac{1}{\log_5(7)}$$

Sonderfälle und besondere Logarithmen

Hier einige Sonderfälle, wobei es nützlich sein kann, zu wissen was für ein Ergebnis herauskommt. Damit kann man Rechenwege verkürzen.

$$\log_a a = \lg(10) = \ln(e) = \mathrm{lb}(2) = 1$$

$$\log_a 1 = \lg(1) = \ln(1) = \mathrm{lb}(1) = 0$$

$$\log_a(a^n) = \lg(10^n) = \ln(e^n) = \mathrm{lb}(2^n) = n$$

$$a^{\log_a b} = 10^{\lg(b)} = e^{\ln(b)} = 2^{\mathrm{lb}(b)} = b$$

Für das Rechnen mit Logarithmen sollte der ungefähre Verlauf von Logarithmen bekannt sein. Deshalb hier der allgemeine Verlauf von Logarithmen am Beispiel des natürlichen Logarithmus.

$\ln(-2) = \text{kann nicht berechnet werden}$

$\ln(0) = \text{kann nicht berechnet werden}$

$\ln(0{,}5) = \text{negativ}$

$\ln(1) = 0$

$\ln(2) = \text{positiv}$

Wenn der Numerus des Logarithmus kleiner oder gleich Null ist, so ist der Logarithmus nicht definiert.

Wenn der Numerus des Logarithmus zwischen Null und Eins liegt, ist der Logarithmus immer negativ.

Wenn der Numerus des Logarithmus gleich eins ist, ist der Logarithmus Null.

Wenn der Numerus des Logarithmus größer als Eins ist, ist der Logarithmus immer positiv.

Häufig gemachte Fehler

Vorher wurde folgendes Logarithmusgesetz behandelt.

$\log_a(u \cdot v) = \log_2(u) + \log_v(v)$

Dieses wird sehr häufig mit folgendem verwechselt.

$\log_a(u + v) = \log_2(u) \cdot \log_v(v)$

Hierbei handelt es sich aber um keine gültige Gesetzmäßigkeit.

Etwas Ähnliches gilt für folgende Gesetzmäßigkeit.

$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

Dieses wird sehr häufig mit folgendem verwechselt.

$\log_a(u - v) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(v)}$

Eine weitere Gesetzesmäßigkeit.

$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

Dieses wird sehr häufig mit folgendem verwechselt.

$\log_a^n b = (\log_a(b))^2 \neq \log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

Achtung:

Es gibt zwar ein Logarithmusgesetz für den Logarithmus einer Potenz, aber nicht für die Potenz eines Logarithmus.

Trigonometrie und Winkelgesetze

Bogenmaß

Das Bogenmaß ist ein Winkelmaß. Die dimensionslose Zahl trägt oft den Zusatz Radiant bzw. rad, um die Größe von Grad zu unterscheiden.

Definition 21:

Das Bogenmaß eines Winkels α ist definiert als das Verhältnis der Länge des Kreisbogens b zum Radius r:

$$\alpha = \frac{b}{r}$$

Ist der Kreis ein Einheitskreis mit r=1, dann ist das Bogenmaß gleich der Länge des Kreisbogens b.

Beispiel 77:

	Gradmaß	Bogenmaß
Winkel des Vollkreises	$360°$	2π
Winkel des Halbkreises	$180°$	π
rechter Winkel	$90°$	$\frac{\pi}{2}$

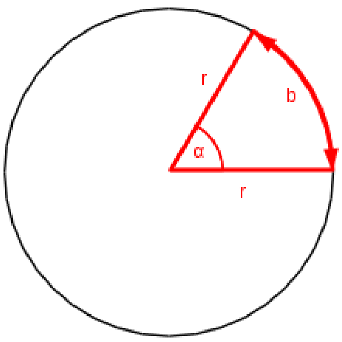
Umrechnung

Die Umrechnung eines Bogenmaßes in Grad erfolgt nach folgender Formel:

$$\alpha° = \mathrm{Grad} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha^{rad}$$

Umgekehrt lässt sich ein Bogenmaß nach der folgenden Formel bestimmen:

$$\alpha^{\mathrm{rad}} = \mathrm{Bogenmaß} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha°$$



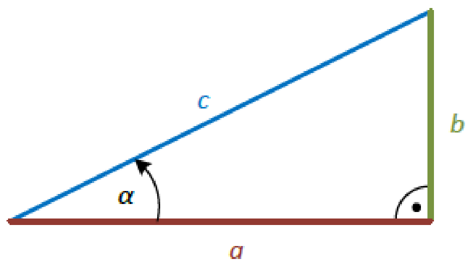
Die Umrechnungsfunktion von Winkel im Gradmaß in das Bogenmaß heißt arc oder arcus (lat. Bogen). Somit ist arc(α) das Bogenmaß des in Grad angegebenen Winkels α.

Die Angaben Bogenminute und Bogensekunde beziehen sich nicht auf das Bogenmaß, sondern sind Untereinheiten von Grad.

In vielen Berechnungen der Physik und der Mathematik ist das Bogenmaß das zweckmäßigste Winkelmaß. Für den Alltagsgebrauch ist es unpraktisch, da Werte im Bogenmaß recht unanschaulich sind (z. B. hat ein Winkel mit dem Bogenmaß 1 rad ein Gradmaß von ca. 57°). Daher wird in der Alltagspraxis stattdessen meist das Gradmaß verwendet.

Winkelbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck

Sinus, Kosinus und Tangens sind Verhältnisse zweier Dreiecksseiten in Abhängigkeit eines Winkels.



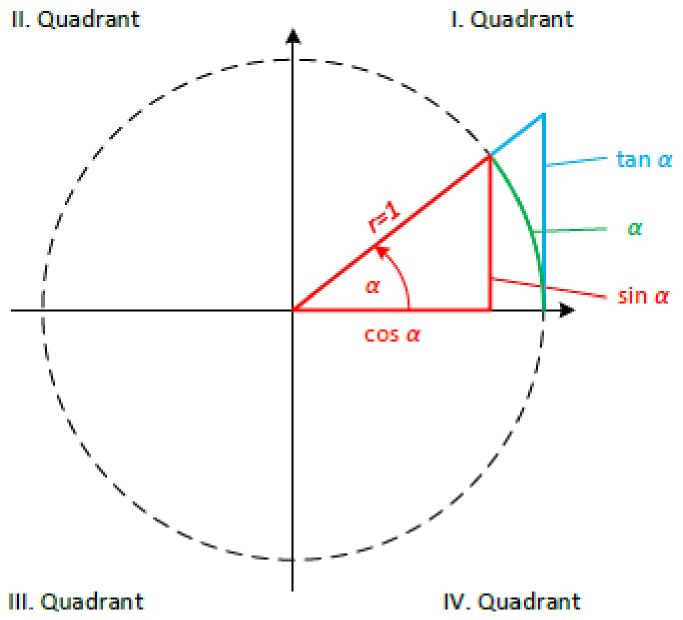
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

$a =$ Ankathete, $b =$ Gegenkathete,
$c =$ Hypotenuse

Winkelbeziehungen am Einheitskreis

Betrachtet wird ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius r = 1.



Bemerkung 4:

Der Einheitskreis wird in 4 Quadranten mit je $90°$ eingeteilt

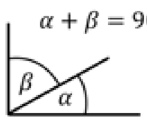
Die Winkel werden entgegen dem Uhrzeigersinn aufgetragen, entsprechend der mathematischen Vorzeichendefinition

Die Funktionswerte von $\sin\ \alpha$ und $\cos\ \alpha$ liegen zwischen -1 und +1

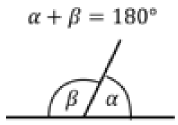
Die Funktionswerte von $\tan\ \alpha$ laufen von $-\infty$ bis $+\infty$

Winkelgesetze

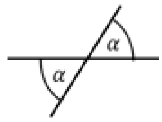
Komplementärwinkel



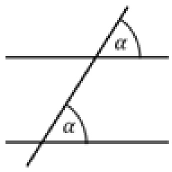
Ergänzungswinkel



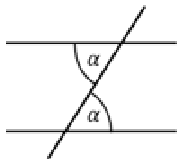
Scheitelwinkel



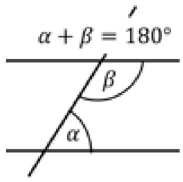
Stufenwinkel



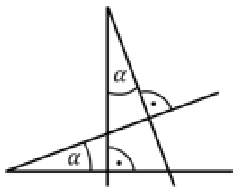
Wechselwinkel



Nachbarwinkel

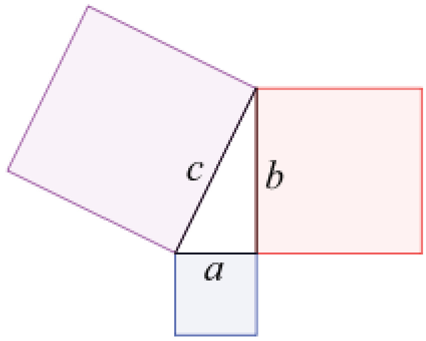


Paarweise rechtwinklige Schenkel



Trigonometrische Zusammenhänge

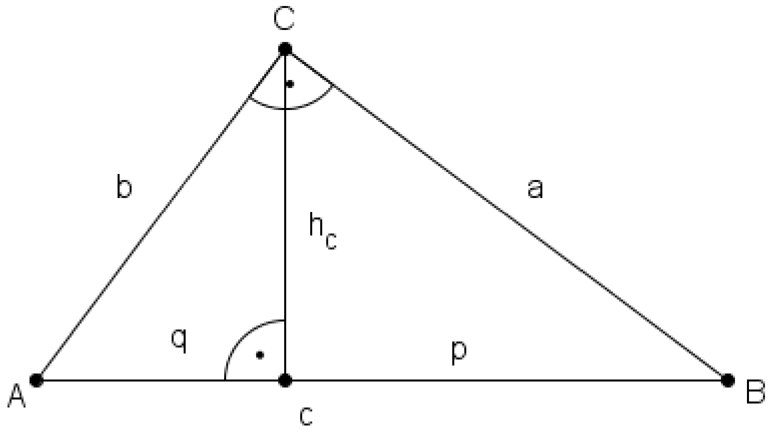
Satz des Pythagoras



In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b sowie der Hypotenuse c ist die Summe der Kathetenquadrate a² und b² gleich dem Hypotenusenquadrat c².

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Kathetensatz des Euklid



Definition 22:

$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$

Beispiel 78:

Bei der Konstruktion eines Gestells sind die Längen c und p bekannt. Die Längen a und b müssen nun noch bestimmt werden.

Gegeben: c = 5cm ; p = 2cm

Gesucht: a; b

Lösung:

$q = c - p$

$q = 5cm - 2cm$

$q = 3cm$

$a^2 = c \cdot p$

$a^2 = 5cm \cdot 2cm$

$a^2 = 10cm^2$

$a = 3{,}16cm$

$b^2 = c \cdot q$

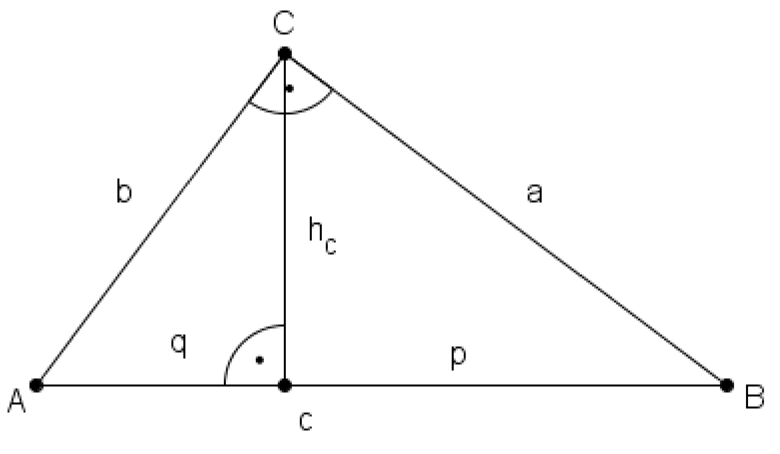
$b^2 = 5cm \cdot 3cm$

$b^2 = 15cm^2$

$b = 3{,}87cm$

Höhensatz des Euklid

Der Höhensatz des Euklid lehnt sich stark an den Kathetensatz an.



Definition 23:

$$h^2 = p \cdot q$$

Beispiel 79:

Die Länge p sei 2cm, die Länge q sei 3cm. Die Höhe soll bestimmt werden:

p = 2cm

q = 3cm

Lösung:

$h^2 = p \cdot q$

$h^2 = 2cm \cdot 3cm$

$h^2 = 6cm^2$ // Wurzel ziehen

h = 2,45 cm

Sinussatz

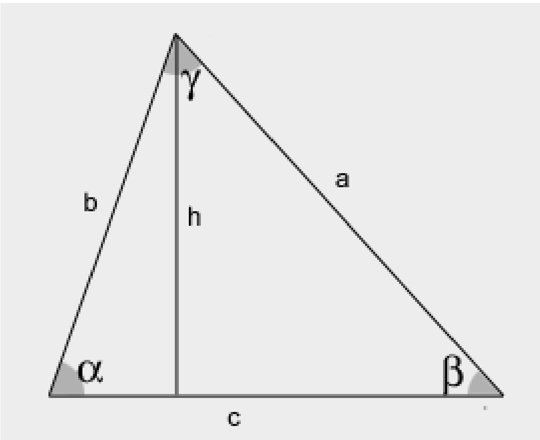
Der Sinussatz und der Kosinussatz sind zwei Erweiterungen der trigonometrischen Funktionen, die an sich ja nur in rechtwinkligen Dreiecken definiert sind, auf beliebige Dreiecke.

Der "Trick" dabei ist in beiden Fällen, das Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke zu "teilen". (Die Höhe steht senkrecht auf der Seite.)

Definition 24:

Der Sinussatz beschreibt das Verhältnis der Seitenlänge zu den gegenüberliegenden Winkeln im Dreieck.

Der Sinussatz kann dazu verwendet werden, um aus der Angabe von zwei Winkeln und einer Seite das Dreieck zu berechnen.



Definition 25:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Kosinussatz

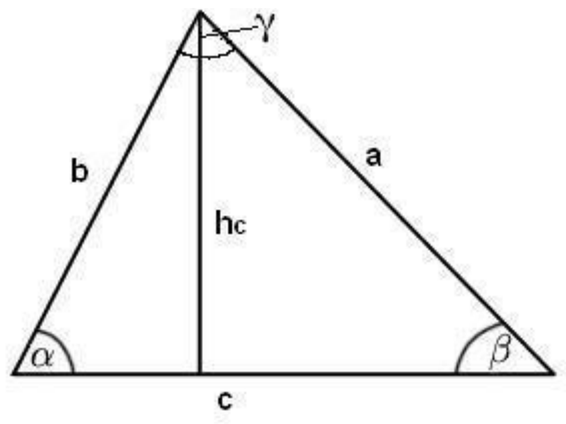
Der Kosinussatz wird auch als trigonometrischer Pythagoras bezeichnet. Das rührt daher, dass mit ihm wie beim Satz des Pythagoras eine fehlende Dreieckseite berechnet werden kann, allerdings im Gegensatz zum Pythagoras, der ja nur für rechtwinklige Dreiecke gilt, in jedem beliebigen Dreieck.

Man kann ja ein Dreieck eindeutig konstruieren, wenn man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben hat (Kongruenzsatz SWS). Also zum Beispiel die Seiten b und c und den Winkel α in diesem Dreieck:

Definition 26:

In der Trigonometrie drückt der Kosinussatz eine Beziehung zwischen den drei Seiten und einem Winkel im Dreieck aus.

Die Formeln zum Kosinussatz beziehen sich auf die folgende Grafik:



Definition 27:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Beispiel 80:

Gegeben sei a = 11, b = 10 und c = 13. Berechnet werden soll der Winkel α.

Lösung:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{11^2 - 10^2 - 13^2}{-2 \cdot 10 \cdot 13}$$

$$\cos(\alpha) = 0{,}57$$

$$\alpha = 55{,}25°$$

Gleichungen

Grundlegende Definition

Definition 28:

Die Definitionsmenge D einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen aus der Grundmenge, für die alle

in der Gleichung vorkommenden Ausdrücke definiert sind.

Die Lösungsmenge L einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen, die die Gleichung erfüllen, d.h. die

Zahlen, für die die Aussage der Gleichung wahr ist.

Lineare, quadratische und kubische Gleichungen

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht eine Gleichung. Enthält die Gleichung die Variable x nur in der 1. Potenz, so spricht man von einer linearen Gleichung.

Was muss getan werden um eine lineare Gleichung zu lösen?

Um lineare Gleichungen zu lösen, führen wir systematisch arithmetische Operationen auf beiden Seiten der Gleichung aus.

Hier einige Gleichungstypen, die in Aufgaben häufig vorkommen.

- Einfache lineare Gleichung mit der Variablen x auf der linken Seite.
- Einfache lineare Gleichung, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.
- Lineare Gleichung mit der Lösungsvariablen x und den Formvariablen m, n und a.
- Einfache lineare Gleichung mit Brüchen und der Variablen auf der linken Seite.
- Lineare Gleichung, mit Brüchen, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.
- Lineare Gleichung mit Klammerausdrücken.
- Lineare Gleichung mit eckiger und runder Klammer (Zweifachklammerung).
- Lineare Gleichung mit geschweifter, eckiger und runder Klammer (Dreifachklammerung).

Ein paar wichtige Begriffe, die im Zusammenhang von linearen Gleichungen oft auftauchen und unbedingt erwähnt werden müssen.

Lösungsmenge

Die Lösungsmenge ($\mathbb{L}$) enthält alle Werte, die für die Variable x eingesetzt werden können, damit für die Gleichung eine richtige Lösung entsteht. Bei linearen Gleichungen die eine Lösung besitzen ist dies genau ein Wert.

Grundmenge

Alle Werte die für eine mögliche Lösung zur Verfügung stehen ($\mathbb{G}$). Diese Zahlen kommen meistens aus den reellen Zahlen ($\mathbb{R}$).

Wenn eine Gleichung gelöst wird, so bedeutet dies, dass eine Lösungsmenge bestimmt wird.

Definitionsmenge

Die Definitionsmenge ($\mathbb{D}$) ist die Menge aller Zahlen, die als mögliche Lösung in Betracht kommen.

Eine Lösungsmenge wird bestimmt durch Äquivalenzumformungen der Gleichung. Dabei ist zu beachten, dass die Umformungen die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändert.

Wichtige Einschränkungen in der Definitionsmenge.

- Die Variable steht im Nenner (teilen durch Null).
- Der Radikand einer Wurzel muss größer oder gleich Null sein.
- Der Numerus eines Logarithmus muss immer größer als Null sein.

Äquivalenzumformungen

Eine Gleichung besteht aus zwei Termen mit einem Gleichheitszeichen dazwischen, also ist von der Form Term1 = Term2.

Aber nur wenn die zwei Terme wertgleich sind, stimmt das für alle Werte. Für gewöhnlich sind die zwei Terme aber nicht wertgleich, sodass wir die Lösungsmenge bestimmen müssen, also die Zahlen suchen müssen, die man für die Variablen einsetzen kann, sodass wir dadurch eine wahre Aussage erhalten.

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung findet man durch Äquivalenzumformung, das ist eine Umformung, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändert.

Folgendes ist bei Äquivalenzumformungen zu beachten, damit sich die Lösungsmenge nicht verändert:

- Zusammenfassung gleichartiger Glieder, die auf derselben Seite einer Gleichung stehen
- Auf beiden Seiten der Gleichung ist die gleiche Zahl oder der gleiche Term zu addieren oder subtrahieren.
- Beide Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl, mit demselben Term zu multiplizieren oder durch die gleiche Zahl zu dividieren.
- Vertauschen von rechter und linker Seite der Gleichung

Keine Äquivalenzumformungen sind:

- Multiplikation mit Null
- Division durch Null
- Quadrieren
- Wurzel ziehen
- Logarithmieren

Die Schwierigkeit in der Lösung von linearen Gleichungen liegt also nicht in der direkten Lösung, sondern in den Vereinfachungen, die notwendig sind, um die Gleichung in die Standardform zu bringen um das Ergebnis zu erhalten.

Dies soll in den nächsten Übungen den Studenten näher gebracht werden. Dabei ist auf die bereits erarbeiteten Grundlagen zurückzugreifen.

Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung ist eine mathematische Bestimmungsgleichung, in der ausschließlich Linearkombinationen der Unbekannten vorkommen.

Beispiel 81:

Bestimmung die Definitionsmenge.

Lösen der folgenden Gleichung.

Bestimmung der Lösungsmenge.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$2x - 3 = 5x + 7 \quad | - 2x$

$-3 = 3x + 7 \quad | - 7$

$-10 = 3x \quad |: 3$

$-\frac{10}{3} = x$

$x = -\frac{10}{3}$

$\mathbb{L} = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$

Beispiel 82:

Bestimmung die Definitionsmenge.

Lösen der folgenden Gleichung.

Bestimmung der Lösungsmenge.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$ax + 7 = 3x - b \quad | - 3x$

$ax - 3x + 7 = -b \quad | - 7$

$ax - 3x = -b - 7$

$x(a - 3) = -(b + 7) \quad |: (a - 3)$

Hier muss beachtet werden:, dass a nicht 3 sein darf, da wir sonst durch Null teilen würden. Wir fügen diese Bedingung der Definitionsmenge hinzu.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $a \neq 3$

$$x = -\frac{(b + 7)}{(a - 3)}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{(b + 7)}{(a - 3)}\right\}$$

Beispiel 83:

Bestimmung die Definitionsmenge.

Lösen der folgenden Gleichung.

Bestimmung der Lösungsmenge.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$(x - 3)^2 + 3x^2 = (2x + 7)^2$

$x^2 - 6x + 9 + 3x^2 = 4x^2 + 28x + 49$

$4x^2 - 6x + 9 = 4x^2 + 28x + 49 \quad | - 4x^2$

$-6x + 9 = 28x + 49 \quad | - 28x$

$-34x + 9 = 49 \quad | - 9$

$-34x = 40 \quad |: (-34)$

$$x = -\frac{40}{34} = -\frac{20}{17}$$

Quadratische Gleichungen

In einer quadratischen Gleichung kann neben dem Vielfachen dieser Variablen auch das Quadrat dieser Variablen vorkommen, nennt man quadratische Gleichung.

Die Definitionsmenge ist bei quadratischen Gleichungen nicht eingeschränkt. Sollte aber immer angegeben werden.

Bei quadratischen Gleichungen gibt es entweder keine, eine oder zwei Lösungen. Als weitere aber seltene Variante gibt es auch noch unendlich viele Lösungen, dabei müssen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleichwertige Terme stehen.

Es sollte das Ergebnis immer mit einer Lösungsmenge angegeben werden. Man sollte sich mit diesem Schritt immer vergewissern, dass keine Lösungen angegeben werden, die in der Definitionsmenge ausgeschlossen wurden. Dies passiert hauptsächlich bei nicht äquivalenten Umformungen.

Gleichungen in faktorisierter Darstellung (Faktor mal Faktor=0)

Diese Gleichungen liegen in folgender Form vor:

$$(\mathrm{ax}+\mathrm{b})(\mathrm{cx}+\mathrm{d})=0 \quad \mathrm{mit}\ \mathrm{a},\mathrm{b}\neq 0$$

Beispiel 84:

$$(3\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+4)=0)$$

Diese Art von quadratischer Gleichung ist am einfachsten zu lösen.

Bei der Lösung muss man nur wissen, dass ein Produkt genau dann Null ist, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. (Faktordarstellung)

Deshalb setzt dabei jeden der Faktoren auf null und erhält damit die Lösungen.

Für obiges Beispiel ergibt sich dann:

$$(3\mathrm{x}-3)=0$$

$$\mathrm{x}_1=1$$

$$(\mathrm{x}+4)=0$$

$$\mathrm{x}_2=-\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{L}=\left\{-\frac{1}{4};1\right\}$$

Eine Sonderform dieser Gleichungsart ist:

Es fehlt das absolute Glied. Diese Art wird durch ausklammern von x in die Faktordarstellung gebracht. Allgemeine Form:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

Beispiel 85:

$2x^2 - 4x = x(2x - 4) = 0$

$x_1 = 0$

$2x - 4 = 0$

$x_2 = 2$

$\mathbb{L} = \{0; 2\}$

Reinquadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$ax^2 + b = 0$

Bei diesem Gleichungstyp tauchen keine Vielfachen der Variablen auf.

Die beiden Seiten der Gleichung müssen so umgeformt werden, dass auf der einen Seite die Vielfachen von x^2 stehen und auf der anderen Seite die Zahlenwerte.

In der Mathematik bezeichnet man dieses auch als das „Zusammenfassen gleicher Summanden".

Beispiel 86:

$4x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$

$4x^2 = 9 \quad |: 4$

$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$x = \pm\frac{3}{2}$

$\mathbb{L} = \left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$

Allgemeine quadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$ax^2 + bx + c = 0$

Löst man entweder mit der Mitternachtsformel oder der p-q-Formel.

Hier muss die quadratische Gleichung natürlich in der obigen allgemeinen Form vorliegen.

Mitternachtsformel:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Beispiel 87:

$x(5x + 2) = 2 - x$

$5x^2 + 2x = 2 - x \quad | + x$

$5x^2 + 3x = 2 \quad | - 2$

$5x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{10} = \frac{-3 \pm 7}{10}$$

$x_1 = -1$

$x_2 = \frac{2}{5}$

$\mathbb{L} = \left\{-1; \frac{2}{5}\right\}$

Beachten:

- Der Ausdruck unter der Wurzel heißt Determinante.
- Ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ, so gibt es keine Lösung.
- Wird der Ausdruck unter der Wurzel Null, es ergibt sich nur eine Lösung.
- Ist der Ausdruck unter der Wurzel größer als Null, so erhält man immer zwei Lösungen.

Normierte Quadratische Gleichungen

Als weitere Möglichkeit eine quadratische Gleichung zu lösen, hat man mit der p-q-Formel.

Allgemeine Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

Dabei ist zu beachten, dass der Faktor vor dem x^2 immer eins betragen muss. Ist dies nicht der Fall, muss diese Gleichung durch den Faktor geteilt werden. Diesen Vorgang nennt man auch normieren.

Dann kann die Gleichung mit folgender Formel gelöst werden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel 88:

Nehmen wir das Beispiel von oben.

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \quad |:5$$

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{2}{5}} = -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{40}{100}}$$

$$= -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{49}{100}} = -\frac{3}{10} \pm \frac{7}{10}$$

$$x_1 = -\frac{3}{10} - \frac{7}{10} = -1$$

$$x_2 = -\frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-1; \frac{2}{5}\right\}$$

Biquadratische Gleichungen

Unter biquadratischen Gleichungen versteht man Gleichungen, die nur die vierte und die zweite Potenz der unbekannten Größe.

Die Lösung der biquadratischen Gleichung erfolgt über eine Substitution.

Nach der Substitution sollte eine quadratische Gleichung entstehen, die man dann mit der Mitternachtsformel lösen kann.

Im Anschluss muss noch rücksubstitutiert werden, um die Lösungen zu erhalten.

Beispiel 89:

Folgende biquadratische Gleichung soll gelöst werden.

$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Bei einer biquadratischen Gleichung führt man als erstes eine Substitution durch.

Substitution:

$u = x^2$

Damit ergibt sich folgende neue Gleichung.

$u^2 + 2u - 3 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$u_1 = -3$

$u_2 = 1$

Rücksubstitution:

$u = x^2$

$-3 = x^2$

Keine Lösung

$1 = x^2$

$x_{1,2} = \pm 1$

$\mathbb{L} = \{\pm 1\}$

Eine biquadratische Gleichung wird nachfolgenden Schritten gelöst:

Führen Sie eine geeignete Substitution ein, damit die Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführt werden kann.

Lösen Sie die so entstandene Gleichung nach der eingeführten Substitution auf.

Lösen Sie durch die Rücksubstitution die Gleichung nach der ursprünglichen Gleichung auf.

Schreiben Sie die Lösungsmenge an.

Kubische Gleichungen

Polynomgleichungen dritten Grades werden auch als kubische Gleichungen bezeichnet und haben folgende allgemeine Form:

$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ (a_0 wird auch als Absolutglied bezeichnet).

Kubische Gleichungen ohne Absolutglied

Bei einem fehlenden Absolutglied kann ein x ausgeklammert werden. Damit erhalten wir eine Faktordarstellung. Eine Lösung ist dabei Null.

Die restlichen Lösungen können durch den anderen Faktor ermittelt werden.

Dieser Faktor entspricht einer quadratischen Gleichung und kann mit der Mitternachts-formel gelöst werden.

Beispiel 90:

$7x^3 - 7x^2 - 84x = 0$

$x(7x^2 - 7x - 84) = 0$

Erste Lösung:

$x_1 = 0$

Weitere Lösungen:

$7x^2 - 7x - 84 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-84)}}{2 \cdot 7} = \frac{7 \pm 49}{14}$$

$$x_2 = \frac{7 + 49}{14} = \frac{56}{14} = 4$$

$$x_3 = \frac{7 - 49}{14} = -\frac{42}{14} = -3$$

$\mathbb{L} = \{0; -3; 4\}$

Kubische Gleichungen mit Absolutglied

Hier ist es nicht möglich die Gleichung in eine Faktordarstellung zu bringen.

Es muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

Polynomdivision

Die Polynomdivision ist ein Verfahren der Mathematik, um Nullstellen von Polynomen zu berechnen.

Die Berechnungsweise ähnelt der in der Schule erlernten schriftlichen Division.

Vorgehensweise:

Suchen einer ersten gültigen Lösung. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die kubische Gleichung. Ziel des Einsetzens ist eine Lösung zu finden, sozusagen eine Startlösung. Diese Lösung sollte in den Übungsaufgaben immer zwischen -3 und +3 liegen.

Beispiel 91:

Hier soll eine Gegenüberstellung der schriftlichen Division und der Polynomdivision erfolgen.

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

$x = 0 \rightarrow 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 + 6 = 0 \rightarrow 6 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 0 \rightarrow 4 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$

Damit haben wir den Startwert für die Polynomdivision gefunden.

Schriftliche Division:

```
  462:2=231
 -4
 ---
  06
  -6
 ---
 02
 -2
 --
 0
```

Polynomdivision:

Für die Schreibweise des Teilers ergibt sich folgendes:

Wird die gefundene Lösung in den Teiler eingesetzt muss sich Nullergeben.

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6):(x + 1) = x^2 - 5x + 6$$
$$\underline{-(x^3 + x^2)}$$
$$-5x^2 + x$$
$$\underline{-(-5x^2 - 5x)}$$
$$6x + 6$$
$$\underline{-(6x + 6)}$$
$$-$$

Damit ergibt sich folgende faktorisierte Darstellung:

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x^2 - 5x + 6) \cdot (x + 1)$$

Nach dieser Zerlegung in einen quadratischen Teil und einen linearen Teil, kann der quadratische Teil mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Terme gelöst werden.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

Damit ergibt sich folgende nächste faktorisierte Darstellung:

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$$

Hieraus sieht man wesentlich besser als aus der Ausgangsgleichung, welche Werte man einsetzen müsste um den ganzen Ausdruck Null zu setzen. wird nämlich einer der Faktoren Null, so ist die gesamte Gleichung erfüllt.

Beispiel 92:

Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung.

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$

Da keiner der drei kritischen Fälle für die Definitionsmenge hier auftaucht, kann man auch auf explizite Angabe der Definitionsmenge verzichten.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$x = 0 \rightarrow 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 6 = 0 \rightarrow \text{keine wahre Aussage}$

$x = 2 \rightarrow 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 6 = 0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) : (x - 2) = x^2 + 3$

$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$

$+3x - 6$

$\underline{-(+3x - 6 - 5x)}$

$-$

$x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3$

Keine weiteren Lösungen mehr: $x_1 = 3$

Damit ergibt sich folgende nächste faktorisierte Darstellung:

$(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) = (x - 2) \cdot (x^2 + 3)$

Wurzelgleichungen

Definition einer Wurzelgleichung

Definition 29:

Bei eine Wurzelgleichung ist bei mindestens einem Radikanden die Unbekannte x enthalten.

Beispiel 93:

$\sqrt{x+3} = 4$

Keine Wurzelgleichung ist dagegen:

Beispiel 94:

$\sqrt{3} + x = 4$

Lösung einer Wurzelgleichung

- Radikanden mit der Unbekannten auf eine Seite bringen.
- Beide Seiten quadrieren, dabei ist zu beachten, dass dieses keine Äquivalenzumformung ist. Deshalb muss auf jeden Fall eine Probe gemacht werden.
- Vereinfachen der Gleichung.
- Lösen der Gleichung.
- Lösungen mit der Probe überprüfen

Beispiel 95:

$\sqrt{x+2} = -4 \quad |(\quad)^2$

$x + 2 = 16 \quad | -2$

$x = 14$

Probe:

$\sqrt{14+2} = -4$

$4 = -4$

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

Die falsche Lösung entstand, weil zum Lösen der Wurzelgleichung die Rechenoperation "Potenzieren" benutzt wurde. Das Potenzieren ist keine Äquivalenzumformung, denn beim Potenzieren können Scheinlösungen hinzukommen.

Definitionsmenge der Wurzelgleichung

Man kann entweder eine Definitionsmenge bestimmen, kann aber auch nur die errechneten Lösungen mit Hilfe einer Probe überprüfen. Da die Probe ja immer gemacht werden muss, kann man sich die Definitionsmenge auch ersparen.

Nicht zu lösenden Wurzelgleichungen

Es ist im Grundsatz sinnvoll die Gleichung erst einmal zu betrachten, ob überhaupt eine Lösung möglich ist.

Beispiel 96:

$\sqrt{x+3} = -4$

Eine Wurzel kann nicht negativ werden, deshalb gibt es hier keine Lösung.

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

Beispiel 97:

$\sqrt{-x^2} = 2$

Die Wurzel mit negativen Radikanden kann nicht berechnet werden.

Wurzelgleichung mit einem Absolutglied

Lösungsweg:

- Wurzel isolieren
- Beide Seiten quadrieren.
- die Unbekannte auf der linken Seite isolieren
- Lösung berechnen
- Probe durchführen

Beispiel 98:

$\sqrt{x+2} - 4 = 0 \quad | + 4$

$\sqrt{x+2} = 4 \quad |(\quad)^2$

$x - 2 = 16 \quad | + 2$

$x = 14$

Probe:

$\sqrt{14+2} - 4 = 0 \quad \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$\mathbb{L} = \{14\}$

Wurzelgleichungen mit zwei Wurzeln und ohne Absolutglied

Lösungsweg:

- Wurzeln auf beide Seiten der Gleichung verteilen.
- Beide Seiten quadrieren
- die Unbekannte auf der linken Seite isolieren
- Lösung berechnen
- Probe durchführen

Beispiel 99:

$\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x-1}=0 \quad |+\sqrt{3x-1}$

$\sqrt{2x+2}=\sqrt{3x-1} \quad |(\quad)^2$

$2x+2=3x-1 \quad |-3x$

$-x+2=-1 \quad |-2$

$-x=-3 \quad |:(-1)$

$x=3$

Probe:

$\sqrt{2\cdot 3+2}-\sqrt{3\cdot 3\cdot -1}=0 \quad \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$\mathbb{L}=\{3\}$

Wurzelgleichungen mit verschachtelten Wurzeln

Lösungsweg:

- Die verschachtelte Wurzel isolieren.
- Beide Seiten quadrieren.
- Die Gleichung vereinfachen.
- Die innere Wurzel isolieren.
- Beide Seiten nochmals quadrieren
- die Unbekannte auf der linken Seite isolieren
- Lösung berechnen
- Probe durchführen

Beispiel 100:

$\sqrt{6-\sqrt{x-1}}-2=0 \quad |+2$

$\sqrt{6-\sqrt{x-1}}=2 \quad (\quad)^2$

$6-\sqrt{x-1}=4 \quad |-6$

$-\sqrt{x-1}=-2 \quad |\cdot(-1)$

$\sqrt{x-1}=2 \quad |(\quad)^2$

$x-1=4 \quad |+1$

$x=5$

Probe:

$\sqrt{6-\sqrt{5-1}}-2=0 \quad \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$\mathbb{L}=\{5\}$

Wurzelgleichungen mit einem Wurzelexponenten größer als zwei

Lösungsweg:

- Die Wurzel isolieren.
- Beide Seiten mit 3 potenzieren.
- Die Gleichung vereinfachen.
- die Unbekannte auf der linken Seite isolieren
- Lösung berechnen
- Probe durchführen

Beispiel 101:

$\sqrt[3]{x+1}-2=0 \quad |+2$

$\sqrt[3]{x+1}=2 \quad |(\quad)^3$

$x+1=8 \quad |-1$

$x=7$

Probe:

$\sqrt[3]{7+1}-2=0 \quad \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$\mathbb{L}=\{7\}$

Wurzelgleichungen mit Linearglied

Lösungsweg:

- Die Wurzel isolieren.
- Beide Seiten quadrieren.
- Die Gleichung vereinfachen.
- die Unbekannte auf der linken Seite isolieren
- Lösung berechnen
- Probe durchführen

Beispiel 102:

$\sqrt{2x-1}-x=0 \quad |+x$

$\sqrt{2x-1}=x \quad |(\quad)^2$

$2x-1=x^2 \quad |-x^2$

$-x^2+2x-1=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)}=1$$

Probe:

$\sqrt{2\cdot 1-1}-1=0 \quad \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$\mathbb{L}=\{1\}$

Wurzelgleichungen mit zwei Wurzeln und einem Absolutglied

Hier tritt neben zwei Wurzeln auch noch ein Absolutglied auf.

Lösungsweg:

- Auf beiden Seiten sollte nur eine Wurzel stehen. Zusätzlich steht auf der linken Seite das Absolutglied.
- Gleichung potenzieren.
- Linke Seite ausmultiplizieren.
- Vereinfachen durch zusammenfassen gleicher Glieder.
- Die Wurzel auf einer Seite isolieren.
- Erneut potenzieren
- Vereinfachen durch zusammenfassen gleicher Glieder.
- Ergebnis ausrechnen.
- Probe durchführen.

Beispiel 103:

$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} - 1 = 0 \quad | + \sqrt{x+2}$

$\sqrt{x+7} - 1 = +\sqrt{x+2} \quad |(\quad)^2$

$\left(\sqrt{x+7} - 1\right)^2 = (x+2) \quad |(\quad)^2$

$(x+7) - 2\sqrt{x+7} + 1 = x + 2$

$x + 8 - 2\sqrt{x+7} = x + 2 \quad | - x$

$8 - 2\sqrt{x+7} = 2 \quad | - 8$

$-2\sqrt{x+7} = -6 \quad | \cdot (-1)$

$4\sqrt{x+7} = 6 \quad | \cdot (\quad)^2$

$4(x+7) = 36$

$4x + 28 = 36 \quad | - 28$

$4x = 8 \quad |: 4$

$x = 2$

Probe:

$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} - 1 = 0$

$x = 2$

$\sqrt{2+7} - \sqrt{2+2} - 1 = 0$

Ergibt eine wahre Aussage.

$\mathbb{L} = \{2\}$

Ungleichungen

Neben Gleichungen existieren auch Ungleichungen. Was es damit auf sich hat und wie man diese Aufgaben löst, soll in diesem Kapitel erklärt werden.

Bei Ungleichungen ist die eine Seite der Gleichung meist größer oder kleiner als die andere. Dies wird durch ein "<" (kleiner) oder ">" (größer) ausgedrückt Darüber hinaus gibt es ein kleiner-gleich "≤" und ein größer-gleich "≥".

Ungleichungen werden genauso gerechnet, wie "normale" Gleichungen.

Definition 30:

Nur eine wichtige weitere Sonderregel muss noch beachtet werden:

Multipliziert oder dividiert man beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl, so tauschen sich "<" und ">" bzw. "≤" und "≥" gegeneinander aus.

Alle Zahlen, welche die Aussageform in eine wahre Aussage übergehen lassen, sind Lösungen der Ungleichung und bilden die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

Ungleichungen haben Intervalle als Lösungsmenge.

Weitere Regeln die beachtet werden müssen.

Vertauscht man die Seiten einer Ungleichung, dann ist dies nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn man auch das Ungleichheitszeichen umdreht.

Diese Regel gilt es unbedingt zu beachten, wenn man mit Ungleichungen rechnet.

Beispiel 104:

$4x + 10 \geq 14 \quad | - 10$

$4x \geq 4 \quad |: 4$

$x \geq 1$

$\mathbb{L} = \{x | x \geq 1\}$

Beispiel 105:

$-12x + 12 < 24 \quad | - 12$

$-12x < 12 \quad |: (-12)$

$x > -1$

$\mathbb{L} = \{x | x > -1\}$

Betragsgleichungen und –ungleichungen

Betrag

Definition 31:

Das Betragszeichen macht aus einer negativen Zahl eine positive Zahl, eine positive Zahl bleibt dagegen unverändert.

Dies ist natürlich nur umgangssprachlich formuliert. Deshalb müssen wir die Definition auch noch formal korrekt angeben:

$$|\mathrm{a}| = \begin{cases} \mathrm{a} \ , & \text{falls a positiv ist oder 0} \\ -\mathrm{a} & \text{falls a negativ ist} \end{cases}$$

Der Betrag wird auch absoluter Betrag genannt.

Beispiel 106:

$$|-5| = 5$$

$$|+5| = 5$$

Es gibt ein paar Sätze über Beträge, mit denen man manchmal eine Betragsgleichung vereinfachen kann.

Die Betragsgleichung |x+a|=c

Wir wollen die folgende Betragsgleichung lösen:

$|\mathrm{x} + \mathrm{a}| = \mathrm{c}$

Dazu müssen wir die >Betragsgleichung in zwei Fälle aufgliedern.

Fall1:

Der Betrag ist positiv, damit kann man die Betragsstriche weglassen und die Gleichung lösen.

$(x + a) = c$

$x = c - a$

Fall2:

Der Betrag ist negativ, dann kann man die Betragsstriche weglassen und stattdessen eine Minusklammer schreiben.

$-(x + a) = c$

$-x - a = c$

$x = -a - c$

Daraus ergibt sich folgende Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \{-a \pm c\}$

Beispiel 107:

Lösen Sie folgende Betragsgleichung.

$|3x + 5| = 8$

Fall 1:

$(3x + 5) = 8$

$3x + 5 = 8$

$3x = 3$

$x = 1$

Fall 2:

$-(3x + 5) = 8$

$-3x - 5 = 8$

$-3x = 13$

$x = -\frac{13}{3}$

$\mathbb{L} = \left\{-\frac{13}{3}; 1\right\}$

Beispiel 108:

Lösen Sie folgende Betragsgleichung.

$x + |x - 1| = 6$

Fall 1:

$x + (x - 1) = 6$

$x + x - 1 = 6$

$2x = 7$

$x = \frac{7}{2}$

Fall 2:

$x - (x - 1) = 6$

$x - x + 1 = 6$

$1 = 6$

Widerspruch, keine weitere Lösung.

$\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

Betragsungleichungen

Auch bei Betragsungleichungen gilt die gleiche Vorgehensweise wie bei Betragsgleichungen.

Folgendes ist aber zu beachten.

Definition 32:

Multipliziert man den Linksterm und den Rechtsterm einer Ungleichung mit der gleichen positiven Zahl, so erhält man eine Ungleichung, die zur ursprünglichen Ungleichung äquivalent ist.

Die Regel gilt ebenfalls für die Division mit einer positiven Zahl.

!!! Achtung: Die Multiplikation mit der Zahl 0 ist keine Äquivalenzumformung.

Multipliziert (bzw. dividiert) man den Linksterm und den Rechtsterm einer Ungleichung mit der gleichen negativen Zahl, so erhält man eine Ungleichung, die zur ursprünglichen äquivalent ist, wenn man $<$ durch $>$ bzw. $\leq$ durch $\geq$ ersetzt und umgekehrt. (Inversionsgesetz)

Dazu ein erstes einfaches Beispiel.

Beispiel 109:

$|x| > 2$

Fall 1:

$+(x) > 2$

$x > 2$

Fall 2:

$-(x) > 2$

$-x > 2$

$x < -2$

$\mathbb{L} = \{]-\infty; -2[\vee]2; +\infty[\}$

Beispiel 110:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x+2| > 4$

Fall 1:

$+(x+2) > 4$

$x+2 > 4$

$x > 2$

Fall 2:

$-(x+2) > 4$

$-x-2 > 4$

$-x > 6$

$x < -6$

$\mathbb{L} = \{]-\infty; -6[\vee]2; +\infty[\}$

Bisher haben wir nur Betragsungleichungen betrachtet, bei denen nur ein Betrag aufgetaucht ist. Jetzt wollen wir Betragsungleichungen lösen, bei denen mehrere Beträge auftauchen.

Beispiel 111:

$|x+3| + |x+4| < 9$

Wir führen auch bei dieser Betragsungleichung eine Fallunterscheidung durch. Die einzelnen Terme zwischen den Betragszeichen können negative wie auch positive Werte annehmen. Deshalb müssen wir insgesamt vier Fälle unterscheiden.

Definition 33:

- Im Fall 1 sind die Terme in den Betragszeichen beide nicht-negativ (größer oder gleich Null).
- Im Fall 2 ist der Term im ersten Betragszeichen nicht-negativ, im zweiten aber negativ.
- Im Fall 3 ist der Term im ersten Betragszeichen negativ, im zweiten aber nicht-negativ.
- Im Fall 4 sind die Terme in den Betragszeichen beide negativ.

Wir wollen die verschiedenen Fälle hier tabellarisch aufzeigen:

	1. Betrag	**2. Betrag**
Fall 1:	$x+3 \geq 0$	$x+4 \geq 0$
Fall 2:	$x+3 \geq 0$	$x+4 < 0$
Fall 3:	$x+3 < 0$	$x+4 \geq 0$
Fall 4:	$x+3 < 0$	$x+4 < 0$

Wie wird sich nun die Betragsungleichung in den oben angesprochenen Fällen verändern:

Fall 1:

Beide Terme sind nicht negativ, damit ergibt sich folgendes:

$(x+3) + (x+4) < 9$

$x+3+x+4 < 9$

$2x < 2$

$x < 1$

Fall 2:

Der erste Term ist nicht negativ, der zweite Term ist jetzt negativ, damit ergibt sich:

$(x+3) - (x+4) < 9$

$x+3-x-4 < 9$

$-1 < 9$

Damit ergibt sich eine allgemein gültige Bedingung.

Fall 3:

Der erste Term ist negativ und der zweite ist nicht negativ, damit ergibt sich:

$-(x+3)+(x+4)<9$

$-x+3+x+4<9$

$7<9$

Damit ergibt sich eine allgemein gültige Bedingung.

Fall 4:

Beide Terme sind negativ, damit ergibt:

$-(x+3)-(x+4)<9$

$-x-3-x-4<9$

$-2x<16$

$x>-8$

Wenn wir alle Bedingungen sammeln:

$x<1$

$x>-8$

Dann ergibt sich folgende Lösungsmenge:

$\mathbb{L}=\{\,]-8;1[\,\}$

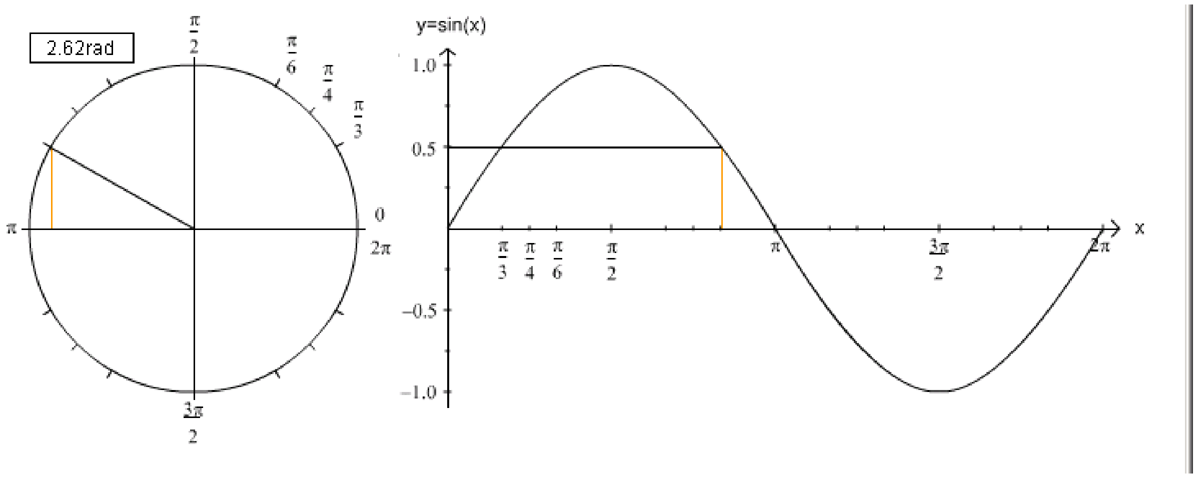
Trigonometrische Funktionen

Die Sinusfunktion

Eine graphische Darstellung der Sinusfunktion

$y = \sin(x)$

gewinnt man, wenn man die Beziehung zwischen x und sin (x) in einem Koordinatensystem darstellt. Die y-Koordinate wird als Zeiger dargestellt. Dieser wandert in dem neuen Koordinatensystem entlang der x-Achse und zeichnet so die Sinusfunktion.



Die Sinusfunktion für beliebige Amplituden, Perioden und Phasen kann durch die Formel

$y = A \cdot \sin(bx + c)$

beschrieben werden.

Die y-Koordinate ist in dieser Formel nicht nur von der x-Koordinate bzw. vom Winkel Φ abhängig, sondern auch von der **AMPLITUDE A**, der **PERIODE b** und der **PHASE c**.

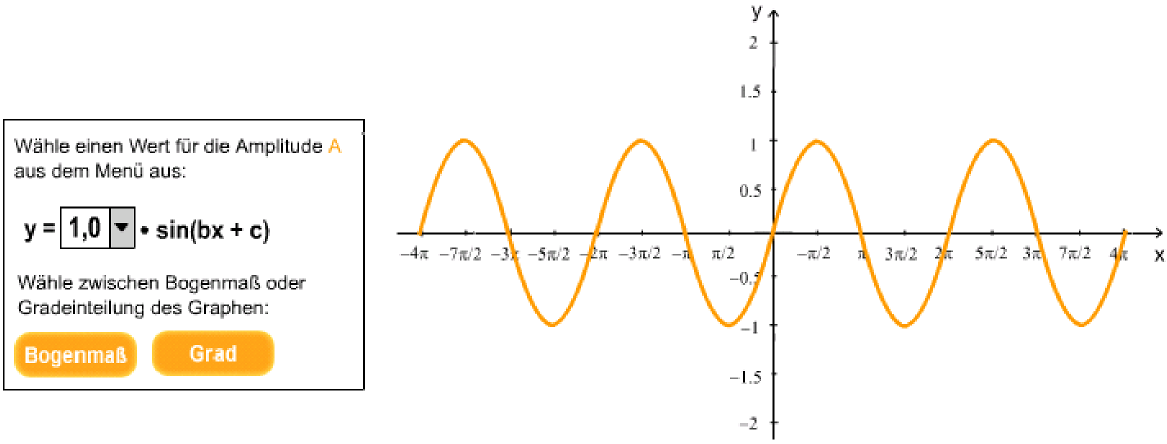
Die Amplitude der Sinusfunktion

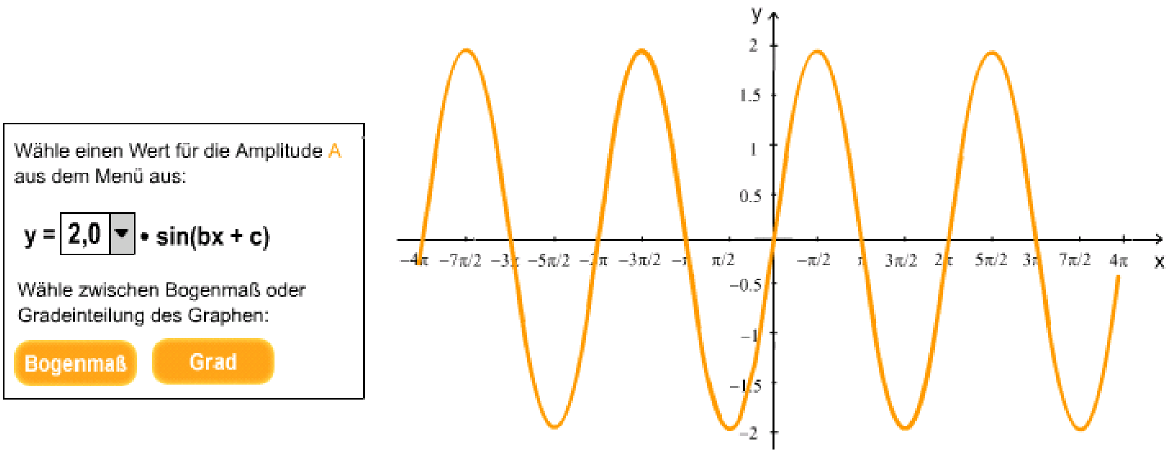
Die Sinusfunktion nimmt mindestens den Wert -1 und höchstens den Wert +1 an. Multipliziert man die Sinusfunktion mit einem konstanten Faktor **A**, so erhält man eine Funktion, die den gleichen periodischen Charakter hat. Die Nullstellen verändern sich nicht, aber deren Maxima bzw. deren Minima nehmen den Wert **A** bzw. **-A** an.

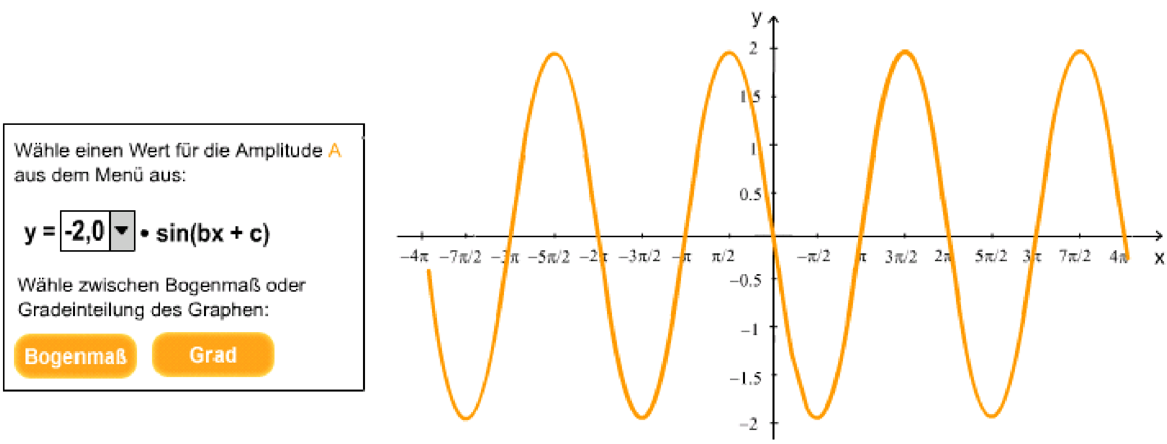
Definition 34:

Die Amplitude ist der Faktor A in der Funktion $y = A \cdot \sin(bx + c)$

Beispiel 112:







Periode der Sinusfunktion

Definition 35:

Wenn das Argument x in der Gleichung

$$y = A \cdot \sin\,(bx + c)$$

mit einem konstanten Faktor **b** multipliziert wird, dann spricht man von einer Änderung der Periode der Sinusfunktion.

Die Periode sagt etwas darüber aus, wie oft eine Schwingung in einem bestimmten Wertebereich (wie z.B. -4π bis +4π) oszilliert.

Für die Physik ist auch interessant, wie oft eine Schwingung in einem bestimmten Zeitintervall vollzogen wird. Dort trifft man auch häufig auf die Notation:

$$y = \sin\,(\omega t)$$

Statt der Konstanten **b**, steht hier das Symbol ω. Dies ist die Kreisfrequenz oder die Anzahl der Schwingungen im Zeitintervall $2\pi \sec$. t hat in obigen Gleichung häufig die Bedeutung der Zeit.

Es gilt:

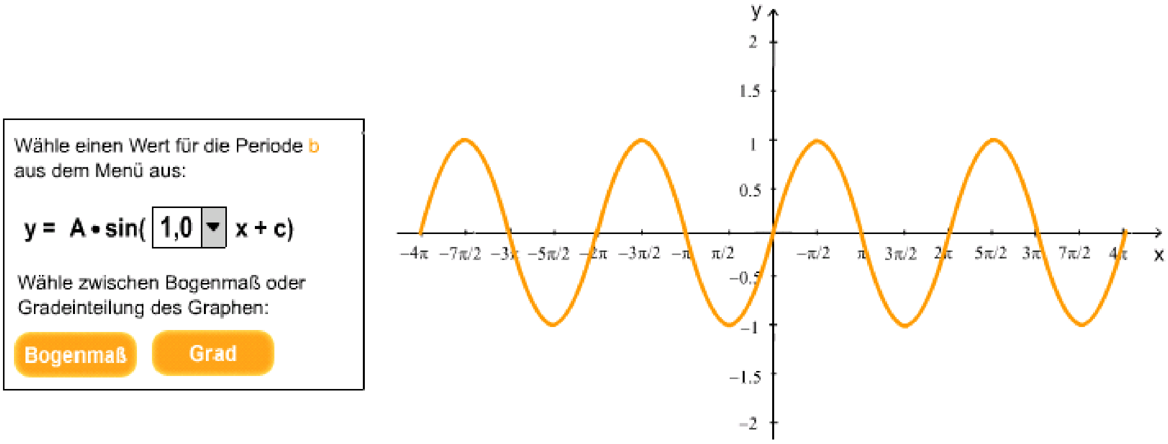
$$\omega = 2\pi\nu$$

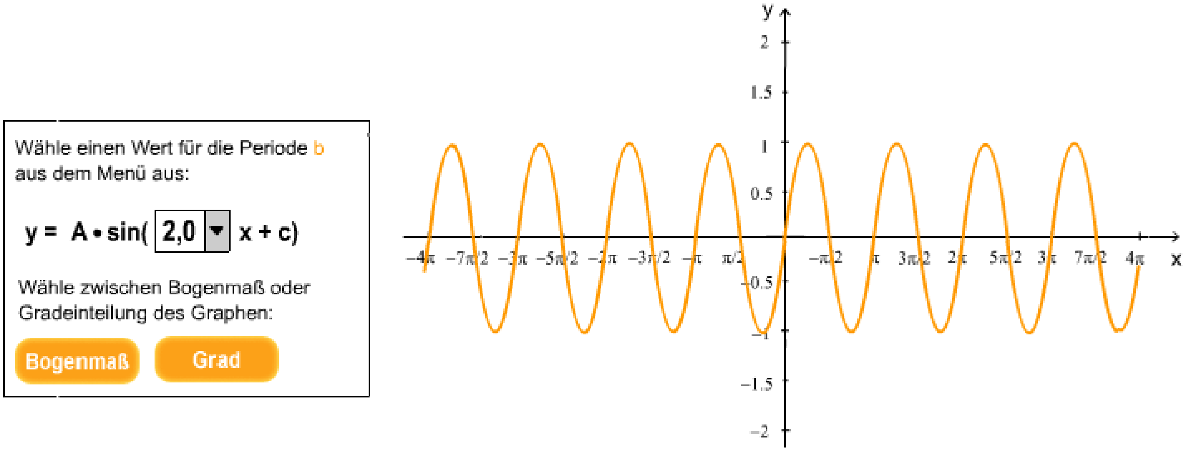
Die Frequenz ν ist die Zahl der Schwingungen im Zeitintervall 1 sec.

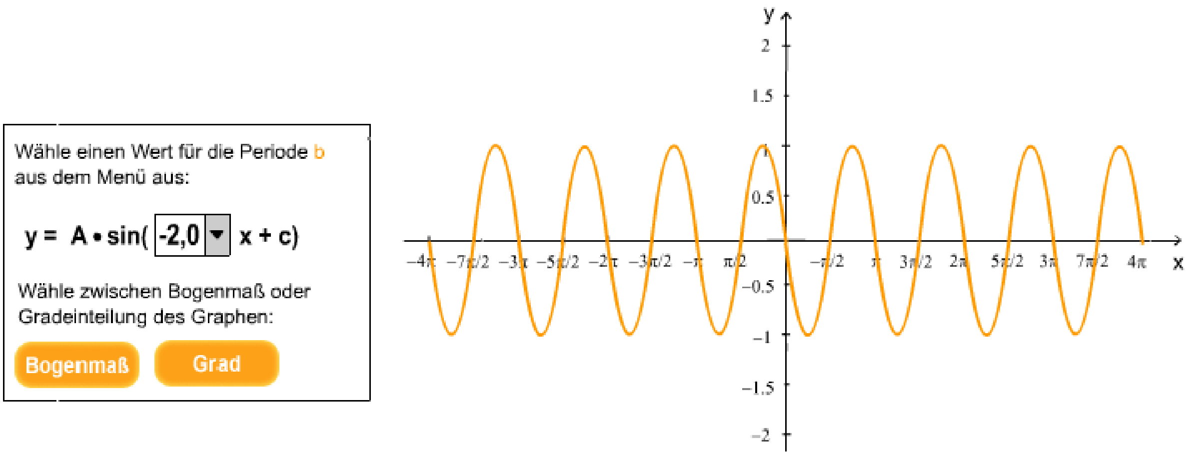
Bemerkung 5:

Allgemein lässt sich für jede Notation sagen, dass, wenn die Periode b groß ist, mehr Schwingungen durchgeführt werden und wenn b klein ist, dass weniger Schwingungen vollzogen werden.

Beispiel 113:







Die Phase der Sinusfunktion

Definition 36:

Hier soll die Bedeutung der Konstanten **c** in der Gleichung

$$y = A \cdot \sin(bx + c)$$

diskutiert werden. Dem Argument der Sinusfunktion ist eine additive Konstante zugefügt.

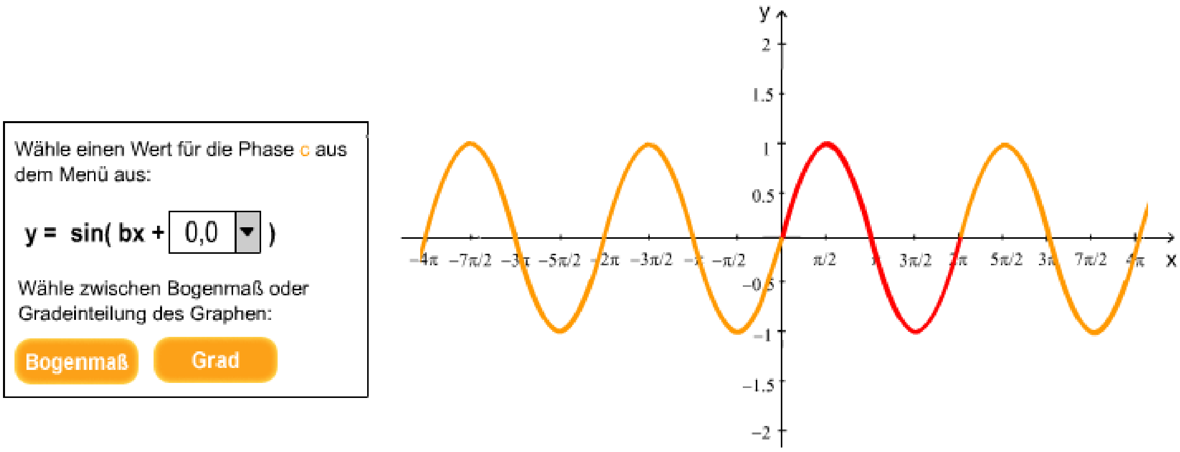
Das heißt, mit Hilfe der Phase wird der Nulldurchgang entweder nach links oder nach rechts verschoben.

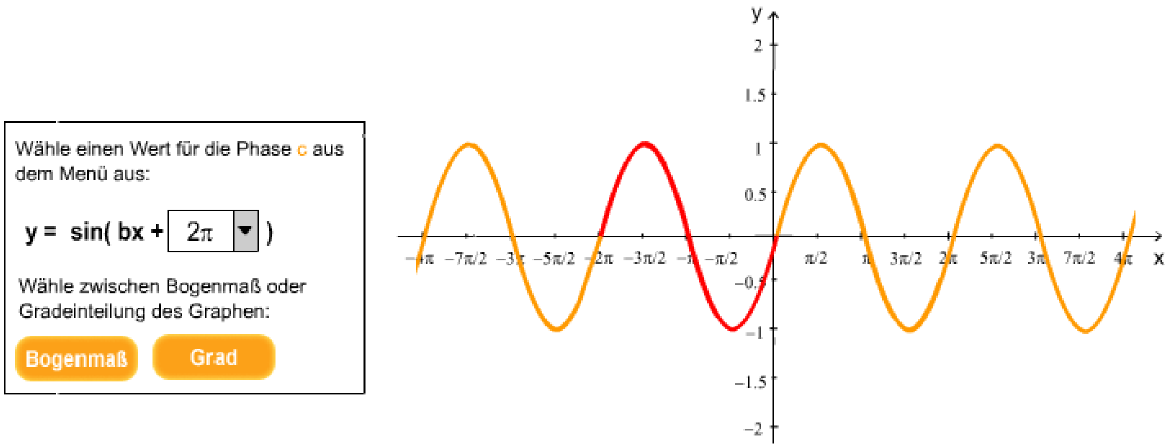
Wenn die Phase c einen positiven Wert hat, wird die Sinusfunktion nach links vom Koordinatenursprung ausgesehen verschoben und wenn c einen negativen Wert hat, wird die Sinusfunktion nach rechts verschoben.

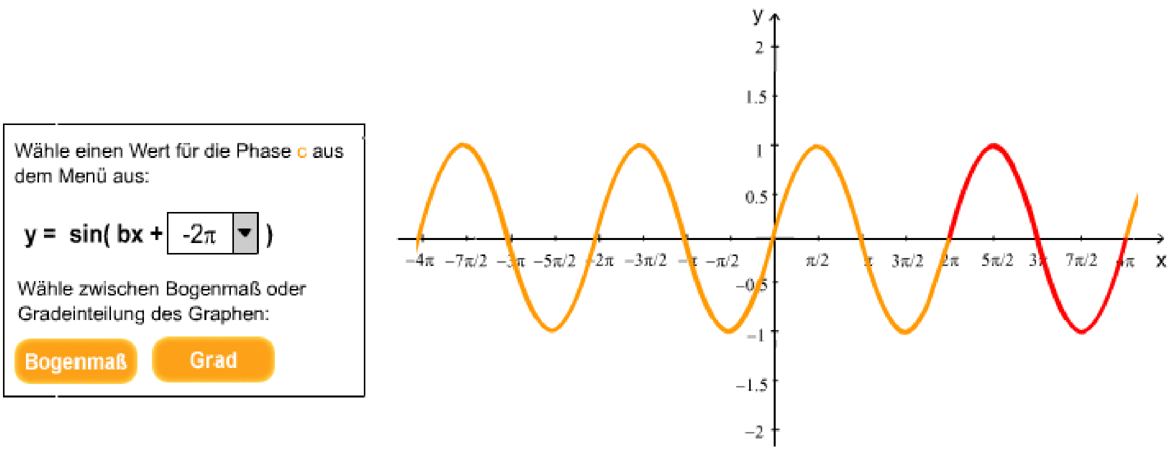
Die Phase ist eine additive Konstante im Argument der Sinus-Funktion

$y = A \cdot \sin(bx + c)$

Beispiel 114:



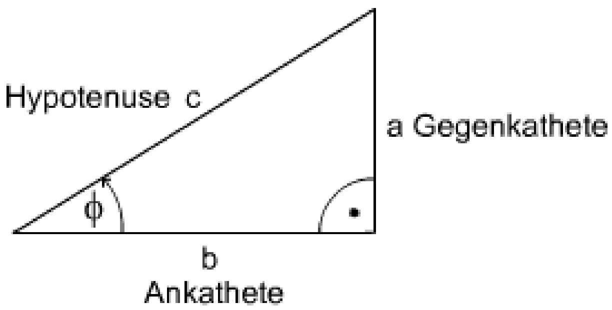




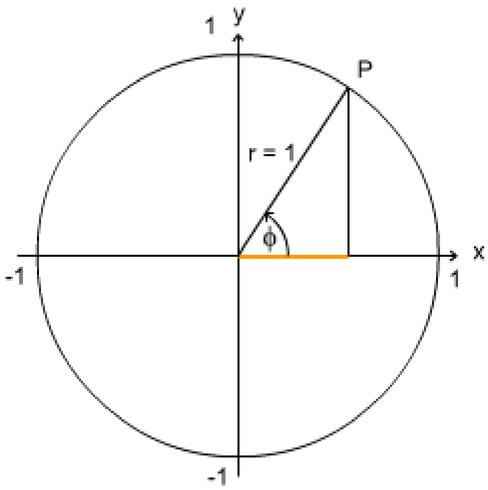
Definition des Kosinus im Dreieck

Geometrisch ist der Kosinus definiert als Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck (siehe Abbildung):

$$\cos(\Phi) = \frac{b}{c}$$



Genauso wie bei der Sinusfunktion wird das Dreieck in den Einheitskreis gesetzt (Abbildung).



Die Hypotenuse wird zum Radius r des Kreises und schneidet den Kreis im Punkt P. Der Kosinus des Winkels Φ ist der x-Achsenabschnitt zum entsprechenden Punkt P.

Definition 37:

Der Kosinus eines Winkels Φ ist gleich der x-Komponente des zu Φ gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.

Deswegen kann man schreiben:

$$x = \cos(\Phi)$$

da r = 1 ist.

Normalerweise wird x immer als die Variable benutzt, für die immer andere Werte gesetzt werden.

Definition der Kosinusfunktion

Genauso wie bei der Herleitung der Sinusfunktion geht man bei der Herleitung der Kosinusfunktion vor:

$$y = \cos x$$

Von dem Schnittpunkt des Zeigers mit dem Einheitskreis wird ein Lot gefällt und der dazugehörige x-Achsenabschnitt bestimmt. Dieser Wert wird der Kosinusfunktion im Graphen als y-Achsenabschnitt zugeordnet.

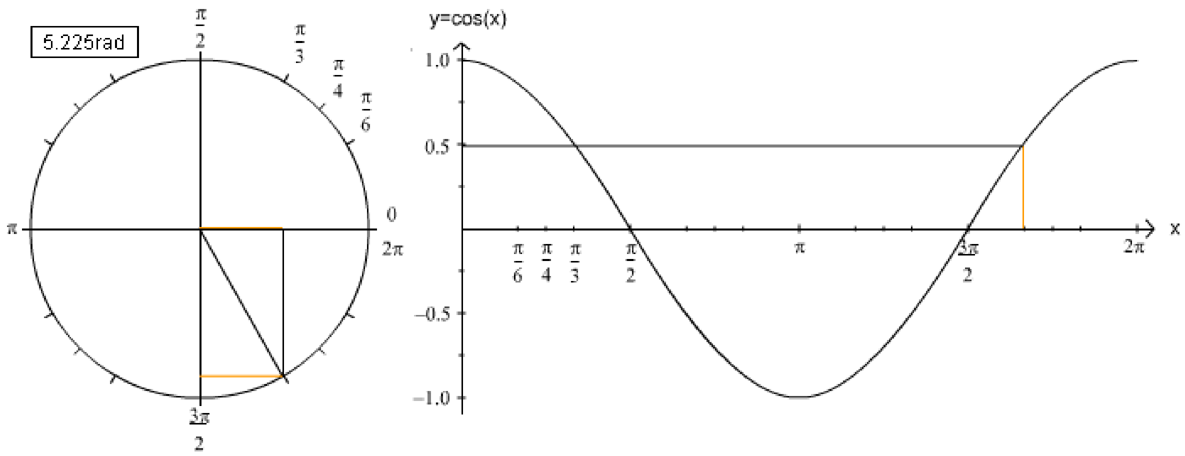
Die Kosinusfunktion für beliebige Amplituden, Perioden und Phasen kann durch die Formel

$$y = A \cdot \cos(bx + c)$$

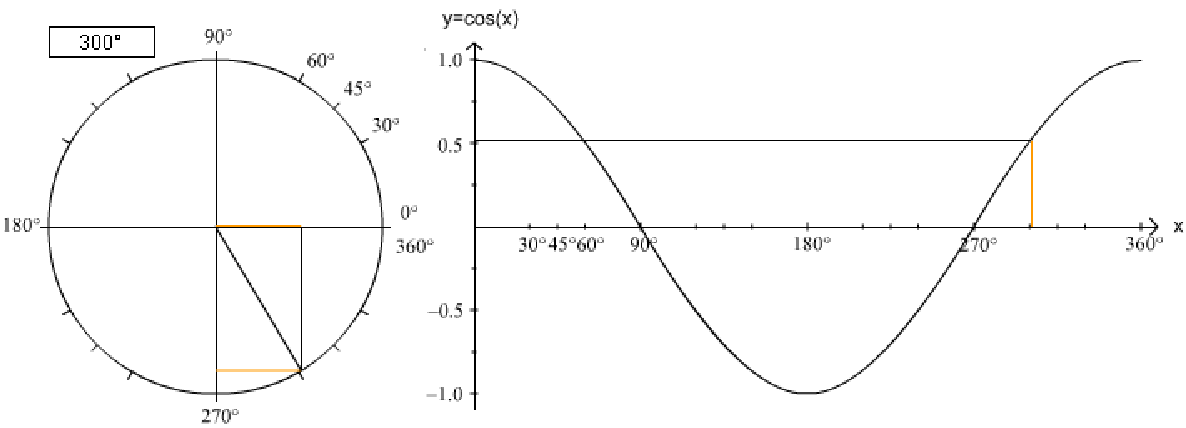
dargestellt werden.

Die Kosinusfunktion ist zudem, wie die Sinusfunktion auch, von der AMPLITUDE A, der PERIODE b und der PHASE c abhängig.

In Bogenmaß:



In Grad:



Winkelfunktionen und Zusammenhänge

Umrechungstabelle

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	120°
Bogen-maß	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
Cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$

Gradmaß	135°	150°	180°	210°	270°	360°
Bogen-maß	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Sinus	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0
Cosinus		$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	1
Tangens	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-	0

Weitere Zusammenhänge

Trigonometrischer Pythagoras

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Additionstheoreme

$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

$\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

$$\cot(x + y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}$$

$$\cot(x - y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) + 1}{\cot(x) - \cot(y)}$$

Weitere trigonometrische Zusammenhänge

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot(x)}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Formeln für die Vielfachen von Winkeln

$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$

$\sin(3x) = 3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin^3(x)$

$\cos(3x) = 4 \cdot \cos^3(x) - 3 \cdot \cos(x)$

$\sin(4x) = 8 \cdot \cos^3(x) \cdot \sin(x) - 4 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$

$\cos(4x) = 8 \cdot \cos^4(x) - 8 \cdot \cos^2(x) + 1$

$$\tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{(\cot^2(x) - 1)}{(2 \cdot \cot(x))}$$

$$\tan(3x) = \frac{(3 \cdot \tan(x) - \tan^3(x))}{(1 - 3 \cdot \tan^2(x))}$$

$$\cot(3x) = \frac{(\cot^3(x) - 3 \cdot \cot(x))}{(3 \cdot \cot^2(x) - 1)}$$

$$\tan(4x) = \frac{(4 \cdot \tan(x) - 4 \cdot \tan^3(x))}{(1 - 6 \cdot \tan^2(x) + \tan^4(x))}$$

$$\cot(4x) = \frac{(\cot^4(x) - 6 \cdot \cot^2(x) + 1)}{(4 \cdot \cot^3(x) - 4 \cdot \cot(x))}$$

Formeln für die halben Winkel

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$$

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}$$

Formel für die Produkte von Winkeln

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

$$\tan(x) \cdot \tan(y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{\cot(x) + \cot(y)}$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(z) = \frac{\sin(x+y-z) + \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) - \sin(x+y+z)}{4}$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(z) = \frac{-\cos(x+y-z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) - \cos(x+y+z)}{4}$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) = \frac{\sin(x+y-z) - \sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y+z)}{4}$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) = \frac{\cos(x+y-z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) + \cos(x+y+z)}{4}$$

$$\sin^2(x) \cdot \cos(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$$

$$\sin(x) \cdot \cos^2(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$$

$$\sin^2(x) \cdot \cos^2(x) = \cos^2(x) - \cos^4(x)$$

Formeln für die Potenzen von Winkeln

$$\sin^2(x) = \frac{(1 - \cos(2x))}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{(1 + \cos(2x))}{2}$$

$$\sin^3(x) = \frac{(3 \cdot \sin(x) - \sin(3x))}{4}$$

$$\cos^3(x) = \frac{(\cos(3x) + 3 \cdot \cos(x))}{4}$$

$$\sin^4(x) = \frac{(\cos(4x) - 4 \cdot \cos(2x) + 3)}{8}$$

$$\cos^4(x) = \frac{(\cos(4x) + 4 \cdot \cos(2x) + 3)}{8}$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

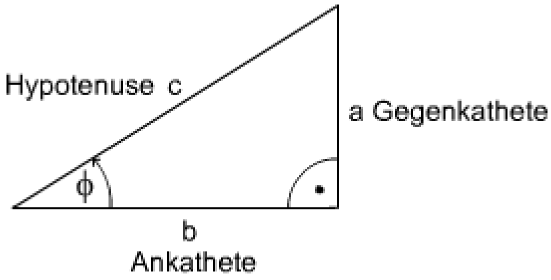
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Definition des Tangens

Der Tangens eines Winkels Φ kann geometrisch definiert werden als Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete



$$\tan(\Phi) = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

Aus den vorhergehenden Abschnitten ist bekannt, dass als Definition für die anderen beiden trigonometrischen Funktionen gilt

$$\sin(\Phi) = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$$

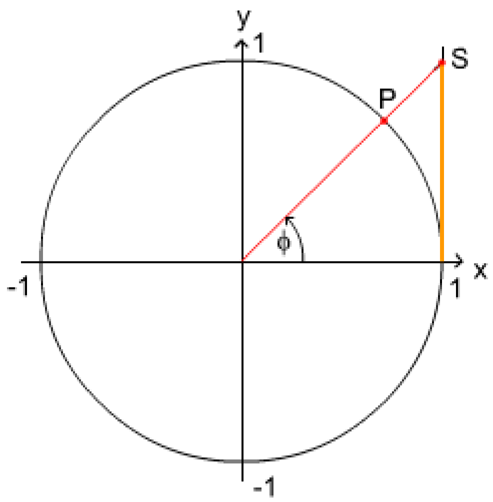
und

$$\cos(\Phi) = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$$

Damit findet sich dann folgender Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

$$\tan(\Phi) = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\Phi)}{\cos(\Phi)}$$

Die Funktion des Tangens selber lässt sich ebenfalls wie beim Kosinus und beim Sinus auch am Einheitskreis herleiten (Abbildung).



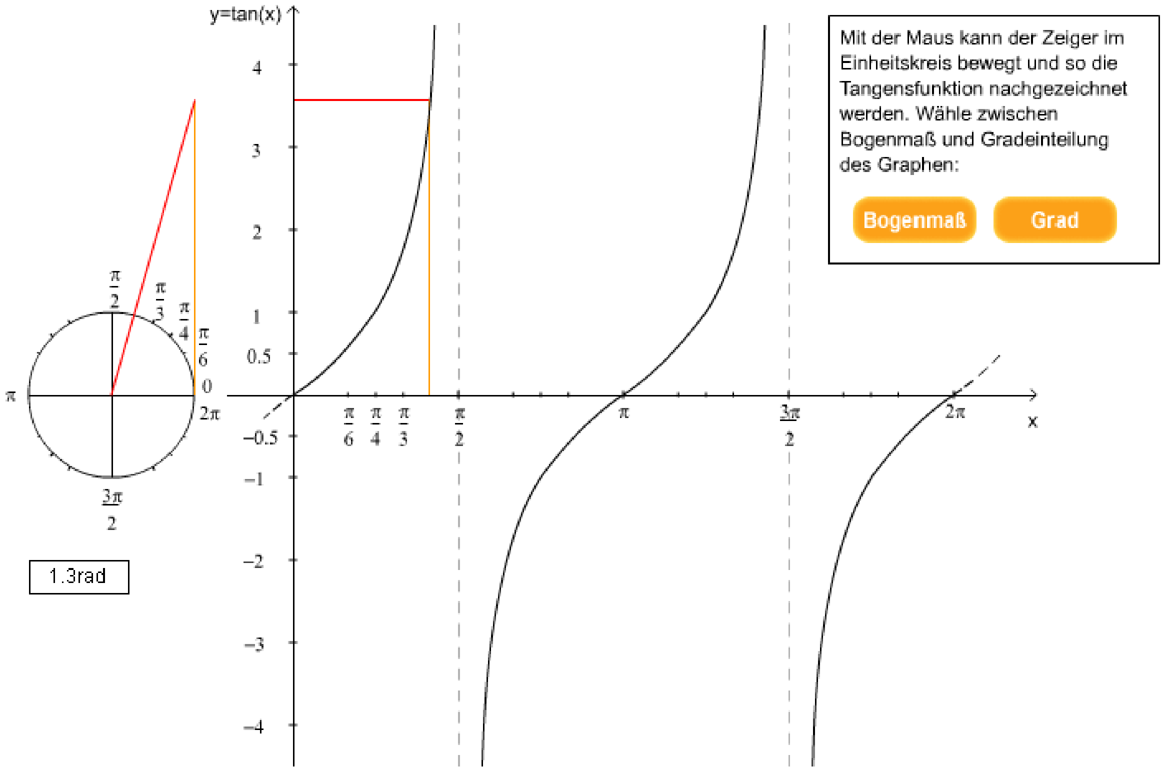
Dazu wird im Punkt (0;1) eine Tangente am Einheitskreis errichtet. Der Zeiger, der vom Mittel- bzw. Nullpunkt des Kreises bzw. des Koordinatensystems bis zum Punkt P reicht, wird über den Punkt P verlängert, bis er die Tangente im Punkt S schneidet. Der y-Achsenabschnitt auf der Tangente (hier in dem Beispiel orange gekennzeichnet) ist dann jeweils der Tangens.

Der Tangens eines Winkels Φ ist gleich der y-Komponente des Schnittpunktes S der Tangente, die am Einheitskreis anliegt.

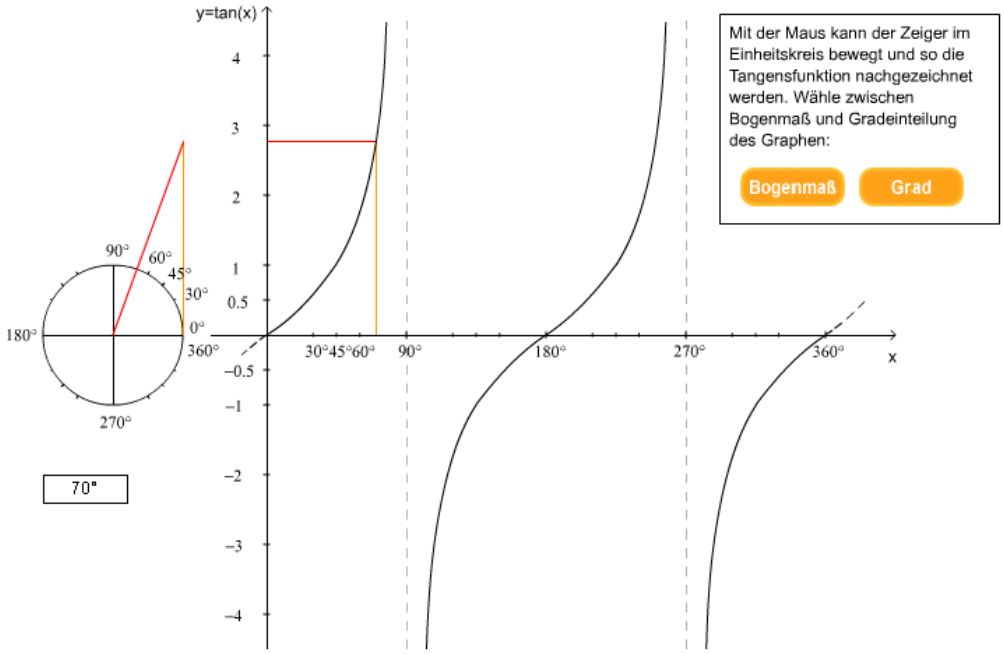
Definition der Tangensfunktion

Die Funktion des Tangens wird wieder am Einheitskreis definiert.

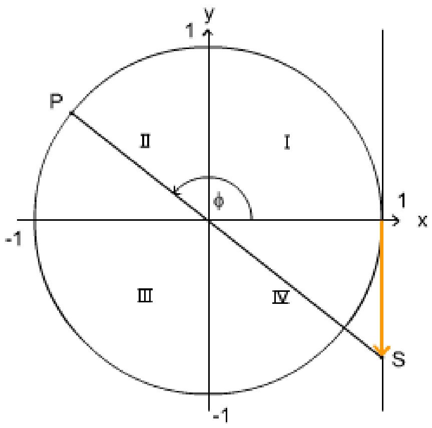
Im Bogenmaß:



In Grad:



Wie im Abschnitt Definition der Tangensfunktion im Dreieck angesprochen, wird im Punkt (1;0) eine Tangente angelegt (Abbildung).



Der Zeiger, der vom Nullpunkt des Einheitskreises ausgeht, schneidet zuerst den Einheitskreis und dann die Tangente und bildet somit ihr den y-Achsenabschnitt, der den Wert für den Tangens liefert.

Nähert sich der Wert von Φ zum Beispiel dem Wert $\frac{\pi}{2}$, dann wächst der Wert für den Tangens über alle Grenzen, ins Unendliche. Wenn nun der Zeiger in den 2.Quadranten (90°-180°) des Einheitskreises wandert, wird auch hier der Zeiger zur Tangente hin verlängert, so dass der Schnittpunkt S an der Tangente einen negativen y-Achsenabschnitt liefert.

Der Kehrwert des Tangens wird als Kotangens bezeichnet. Er ist gegeben durch:

$$\cot(\Phi) = \frac{1}{\tan(\Phi)} = \frac{\cos(\Phi)}{\sin(\Phi)}$$

Trigonometrische Gleichungen

Grundlegende Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen können sehr kompliziert sein und sind oft nicht einmal analytisch lösbar. Es gibt aber einige grundlegende trigonometrische Gleichungen, wie

$\sin(x) = a$,

$\cos(x) = b$,

$\tan(x) = c$

die wesentlich einfachere Lösungen besitzen.

Solche Gleichungen haben im allgemeinen Fall entweder gar keine, oder unendlich viele Lösungen. Wenn man aber den Winkel *x* irgendwie begrenzt, gibt es endlich viele Lösungen.

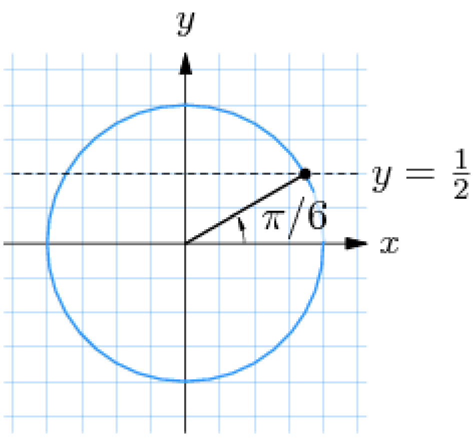
Beispiel 115:

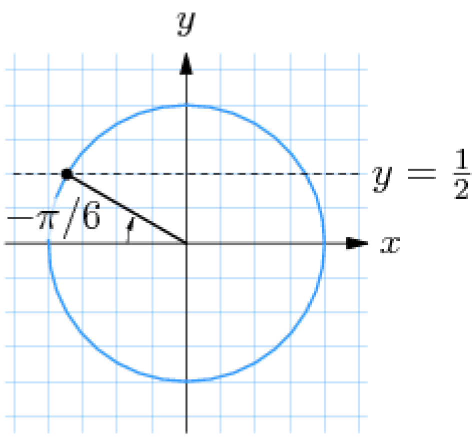
Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Wir wollen alle Winkel finden, die den Sinus $\frac{1}{2}$ haben.

Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Sinus im ersten und im zweiten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.





Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man, wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$x \in [0; 2\pi]$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right\}$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

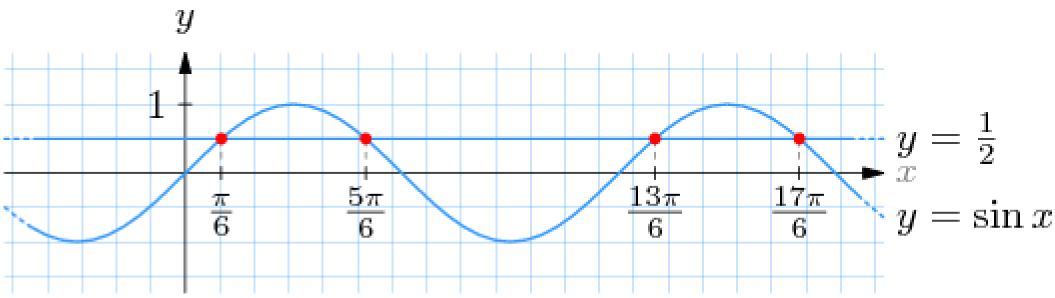
Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{5}{6}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

Dies nennt man dann auch die allgemeine Lösung der Gleichung.

Dies sieht man auch wenn man folgende Grafik betrachtet:

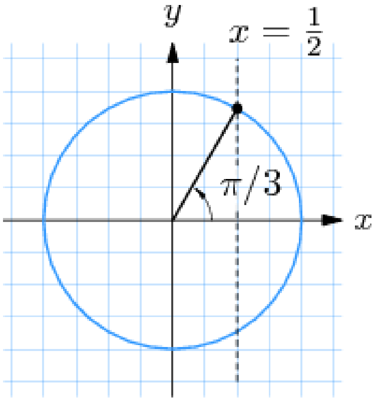


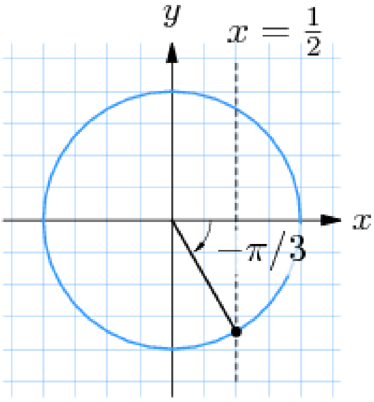
Beispiel 116:

Lösen Sie die Gleichung $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Wir betrachten den Einheitskreis. Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Kosinus im ersten und im vierten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.





Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{5}{3}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

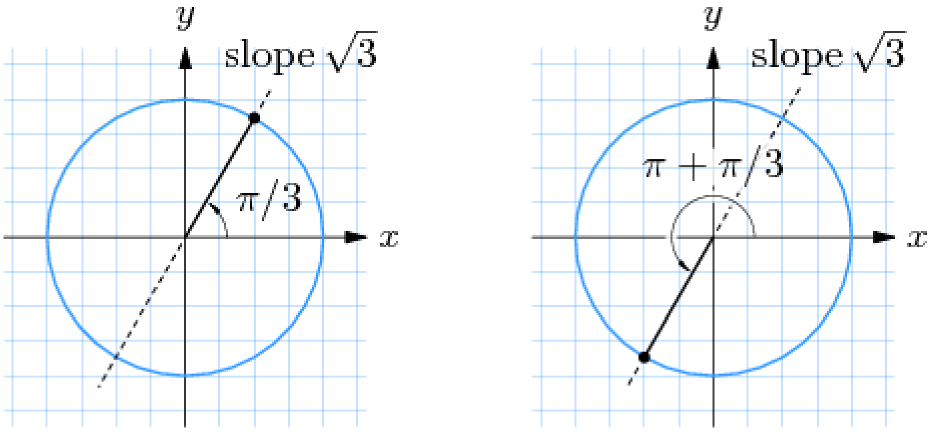
Beispiel 117:

Lösen Sie die Gleichung $\tan(x) = \sqrt{3}$

Wir betrachten den Einheitskreis.

Wir wissen in der Zwischenzeit, dass der Kosinus im ersten und im dritten Feld positiv ist.

Betrachten wir den Einheitskreis, sehen wir, dass es zwei solche Winkel x gibt.



Wir haben also einmal die erste Lösung bei:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

Und eine zweite Lösung bei $x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

Jetzt müssen wir noch beachten, ob es eine endliche oder unendlich viele Lösungen gibt.

Endliche Lösungen erhält man, wenn man den Definitionsbereich für x einschränkt. Dies könnte dann wie folgt aussehen:

$$x \in [0; 2\pi]$$

Damit ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4}{3}\pi\right\}$$

Bei unendlich vielen Lösungen muss eine allgemeine Lösung angegeben werden, da hier der Definitionsbereich nicht beschränkt ist:

Aber nachdem wir zu einem Winkel ein Vielfaches von 2π addieren können, ohne den Sinus zu ändern, haben wir auch folgende Lösungen:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x = \frac{4}{3}\pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt.

Komplexere Gleichungen

Komplexere Gleichungen löst man durch umformen mit Hilfe der Formelsammlung oder durch Substitution des Arguments der trigonometrischen Funktion.

Beispiel 118:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Lösung:

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Laut der Formelsammlung:

$$\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Daraus ergibt sich eine erste Lösung:

$$x_1 = \frac{1}{4}\pi$$

Im zweiten Feld ergibt sich eine weitere Lösung:

$$x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Im Definitionsbereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ ergeben sich weitere Lösungen:

$$x_3 = x_1 - 2\pi = \frac{1}{4}\pi - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$$

$$x_5 = x_1 + 2\pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$$

$$x_6 = x_2 + 2\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ \frac{1}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi;\frac{11}{4}\pi\right\}$$

Beispiel 119:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

damit ergibt sich:

$$\cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Aus der Formelsammlung ergibt sich eine erste Lösung:

$$u_1 = \frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_1 = 1$$

Der Kosinus ist im vierten Feld positiv, also ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{\pi}{6}x$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$$

$$x_2 = 11$$

Im positiven Bereich gibt es keine weitere Lösung mehr.

Im negativen Bereich ergibt sich eine weiter Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$u = \frac{\pi}{6} x$

$-\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6} x$

$x_3 = -1$

Im negativen Bereich auch keine weiteren Lösungen mehr.

$\mathbb{L} = \{-1; 1; 11\}$

Beispiel 120:

Lösen Sie folgende Gleichung

$\cos(2x) - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$

Im Bereich von x $\in [0: 2\pi]$

Wir verwenden aus der Formelsammlung:

$\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$

und setzen es ein.

$2 \cdot \cos^2(x) - 1 - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$

$2 \cdot \cos^2(x) - 4 \cdot \cos(x) + 2 = 0 \quad |: 2$

$\cos^2(x) - 2 \cdot \cos(x) + 1 = 0$

$(\cos(x) - 1)^2 = 0$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn $\cos(x) = 1$ ist.

Wir wissen, dass der Kosinus im ersten und im vierten Feld positiv ist.

Damit erhalten wir folgende Lösungen:

$x_1 = 0$

$x_2 = 2\pi$

$\mathbb{L} = \{0; 2\pi\}$

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Logarithmische Gleichungen

Definition 38:

Eine Gleichung in der mindestens ein Logarithmus auftaucht und die Unbekannte sich im Numerus befindet.

Beispiel 121:

$\log_3(x) = \log_3(5)$

Die folgende Gleichung ist keine Logarithmusgleichung, weil die Unbekannte nicht im Numerus auftaucht.

Beispiel 122:

$\log_3(8) = x^4$

Das Auflösen und das ausrechnen eines Logarithmus wurde bereits in einem vorherigen Kapitel besprochen

Logarithmusgleichungen mit nur einem Logarithmus

Besteht nur aus einem Logarithmus und einem Absolutglied.

Beispiel 123:

$\log_{10} x = 2$

Umformung:

$\log_{10} x = 2 \ \rightarrow 10^2 = x$

$x = 100$

Der Numerus in der Gleichung ist ein Bruch

Es können hier genauso die Logarithmengesetze angewendet werden.

Beispiel 124:

$$\log_2\left(\frac{x-13}{2x+6}\right)=4$$

$$2^4=\frac{x-13}{2x+6}\quad |\cdot(2x+6)$$

$$16(2x+6)=x-13$$

$$32x+96=x-13\quad |-x$$

$$31x+96=-13\quad |-96$$

$$31x=-109\quad |:31$$

$$x=-\frac{109}{31}$$

Probe:

$$x=-\frac{109}{31}$$

$$\log_2\left(\frac{-\frac{109}{31}-13}{2\cdot\left(-\frac{109}{31}\right)+6}\right)=4$$

$$\frac{\ln\left(\frac{-\frac{109}{31}-13}{2\cdot\left(-\frac{109}{31}\right)+6}\right)}{\ln(2)}=4$$

$$4=4$$

Wahre Aussage

$$\mathbb{L}=\left\{-\frac{109}{31}\right\}$$

Beispiel 125:

Beispiel mit quadratischem Numerus.

$\log_{10} x^2 = 4$

$10^4 = x^2$

$(10^2)^2 = x^2$

$100^2 = x^2$

$x = \pm 100$

Probe:

$\log_{10} x^2 = 4$

$\log_{10} 100^2 = 4$

$$\frac{\ln(100^2)}{\ln(10)} = 4$$

$4 = 4$

Wahre Aussage

$\log_{10} x^2 = 4$

$\log_{10}(-100)^2 = 4$

$$\frac{\ln((-100)^2)}{\ln(10)} = 4$$

$4 = 4$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{\pm 100\}$

Vor dem Logarithmus steht ein Faktor

Definition 39:

Um den Faktor vor dem Logarithmus wegzubekommen muss das entsprechende Logarithmusgesetz angewendet werden.

$$n \cdot \log_a(b) = \log_a(b^n)$$

Beispiel 126:

$2 \cdot \log_6(2x) = \log_6(3x^2 + 9)$

$\log_6(4x^2) = \log_6(3x^2 + 9)$

Logarithmus ist gleich, deshalb kann der Numerus direkt verglichen werden.

$4x^2 = 3x^2 + 9 \quad | - 3x^2$

$x^2 = 9$

$x_{1/2} = \pm 3$

Probe:

$x_1 = 3$

$2 \cdot \log_6(2 \cdot 3) = \log_6(3 \cdot 3^2 + 9)$

$2 \cdot \log_6(6) = \log_6(36)$

$\log_6(6^2) = \log_6(36)$

$\log_6(36) = \log_6(36)$

Wahre Aussage

$x_1 = -3$

$2 \cdot \log_6(2 \cdot (-3)) = \log_6(3 \cdot (-3)^2 + 9)$

$2 \cdot \log_6(-6) = \log_6(36)$

Keine wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Beispiel 127:

$\log_{10}(2x+1) = \log_{10}(x+5)$

Logarithmus ist gleich, deshalb kann der Numerus direkt verglichen werden.

$2x+1 = x+5 \quad | -x$

$x+1 = 5 \quad | -1$

$x = 4$

Probe:

$\log_{10}(2x+1) = \log_{10}(x+5)$

$x = 4$

$\log_{10}(2 \cdot 4 + 1) = \log_{10}(4+5)$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{4\}$

Beispiel 128:

$\log_2(x) = \log_2(2x+2)$

Logarithmus ist gleich, deshalb kann der Numerus direkt verglichen werden.

$x = 2x+2 \quad | -2x$

$-x = 2 \quad |:(-1)$

$x = -2$

Probe:

$\log_2(x) = \log_2(2x+2)$

$x = -2$

$\log_2(-2) = \log_2(2 \cdot (-2) + 2)$

Keine wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

Logarithmen zusammenfassen mit den Gesetzmäßigkeiten

Definition 40:

Um Summen und Differenzen bei den Logarithmen zusammenfassen zu können, werden ebenfalls die Logarithmengesetze zu Hilfe gezogen.

$$\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(b \cdot c)$$

$$\log_a(b) - \log_a(c) = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$$

Beispiel 129:

$\log_{10}(-x) + \log_{10}(x + 20) = 2$

$\log_{10}(-x \cdot (x + 20)) = 2$

$\log_{10}(-x^2 - 20x)) = 2$

$10^2 = -x^2 - 20x \quad | - 100$

$-x^2 - 20x - 100 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-100)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{20 \pm 0}{-2} = -10$

Probe:

$\log_{10}(-x) + \log_{10}(x + 20) = 2$

$x = -10$

$\log_{10}(10) + \log_{10}(-10 + 20) = 2$

$\log_{10}(10) + \log_{10}(10) = 2$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{-10\}$

Beispiel 130:

$\log_2(5x+1) - \log_2(x-1) = 3$

$\log_2\left(\frac{5x+1}{x-1}\right) = 3$

$2^3 = \frac{5x+1}{x-1} \quad | \cdot (x-1)$

$8(x-1) = 5x+1$

$8x - 8 = 5x + 1 \quad | - 5x$

$3x - 8 = 1 \quad | + 8$

$3x = 9 \quad |: 3$

$x = 3$

Probe:

$\log_2(5x+1) - \log_2(x-1) = 3$

$x = 3$

$\log_2(5 \cdot 3 + 1) - \log_2(3-1) = 3$

$\log_2(16) - \log_2(2) = 3$

$3 = 3$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Kombination von verschiedenen Logarithmusgesetzen

Beispiel 131:

$\log_{10}(10x^3) + \log_{10}(x) - \log_{10}(x^4) + \log_{10}(x) = 1$

$\log_{10}(10x^4) - \log_{10}(x^4) + \log_{10}(x) = 1$

$\log_{10}\left(\frac{10x^4}{x^4}\right) + \log_{10}(x) = 1$

$\log_{10}(10) + \log_{10}(x) = 1$

$\log_{10}(10x) = 1$

$10x = 10^1$

$x = 1$

Probe:

$\log_{10}(10 \cdot 1^3) + \log_{10}(1) - \log_{10}(1^4) + \log_{10}(1) = 1$

$\log_{10}(10) + 0 - 0 + 0 = 1$

$1 = 1$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Beispiel 132:

$\log_3(2x-3)-\log_3(x+2)-2=0$

$\log_3\left(\frac{2x-3}{x+2}\right)=2$

$3^2=\frac{2x-3}{x+2}\quad |\cdot(x+2)$

$9(x+2)=2x-3$

$9x+18=2x-3\quad |-2x$

$7x+18=-3\quad |-18$

$7x=-21\quad |:7$

$x=-3$

Probe:

$\log_3(2x-3)-\log_3(x+2)-2=0$

$x=-3$

$\log_3(2\cdot(-3)-3)-\log_3(-3+2)-2=0$

$\log_3(-9)-\log_3(-1)-2=0$

Keine wahre Aussage

$$\mathbb{L}=\{\quad\}$$

Exponentialgleichungen

Definition 41:

Wichtig Vorkenntnisse für das Lösen von Exponentialgleichungen sind:

Potenzgesetze

Logarithmusgesetze

Substitution

Definition einer Exponentialgleichung

Definition 42:

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Exponenten der Potenz vorkommt.

Beispiel 133:

$2^x = 8$

$x = 3$

Beispiel 134:

$\sqrt[x]{27} = 3$

$x = 3$

Besonderheiten bei Exponentialgleichungen

Bei besonderen Formen von Exponentialgleichungen kann man ohne Rechnung erkennen, dass es keine Lösung gibt.

Beispiel 135:

$2^x = -8$

Definition 43:

Eine Potenz mit positiver Basis kann niemals Null oder negativ werden.

Lösungsverfahren mit Exponentenvergleich

Definition 44:

Das Lösungsverfahren Exponentenvergleich kann immer dann benutzt werden, wenn eine Exponentialgleichung aus zwei Potenzen mit gleicher Basis besteht.

Auch hier muss immer eine Überprüfung der Ergebnisse anhand einer Probe stattfinden.

Beispiel 136:

$2^x = 2^7$

$x = 7$

Definition 45:

Wenn die beiden Basen der Potenzen gleich sind, dann kann man daraus auch die Gleichheit der Exponenten folgern.

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass keine Logarithmen gebraucht werden.

Beispiel 137:

$3^{x+3} = 3^{2x}$

$x + 3 = 2x \quad | - x$

$x = 3$

$\mathbb{L} = \{3\}$

Lösungsverfahren mit Umformung der Basen

Definition 46:

Wenn die Basen unterschiedlich sind, müssen alle Potenzen auf die gleiche Basis gebracht werden.

Auch hier muss immer eine Überprüfung der Ergebnisse anhand einer Probe stattfinden.

Beispiel 138:

$8^{x+3} = 2^{x+10}$

$(2^3)^{x+3} = 2^{x+10}$

$(2)^{3(x+3)} = 2^{x+10}$

$2^{3x+9} = 2^{x+10}$

$3x + 9 = x + 10 \quad | - x$

$2x + 9 = 10 \quad | - 9$

$2x = 1 \quad |: 2$

$x = \frac{1}{2}$

Probe:

$8^{\frac{1}{2}+3} = 2^{\frac{1}{2}+10}$

$8^{\frac{7}{2}} = 2^{\frac{21}{2}}$

$2^{3 \cdot \frac{7}{2}} = 2^{\frac{21}{2}}$

$2^{\frac{21}{2}} = 2^{\frac{21}{2}}$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Lösungsverfahren für Exponentialgleichungen mit 3 Summanden

Definition 47:

Exponentialgleichungen mit drei Summanden können im Regelfall nicht durch logarithmieren gelöst werden.

Die Lösung erfolgt durch Substitution.

Beispiel 139:

$3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

Nun sieht man sehr leicht, dass man $u = 3^x$ substituieren kann.

$u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = 1$$

Rücksubstitution:

$u = 3^x$

$1 = 3^x$

$x = 0$

Probe:

$3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

$3^{2 \cdot 0} - 2 \cdot 3^0 + 1 = 0$

$0 = 0$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{0\}$

Verfahren für Exponentialgleichungen mit 3 Summanden ohne Absolutglied

Definition 48:

Exponentialgleichungen mit drei Summanden ohne Absolutglied können im Regelfall nicht durch logarithmieren gelöst werden.

Die Lösung erfolgt durch Substitution.

Beispiel 140:

$5^{3x} - 2 \cdot 5^{2x} + 5^{x} = 0$

Substitution $5^{x} = u$

$u^3 - 2u^2 + u = 0$

$u(u^2 - 2u + 1) = 0$

$u_1 = 0$

$u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = 1$$

$u_2 = 1$

Rücksubstitution:

$u_1 = 0$

$5^{x} = u$

$5^{x} = 0$

Geht nicht

$u_2 = 1$

$5^{x} = u$

$5^{x} = 1$

$x = 0$

Probe:

$5^{3x} - 2 \cdot 5^{2x} + 5^{x} = 0$

$u_1 = 0$

$5^{3 \cdot 0} - 2 \cdot 5^{2 \cdot 0} + 5^{x0} = 0$

$0 = 0$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{0\}$

Verfahren für Exponentialgleichungen mit 3 Summanden

Definition 49:

Angleichung der Basen.

Die Lösung erfolgt durch Substitution.

Beispiel 141:

$4^{3x-1} - 2^{3x+5} + 1024 = 0$

$(2^2)^{3x-1} - 2^{3x+5} + 1024 = 0$

$2^{6x-2} - 2^{3x+5} + 1024 = 0$

$2^{6x-2} - 2^{3x+5} + 1024 = 0$

$2^{-2} \cdot 2^{6x} - 2^5 \cdot 2^{3x} + 1024 = 0$

$\frac{1}{4} \cdot 2^{6x} - 32 \cdot 2^{3x} + 1024 = 0$

Substitution: $2^{3x} = u$

$\frac{1}{4} \cdot u^2 - 32 \cdot u + 1024 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1024}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 64$$

$u = 64$

Rücksubstitution:

$u = 64$

$2^{3x} = u$

$2^{3x} = 64$

$2^{3x} = 2^6$

$3x = 6 \quad |:3$

$x = 2$

Probe:

$4^{3x-1} - 2^{3x+5} + 1024 = 0$

$x = 2$

$4^{3\cdot 2-1} - 2^{3\cdot 2+5} + 1024 = 0$

$0 = 0$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{2\}$

Lineare Algebra

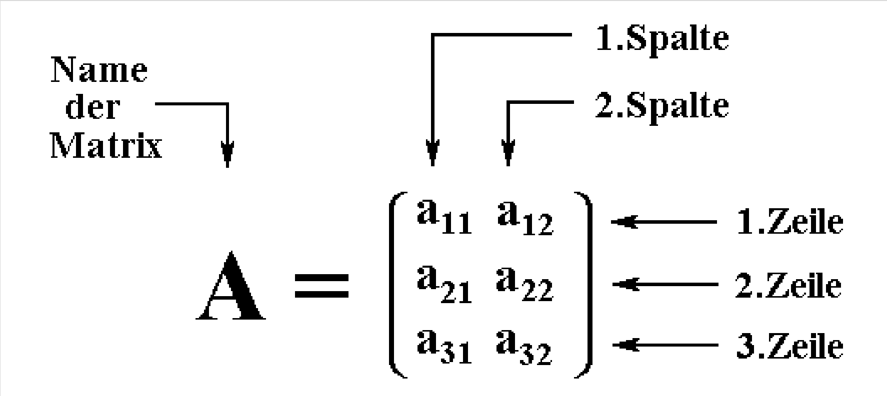
Grundlegende Definitionen zu Matrizen

Definition 50:

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema.

Die Matrix (Mehrzahl: Matrizen) besteht aus waagerecht verlaufenden Zeilen und senkrecht verlaufenden Spalten.

Verdeutlichung am Beispiel:



Beispiel 142:

Eine Matrix sieht z.B. so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

oder z.B. auch so:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, werden in einer Matrix Zahlen ähnlich wie in einer Tabelle angeordnet.

Daher spricht man auch von Zeilen und Spalten einer Matrix.

Definition 51:

Wenn also eine Matrix m Zeilen und n Spalten hat, spricht man von einer (mxn)-Matrix.

Aber auch das ist eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 6:

Jeden Vektor kann man auch als Matrix auffassen, in diesem Fall als (3x1)-Matrix. Dabei steht die erste Zahl für die Anzahl der Zeilen, also in diesem Fall 3 und die zweite Zahl für die Anzahl der Spalten, hier also 1.

Typ einer Matrix

Definition 52:

Hat eine Matrix m Zeilen und n Spalten, so sagt man, dass die Matrix vom Typ (m,n) ist, z.B. ist die Matrix A (siehe Bild) vom Typ (3,2).

Warum werden Matrizen verwendet?

Ein wichtiges Prinzip in der Mathematik ist die **Abstraktion realer Probleme in mathematische Konzepte und Systeme**, was dann häufig dazu führt, auf schnellerem Weg zur Lösung kommen zu können.

Eine dieser Abstraktionen, welche in vielen Fällen Anwendungsmöglichkeiten bereithält, ist die Matrizen-Schreibweise.

Im Folgenden wollen wir zunächst definieren, um was es sich dabei genau handelt, und einige Ergebnisse aufzeigen, die uns in die Lage versetzen, diese Schreibweise sinnvoll und hilfreich einsetzen zu können.

Matrizenarten und die Darstellung

Quadratische Matrizen

Inder Folge bezieht sich alles auf quadratische Matrizen. Auf andere Matrizen kann dieses nicht bezogen werden. Auf das Ende der quadratischen Matrizen wir nochmals gesondert hingewiesen.

Wie schon oben erwähnt, handelt es sich bei den quadratischen Matrizen um solche, bei denen die Zahl der Spalten gleich der Zahl der Zeilen ist. Eine typische quadratische Matrix hat also die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition 53:

Matrizen, die die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten (m=n) besitzen, heißen quadratisch.

Aufgrund ihrer speziellen Gestalt können nun unter den quadratischen Matrizen einige weitere interessante Spezialfälle auftreten:

Diagonalmatrizen "D"

Definition 54:

Hierbei handelt es sich um quadratische Matrizen, welche höchstens auf der Diagonalen (von links oben nach rechts unten) von Null verschiedene Einträge besitzen,

d.h. $a_{ij} = 0$ gilt, falls $i \neq j$ ist.

Allgemeine Gestalt:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 143:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix "E"

Definition 55:

Die Einheitsmatrix ist ein Spezialfall der Diagonalmatrizen. Sie ist nämlich diejenige Diagonalmatrix, bei der alle von Null verschiedenen Einträge gleich 1 sind,

d.h. $a_{ii} = 1$ für alle $i=1,\dots,n$ und $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Gestalt:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix R (bzw. L)

Definition 56:

Bei oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen handelt es sich um solche quadratischen Matrizen, bei denen nur die Einträge auf oder rechts oberhalb (bzw. auf oder links unterhalb) der Diagonalen von Null verschieden sein dürfen,

d.h. für R gilt $a_{ij} = 0$, falls $i > j$ ist und für L gilt $a_{ij} = 0$, falls $i < j$ ist.

Allgemeine Gestalt:

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 144:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 145:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Spur einer quadratischen Matrix

Definition 57:

Für quadratische Matrizen **A** definiert man die **Spur sp(A)** als Summe der Einträge auf der Diagonalen,

d. h. sp(A) = $a_{11} + a_{22} + a_{nn}$.

Bemerkung 7:

- Bei der Einheitsmatrix E erhält man damit genau die Anzahl der Zeilen (bzw. Spalten): sp(E) = n.
- Ist sp(a)=0 so spricht man: "Die Matrix ist spurfrei"
- Es gilt $sp(A) = sp(A^{-1})$
- Anwendung in der Physik

Beispiel 146:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow sp(A) = 1 + 5 + 9 = 15$$

Definition 58:

Für beliebige quadratische Matrizen gilt

Spur(AB) = Spur(BA)

Beispiel 147:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ -2 & 33 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{sp(AB)} = \mathrm{sp(BA)} = 33$$

Symmetrische Matrizen

Definition 59:

Bei symmetrischen Matrizen handelt es sich um solche quadratischen Matrizen, die gleich ihrer transponierten Matrix sind,

d.h. für die A = A^T gilt.

Das ist genau dann der Fall, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i,j=1,...,n gilt.

Beispiel 148:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Anschaulich bedeutet A = A^T, dass man die Einträge der Matrix längs der Diagonalen spiegeln kann.

Antisymmetrische oder schiefsymmetrische Matrizen

Definition 60:

Der Unterschied zu den symmetrischen Matrizen besteht hier darin, dass nicht die Gleichung

$A = A^T$, sondern

$A = -A^T$ erfüllt sein muss.

Es muss also

$a_{ij} = -a_{ji}$

für alle i,j=1,...,n gelten.

Wegen $a_{ii} = -a_{ii}$ müssen in diesem Fall die Einträge auf der Diagonalen alle Null sein.

Beispiel 149:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -A^T$$

Bemerkung 8:

Leicht zu erkennen ist, dass die Spur einer antisymmetrischen Matrix gleich Null ist, da ja alle Einträge auf der Diagonalen gleich Null sind.

(Beachte aber, dass die Umkehrung nicht gilt. Es gibt sehr wohl Matrizen mit Spur 0, die nicht antisymmetrisch sind.)

Nullmatrix

Definition 61:

Sind alle Elemente einer Matrix gleich Null, so heißt sie Nullmatrix.

Beispiel 150:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Normale Matrizen

Eine letzte Klasse von besonderen quadratischen Matrizen wollen wir an dieser Stelle noch vorstellen, auch wenn wir erst später genau erläutern können, was genau mit dieser Eigenschaft eigentlich gemeint ist.

Definition 62:

Normale Matrizen sind solche quadratischen Matrizen, für die die Gleichung

$A \cdot A^T = A^T \cdot A$ erfüllt ist.

Wobei wir erst im nächsten Abschnitt sehen werden, was mit der Multiplikation der Matrizen A und A^T gemeint ist.

Trotzdem können wir bereits einige Matrizen als normal identifizieren:

Bemerkung 9:

Sicherlich ist die geforderte Eigenschaft für symmetrische Matrizen erfüllt, da für diese ja sogar $A = A^T$ gilt.

Ebenso sollte es nicht überraschen, dass sich herausstellen wird, dass auch antisymmetrische Matrizen normal sind, da sich in diesem Fall ja schließlich A und A^T nur um ein Vorzeichen unterscheiden, welches bei der Vertauschung der Multiplikationsreihenfolge keine Probleme bereiten wird.

Hier ist die Einschränkung auf quadratische Matrizen zu Ende.

Rechenoperationen für Matrizen

Hier wollen wir die möglichen Rechenoperationen für Matrizen einführen, also die Frage klären, unter welchen Umständen es beispielsweise möglich ist, Matrizen zu addieren oder zu multiplizieren. Dass dies nicht in jedem Fall möglich ist, sollte verständlich erscheinen, da die Frage nach der Addition von Matrizen mit unterschiedlicher Anzahl von Zeilen oder Spalten doch schwierig zu beantworten erscheint.

Transponieren einer Matrix

Definition 63:

Ein Matrix A wird transponiert, indem man die Zeilen und Spalten vertauscht. Anschaulich entsteht die transponierte Matrix durch Spiegelung der Ausgangsmatrix an ihrer Hauptdiagonale.

Es gibt keine Voraussetzungen. Jede Matrix lässt sich transponieren.

Beispiel 151:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Typ oder Ordnung einer Matrix

Definition 64:

Der Typ oder die Ordnung einer Matrix ist die Angabe der Zeilen- und Spalten-Zahl, die (in dieser Reihenfolge!) mit einem "Multiplikations-Kreuz" × oder einem Komma verbunden werden. Hat eine Matrix also n Zeilen und m Spalten, dann ist ihr Typ bzw. ihre Ordnung n× m oder Typ (n,m).

Gleichheit von Matrizen

Auch für spätere Rechnungen ist es natürlich wichtig zu wissen, was wir meinen, wenn wir sagen zwei Matrizen seien gleich. Die Definition dafür ist naheliegend:

Definition 65:

Zwei Matrizen $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ sind genau dann gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind (d.h. wenn sie die gleiche Anzahl Zeilen wie Spalten besitzen) und jeder ihrer Einträge gleich ist, d.h. für alle i=1,...,m und j=1,...,n gilt $a_{ij} = b_{ij}$.

Bemerkung 10:

Matrizen von verschiedenem Typ können nicht gleich sein. So ist beispielsweise die Nullmatrix vom Typ (3,2) nicht gleich der Nullmatrix vom Typ (2,3), auch wenn sie mit dem gleichen Namen bezeichnet wird.

Addition/Subtraktion von Matrizen

Auch hierbei muss man sich auf Matrizen vom gleichen Typ beschränken, um eine Addition erklären zu können. Die funktioniert dann wie folgt:

Definition 66:

Sind A = (a_{ij}) mit i=1,...,m, j=1,...,n und B = (b_{ij}) mit i=1,...,m, j=1,...,n vom gleichen Typ (m,n), so ist A + B := (a_{ij}+b_{ij}) mit i=1,...,m, j=1,...,n.

Es werden also die einzelnen Einträge der Matrizen addiert.

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b12 & \cdots & a_{1n}+b1n \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 152:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion wird analog definiert.

Allgemein

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b1n \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 153:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für die Addition/Subtraktion:

Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz:

Definition 67:

A + B = B + A

(A + B) + C = A + (B + C)

Die Regeln folgen direkt aus den Rechenregeln für reelle Zahlen.

Außerdem gilt die Gleichung $(A+B)^T = A^T + B^T$, was direkt aus der Definition der transponierten Matrix und der Addition folgt.

Für die Subtraktion gilt keines der Gesetze.

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl (Skalar)

Definition 68:

Eine Matrix A von beliebigem Typ (m,n) kann mit einer beliebigen reellen Zahl α multipliziert werden, indem jeder Eintrag der Matrix a_{ij} mit α multipliziert wird, d.h.

$\alpha * A = \alpha * (a_{ij}) = (\alpha * a_{ij})$.

Allgemein:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 154:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

Auch hier gelten die zu erwartenden Rechenregeln:

Definition 69:

Kommutativgesetz $\alpha * A = A * \alpha$ (wobei hier erwähnt werden muss, dass die Multiplikation mit α von links natürlich analog zu der Multiplikation von rechts definiert ist.)

Assoziativgesetz $\alpha * (\beta * A) = (\alpha * \beta) * A$

Distributivgesetz $(\alpha + \beta) * A = \alpha * A + \beta * A$ und $\alpha * (A + B) = \alpha * A + \alpha * B$

Analog zur Multiplikation mit einer reellen Zahl α wird die Division durch eine reelle Zahl $\gamma \neq 0$ durch die Multiplikation mit $1/\gamma$ erklärt.

Multiplikation von Matrizen

An dieser Stelle wird es nun etwas komplizierter, da im Allgemeinen zwei Matrizen vom gleichen Typ (m,n) nicht miteinander multipliziert werden können.

Wir werden sehen, dass dies nur für quadratische Matrizen gilt.

Definition 70:

Zwei Matrizen A und B sind genau dann miteinander multiplizierbar, wenn die Anzahl der Spalten von A der Anzahl der Zeilen von B entspricht. Ist also **A** eine Matrix vom Typ (m,n), so muss B eine Matrix vom Typ (n,k) sein.

Wie man bereits hier sehen kann, ist die Multiplikation von Matrizen i.A. nicht kommutativ.

Es gilt sogar: Ist das Produkt **A*B** definiert, so existiert das Produkt **B*A** i.A. gar nicht, denn ist **A** eine Matrix vom Typ (n,m) und **B** eine Matrix vom Typ (k,n), so passen zwar die Spalten von **A** und die Zeilen von **B** zusammen, jedoch nicht die Spalten von **B** und die Zeilen von **A** (zumindest nicht, so lange m ≠ k ist).

Definition 71:

Das Ergebnis der Multiplikation der beiden Matrizen A und B hat so viele Zeilen wie die Matrix A und so viele Spalten wie die Matrix B.

Daraus folgt natürlich auch, dass die Reihenfolge bei der Multiplikation (d.h. welche Matrix links und welche rechts steht) wichtig ist, da dies ja gerade die Nichtkommutativität bedeutet.

Definition 72:

Ist nun **A** = **(a_{ij})** mit i=1,...,m, j=1,...,n eine Matrix vom Typ (m,n) und **B** = **(b_{ij})** mit i=1,...,n, j=1,...,k eine Matrix vom Typ (n,k), so definieren wir **A*B** als Matrix **C** = **(c_{ij})** mit i=1,...,m, j=1,...,k, d.h. als Matrix vom Typ (m,k), wobei die einzelnen Einträge definiert sind als

$$c_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} \cdot b_{\lambda j} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Der Eintrag $\mathbf{c_{ij}}$ ergibt sich also als Summe der Produkte der Einträge der i-ten Zeile von **A** mit der j-ten Spalte von **B**.

Man erhält also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda k} \end{pmatrix}$$

Beispiel 155:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 8 \\ 0 & 50 & -5 \\ 6 & -28 & 6 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Da die Rechenregel doch etwas komplizierter ist, gibt es eine Möglichkeit, sich das Ganze etwas anschaulicher aufzuschreiben:

Falk-Schema

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{2\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda} \cdot b_{\lambda k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 1} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda 2} & \cdots & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{m\lambda} \cdot b_{\lambda k} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

An dieser Darstellung kann man gut erkennen, was tatsächlich gemacht wird. Der Eintrag in der Ergebnismatrix ist immer die Summe der Produkte der Zeile und Spalte der beiden ursprünglichen Matrizen, welche sich, wenn man sie sich verlängert denkt, genau an dieser Stelle treffen würden.

Unser Beispiel sieht also folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & 16 & 8 \\ 0 & 50 & -5 \\ 6 & -28 & 6 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Inverse Matrizen

Es bleibt uns hier noch eine letzte Definition zu klären.

Beispiel 156:

Wiederholung: Potenzgesetze

Laut den Potenzgesetzen gilt:

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$5^1 \cdot 5^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$4^1 \cdot 4^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Multipliziert man eine Zahl mit ihrem Kehrwert, lautet das Ergebnis stets 1.

Was für Zahlen funktioniert, geht auch bei Matrizen (zumindest so ähnlich).

Bemerkung 11:

Vor einigen Jahrzehnten hat man zur inversen Matrix noch "Kehrmatrix" gesagt. Bei diesem Begriff hört man wenigstens noch die Verwandtschaft zum "Kehrwert" heraus.

Da wir nun eine Multiplikation von Matrizen eingeführt haben, stellt sich natürlich die Frage, ob man auch durch Matrizen teilen kann, was ja letztendlich die gleiche Frage ist, ob es zu einer gegebenen Matrix **A** eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ gibt, so dass $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ ergibt.

Die Einheitsmatrix spielt, wie man bei den Rechenregeln zur Multiplikation von Matrizen gesehen hat, die Rolle der **1**, da sie bei der Multiplikation mit anderen Matrizen diese nicht verändert.

Die Frage ist nicht so einfach zu beantworten, da man für eine allgemeine Antwort noch weitere mathematische Konzepte benötigt, was hier allerdings den Rahmen sprengen würde.

Wir sehen uns als Beispiel eine (2,2)-Matrix an.

Sei eine Matrix **A** mit folgender Gestalt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Gilt für diese Matrix **A**: ad-bc ≠ 0, so können wir eine inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ definieren, durch

Definition 73:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Durch einfaches Ausmultiplizieren erhält man dann

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Beispiel 157:

Nehmen wir folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Dann ist ad-bc = 1*4-2*3 = -2, und somit erhalten wir unsere inverse Matrix

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Rechenregeln:

Definition 74:

$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^p$

Gauß-Jordan-Algorithmus

Bei den reellen Zahlen ist zu jeder Zahl x eine Inverse X^{-1} definiert mit der Eigenschaft, dass $X*X^{-1} = 1$. Ähnlich definiert man bei Matrizen:

Eine Inverse Matrix existiert wenn:

Definition 75:

Sei ***X*** eine quadratische Matrix. Die Inverse von ***X*** ist, sofern sie überhaupt existiert, jene Matrix $\boldsymbol{X}^{-1}$, für die gilt: $\boldsymbol{X}*\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}^{-1}*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ *(Einheitsmatrix)*

Im Gegensatz zu reellen Zahlen (außer der Zahl Null), bei denen die Inverse immer existiert, existiert die Inverse einer Matrix ***X*** nur, wenn X quadratisch ist und wenn außerdem gilt:

Existenz der Inversen:

Definition 76:

$\boldsymbol{X}^{-1}$ existiert nur dann, wenn $\det(\boldsymbol{X}) \neq 0$.

Regeln für die Bildung der Inversen

Definition 77:

Man bildet die Inverse am einfachsten wie folgt:

1. Man setzt rechts neben X die Einheitsmatrix I

2. Man transformiert durch elementare Zeilenumformungen (Nicht Spaltenumformungen!!) die Matrix X in die Einheitsmatrix. Alle diese elementaren Zeilenumformungen werden gleichzeitig auch mit der Matrix I durchgeführt. Dadurch wird I zu X-1

3. Zeilen dürfen vertauscht werden.

Beispiel 158:

Berechnen der Inversen von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vertauschen der 1. und der 2. Zeile:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Addieren des -1-fachen der 1. Zeile auf die 2. Zeile:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Addieren des -3-fachen der 1. Zeile auf die 3. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ Addieren des -1-fachen der 2. Zeile auf die 3. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ Addition der 3. Zeile auf die erste Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ Multiplikation der 3. Zeile mit -1/2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$ Addieren des 3-fachen der 3. Zeile auf die 2. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5/2 & 2 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Probe: Multiplikation der Matrix mit ihrer Inversen muss ***I*** ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5/2 & 2 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reguläre Matrix

Definition 78:

Die **reguläre**, **invertierbare** oder **nichtsinguläre Matrix** ist ein Begriff aus dem mathematischen Teilgebiet der linearen Algebra. Eine quadratische Matrix A ist invertierbar, wenn eine weitere Matrix *B* existiert, so dass

$$A \cdot B = E$$

gilt, wobei *E* die Einheits-Singulär-Matrix bezeichnet. In diesem Fall gilt auch

$$B \cdot A = E.$$

Also Matrizen die invertierbar sind heißen reguläre Matrizen.

Singuläre Matrix

Definition 79:

Umgekehrt werden nicht-invertierbare Matrizen als singuläre Matrizen bezeichnet.

Zeilenstufenform

Definition 80:

Jede beliebige Matrix kann in Zeilenstufenform umgewandelt werden. Doch was ist diese Zeilenstufenform überhaupt und wie berechnet man sie?

Bevor wir die Zeilenstufenform definieren können, müssen wir einige Begriffe einführen.

Eine Nullzeile ist eine Zeile, in der nur Nullen stehen, die anderen Zeilen sind Nichtnullzeilen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Beispiel ist die dritte Zeile eine Nullzeile. Die erste und zweite Zeile sind Nichtnullzeilen.

Das erste von Null verschiedene Element einer Nichtnullzeile nennen wir den **Zeilenführer** dieser Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenführer sind im Beispiel rot markiert.

Jetzt können wir endlich die Zeilenstufenform definieren.

Definition 81:

Eine Matrix ist in Zeilenstufenform, falls gilt:

Alle Nichtnullzeilen stehen oberhalb aller Nullzeilen.

Ein Zeilenführer steht stets in einer Spalte rechts vom Führer der Zeile darüber.

Alle Einträge unterhalb des Zeilenführers sind Null.

Beispiel einer Matrix in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 12:

Charakteristisch für die Zeilenstufenform ist, dass die Zeilenführer wie Treppenstufen angeordnet sind - also nach unten wandern. Demnach kann in einer Spalte maximal ein Zeilenführer auftreten!

Bemerkung 13:

Praktische Bedeutung

Liegt eine Matrix in Zeilenstufenform vor, kann man ganz leicht den Rang der Matrix ablesen.

Berechnung der Zeilenstufenform

So weit, so gut. Jetzt wissen wir, was die Zeilenstufenform ist. Doch wie berechnet man sie?

Definition 82:

Die Zeilenstufenform erhält man durch sog. "elementare Zeilenumformungen".

Man darf Zeilen...

vertauschen

mit einer Zahl multiplizieren

durch eine Zahl dividieren

addieren

subtrahieren

Bemerkung 14:

Der Gauß-Algorithmus ist ein populäres Verfahren, welches ein Gleichungssystem bzw. eine Matrix in Zeilenstufenform umwandelt.

Beispiel 159:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III)-I)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II)+I)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 160:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III)-I)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II)+2\cdot I)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III)+II)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Normierte Zeilenstufenform

Eine Matrix in Zeilenstufenform ist in normierter Zeilenstufenform, wenn sie zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

Definition 83:

Jeder Zeilenführer hat den Wert 1

Jeder Zeilenführer ist der einzige Eintrag in seiner Spalte, der nicht gleich Null ist.

Beispiel 161:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$ lauten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Rang von Matrizen

Vorbetrachtung

Wir wissen, dass man eine Matrix als eine Anordnung von Spaltenvektoren bzw. Zeilenvektoren sehen kann. Diese Vektoren können linear abhängig oder linear unabhängig sein.

Lineare Abhängigkeit: besteht dann, wenn ein Vektor ein Vielfaches eines anderen Vektors ist, z.B.:

$$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dann sind a und b linear abhängig, weil

$$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{b}$$

Definition 84:

Lineare Abhängigkeit: Das bedeutet, es existiert eine reelle Zahl c $(c \in \mathbb{R})$, so dass $c \cdot a = b$, dann sind die beiden Vektoren a und b linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit: falls es kein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $c \cdot a = b$ gilt,
dann sind die beiden Vektoren a und b linear unabhängig.

Beispiel 162:

$$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man findet hier keinen Faktor c.

Bemerkung 15:

Der Nullvektor nimmt eine “Sonderstellung” ein. Kein Vektor ist linear unabhängig vom Nullvektor, da jeder Vektor durch “Stauchung” mit dem Faktor 0 in den Nullvektor übergeführt werden kann.

Definition 85:

In einer Matrix A ist die größte Anzahl r der linear unabhängigen Spaltenvektoren stets gleich der größten Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Diese Zahl r wird als Rang der Matrix bezeichnet (r=Rg(A)).

Beispiel 163:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zuerst die Spalten der Matrix, also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da zwischen einem Nullvektor und einem beliebigen anderen Vektor stets lineare Abhängigkeit besteht, haben wir einen linear unabhängigen Spaltenvektor.

Nun betrachten wir die Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist unschwer zu erkennen, dass die beiden Vektoren identisch sind (linear abhängig)

$1 \cdot (2 \quad 0) = (2 \quad 0)$

Also haben wir auch hier einen linear unabhängigen (Zeilen-)Vektor.

Der Rang der Matrix A ist dementsprechend 1.

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zuerst wieder die Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

der erste und der dritte Spaltenvektor sind linear abhängig.

Der zweite Vektor,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist vom ersten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Linear unabhängig.

Wir haben zwei unabhängige Spaltenvektoren.

Jetzt betrachten wir die Zeilenvektoren

$(1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 0 \quad 3), (2 \quad 0 \quad 6)$

man erkennt, dass

$3 \cdot \ (1 \quad 0 \quad 3) = (2 \quad 0 \quad 6)$

der zweite und der dritte Zeilenvektor sind linear abhängig.

Wir haben also zwei linear unabhängige Zeilenvektoren.

Der Rang ist demnach 2.

Definition 86:

Das unterscheiden zwischen Spaltenrang und Zeilenrang ist nicht notwendig, denn es handelt sich dabei immer um die gleiche Zahl handelt. Man spricht daher auch allgemein vom **Rang der Matrix** A und bezeichnet diesen mit Rang A.

Eine Matrix A wird mit dem Gauss'schen Eliminationsverfahren auf Stufenform gebracht. Der Rang von A ist dann die Anzahl der Zeilen, die nicht aus lauter Nullen bestehen.

Die Berechnung erfolgt immer mit dem Gauß'schen Algorithmus.

Beispiel 164:

Zeilenrang:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal (-2) und auf die dritte Zeile addieren

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Also ergibt sich der Rang=2

Spaltenrang:

Ich nehme hier nur die Transponierte, damit man wie beim Gauß'schen Algorithmus rechnen kann. (Dreieck mit Nullen)

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal (-1) und auf die dritte Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal (-2) und auf die vierte addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Wie man hier sieht sind die letzten drei Zeilen l. a. also ist der Spaltenrang=2

Beispiel 165:

Zeilenrang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Gauss ergibt:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenrang=2

Spaltenrang:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ Die erste Zeile mal (-2) und auf die zweite Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ Die erste Zeile mal (-3) und auf die dritte Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wie man hier sieht sind die letzten beiden Zeilen l. a. also ist der Spaltenrang=2

Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen

Der Rangbegriff ist bei der Aufklärung der Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme von fundamentaler Bedeutung.

Die Lösbarkeit von LGS lässt sich mit Hilfe von erweiterten (Koeffizienten-)Matrizen untersuchen.

Rangkriterien zur Lösbarkeit von LGS

Definition 87:

Ein LGS mit n Variablen besitzt

keine Lösung, falls

$Rang(A) < Rang(A \Leftarrow \vec{b})$

genau eine Lösung, falls

$Rang(A) = Rang\left(A \Leftarrow \vec{b}\right) = n$

unendlich viele Lösungen, falls

$Rang(A) = Rang\left(A \Leftarrow \vec{b}\right) < n$

Beispiel 166:

$3x + 2y = 5$

$x - 4y = 9$

Koeffizientenmatrix A (linke Seite des LGS):

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile mal (-3) und auf die erste addieren

$\begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

daraus ergibt sich der Rang=2

Erweiterte Koeffizientenmatrix (die rechte Seite wird hinzugenommen) b:

$b = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

Ich nehme hier nur die Transponierte, damit man wie beim Gauß'schen Algorithmus rechnen kann. (Dreieck mit Nullen)

$b^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile geteilt durch (2)

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile mal (-3) und auf die erste Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ die zweite Zeile mal (-5) und auf die dritte Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -2 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}$ die erste Zeile mal $\left(-\frac{19}{7}\right)$ und auf die dritte Zeile addieren

$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

daraus ergibt sich der Rang=2

Folgerung für die Lösbarkeit von diesem LGS:

$Rang(A) = Rang(A \Leftarrow \vec{b}) = n$

Damit ist das LGS eindeutig lösbar.

Bild einer Matrix

Gegeben ist folgende Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition 88:

Wir multiplizieren eine Matrix A mit einem beliebigen Vektor x und erhalten den Lösungsvektor b.

Das Bild einer Matrix gibt an, welche Menge an Vektoren als Lösungen auftreten können. Bei Funktionen würde man Wertebereich oder Wertemenge dazu sagen. Das Bild einer Matrix kann man sich also als die Wertemenge der Matrix vorstellen.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, wie wir den Wertebereich der Matrix berechnen können.

Was ist das Bild einer Matrix?

Beispiel 167:

Schauen wir uns folgende Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix multiplizieren wir jetzt nacheinander mit den drei Einheitsvektoren des R^3 und schauen, was passiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die drei Spaltenvektoren unserer Matrix A. Diese drei Vektoren sind ein Bild, d.h. ein Teil der Wertemenge, der Matrix A. Bevor wir weitermachen, halten wir diese Lösung in mathematischer Schreibweise fest:

$$\operatorname{img}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$$

Es gibt jedoch noch mehr Bilder (besser gesagt: unendlich viele), was sich leicht zeigen lässt. Wir multiplizieren die Matrix mit irgendeinem Vektor.

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&4\\3&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}$$

Auch dieser Vektor gehört zum Bild (= Wertemenge) der Matrix.

$$\operatorname{img}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}\right\}$$

Wir haben gerade festgestellt, dass es unendlich viele Bilder einer Matrix gibt.

Alle Vektoren, die aus der Multiplikation der Matrix A mit einem beliebigen Vektor hervorgehen, gehören zum Bild der Matrix.

Diese Lösungsvektoren haben jedoch - wie gerade gezeigt wurde - eine bestimmte Gestalt: Die letzten beiden Vektoren sind z.B. Vielfache voneinander.

Allgemein kann man sagen, dass alle Linearkombinationen dieser Vektoren auch zum Bild der Matrix gehören. Mit diesem Wissen können wir den vierten Vektor bedenkenlos aus dem Bild streichen, da der dritte Vektor diesen gewissermaßen miteinschließt.

$$\operatorname{img}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$$

Stopp! Der dritte Vektor ist ein Vielfaches des ersten Vektors! Was machen wir mit diesem? Richtig, auch von der Liste streichen.

$$\operatorname{img}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\}$$

Die verbleibenden beiden Vektoren sind nicht Vielfache voneinander.

Mathematisch gesprochen: Die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

Wir können das Bild an dieser Stelle nicht weiter vereinfachen, ohne einen Teil der Lösungsmenge zu verlieren. Die Lösungsmenge besteht jetzt also aus diesen beiden Vektoren sowie ihren Linearkombinationen (d.h. auch ihren Vielfachen).

Mit Hilfe der Kenntnisse, die wir uns gerade angeeignet haben, können wir endlich das Bild einer Matrix definieren:

Definition 89:

Das Bild einer Matrix ist gleich den linear unabhängigen Spalten.

Bild einer Matrix berechnen

Definition 90:

Um die linear unabhängigen Spalten zu berechnen, gehen wir folgendermaßen vor:

Transponieren der Matrix

Erzeugen der Zeilenstufenform (ZSF) mittels Gauß-Algorithmus

Transponieren der Matrix

Ablesen der Lösung -> alle Spalten, in denen nicht ausschließlich Nullen vorkommen, gehören zum Bild der Matrix

Beispiel 168:

Von folgender Matrix soll das Bild berechnet werden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.) Transponieren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.) Erzeugen der Zeilenstufenform (ZSF) mittels Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.) Transponieren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

4.) Ablesen der Lösung

Alle Spalten, in denen nicht ausschließlich Nullen vorkommen, gehören zum Bild der Matrix.

$$\text{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Interpretation der Lösung:

Bemerkung 16:

Jede Linearkombination der Lösungsvektoren gehört ebenfalls zum Bild der Matrix A.

Da sich zwei Vektoren in der Lösungsmenge befinden, hat das Bild der Matrix die Dimension 2. Übrigens haben wir damit auch direkt den Rang der Matrix berechnet, da dieser der Dimension des Bildes entspricht.

rang(A)=dim(img(A))=2

Inverse Matrix nach Cramer

Im Folgenden wollen wir mit Hilfe der Cramer'schen Regel die Inverse einer Matrix berechnen.

Oftmals lohnt es sich, vorher zu überprüfen, ob eine Matrix überhaupt eine Inverse besitzt.

Bemerkung 17:

Zu Matrizen in denen Zeilen oder Spalten linear abhängig sind, deren Determinante also 0 beträgt, gibt es keine inverse Matrix.

Dementsprechend kann nur die inverse Matrix berechnet werden, wenn gilt

det(A)≠0

Beispiel 169:

Gegeben ist eine Matrix A. Berechnen Sie die inverse Matrix $A^{-1.}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Die Komponenten der inversen Matrix berechnen sich folgendermaßen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Wie man auf diese Lösungsmatrix kommt, wird im Folgenden gezeigt.

1. Spalte der Lösungsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Multipliziert man die Matrix A mit der 1. Spalte der gesuchten Inversen erhält man das folgende Gleichungssystem. Die 1. Spalte der Einheitsmatrix bildet dabei die rechte Seite des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x_{11} - x_{21} &= 1 \\ x_{11} + 2x_{21} - 2x_{31} &= 0 \\ -x_{21} + x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Wendet man die Cramersche Regel an, erhält man folgende Lösungsformeln für die Unbekannten (der 1. Spalte der inversen Matrix)

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

2. Spalte der Lösungsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Multipliziert man die Matrix A mit der 2. Spalte der gesuchten Inversen erhält man das folgende Gleichungssystem. Die 2. Spalte der Einheitsmatrix bildet dabei die rechte Seite des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x_{12} - x_{22} &= 0 \\ x_{12} + 2x_{22} - 2x_{32} &= 1 \\ -x_{22} + x_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Wendet man die Cramersche Regel an, erhält man folgende Lösungsformeln für die Unbekannten (der 2. Spalte der inversen Matrix)

$$x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

3. Spalte der Lösungsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Multipliziert man die Matrix A mit der 3. Spalte der gesuchten Inversen erhält man das folgende Gleichungssystem. Die 3. Spalte der Einheitsmatrix bildet dabei die rechte Seite des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x_{13} - x_{23} &= 0 \\ x_{13} + 2x_{23} - 2x_{33} &= 0 \\ -x_{23} + x_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Wendet man die Cramersche Regel an, erhält man folgende Lösungsformeln für die Unbekannten (der 3. Spalte der inversen Matrix)

$$x_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Unterdeterminante

Definition 91:

D_{ij} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

Ist die Determinante A gegeben,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

so gibt es z. B. folgende Unterdeterminanten:

D_{11} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die 1-te Zeile und die 1-te Spalte streicht.

$$D_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

D_{13} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die 1-te Zeile und die 3-te Spalte streicht.

$$D_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

D_{32} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die 3-te Zeile und die 2-te Spalte streicht.

$$D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Vorzeichenfaktor

Definition 92:

Der Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+j}$ ordnet jeder Unterdeterminante ein Vorzeichen zu. Dabei ist i der Zeilenindex und j der Spaltenindex. Ist i+j gerade, so ist das Vorzeichen positiv. Ist i+j ungerade, so ist das Vorzeichen negativ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Bemerkung 18:

Als Merkhilfe dient das schachbrettartige Muster. Jeder Position ist eindeutig ein Vorzeichen zugeordnet. Man beginnt oben links mit einem Plus-Zeichen und wechselt anschließend in den Zeilen (und Spalten) Minus und Plus ab.

Kofaktor

Definition 93:

Die Formel für den Kofaktor lautet:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Dabei ist A_{ij} der Kofaktor, der sich aus der Multiplikation eines Vorzeichenfaktors $(-1)^{i+j}$ mit einer Unterdeterminante D_{ij} zusammensetzt.

Bemerkung 19:

Anwendung:

Laplace Entwicklungssatz zur Berechnung von Determinanten

Inverse Matrix berechnen mit Hilfe der Adjunkten

Kofaltormatrix

Aufstellen einer Kofaktormatrix

Definition 94:

Die Elemente der Kofaktormatrix Cof(A) sind die entsprechenden Kofaktoren.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 170:

Berechnen Sie den Kofaktor A_{32}.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Beispiel 171:

Kofaktormatrix einer 2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{vmatrix} = d$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{vmatrix} = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{vmatrix} = -b$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a & \cancel{b} \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{vmatrix} = a$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Wegen dem Vorzeichenfaktor erhalten Elemente, deren Summe aus Zeilennummer i und Spaltennummer j ungerade ist, ein negatives Vorzeichen.

Beispiel 172: Kofaktormatrix einer 3x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & \cancel{e} & f \\ g & \cancel{h} & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ g & \cancel{h} & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & \cancel{c} \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c \\ d & \cancel{e} & f \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & \cancel{c} \\ d & e & \cancel{f} \\ \cancel{g} & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Wegen dem Vorzeichenfaktor erhalten Elemente, deren Summe aus Zeilennummer i und Spaltennummer j ungerade ist, ein negatives Vorzeichen.

Adjunktenverfahren

Definition 95:

Die Adjunkte einer Matrix ist die Transponierte der Kofaktormatrix.

$Adj(A)=Cof(A)^T$

Adjunkte berechnen:

Beispiel 173:

Gegeben ist die Matrix A. Berechnen Sie zu A die Adjunkte.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Kofaktoren berechnen:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 7 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ 5 & \cancel{7} \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & 3 \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = 4$$

Kofaktormatrix aufstellen:

Die Elemente der Kofaktormatrix Cof(A) sind die entsprechenden Kofaktoren.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Kofaktormatrix transponieren:

Die Adjunkte einer Matrix ist die Transponierte der Kofaktormatrix.

$$Adj(A) = Cof(A)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix mit Adjunktenverfahren berechnen

Definition 96:

Die Formel zur Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe der Adjunkten lautet

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)$$

Da die Adjunkte die Transponierte der Kofaktormatrix ist, kann man die obige Formel auch umschreiben zu

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Cof}(A)^T$$

Bemerkung 20:

Vorgehen:

- Berechnen sie die Determinante von A. Wenn die Determinante von A gleich Null ist, gibt es keine Inverse und sie können mit dem Rechnen aufhören
- Ist die Determinante von A ungleich Null, berechnen sie die Kofaktoren.
- Stellen sie die Kofaktormatrix auf.
- Transponieren sie die Kofaktormatrix, um die Adjunkte zu erhalten.
- Setzen Sie die Zwischenergebnisse in die Formel zur Berechnung der inversen Matrix ein

Beispiel 174:

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Berechnen sie die inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten.

1.) Determinante berechnen

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = 13$$

Da die Determinante ungleich Null ist, existiert eine Inverse der Matrix A und wir können weiterrechnen.

2.) Kofaktoren berechnen

Die Formel für den Kofaktor lautet

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Dabei ist A_{ij} der Kofaktor, der sich aus der Multiplikation eines Vorzeichenfaktors $(-1)^{i+j}$ mit einer Unterdeterminante D_{ij} zusammensetzt.

Der Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+j}$ ordnet jeder Unterdeterminante ein Vorzeichen zu. Elemente, deren Summe aus Zeilennummer i und Spaltennummer j ungerade ist, bekommen ein negatives Vorzeichen.

D_{ij} ist die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 7 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} \\ 5 & \cancel{7} \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{4} & 3 \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{7} \end{vmatrix} = 4$$

3.) Kofaktormatrix aufstellen

Die Elemente der Kofaktormatrix $Cof(A)$ sind die entsprechenden Kofaktoren.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

4.) Kofaktormatrix transponieren

Die Adjunkte einer Matrix ist die Transponierte der Kofaktormatrix.

$$Adj(A) = Cof(A)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

5.) Einsetzen der Zwischenergebnisse in die Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

Probe:

Haben wir die inverse Matrix richtig berechnet, so sollte bei der Multiplikation mit der Matrix A die Einheitsmatrix herauskommen.

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Zur Multiplikation der beiden Matrizen verwenden wir das Falk-Schema, welches in dem Artikel Matrrizenmultiplikation vorgestellt wird.

$$\begin{array}{cc|cc} & & \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} \\ & & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ \hline 4 & 3 & x_{11} & x_{12} \\ 5 & 7 & x_{21} & x_{22} \end{array}$$

Die Elemente der Ergebnismatrix berechnen sich zu

$$x_{11} = 4 \cdot \frac{7}{13} + 3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = 1$$

$$x_{12} = 4 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + 3 \cdot \frac{4}{13} = 0$$

$$x_{21} = 5 \cdot \frac{7}{13} + 7 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = 0$$

$$x_{22} = 5 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + 7 \cdot \frac{4}{13} = 1$$

Als Ergebnis der Multiplikation erhalten wir somit die Einheitsmatrix

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit wurde gezeigt, dass wir die inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten korrekt berechnet haben.

Beispiel 175:

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zuerst die Determinante von A,

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 8 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{array}$$

$$= (3 \cdot 0 \cdot 1) + (8 \cdot 1 \cdot 7) + (4 \cdot 1 \cdot 2) - (7 \cdot 0 \cdot 4) - (2 \cdot 1 \cdot 3) - (1 \cdot 1 \cdot 8) = 50.$$

Dann verwenden wir die Adjunktenregel:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 6 & -25 & 1 \\ 2 & 50 & -8 \end{pmatrix}.$$

Determinanten

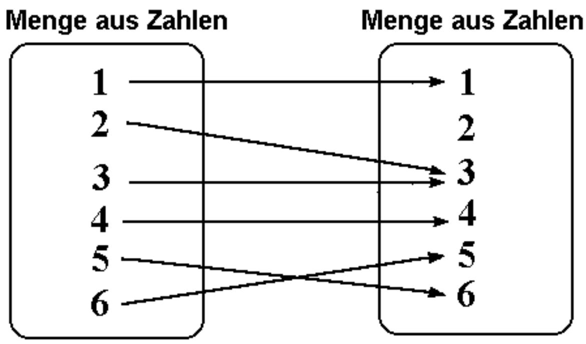
Grundlagen zu Determinanten

Wiederholung: Was ist eine Funktion?

Um das folgende zu verstehen, muss der Begriff der "Funktion" kurz wiederholt werden:

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnungsvorschrift die jedem Element einer Menge genau ein Element einer zweiten Menge zuordnet.

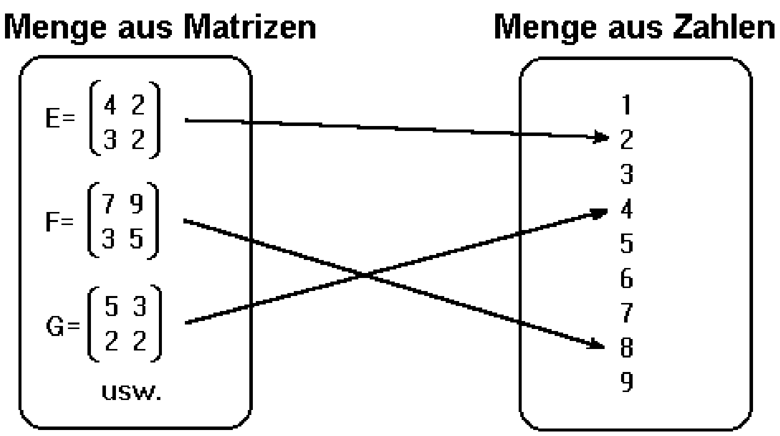
Bei einer "ganz normalen" Funktion wird also einer Zahl wieder eine Zahl zugeordnet. Das Bild zeigt eine solche Funktion:



Diese Funktion ordnet den Zahlen 1 bis 6 der linken Menge eindeutig eine Zahl zu, d.h. jeder Zahl der linken Menge wird genau eine Zahl der rechten Menge zugeordnet.

Die Determinantenfunktion

Man kann aber auch Funktionen definieren, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnen. Zu dieser Art von Funktionen gehört die Determinantenfunktion:



Determinanten

Die Determinantenfunktion ordnet Matrizen einen Funktionswert (Zahl) zu. Diesen Funktionswert nennt man "Determinanten".

Im vorigen Bild gilt z.B.:

Die Determinante der Matrix E ist die Zahl 2, die Determinante der Matrix F ist die Zahl 8 und die Determinante der Matrix G ist die Zahl 4.

Berechnung von zweireihigen Determinanten

Vorbemerkung zur Definition:

Auf der vorigen Seite hatten wir gesagt, dass die Determinanten-Funktion einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet.

Diese Zahl hatten wir den Namen Determinante gegeben.

Nun müssen wir natürlich noch definieren, welchen Wert diese Zahl hat. Zuerst definieren wir 2-reihige Determinanten:

Definition 97:

Matrix A: **Determinate der Matrix A:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Bemerkung 21:

Die Determinanten-Funktion ordnet nur quadratischen Matrizen eine Zahl zu.

Für nichtquadratische Matrizen ist die Determinanten-Funktion nicht definiert.

Bemerkung 22:

Natürlich ist die Determinanten-Funktion wie jede andere Funktion eindeutig, d.h. jeder quadratischen Matrix wird genau eine Determinante (Zahl) zugeordnet.

Beispiel 176:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 45 + 6 = 51$

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 = 0$

(e) $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8$

Zusatzfrage: Wann ist diese Determinante 0 ? Ergebnis: für $k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

(f) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Folgerungen

Über die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Definition 98:

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt genau eine Lösung, wenn die Koeffizienten-Determinante nicht verschwindet.

$$D = det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad .$$

Beispiel 1:

$3x + 2y = 5$

$-6x - 4y = 6$

Daraus ergibt sich folgende Determinante:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$

Beispiel 177:

Wir berechnen die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 + 10 = 22$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) - (-10) \cdot 3 = -30 + 30 = 0$$

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

In diesem Abschnitt werden wir uns mit den wesentlichen Eigenschaftender 2-reihigen Determinanten vertraut machen und sie zu Regeln zusammenfassen.

Sie gelten im Übrigen sinngemäß auch für die später noch zu definierenden Determinanten höherer Ordnung.

Regel 1:

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden. Man bezeichnet diesen Vorgang auch als "Stürzen der Determinante".

Beispiel 2:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - (-3) \cdot 5 = 16 + 15 = 31$$

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 16 + 15 = 31$$

Somit gilt erwartungsgemäß:

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{A} = 31$$

Regel 2:

Beim Vertauschen der beiden Zeilen (oder Spalten) ändert eine 2-reihige-Determinante ihr Vorzeichen.

Beispiel 3:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -7 - 12 = -19$$

Wir vertauschen nun beide Spalten. Die Determinante ändert dabei ihr Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 7 \cdot (-1) = 12 + 7 = 19 = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Regel 3:

Werden die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante mit einem reellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Beweis:

Wir multiplizieren die Elemente der 1. Zeile der zweireihigen Determinante

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Mit dem Skalar λ und erhalten:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} a_{22} - \lambda a_{12} a_{21} = \lambda (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det \mathbf{A}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir die Elemente der 2. Zeile mit λ multiplizieren oder die 1. Oder 2. Spalte mit λ multiplizieren.

Daraus ergeben sich zwei weitere Regeln:

Regel 4:

Eine 2-reihige Determinante wird mit einem reellen Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

Regel 5:

Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante einen gemeinsamen Faktor λ, so darf dieser vor die Determinante gezogen werden.

Bemerkung 23:

Man beachte den folgenden Unterschied:

Eine Matrix wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem **jedes Matrixelement** mit λ multipliziert wird.

Im Gegensatz dazu erfolgt die Multiplikation einer Determinante mit einem Skalar λ, indem man die Elemente **einer beliebigen Zeile (oder Spalte)** mit λ multipliziert.

Beispiel 178:

In der Determinante

$$\begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix}$$

Besitzen die Elemente der 1. Spalte den gemeinsamen Faktor -8, den wir nach Regel 5 vor die Determinante ziehen dürfen. Es ist somit:

$$\begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-8 \cdot 3) & 7 \\ (-8 \cdot 4) & 1 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8(3 \cdot 1 - 4 \cdot 7) =$$

$$= -8(3 - 28) = -8 \cdot (-25) = 200$$

Regel 6:

Eine 2-reihige Determinante besitzt den Wert Null, wenn sie (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind Null.

Beweis:

Wir nehmen an, dass sämtliche Elemente der 1. Zeile gleich null sind.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0$$

Für die zweite Zeile ist der Beweis gleich.

2. Beide Zeilen (oder Spalten) stimmen überein.

Beweis:

Die Determinante besitzt zwei gleiche Zeilen.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$$

3. Die Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional.

Bemerkung 24:

Zwei Zeilen (Spalten) sind gleich, wenn sie in ihren entsprechenden Elementen übereinstimmen.

Proportionalität zweier Zeilen (Spalten) bedeutet: Einander entsprechende Elemente stehen in einem festen Zahlenverhältnis.

Beweis:

Die zweite Zeile ist das λ-fache der ersten Zeile.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}_{0} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Beispiel 179:

Die folgenden Determinanten verschwinden

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weil

Det(A)=0: Die Elemente der 2. Zeile sind Null.

Det(B)=0: Die beiden Zeilen (bzw. Spalten) sin proportional zueinander.

Det(C)=0: Die beiden Zeilenvektoren stimmen überein.

Det(D)=0: Die Elemente der zweiten Zeile (bzw. zweiten Spalte) sind Null.

Regel 7:

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches der anderen Zeile (bzw. anderen Spalte) elementweise addiert. Bereits veränderte Zeilen oder Spalten dürfen zum weiteren rechnen nicht mehr verwendet werden.

Beweis:

Zu der ersten Zeile der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

addieren wir das λ-fache der zweiten Zeile. Daraus ergibt sich folgendes:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} + \lambda a_{21}) & (a_{12} + \lambda a_{22}) \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + \lambda a_{21}) a_{22} - (a_{12} + \lambda a_{22}) a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} + \lambda a_{21} a_{22} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{21} a_{22} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Das entsprechend gleiche Ergebnis erhalten wir zu der zweiten Zeile das λ-fache der ersten Zeile addiert wird.

Beispiel 180:

Addieren wir zur *1. Zeile* der Determinante $\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ das *6-fache* der *2. Zeile*, so hat sich nach **Regel 7** der Wert der Determinante *nicht* geändert. Es ist somit:

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-6+6) & (5+24) \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 29 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 1 \cdot 29 = -29$$

Wir bestätigen dieses Ergebnis, indem wir die Ausgangsdeterminante *direkt* berechnen:

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = -24 - 5 = -29 \qquad \blacksquare$$

Regel 8:

Multiplikationstheorem für Determinanten

Für zwei 2-reihige Matrizen A und B gilt stets:

det(A·B)=det(A)·det(B)

d. h. die Determinante eines Matrizenproduktes A ·B ist gleich dem Produkt der Determinanten der beiden Faktoren A und B.

Beispiel 181:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Determinante des *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ geschieht am einfachsten nach dem *Multiplikationstheorem* (**Regel 8**). Wir erhalten mit

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = -2 - 20 = -22$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = -2 + 12 = 10$$

den folgenden Wert:

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\det\mathbf{A})\cdot(\det\mathbf{B}) = (-22)\cdot 10 = -220$$

Zur *Kontrolle* berechnen wir jetzt die Determinante $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ auf einem *anderen* Wege, müssen dabei allerdings einen Mehraufwand an Zeit und Arbeit in Kauf nehmen. Zunächst bilden wir nach dem Anordnungsschema von *Falk* das Matrizenprodukt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ und im Anschluss daran die Determinante $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$.

$$\begin{array}{c|cc|cc} & & \mathbf{B} & -2 & -3 \\ & & & 4 & 1 \\ \hline \mathbf{A} & 1 & 4 & 14 & 1 \\ & 5 & -2 & -18 & -17 \\ \hline & & & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{vmatrix} = 14\cdot(-17) - (-18)\cdot 1 =$$

$$= -238 + 18 = -220 \qquad \blacksquare$$

Regel 9:

Die Determinante einer 2-reihigen Dreiecksmatrix A besitzt den Wert

$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}$

d. h. die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Bemerkung 25:

Da die Diagonalmatrix ein Sonderfall der Dreiecksmatrix ist, gilt es für ihre Determinante ebenfalls

Die Einheitsmatrix E und Nullmatrix 0 wiederum sind Sonderfälle der Diagonalmatrix.

Für ihre Determinanten gilt daher:

$$\det\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 = 1$$

$$\det\mathbf{0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0 = 0$$

Beweis:

Hier anhand der oberen Dreiecksmatrix gezeigt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - 0\cdot a_{12} = a_{11}a_{22}$$

Beispiel 182:

Die Determinanten der folgenden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

besitzen folgende Werte:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) = -15$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 = 35$$

Beispiel 183:

Die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ist eine Diagonalmatrix.

Ihre Determinante besitzt den folgenden Wert

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-4) = 24$$

Beispiel 184:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 45 + 6 = 51$

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 = 0$

(e) $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8$

Zusatzfrage: Wann ist diese Determinante 0 ? Ergebnis: für $k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

(f) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Folgerungen

Über die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Definition 99:

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt genau eine Lösung, wenn die Koeffizienten-Determinante nicht verschwindet.

$$D = det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad .$$

Beispiel 185:

$3x + 2y = 5$

$-6x - 4y = 6$

Daraus ergibt sich folgende Determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

3-reihige Determinanten oder Determinante 3. Ordnung

Auf der vorigen Seite hatten wir die Determinanten-Funktion für 2-reihige Matrizen definiert. Jetzt wollen wir das gleiche für 3-reihige Matrizen machen.

Auf 3-reihige Determinanten stößt man beispielsweise, wenn man ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten vom Typ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

auf seine Lösbarkeit hin untersucht.

Wir werden später zeigen, dass ein solches System nur dann genau eine Lösung besitzt, wenn der aus den Elementen der 3-reihigen Koeffizienten-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gebildete Term

$$\begin{aligned} D = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

einen von Null unterschiedlichen Wert besitzt.

Die Zahl D heißt Determinante von A. Sie wird in diesem Zusammenhang meist als Koeffizienten-Determinante des Gleichungssystems bezeichnet.

Definition 100:

Unter der Determinanteeiner3-reihigen, quadratischen Matrix versteht man die Zahl

$$\mathbf{A} \qquad\qquad |\mathbf{A}| = \mathbf{D} = \det \mathbf{A}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

mit $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Beispiel 186:

Als Beispiel sei folgende Matrix gegeben:

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten-Funktion ordnet der Matrix A die Determinante |A| zu:

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Will man nun die Determinante berechnen, so muss man die obige Definition benutzen:

$|A| = 0 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 1 \cdot 6 \cdot 2 = 0+24+60-75-0-12 = -3$

Die Determinante |A| hat also den Wert -3.

Bemerkung 26:

Die Determinante D heißt auch3-reihige Determinante oder Determinante 3. Ordnung.

Gebräuchliche Schreibweisen sind:

$$D\,, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \det \mathbf{A}\,, \quad |\mathbf{A}|\,, \quad |a_{ik}|$$

Sarrus-Regel

Was ist die Sarrus-Regel?

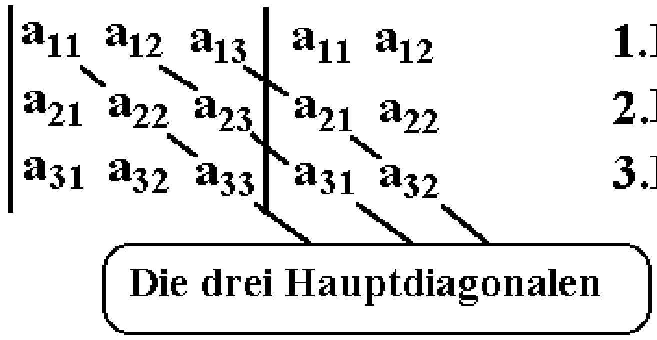
Die auf der vorigen Seite gelernte Definition für 3-reihige Determinanten kann man sich mit der Regel von Sarrus merken. Sie ist also keine neue Definition, sondern eine simple Merkhilfe.

Erklärung der Regel:

Zuerst schreiben wir die zwei ersten Spalten der Determinante |A| nochmals rechts neben dieselbe:

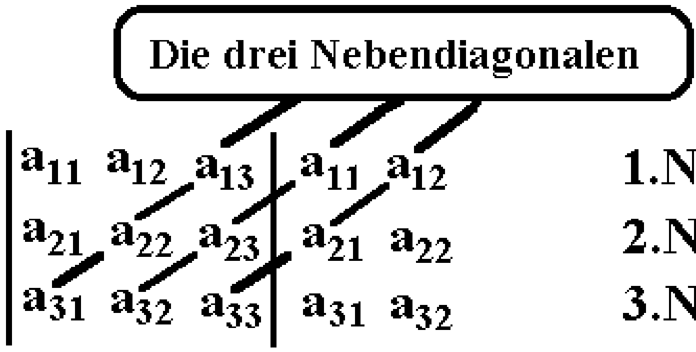
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Die drei im folgenden Bild eingezeichneten Diagonalen nennt man die Hauptdiagonalen. Das Produkt je einer Hauptdiagonalen nennt man Hauptdiagonalenprodukt. Wir haben also drei Hauptdiagonalenprodukte (kurz HP's):



$$1.\text{HP} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$
$$2.\text{HP} = a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$
$$3.\text{HP} = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

Die anderen drei Diagonalen nennt man Nebendiagonalen bzw. ihre Produkte die Nebendiagonalen-Produkte.



$$1.\text{NP} = a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$
$$2.\text{NP} = a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$
$$3.\text{NP} = a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Addiert man die drei Hauptdiagonalen-Produkte und subtrahiert davon die drei Nebendiagonalen-Produkte, so erhält man die von der Vorseite bekannte Formel für |A|:

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Bemerkung 27:

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Regel von Sarrus nur für 3-reihige Determinanten gilt.

Rechenregeln für 3-reihige Determinanten

Für 3-reihige Determinanten gelten sinngemäß die gleichen Rechenregeln wie für 2-reihigeDeterminanten (Regel 1 bis Regel 9) aus dem vorherigen Abschnitt)

Beispiel 187:

(a)
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right. = 2\cdot 2\cdot 5+3\cdot 2\cdot(-1)+1\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 1-1\cdot 2\cdot 2-5\cdot 3\cdot 3$$

$$= 20-6+3+2-4-45=-30$$

(b)
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right. = -3+16+0-(-30)-(-4)-0=47$$

(c)
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right. = 32+90-10-(-12)-100-24=0$$

Beispiel 188:

Im nächsten Beispiel ziehen wir zuerst zwei Faktoren vor die Determinante, um kleinere Zahlen zu erhalten:

$$\begin{vmatrix} 12 & 24 & 48 \\ 5 & 10 & -5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 60\cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right.$$

=60(40+10)=3000

Hier wurde am Ende die erste Zeile von der 2. subtrahiert, was die beiden Nullen ergeben hat.

Beispiel 189:

$$\begin{vmatrix} k & 12 & 3 \\ 2k & 6 & 1 \\ k & 6 & 1 \end{vmatrix} = k\cdot 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6k\cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right. = 6k\cdot(2-1)=6k$$

Hier wurde am Ende die 2. Spalte von der dritten subtrahiert.

Beispiel 190:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Hier entdeckt man keine einfache Methode, die einem auf einmal zwei Nullen beschert. Aber in zwei Schritten kann man an den markierten Stellen Nullen erzeugen.

1. Schritt: Addiere das Dreifache der 1. **Spalte** zur 2. Spalte
2. Schritt: Addiere das (-4)-fache der 1. **Spalte** zur 3. Spalte:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3+3 & 4-4 \\ 2 & 5+6 & -3-8 \\ 7 & 2+21 & -5-28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & -11 \\ 7 & 23 & -33 \end{vmatrix}$$

Nun kann man noch den Faktor (-11) aus der letzten Spalte herausziehen:

$$= -11 \cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 11 & 1 & 2 & 11 \\ 7 & 23 & 3 & 7 & 23 \end{array}\right. = -11 \cdot (33 - 23) = -110$$

Einreihige Determinanten

Bis jetzt haben wir noch keine einreihigen Determinanten definiert.

Die Definition der "Einreihigen Determinante" ist kurz und simpel.

Definition 101:

Eine einreihige Determinante hat den gleichen Wert wie ihr (einziges) Element. Die Formel dazu:

$|a_{11}| = a_{11}$

Beispiel 191:

Welchen Wert hat die Determinante |4711|?

Antwort:

Die Determinante hat den Wert 4711.

n-reihige Determinanten

Anmerkung

Genauso wie für 2- und 3-reihige Determinanten müssten wir auch für 4-, 5-, 6-, ... , n-reihige Determinanten eine Formel angeben, mit der man sie berechnen kann.

Dabei stößt man aber schnell an Grenzen, denn schon eine Determinante mit 5 Reihen hat eine Lösungsformel mit 120 Summanden! Das ist zu viel Arbeit!

Wir werden aber bald eine Definition (=Lösungsformel) der Determinantenfunktion kennen lernen, die wesentlich kürzer und eleganter ist.

Da die Berechnung von Determinanten mit mehr als 3 Reihen sehr aufwendig aber doch Routinearbeit ist, werden sie oft mit Computerprogrammen oder Taschenrechnern berechnet!

Laplace'scher Entwicklungssatz (Unterdeterminanten)

Unterdeterminante

Definition 102:

Die aus einer 3-reihigen Determinante D durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte erhaltene 2-reihige Determinante heißt Unterdeterminante von D und wird durch das Symbol D_{ik} gekennzeichnet (i, k=1,2,3)

Schnittpunktelement

Definition 103:

Streicht man in einer Determinante eine beliebige Zeile i und außerdem eine beliebige Spalte k, so nennt man das Element, das im Schnittpunkt der gestrichenen Zeile und Spalte entsteht, a_{ik} das Schnittpunktelement.

Das Schnittpunkt-Element a_{ik} ist also genau das Element, dass sowohl in der gestrichenen Zeile als auch in der gestrichenen Spalte steht.

Beispiel 192:

Als Beispiel sei eine 3-reihige Determinante gegeben:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Als Beispiel streichen wir die dritte Zeile und die zweite Spalte:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Das Schnittpunkt-Element ist dann das Element a_{32}:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\textbf{Schnittpunkt-Element} \\ \textbf{ist das Element } \mathbf{a_{32}}\end{array}$$

Beispiel 193:

Gegeben sei eine dreireihige Determinante |A|:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nun streichen wir eine Zeile i und eine Spalte k.

Als Beispiel streichen wir die 3.Zeile und die 2.Spalte:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Es bleiben vier Elemente übrig die nicht gestrichen wurden.

Diese vier Elemente bilden die so genannte Unterdeterminante D_{32}:

$$D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Beachte:

Hat die Determinante n Reihen, so haben alle Unterdeterminanten n-1 Reihen.

Vorzeichen-Faktor

Vorbemerkung zur Definition

Man kann eine Funktion definieren, die jeder Unterdeterminante D_{ik} einen Vorzeichen-faktor zuordnet.

Der Vorzeichenfaktor kann den Wert (+1) oder (-1) haben.

Die Funktion nennen wir die "Vorzeichenfunktion".

Definition 104:

Der Unterdeterminante D_{ik} wird durch die Vorzeichenfunktion

der Vorzeichenfaktor V_{ik} zugeordnet. Dieser berechnet sich so:

$D_{ik} \rightarrow V_{ik} = (-1)^{i+k}$

Beispiel 194:

Nehmen wir an, wir streichen in einer Determinante z.B. die 3.Zeile und die 2.Spalte, so dass die Unterdeterminante D_{32} entsteht:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Der Unterdeterminante D_{32} wird dann der Vorzeichenfaktor V_{32} zugeordnet, der sich nach obiger Definition berechnen lässt:

$V_{ik} = (-1)^{i+k} = (-1)^{3+2}=(-1)^5=(-1)$

Bemerkung 28:

Das Produkt aus Vorzeichenfaktor V_{ik} und Unterdeterminante D_{ik} nennt man auch "algebraisches Komplement" A_{ik}:

$A_{ik} = V_{ik} \cdot D_{ik}$

Entwicklungsformel

Jetzt definieren wir eine n-reihige Determinante durch ihre Unterdeterminanten.

Die Formel nennen wir Entwicklungsformel. Auf den nächsten Seiten werden wir dann sehen, wozu diese Formel zu gebrauchen ist.

Definition 105:

Gegeben sei eine n-reihige-Determinante, im Beispiel eine 3-reihige:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Hat die Determinante n-Reihen, so schreiben wir sie n-mal nebeneinander, d.h. in unserem Beispiel 3-mal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nun streichen wir in allen Determinanten die erste Reihe, sowie in der n-ten Determinante die n-te Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Es entstehen n Unterdeterminanten (im Beispiel entstehen drei):

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Diese Unterdeterminanten addieren wir: $D_{11}+D_{12}+D_{13}+\ldots+D_{1n}$

Jetzt multiplizieren wir noch jede Unterdeterminante mit dem gleichnamigen Vorzeichenfaktor und Schnittpunkt-Element:

$V_{11}a_{11}D_{11} + V_{12}a_{12}D_{12} + \ldots + V_{1n}a_{1n}D_{1n}$

Schließlich definieren wir, dass diese Formel gleich der gegebenen Determinante D sein soll:

$D = V_{11}a_{11}D_{11} + V_{12}a_{12}D_{12} + \ldots + V_{1n}a_{1n}D_{1n}$

Meist schreibt man die Entwicklungsformel mit dem $\sum$-Zeichen:

$$D = \sum_{k=1}^{n} V_{1k} \cdot a_{1k} \cdot D_{1k}$$

Beispiel 195:

Als Beispiel sei eine 3-reihige-Determinante gegeben:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Laut Definition müssen wir die Determinante 3x aufschreiben:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Dann müssen wir die erste Zeile streichen und je eine der Spalten:

$$\begin{vmatrix} \cancel{7} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ \cancel{5} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{7} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 5 & \cancel{2} & 3 \\ 4 & \cancel{1} & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{7} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 5 & 2 & \cancel{3} \\ 4 & 1 & \cancel{6} \end{vmatrix}$$

Es entstehen drei Unterdeterminanten:

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Jetzt addieren wir diese drei Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Jede Unterdeterminante multiplizieren wir mit ihrem gleichnamigen Vorzeichenfaktor und Schnittpunktelement:

$$V_{11} \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + V_{12} \cdot 9 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + V_{13} \cdot 8 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Die drei Vorzeichenfaktoren müssen wir noch berechnen:

$V_{11} = (-1)^{1+1} = 1 \quad V_{12} = (-1)^{1+2} = -1 \quad V_{13} = (-1)^{1+3} = 1$

Die 3-reihige Determinante D, ausgedrückt durch 2-reihige Unterdeterminanten, lautet somit:

$$\mathbf{D} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -123$$

Bemerkung 29:

Der Wert einer 3-reihigen Determinante ist unabhängig von der Zeile oder Spalte, nach der entwickelt wird.

In der Praxis entwickelt man stets nach derjenigen Zeile oder Spalte, die die meisten Nullen enthält, da diese Elemente keinen Beitrag zum Determinanten-Wert leisten.

Bei einer 3-reihigen Determinante bringt die Entwicklung nach Laplace in der Regel keine nennenswerte Erleichterung. Meist ist es bequemer, die Determinante nach der Regel von Sarrus zu berechnen.

Für das algebraische Komplement A_{ik} ist auch die Bezeichnung Adjunkte gebräuchlich.

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Die hergeleiteten Rechenregeln für 2-reihigeDeterminanten gelten sinngemäß auch für Determinanten höherer Ordnung (n-ter Ordnung).

Diese Regeln in allgemeiner Form:

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Regel 1: Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn Zeilen und Spalten miteinander *vertauscht* werden, d. h. die Determinante „gestürzt" wird.

Regel 2: Beim *Vertauschen* zweier Zeilen (oder Spalten) ändert eine Determinante ihr *Vorzeichen*.

Regel 3: Werden die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit einem reellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Regel 4: Eine Determinante wird mit einem reellen Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

Regel 5: Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen *gemeinsamen* Faktor λ, so darf dieser *vor* die Determinante gezogen werden.

Regel 6: Eine Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. *Alle* Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind *Null*.
2. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind *gleich*.
3. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind zueinander *proportional*.
4. Eine Zeile (oder Spalte) ist als *Linearkombination* der übrigen Zeilen (oder Spalten) darstellbar.

Regel 7: Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (oder Spalte) addiert.

Regel 8: Multiplikationstheorem für Determinanten

Für zwei n-reihige Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt stets

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) \qquad \text{(I-83)}$$

d. h. die Determinante eines *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist gleich dem *Produkt* der Determinanten der beiden Faktoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

Regel 9: Die Determinante einer n-reihigen *Dreiecksmatrix* $\mathbf{A}$ besitzt den Wert

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \qquad \text{(I-84)}$$

d. h. die Determinante der Dreiecksmatrix ist gleich dem *Produkt* der Hauptdiagonalelemente. Diese Regel gilt auch für den Sonderfall einer *Diagonalmatrix*.

Beispiel 196:

Wir berechnen die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 + 10 = 22$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) - (-10) \cdot 3 = -30 + 30 = 0$$

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Beispiel 197:

c) (4 Punkte) Berechnen Sie folgende Determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D_{12} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{\textit{Entwicklung nach der 5. Zeile}} = -(-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\textit{Entwicklung nach der 4. Zeile}} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 89$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Eine Gleichung, die nur eine Unbekannte hat, kann man (in allen euch bekannten Fällen) nach dieser Unbekannten auflösen und somit die Lösungsmenge bestimmen. Unter der Lösungsmenge sind alle Zahlen zu verstehen, die man für die Unbekannte einsetzen kann, so dass die Gleichung wahr ist, also "stimmt".

Manche Fragestellungen beinhalten jedoch zwei oder mehr Unbekannte, wobei man aber auch zwei oder mehr voneinander unabhängige Gleichungen aufstellen kann. Zum Beispiel eine kleine Textaufgabe:

Christina kauft vom Artikel A zehn Stück und zwölfmal Artikel B. Daniel dagegen kauft fünfzehn Stück von A, aber nur zwei von B. Christina bezahlt 38 Euro, Daniel 19,40 Euro.

Unbekannt sind die Einzelpreise von A und B. Da für beide Einkäufer die einzelnen Stückzahlen und der Gesamtpreis bekannt sind, kann man zwei Gleichungen aufstellen, die beschreiben, wie sich der jeweilige Gesamtpreis zusammensetzt. Der Einzelpreis von A wird hierbei durch die Variable a beschrieben und der Einzelpreis von B durch die Variable b:

$10a + 12b = 38$ (1) (Christinas Einkauf)

$15a + 2b = 19{,}4$ (2) (Daniels Einkauf)

Leider kann man hier keine der einzelnen Gleichungen für sich genommen so nach einer Variablen auflösen, dass man den Einzelpreis ablesen kann, denn man bekommt die andere Variable nicht weg.

Man weiß aber, dass die zu findenden Lösungen für a und b für beide Gleichungen gleichzeitig gelten müssen. Man hat hier dadurch ein System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Alle Verfahren, das Problem zu knacken, beruhen darauf, aus den n Gleichungen mit n Unbekannten (wobei mit n die Anzahl der Gleichungen und Variablen gemeint ist) nur noch **eine Gleichung mit einer Unbekannten** zu machen. Es gibt dabei im Wesentlichen neben dem Erraten und dem graphischen Lösungsverfahren vier algebraische Verfahren:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Eliminationsverfahren nach Gauß
- Cramer’sche Lösungsverfahren

Hat man mehr als zwei Gleichungen, dann führt in jedem Verfahren immer jeder einzelne Schritt zu einer Gleichung, die jeweils eine Variable weniger enthält.

Gaußscher Algorithmus

Dieses Verfahren dient zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Es eignet sich zur Bestimmung einer speziellen Lösung als auch zur Angabe der gesamten Lösungsmannigfaltigkeit.

Durch moderne Rechneranlagen lässt sich das Gauß'sche Eliminationsverfahren sehr gut durchführen und hat deshalb an Bedeutung gewonnen.

Seine Idee besteht darin, aus einem System von m linearen Gleichungen mit n Variablen m-1 Gleichungen so umzuformen, dass eine der Variablen, etwa x_1, in diesen m-1 Gleichungen nicht mehr vorkommt, also eliminiert wird.

Aus m-2 von diesen m-1 neuen Gleichungen lässt sich nun z.B. x_2 entfernen. Indem man so fortfährt, erhält man schließlich eine einfach zu lösende Gleichung, die nur noch eine Variable x_n aufweist.

Das Gleichungssystem lässt sich dann einfach nach allen anderen Variablen auflösen, da immer nur eine unbekannte Variable vorhanden ist.

Rechenschema:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 && (1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 && (2)\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 && (3)\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 && (1')\\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 && (2')\\
a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 &= b'_3 && (3')\\
a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 &= b'_4 && (4')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 && (1'')\\
x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 && (2'')\\
a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 && (3'')\\
a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 &= b''_4 && (4'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 && (1''')\\
x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 && (2''')\\
x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 && (3''')\\
x_4 &= b'''_4 && (4''')
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Teil wird ein Gleichungssystem mit 4 Variablen veranschaulicht:

(1‘) erhalten wir durch Division von (1) durch a_{11} (Vor. $a_{11} \neq 0$)

Dann multiplizieren wir (1‘) mit a_{21} und subtrahieren von (2) und erhalten (2‘).

Dann multiplizieren wir (1‘) mit a_{23}und subtrahieren von (3) und erhalten (3‘).

Entsprechend erhält man (4‘)

Anschließend wird (2‘) zu (2‘‘) vereinfacht und zur Umformung von (3‘) in (3‘‘) und von (4‘) in (4‘‘) verwendet.

Dies wird analog bis (4‘‘‘) fortgesetzt, so dass man nach der Variablen auflösen kann.

Determinanten-Verfahren nach Cramer (Cramer‘sche Regel)

Gabriel Cramer (1704 - 1752, von Beruf Mönch) entwickelte ein stark formalisiertes Lösungsverfahren für LGS.

(Bedingung: Gleichviel Variablen und Gleichungen)

Ein Zahlenschema der Form:

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \blacksquare & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \blacksquare & \blacksquare & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \blacksquare & a_{n,n} \end{pmatrix} \right| \quad \text{mit allen} \quad a_{i,j} \in R$$

heißt Determinante (n-reihig).

Die Entwicklung von Determinanten

(Wie rechnet man den Wert einer Determinante aus?)

Eine 2-reihige Determinante wird folgendermaßen berechnet:

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \right| = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$$

Hauptdiagonale (links oben nach rechts unten)

Nebendiagonale (links unten nach rechts oben)"

Eine beliebige Determinante wird nun nach einer Zeile oder Spalte entwickelt.

Am Beispiel: (Entwicklung nach der 1. Zeile)

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \right| - 7 \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 & 9 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} \right| + 4 \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \right| - 6 \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right|$$

Man nimmt die Elemente der 1. Zeile als Faktoren vor Unterdeterminanten, die entstehen, wenn man die Zeile und Spalte streicht, in der der jeweilige Faktor steht. Die Produkte aus Faktor und Unterdeterminante wird addiert oder subtrahiert. Das Vorzeichen wird nach Zeilennummer/Spaltennummer bestimmt. Man addiert die Zeilen- und Spaltennummer: Ergebnis gerade: +, ungerade: -

(Ein Beispiel: Entwicklung nach der 6. Zeile: Das erste Element steht in der 6. Zeile, 1. Spalte, 6+1=7, ungerade, also wird mit - begonnen.)

Das gleiche Beispiel nach der 2. Zeile entwickelt:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| + 5 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| - 9 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}\right| + 6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

Eine dieser Unterdeterminanten kann dann weiter entwickelt werden, z. B.:

$$\left|\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\right| - 4 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\right| + 6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

Die entstandenen 2-reihigen Determinanten lassen sich mit obiger Methode berechnen, z. B.:

$$\left|\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = 7 \cdot 9 - 2 \cdot 8$$

Obiges Beispiel im letzten Entwicklungsschritt:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -10 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 9 - 2 \cdot 8) \,..$$

Insgesamt werden zwölf 2-reihige Determinanten berechnet!

Wer das Beispiel nachrechnen möchte:

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}\right| = -2516$$

Für die Berechnung von 3-reihigen Determinanten kann man die **Regel von Sarrus** heranziehen, die die Entwicklung der 3-reihigen und anschließenden Berechnung von 2-reihigen Determinanten bereits enthält:

Beispiel 198:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| = 1\cdot 3\cdot 5 + 0\cdot 4\cdot 6 + 8\cdot 0\cdot 2 - 6\cdot 3\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 1 - 5\cdot 0\cdot 0 = -137$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{matrix}$$

Die ersten zwei Spalten rechts danebenschreiben, dann:

Hauptdiagonalen – Nebendiagonalen

Die Cramer'sche Regel

Definition 106:

(1) Bilde die Koeffizientendeterminante:

Ist $D\neq 0$, so hat das LGS eine eindeutige Lösung.

(Ist $D=0$ und alle $D_i=0$, so gibt's eine Parameterlösung.

Ist $D=0$und ein $D_i\neq 0$, so gibt's keine Lösung.)

$$D = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \blacksquare \\ a_{2,1} & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}\right|$$

(2) Bilde alle Formdeterminanten D_i:

$$D1 = \left|\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & \blacksquare \\ b_2 & a2,2 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}\right|$$

Die 1. Spalte wird durch die rechte Seite (die b_s) ersetzt.

Die 2. Spalte wird durch die rechte Seite ersetzt.

$$D2 = \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 & \blacksquare \\ a_{2,1} & b_2 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}\right|$$

usw.

(3) Berechne die Lösungen:

$$x_1 = \frac{D1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D2}{D}$$

...

$$x_n = \frac{Dn}{D}$$

Beispiel 199:

$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$

$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$

$$D := \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$D = 3$

Es existiert eine eindeutige Lösung

$$D1 := \left|\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$D1 = 3$

$$x_1 := \frac{D1}{D}$$

$x_1 = 1$

$$D2 := \left|\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -5 & -5 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$D2 = 6$

$$x_2 := \frac{D2}{D}$$

$x_2 = 2$

$$D3 := \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$D3 = 9$

$$x_3 := \frac{D3}{D}$$

$x_3 = 3$

Beispiel 200:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & |\cdot(-2) \\
\mathrm{II} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 15x_4 & = & 6 & \\
\mathrm{III} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 6 & \\
\mathrm{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & \\
\hline
\mathrm{I} & -4x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & - & 24x_4 & = & 12 & \\
\mathrm{II} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 15x_4 & = & 6 & |\mathrm{I}+\mathrm{II} \\
\mathrm{III} & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 6 & |\mathrm{I}+\mathrm{III} \\
\mathrm{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & \\
\hline
\mathrm{I} & -4x_1 & - & 12x_2 & + & 6x_3 & - & 24x_4 & = & 12 & |:(-2) \\
\mathrm{II} & & - & 9x_2 & + & 9x_3 & - & 9x_4 & = & 18 & |\cdot(-\frac{15}{9}) \\
\mathrm{III} & & - & 15x_2 & + & 12x_3 & - & 18x_4 & = & 18 & \\
\mathrm{IV} & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 & |\cdot 5 \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & 15x_2 & - & 15x_3 & + & 15x_4 & = & -30 & |:15 \\
\mathrm{III} & & - & 15x_2 & + & 12x_3 & - & 18x_4 & = & 18 & |\mathrm{II}+\mathrm{III} \\
\mathrm{IV} & & - & 15x_2 & + & 25x_3 & - & 10x_4 & = & 70 & |\mathrm{II}+\mathrm{IV} \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\mathrm{III} & & & & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -12 & |\cdot\frac{10}{3} \\
\mathrm{IV} & & & & & 10x_3 & + & 5x_4 & = & 40 & \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\mathrm{III} & & & & - & 10x_3 & - & 10x_4 & = & -40 & |:(-10) \\
\mathrm{IV} & & & & & 10x_3 & + & 5x_4 & = & 40 & |\mathrm{III}+\mathrm{IV} \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 & \\
\mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 & \\
\mathrm{III} & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 4 & \\
\mathrm{IV} & & & & & & - & 5x_4 & = & 0 & |:(-5) \\
\hline
\mathrm{IV} & & & & & & & x_4 & = & 0 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_4 \text{ eingesetzt in III:}} & \\
& & & & & x_3 & & & = & 4 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_3 \text{ und } x_4 \text{ eingesetzt in II:}} & \\
& & & x_2 & - & 4 & & & = & -2 & |+4 \\
& & & x_2 & & & & & = & 2 & \\
\hline
\multicolumn{10}{l}{x_2,\ x_3 \text{ und } x_4 \text{ eingesetzt in I:}} & \\
& 2x_1 & + & 6\cdot 2 & - & 3\cdot 4 & & & = & -6 & |:2 \\
& x_1 & & & & & & & = & -3 &
\end{array}
$$

Beispiel 201:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & 7x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 & |3\cdot\text{II} + (-7)\cdot\text{I} \\
\text{III} & -x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & = & -5 & |3\cdot\text{III} + \text{I} \\
\hline
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & - & 5x_2 & - & 17x_3 & = & -13 & \\
\text{III} & & - & 10x_2 & - & 34x_3 & = & -14 & |(-\frac{1}{2})\cdot\text{III} + \text{II} \\
\hline
\text{I} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & - & 5x_2 & - & 17x_3 & = & -13 & \\
\text{III} & & & & & 0 & = & 6 & \\
\hline
\end{array}
$$

Durch Anwendung von Gauß erhält man in der letzten Gleichung einen Widerspruch, d.h. das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

$$L = \{\}$$

Beispiel 202:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & 4x_1 & - & 12x_2 & + & 8x_3 & = & 4 & |\text{II} + (-2)\cdot\text{I} \\
\text{III} & 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 & |2\cdot\text{III} + (-3)\cdot\text{I} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 & \\
\text{III} & & & 17x_2 & - & 13x_3 & = & 9 & |2\cdot\text{III} + 17\cdot\text{II} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 & \\
\text{II} & & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 & \\
\text{III} & & & & & 8x_3 & = & -16 & \\
\hline
\end{array}
$$

Man erhält mit Gauß eine Dreiecksform, d.h. das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung:

$$L = \{(2; -1; -2)\}$$

Textaufgaben zum Erstellen von Linearen Gleichungssystemen

Definition 107:

Hier müssen die Gleichungen als erstes aufgestellt werden. Die Lösung erfolgt über eines der bereits dargestellten Verfahren.

Beispiel 203:

Christa und Julia haben sich verabredet. Sie starten beide um 15 Uhr mit ihren Fahrrädern in ihren 21 km voneinander entfernten Heimatorten. Christa schafft in jeder Stunde 12, Julia 16 km. Zeigen Sie auf rechnerische Weise, wie weit von Christas Heimatort entfernt Sie sich treffen. ($v = \frac{s}{t}$)

Lösung:

$$\mathrm{s} = 21; \mathrm{V_C} = 12\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}; \mathrm{V_J} = 16\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$\mathrm{t_C} = \mathrm{t_J}$$

$$\mathrm{s_C} = 21 - \mathrm{s_J}$$

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}} \to \mathrm{t} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{v}}$$

$$\frac{\mathrm{s_C}}{\mathrm{v_C}} = \frac{\mathrm{s_J}}{\mathrm{v_J}}$$

$$\frac{\mathrm{s_C}}{12} = \frac{\mathrm{s_J}}{16}$$

$$16\mathrm{s_C} = 12\mathrm{s_J}$$

$$\mathrm{s_C} = \frac{3}{4}\mathrm{s_J}$$

$$21 - \mathrm{s_J} = \frac{3}{4}\mathrm{s_J}$$

$$4(21 - \mathrm{s_J}) = 3\mathrm{s_J}$$

$$84 = 7\mathrm{s_J}$$

$$\mathrm{S_j} = 12$$

$$\mathrm{S_C} = 21 - \mathrm{s_J} = 21 - 12 = 9\ \mathrm{km}$$

Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

In Linearen Gleichungssystems tauchen weitere Parameter auf.

Hier lautet die grundsätzliche Frage:

Definition 108:

Welche Zahlen müssen eingesetzt werden um

eine eindeutige Lösung

keine Lösung

unendlich viele Lösungen

zu bekommen.

Beispiel 204:

Gegeben ist folgendes lineare Gleichungssystem (LGS)

$x + z = 1$

$x + y = a$

$cx + y + z = 2$

Bestimmen Sie für dieses LGS die Parameter a und c so, dass es

1) eine Lösung

2) keine Lösung

3) unendlich viele Lösungen

gibt.

Lösung:

$x + z = 1$

$x + y = a$

$cx + y + z = 2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ c & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ (1)*(-1)+(2) ; (1)*(-c)+(3)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1-c & 2-c \end{array}\right)$ (2)*(-1)+(3)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2-c & 3-a-c \end{array}\right)$ (2)*(-1)+(3)

1) eine Lösung für $c \neq 2$

2) keine Lösung für $c = 2 \text{ und } a \neq 1$

3) unendlich viele Lösungen für $c = 2 \text{ und } a = 1$

Elementare Funktionen

Relationen und Funktionen

Definition 109:

Eine Relation liegt vor, wenn es zu jedem Element x der Menge M_1 genau einen Partner y in der Menge M_2 gibt.

Definition 110:

Hat jedes $x \in M_1$ ein zugeordnetes $y \in M_2$. Handelt es sich um Zahlen die in einem Koordinatensystem aufgetragen werden können

Eine überall auf M_1 definierte eindeutige Relation heißt Funktion oder auch Abbildung von M_1 in M_2.

$f: M_1 \to M_2 \; oder \; x \to y = f(x)$

Elementare Funktionen

- Signumfunktion
- Betragsfunktion
- Ganzrationale Funktion
- Gebrochen rationale Funktion
- Potenzfunktion
- Wurzelfunktion
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion
- Trigonometrische Funktion

Elementare Transformationen von Funktionen

Begriffe lassen sich am einfachsten an den Schaubildern von f und f_* erklären.

Verschiebung

Definition 111:

- Verschiebung in y-Richtung

  $f(x) \longrightarrow f^*(x) = f(x) + c$ z.B. $f(x) = x^2 \longrightarrow f^*(x) = x^2 + 3$

- Verschiebung in x-Richtung

  $f(x) \longrightarrow f^*(x) = f(x - c)$ z.B. $f(x) = x^2 \longrightarrow f^*(x) = (x - 3)^2$

  Achtung: das '-' vor c bewirkt, dass das Schaubild für $c > 0$ nach **rechts** verschoben wird!

Skalierung

Definition 112:

- Streckung und Stauchung in y-Richtung

  $f(x) \longrightarrow f^*(x) = c \cdot f(x)$ z.B. $f(x) = x^2 \longrightarrow f^*(x) = 3 \cdot x^2$

- Streckung und Stauchung in x-Richtung

  $f(x) \longrightarrow f^*(x) = f(c \cdot x)$ z.B. $f(x) = x^2 \longrightarrow f^*(x) = (3 \cdot x)^2 = 9x^2$

  Achtung: ist $c > 1$, dann wird das Schaubild **gestaucht**!

Spiegelung

Definition 113:

- Spiegelung an der x-Achse

  $f(x) \longrightarrow f^*(x) = -f(x)$ z.B. $f(x) = x^2 + 1 \longrightarrow f^*(x) = -(x^2 + 1) = -x^2 - 1$

- Spiegelung an der y-Achse

  $f(x) \longrightarrow f^*(x) = f(-x)$ z.B. $f(x) = x^3 + x + 1 \longrightarrow f^*(x) = (-x)^3 - x + 1$

Verketten von Funktionen

Definition 114:

Gegeben ist z.b. die Funktion $f(x) = \sqrt{(x-2)^3}$. Die Funktion kann als Kette elementarer Funktionen dargestellt werden:

$$f(x) = g_1(g_2(g_3(x)))$$

mit

$$g_1(x) = \sqrt{x}\ ;\ g_2(x) = x^3\ ;\ g_3(x) = x - 2\,.$$

Man schreibt dafür auch

$$(g_1 \circ g_2 \circ g_3)(x)$$

(sprich: g_1 nach g_2 nach g_3 von x)

$$x \xmapsto{g_3} g_3(x) = v \xmapsto{g_2} g_2(v) = g_2(g_3(x)) = w \xmapsto{g_1} g_1(w) = g_1(g_2(g_3(x))) = y$$

Beispiel 205:

a) $y = x^2 - 4,\qquad D = \mathbb{R},\qquad W = [-4, \infty)$

b) $y = |x^2 - 4|,\qquad D = \mathbb{R},\qquad W = [0, \infty)$

c) $y = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{für} \quad 1 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{für} \quad 2 \leq x < 5 \end{cases},\qquad D = [0, 5),\qquad W = [0, 3]$

d) Die Kreisgleichung $(x-2)^2 + y^2 = 9$ führt zu zwei Funktionen

$$y = f_1(x) = \sqrt{9 - (x-2)^2},\qquad D_1 = [-1, 5],\quad W_1 = [0, 3]$$

$$y = f_2(x) = -\sqrt{9 - (x-2)^2},\qquad D_2 = [-1, 5],\quad W_2 = [-3, 0]$$

Bemerkung 30:

c) ist ein Beispiel für eine abschnittsweise definierte Funktion.

Der Wertebereich einer Funktion kann in der Regel erst nach einer Kurvendiskussion angeben werden.

Definitionsbereich

Die elementaren Funktionen

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \ln x$

sind nur auf eingeschränkten Bereichen von $\mathbb{R}$ definiert. Allgemein gilt:

Definition 115:

Bei der Bestimmung des Definitionsbereichs müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- Nenner $\neq 0$
- Radikand ≥ 0
- Argument des Logarithmus > 0

Zunächst bestimmt man für jeden Term einzeln den Definitionsbereich. Der eigentliche Definitionsbereich von f ergibt sich als Schnitt der einzelnen Definitionsbereiche.

Beispiel 206:

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$ b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ c) $f(x) = \ln(x+2)$

Darstellungsformen

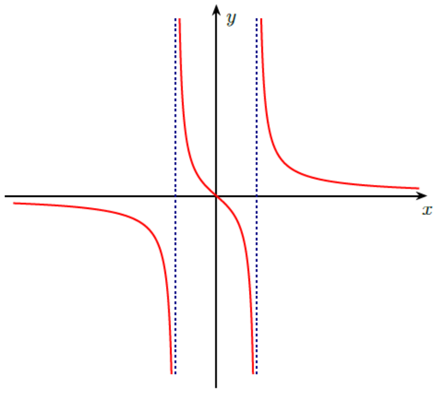
Neben der analytischen Darstellung als Funktionsterm, kann eine Funktion f noch auf andere Arten dargestellt werden.

Wertetabelle

Ein Fahrradfahrer startet zum Zeitpunkt $t = 0$ und fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Im Abstand von $10\,\mathrm{s}$ wird der zurückgelegte Weg vom Kilometerzähler abgelesen.

Zeit t (s)	0	10	20	30	40
Weg s (m)	0	50	100	150	200

Grafische Darstellung



Explizite und implizite Form

Definition 116:

In der expliziten Form ist der Funktionsterm nach der abhängigen Variablen aufgelöst.

explizit: $y = x^2 + 1$

implizit: $2x^2 + y^2 = 1$ mit $y \geq 0$ (z.B. aus Kreis- oder Ellipsengleichungen)

Manchmal ist eine explizite Form nicht, oder nur sehr schwer möglich.

Eigenschaften von Funktionen

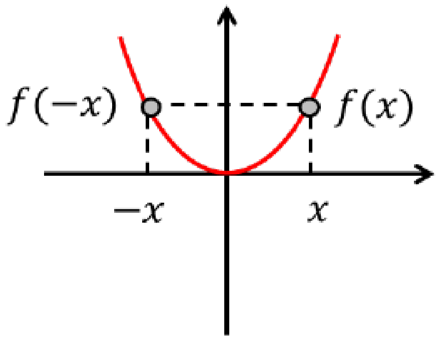
Symmetrie

Definition 117:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt

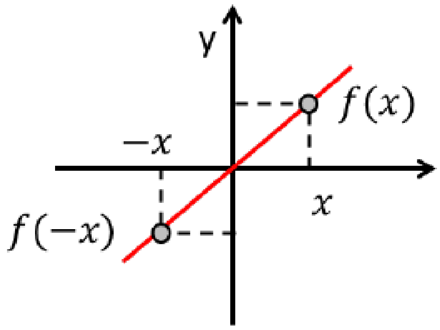
gerade	wenn für jedes $x \in D$ gilt	$f(-x) = f(x)$
ungerade	wenn für jedes $x \in D$ gilt	$f(-x) = -f(x)$

gerade Funktion



Spiegelsymmetrie

ungerade Funktion



Punktsymmetrie

Beispiel 207:

- Spiegelsymmetrisch sind z.B. die Schaubilder von: x^2; $3x^4 + 2x^2 - 3$; $\cos x$
- Punktsymmetrisch sind z.B. die Schaubilder von: x; $4x^3 - x$; $\sin x$; $\tan x$

Monotonie

Definition 118:

G_f streng monoton steigend:

Mit größer werdenden x-Werten nehmen die Funktionswerte (y-Werte) zu.

Kriterium: Steigung des Graphen (Tangentensteigung) positiv,

d.h. $f'(x) > 0$ für x $\in$R

G_f streng monoton fallend:

Mit größer werdenden x-Werten nehmen die Funktionswerte (y-Werte) ab.

Kriterium: Steigung des Graphen (Tangentensteigung) negativ,

d.h. $f'(x) < 0$ für x $\in$R

Streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend) sind Funktionen oder Folgen, die nur größer (kleiner) werden, aber nicht konstant sind.

Zusammenfassung:

Es sei $f(x)$ eine Funktion und $x_1, x_2 \in D$ zwei beliebige Werte mit $x_1 < x_2$.

Die Funktion f ist dann

monoton steigend	falls	$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	falls	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend	falls	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	falls	$f(x_1) > f(x_2)$

Steigung bestimmen

Definition 119:

Wollen Sie die Monotonie einer Funktion ermitteln, müssen zuerst die Extrempunkte berechnen. Die Monotonie kann rechts und links dieser Stellen unterschiedlich sein. Deshalb ist es wichtig, die Funktion in Intervalle um und neben diesen Extrempunkten einzuteilen.

Was sind Monotonieintervalle?

Bemerkung 31:

Monotonieintervalle sind einzelne Abschnitte einer Funktion z.B. vom Punkt x=-4 bis x=0: Intervall [-4;0]. Für jedes Intervall kann die Monotonie einzeln angegeben werden.

Wie berechne ich die Monotonie?

Definition 120:

Wollen Sie die Monotonie bestimmen, gibt es zwei Alternativen. Für beide benötigen Sie die erste Ableitung der Funktion. Die erste Ableitung einer Funktion ist nämlich ihre Steigung und genau die wollen wir ja bei der Monotonieberechnung herausfinden.

Beispiel 208:

Die Funktion

$y = x^3$

ist über den gesamten Wertebereich streng monoton steigend. Bei x=0 hat sie zwar eine Steigung von 0, jedoch nur an diesem einen Punkt.

Die Funktion

$y = x^2$

ist im Bereich von minus unendlich bis Null (einschließlich) x<=0 streng monoton fallend. Im Bereich von Null (einschließlich) bis plus unendlich x>=0 ist sie streng monoton steigend.

Bemerkung 32:

Im Allgemeinen gilt eine Monotonie-Eigenschaft nicht für den gesamten Definitionsbereich einer Funktion, sondern jeweils nur auf Abschnitten davon.

Beschränktheit

Definition 121:

Eine Funktion $f(x)$ heißt

nach unten beschränkt	wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit	$a \leq f(x_0)$	für jedes $x_0 \in D$
nach oben beschränkt	wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit	$f(x_0) \leq b$	für jedes $x_0 \in D$
beschränkt	wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit	$a \leq f(x_0) \leq b$	für jedes $x_0 \in D$

Bemerkung 33:

Eine untere Schranke muss demnach nicht unbedingt mit dem kleinsten Funktionswert übereinstimmen.

Umkehrfunktion

Definition 122:

Eine Umkehrfunktion ordnet, wie der Name schon sagt die Variablen x und y umgekehrt zu. Eine Funktion kann nur umgekehrt werden, wenn jedem x-Wert höchstens ein y-Wert zugeordnet wird.

Das heißt, dass x und y-Werte vertauscht werden.

Eine Umkehrfunktion wird durch $f^{-1}(x)$ gekennzeichnet.

Bemerkung 34:

Der Exponent −1 bei f^{-1} steht nicht für eine Potenz, sondern kennzeichnet die Umkehrfunktion.

Definition 123:

Vorgehensweise zur Bestimmung der Umkehrfunktion:

Eventuell Definitionsbereich einschränken.

Funktionsgleichung nach x auflösen, liefert $x=f^{-1}(y)$.

Die Variablen x und y vertauschen, liefert $y=f^{-1}(x)$.

Bemerkung 35:

Das Bilden der Umkehrfunktion entspricht der Spiegelung der Originalfunktion an der ersten Winkelhalbierenden.

Zu jeder streng monotonen Funktion, bzw. zu jedem streng monotonen Bereich einer Funktion, gibt es eine Umkehrfunktion

Häufig ist eine Funktion nur auf einem Teil ihres Definitionsbereichs umkehrbar

Beispiel 209:

Nun beschäftigen wir uns mit der Funktion $f: x \to x^2$ d.h. $f(x) = x^2$.
Sie ist garantiert nicht umkehrbar, wie wir schon auf Seite 1 gezeigt worden ist.
Denn weil $f(3) = f(-3) = 9$ ist, kann man umgekehrt der Zahl 9 keinen eindeutigen Wert mehr zuordnen.

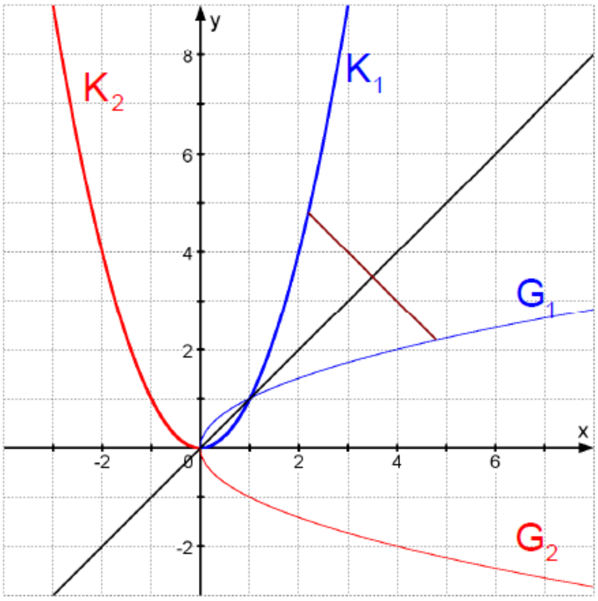
Daher behelfen wir uns, durch Aufsplitten der Funktion in einen steigenden und einen fallenden Kurventeil. Jeder für sich erfüllt dann die Bedingungen und kann umgekehrt werden. Wir schauen uns dazu diese Abbildung an:

Das Schaubild K der gegebenen Quadratfunktion f ist fettgedruckt. Die beiden Teilfunktionen sind

$f_1(x) = x^2$ mit $\mathbf{D}_{f,1} = [0;\infty[$

$f_2(x) = x^2$ mit $\mathbf{D}_{f,2} =]-\infty;0]$

Jede für sich ist streng monoton und erfüllt somit die Bedingung, daß es keine zwei Zahlen mit dem gleichen Funktionswert gibt. Also läßt sich jede für sich umkehren.



Bestimmung der Gleichung der Umkehrfunktionen:

Aus $y = x^2$ folgt $x = \pm\sqrt{y}$.
Durch Vertauschung von x und y folgt $g_{1,2}(x) = \pm\sqrt{x}$

Nun müssen wir uns wieder an das Gelernte erinnern:
Durch die Vertauschung von x und y wird aus dem Definitionsbereich von f die Wertmenge von g und aus der Wertmenge von f wird der Definitionsbereich von g.

Also gehören diese Funktionen zusammen:

$f_1(x) = x^2$ mit $\mathbf{D}_{f,1} = [0;\infty[$ und $\mathbf{W}_{f,1} = [0;\infty[$ und

$g_1(x) = \sqrt{x}$ mit $\mathbf{D}_{g,1} = \mathbf{W}_{f,1} = [0;\infty[$ und $\mathbf{W}_{g,1} = \mathbf{D}_{f,1} = [0;\infty[$

sowie

$f_2(x) = x^2$ mit $\mathbf{D}_{f,2} =]-\infty;0]$ und $\mathbf{W}_{f,2} = [0;\infty[$ und

$g_2(x) = -\sqrt{x}$ mit $\mathbf{D}_{g,2} = \mathbf{W}_{f,2} = [0;\infty[$ und $\mathbf{W}_{g,2} = \mathbf{D}_{f,2} =]-\infty;0]$

Die Schaubilder der Umkehrfunktionen sind dünner gezeichnet.

Ist eine Funktion nicht umkehrbar, weil es (irgendwo) zwei Zahlen gibt, die denselben Funktionswert besitzen, dann kann man die Funktion in der Regel so aufspalten, daß die Teilfunktionen streng monoton sind und somit ihre eigene Umkehrfunktion besitzen.

Beispiel 210:

$f(x) = 2x + 2$

Diese Funktion ist eindeutig, da sie eine Gerade darstellt. Wir müssen uns also keine Gedanken zum Definitionsbereich machen. Das sind alle reellen Zahlen.

1. Die Funktion nach x auflösen.

$$f(x) = y = 2x + 2 \qquad | -2$$
$$y - 2 = 2x \qquad | : 2$$
$$\frac{y}{2} - 1 = x$$
$$= 0,5y - 1 = x$$

2. x und y tauschen.

$y = 0,5x - 1$ bzw. $f^{-1}(x) = 0,5x - 1$

Probe:

f-1 ($f(x)$) = $0,5(2x + 2) - 1$ = x

Es ergibt sich immer x. Also sind die beiden Funktionen Umkehrfunktionen voneinander.

Beispiel 211:

Hier müssen wir den Definitionsbereich einschränken, da das Bild eine quadratische Parabel ist, die nicht eineindeutig ist. Die Parabel hat ihren Scheitelpunkt auf der y-Achse. Damit ist sie zum Beispiel für x≥0 umkehrbar. Dieser Parabelast ist eineindeutig. Der Definitionsbereich für diese Funktion seien also alle reellen Zahlen, die größer oder gleich Null sind. Den Wertebereich bilden alle reellen y-Werte, die größer oder gleich 5 sind, denn die Parabel ist nach oben offen und ihr Scheitelpunkt liegt bei 5 auf der y-Achse.

Definitionsbereich: D_f: $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$

Wertebereich: W_f: $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 5$

1. Die Funktion nach x auflösen.

$$f(x) = 3x^2 + 5 \qquad | -5$$

$$\Longleftrightarrow \quad y - 5 = 3x^2 \qquad | : 3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{y-5}{3} = x^2 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{y-5}{3}} = x$$

2. x und y tauschen.

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-5}{3}}$$

Bemerkung: Für den Parabelteil links vom Scheitelpunkt gilt: Dessen Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-5}{3}}$

Beispiel 212:

$f(x) = 5x^3$

Auch hier müssen wir uns keine Gedanken über den Definitionsbereich machen, da die Funktion eineindeutig ist.

1. Die Funktion nach x auflösen.

$f(x) = y = 5x^3 \qquad | : 5$

$\Longleftrightarrow \ \frac{y}{5} = x^3 \qquad |\sqrt[3]{\ }$

An dieser Stelle müssen wir aufpassen. Wenn wir eine dritte Wurzel ziehen um die dritte Potenz zu beseitigen, dann sind deren Ergebnisse immer positiv oder Null. Das alles soll auch für negative Zahlen gelten. Für negative Werte muss also auch etwas Negatives dastehen. Da geht mit einer Fallunterscheidung:

$\Longleftrightarrow \ \sqrt[3]{\frac{y}{5}} = x$, wenn $y \geq 0$ und $-\sqrt[3]{\frac{-y}{5}} = x$, wenn $y < 0$

2. x und y tauschen.

Die Umkehrfunktion lautet also:

$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$, wenn $x \geq 0$ und $f^{-1}(x) = y = -\sqrt[3]{\frac{-x}{5}}$, wenn $x < 0$

Grenzwerte bei Funktionen

Grenzwertbetrachtung

Grenzwertbegriff

Definition 124:

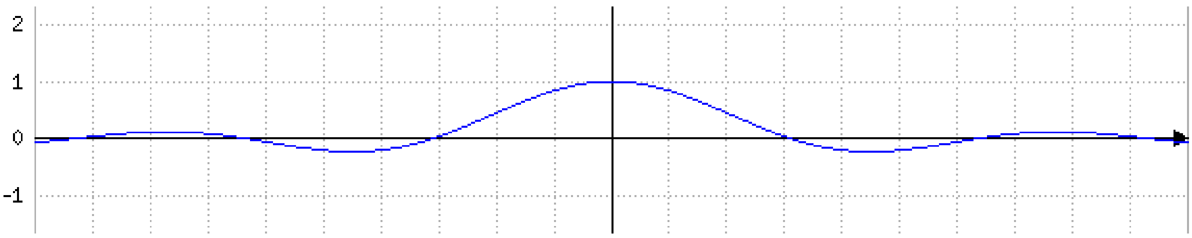
Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion bei Annäherung an die Stelle x_0 werden Folgen von Funktionswerten $\{f(x_n)\}$ betrachtet, die sich ergeben, wenn die Argumentwerte x_n gegen x_0 streben.

Beispiel 213:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \; ; \; x_0 = 0$$

$f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert. Setzt man versuchsweise Zahlenwerte x_n mit $x_n \to 0$; $x_n > 0$ ein, so erhält man aus der Folge der Funktionswerte einen Hinweis auf das Verhalten von $f(x)$ bei Annäherung an die Stelle $x_0 = 0$ von rechts.

Da $f(x)$ eine gerade Funktion ist, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$, verhalten sich die Funktionswerte bei Annäherung von links genauso wie bei einer Annäherung von rechts. Das Konvergenzverhalten ist also unabhängig von der Richtung der Annäherung an die Stelle x_0 - wichtig ist nur, dass $\{x_n\}$ eine Nullfolge ist.



Definition 125:

Der Grenzwert einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 existiert, wenn für **jede** beliebige, gegen x_0 konvergierende Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq x_0$

- die Folge der zugehörigen Funktionswerte $\{y_n = f(x_n)\}$ existiert und
- immer gegen denselben Wert G konvergiert.

Schreibweisen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G \quad \text{oder} \quad f(x) \to G \text{ für } x \to x_0$$

Bemerkung 36:

Bei der Durchführung des Grenzüberganges $x \to x_0$ wird die Stelle x_0 nur angenähert, aber nie erreicht, deshalb ist stets $x \neq x_0$. Die Funktion kann dort also undefiniert sein, trotzdem aber einen Grenzwert haben.

Links- und rechtsseitiger Grenzwert

Definition 126:

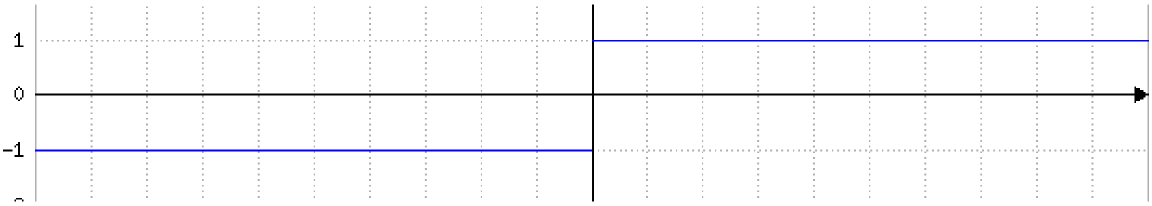
Man unterscheidet prinzipiell zwischen rechts- und linksseitigem Grenzwert

linksseitiger Grenzwert	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = G_L$ mit $x < x_0$
rechtsseitiger Grenzwert	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = G_R$ mit $x > x_0$

Dabei bedeutet $x \to x_0^-$ eine Annäherung von links oder eine linksseitige Annäherung an die Stelle x_0. Entsprechend bedeutet $x \to x_0^+$ eine Annäherung von rechts oder eine rechtsseitige Annäherung an die Stelle x_0.

Beispiel 214:

Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ für $x \to 0$



Definition 127:

$f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert G genau dann, wenn linksseitiger Grenzwert G_L und rechtsseitiger Grenzwert G_R existieren und übereinstimmen:

$$G = G_L = G_R\,.$$

Uneigentlicher Grenzwert

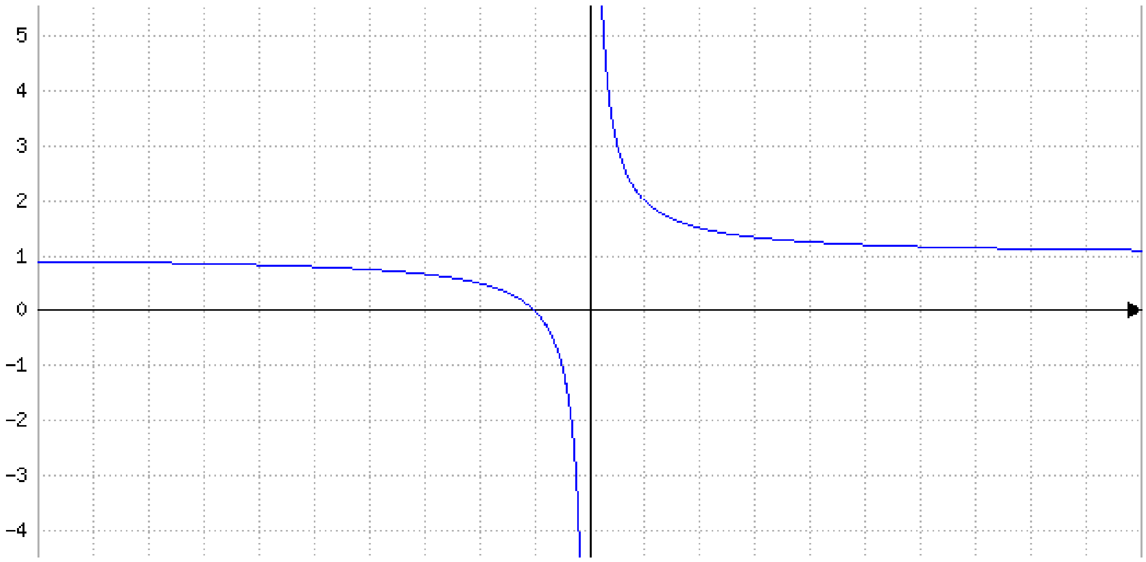
Definition 128:

$f(x)$ hat an der Stelle x_0 den linksseitigen (rechtsseitigen) uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$, wenn jede von links (von rechts) gegen x_0 konvergierende Zahlenfolge $\{x_n\}$ divergiert, d.h. gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebt.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Beispiel 215:

Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x) = \frac{x+1}{x}$ in der Nähe der Definitionslücke $x_0 = 0$.



Grenzwertsätze

Für die Grenzwerte von Funktionen gelten die folgenden Rechenregeln. Voraussetzung ist jedoch, dass die jeweiligen Werte existieren.

Definition 129:

Im Folgenden steht $\lim$ stets für $\lim\limits_{x \to x_0}$. Es gilt:

- $\lim\,(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim f(x)$ für $c \in \mathbb{R}$
- $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
- $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ falls $\lim g(x) \neq 0$
- $\lim(f(x))^a = (\lim f(x))^a$ für $a \in \mathbb{R}$
- $\lim a^{f(x)} = a^{\lim f(x)}$
- $\lim \log_a f(x) = \log_a (\lim f(x))$

Bemerkung 37:

Die Regeln gelten sinngemäß auch für die Grenzübergänge vom Typ x → ∞ und x → −∞

Unbestimmte Ausdrücke

Definition 130:

Wichtig ist die Grenzwertbestimmung häufig in solchen Fällen, in denen $f(x_0)$ einen der unbestimmten Ausdrücke

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty \quad \text{oder} \quad \infty - \infty$$

annimmt. Einfache derartige Fälle lassen sich nach geeigneten Umformungen erledigen.

Beispiel 216:

Bestimmen Sie

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x-1}{2x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+3x}$

Ein allgemeineres Verfahren zur Ermittlung dieser unbestimmten Ausdrücke wird mit der Regel von Bernoulli - de L'Hospital berechnet.

Regel von Bernoulli - de L'Hospital

Besitzen zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ an der Stelle x_0 eine gemeinsame Nullstelle oder eine gemeinsame Polstelle, dann ist $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle x_0 nicht definiert.

Unter gewissen Umständen[1] kann in solchen Fällen der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ dennoch existieren und nach folgender Regel bestimmt werden:

Definition 131:

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ sei an der Stelle x_0 vom Typ $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$. Weiter seien $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbar.

Dann gilt

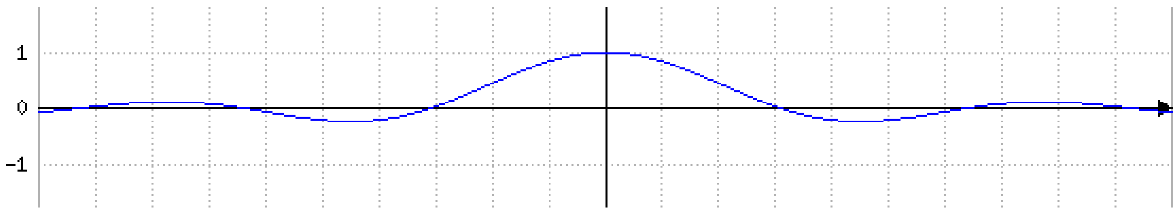
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} \quad (6.$$

Beispiel 217:

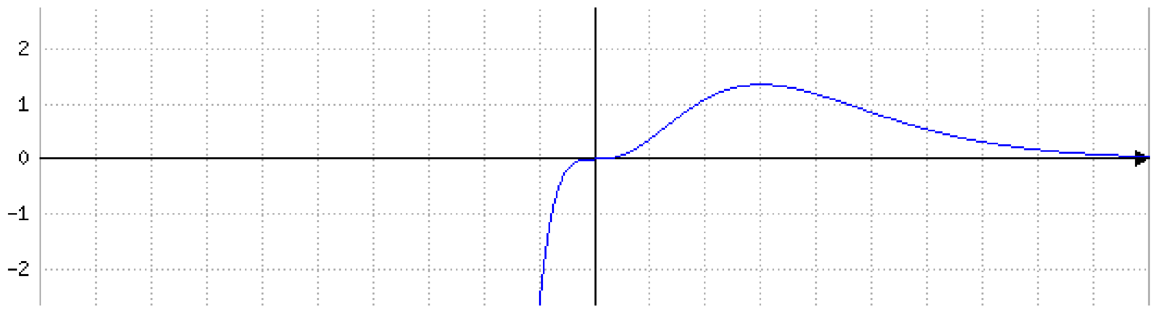
Prüfen Sie ob der jeweilige Grenzwert existiert und bestimmen Sie in gegebenenfalls:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

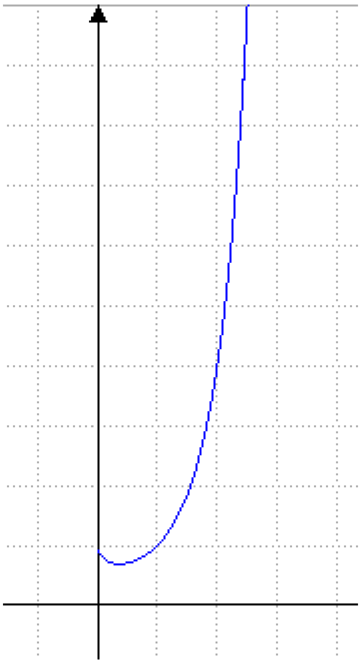
a)



b)



c)



Elementare Umformungen

Unbestimmte Ausdrücke anderer Art können oft durch elementare Umformungen in die gewünschte Form gebracht werden:

- unbestimmter Ausdruck: $\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{v(x)}$ mit $u \to 0,\ v \to 0 \quad \Rightarrow \quad \infty - \infty$

  Umformung: $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v-u}{u \cdot v} \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{0}$

- unbestimmter Ausdruck: $u(x) \cdot v(x)$ mit $u \to 0,\ v \to \infty \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \infty$

  Umformung: $u \cdot v = \frac{u}{1/v} \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{0}$

  $u \cdot v = \frac{v}{1/u} \quad \Rightarrow \quad \frac{\infty}{\infty}$

- unbestimmter Ausdruck: $u(x)^{v(x)}$ mit $u \to 0, v \to 0 \quad \Rightarrow 0^0$

  $u(x)^{v(x)}$ mit $u \to 1, v \to \infty \quad \Rightarrow 1^\infty$

  $u(x)^{v(x)}$ mit $u \to \infty, v \to 0 \quad \Rightarrow \infty^0$

  Umformungen:

  1. Logarithmieren $\ln(u^v) = v \cdot \ln u$
  2. Grenzwert bilden $\lim(\ln u^v) = \lim(v \cdot \ln u) = \lim \frac{\ln u}{1/v} = a$
  3. Umformen $\lim(\ln u^v) = \ln(\lim(u^v)) = a$
  4. Entlogarithmieren $\lim(u^v) = e^{\ln(\lim(u^v))} = e^a$

Stetigkeit

Definition 132:

Ein Funktion $y = f(x)$ nennt man stetig an der Stelle x_0, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $f(x)$ ist an der Stelle x_0 definiert

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, d.h. besitzt einen endlichen Wert

c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h. $(G_L = G_R = G = f(x_0))$

Trifft eine Bedingung nicht zu, ist die Funktion unstetig in x_0.
Man nennt $f(x)$ stetig im Intervall I, wenn f für jedes $x_0 \in I$ stetig ist.

Bemerkung 38:

An den Randstellen eines beschränkten Definitionsbereichs einer Funktion interessiert die Stetigkeit an den Intervallenden: mit Hilfe des rechts- oder linksseitigen Grenzwertes definiert man die rechtsseitige oder linksseitige Stetigkeit.

Beispiel 218:

Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x < 1 \\ -x(x-3) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Lösung:

Finde die kritischen Stellen (Sprungstellen):

$f(x)$ ist aus stetigen Funktionen zusammengesetzt.

Betrachte nur die Übergangsstelle:

Berechne also $f(x=1)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= -1\cdot(1-3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\uparrow 1} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow 1} f(x) &= \lim_{x\uparrow 1} x^2+1 \\ &= 1^2+1=2 \end{aligned}$$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\downarrow 1} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 1} f(x) &= \lim_{x|1} -x(x-3) \\ &= -1\cdot(1-3)=2 \end{aligned}$$

Stimmen alle Werte überein und ist die $f(x)$ insgesamt stetig?

$f(x)$ besteht aus stetigen Funktionen und ist insgesamt stetig, da gilt:

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = f(1) = \lim_{x\downarrow 1} f(x) = 2$$

Definition 133:

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen an einer Stelle x_0 oder auf einem Intervall I. Dann sind die auch die folgenden Funktionen stetig bei x_0 oder auf I:

- $f(x) \pm g(x)$
- $f(x)\cdot g(x)$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $g(x)\neq 0$

Bemerkung 39:

Ganz-rationale Funktionen (Polynome) sind überall stetig

Gebrochen-rationale Funktionen sind überall stetig mit Ausnahme der Nenner-Nullstellen

Stetigkeit verketteter Funktionen

Definition 134:

Ist die Funktion g stetig an der Stelle x_0 und die Funktion f stetig an der Stelle $u_0 = g(x_0)$, dann ist

$$f(g(x)) \text{ stetig an der Stelle } x_0$$

Hebbare Unstetigkeitsstelle

Definition 135:

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert, es existieren aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G = G_L = G_R$$

Dann kann $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig ergänzt werden durch die Definition

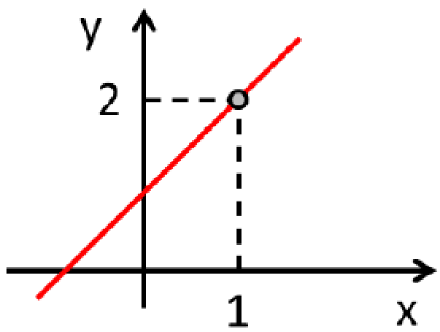
$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ G & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Beispiel 219:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \; ; \; x_0 = 1$$

Stetige Ergänzung möglich:

$$f^*(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$



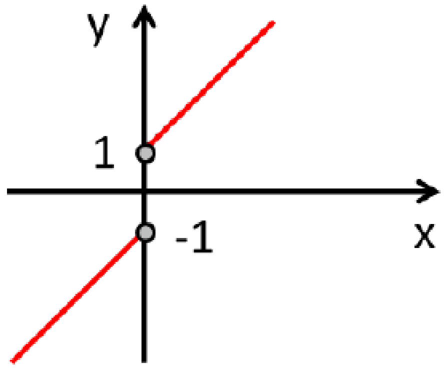
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert, es existieren die Grenzwerte G_L und G_R aber es gilt

$$G_L \neq G_R$$

Beispiel 220:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}; \quad x_0 = 0$$

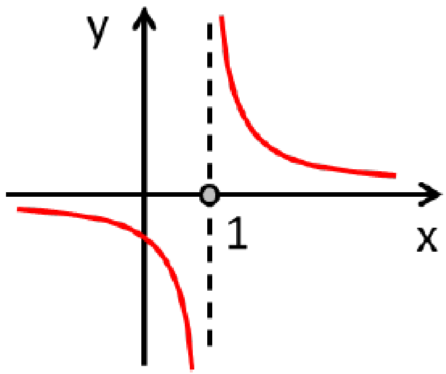


Unstetigkeitsstelle 2. Art (Polstelle)

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert und mindestens einer der Grenzwerte G_L und G_R existiert nicht.

Beispiel 221:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}; \quad x_0 = 1$$



Stückweise steige Funktionen

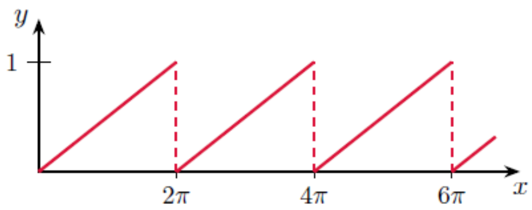
Definition 136:

Eine Funktion heißt in einem Intervall stückweise stetig, wenn sie bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist.

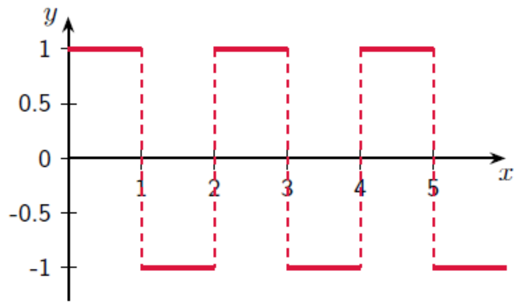
Beispiel 222:

Stückweise stetige Funktionen kommen in technischen Anwendungen häufig vor, z.B. bei periodischen Signalen:

a) Kippschwingung/Sägezahnschwingung



b) Rechteckfunktion



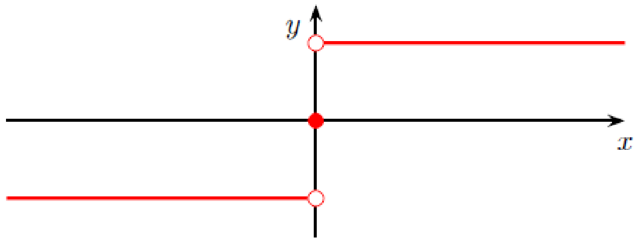
Elementare Funktionen

Signumfunktion

Definition 137:

Die Signum-Funktion liefert das Vorzeichen einer ganzen, rationalen oder reellen Zahl. Sie hat daher nur drei mögliche Funktionswerte: +1 („Plus“), 0 („kein Vorzeichen“) und –1 („Minus“) . Das Funktionszeichen ist „sgn“.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

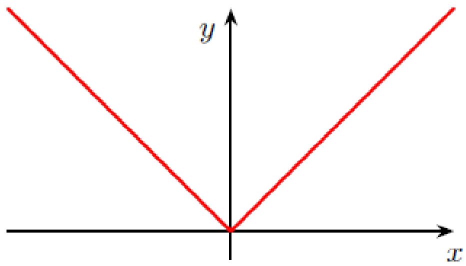


Betragsfunktion

Definition 138:

Der Betrag (oder Absolutbetrag) einer ganzen, rationalen oder reellen Zahl ist der positive „Wert“ dieser Zahl unabhängig von ihrem Vorzeichen.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{für} \quad x < 0 \\ x & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



Ganzrationale Funktionen

Definition 139:

Ganzrationale Funktionen sind die klassischen Polynomfunktionen und haben die allgemein Form

$$f(x) = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Der maximale Definitionsbereich ist immer $D = \mathbb{R}$.

Konstante Funktionen

Definition 140:

Funktionsterm	$f(x) = a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{R}$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	$W = \{a_0\}$

Lineare Funktionen

Definition 141:

Funktionsterm	$f(x) = a_1 x + a_0$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	$W = \mathbb{R}$

Quadratische Funktionen (Parabeln)

Definition 142:

Funktionsterm	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	halboffenes Intervall, abhängig von den a_i

Polynomfunktionen 3. oder höherer Ordnung

Definition 143:

Funktionsterm (s. II.1)	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	$n > 0$ gerade: halboffenes Intervall, abhängig von den a_i
	$n > 0$ ungerade: $D = \mathbb{R}$

Satz vom Nullprodukt

Definition 144:

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Dieser Satz wird zum Lösen von Gleichungen verwendet.

Beispiel 223:

Um $x^4 + 3x^3 = 0$ zu lösen, wird zunächst x^3 ausgeklammert:

$$x^3(x+3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = 0 \quad \text{oder} \quad x + 3 = 0.$$

Damit sind die Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$.

Beispiel 224:

Gegeben sei die Funktion y = f(x) = $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Durch probieren wurde eine Nullstelle bei x = 1 gefunden. Es soll nun die Polynomdivision durchgeführt werden, um im Anschluss alle Nullstellen zu finden.

Lösung: Wir dividieren die Funktion y = f(x) durch (x - 1). Dies sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -x^2 - 5x \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad\quad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Wir berechnen hier zunächst $x^3 : x = x^2$. Im Anschluss multiplizieren wir $x^2 \cdot (x - 1) = x^3 - x^2$. Anschließend wird $(x^3 - 2x^2) - (x^3 - x^2)$ berechnet. Danach beginnt das Spiel wieder von vorne, bis die Division komplett ist. Die Vorgehensweise entspricht der schriftlichen Division. Das Ergebnis der Polynomdivision lautet $x^2 - x - 6$. Ob das Ergebnis stimmt, erfahren wir durch eine Probe:

Probe: $(x^2 - x - 6) \cdot (x - 1) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ // Die Lösung stimmt

Um nun noch die restlichen Nullstellen zu finden, wenden wir die PQ-Formel auf $x^2 - x - 6 = 0$ an und erhalten $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$. Wir wissen somit, dass bei den x-Werten 1, 3 und -2 die Nullstellen liegen. Das Polynom kann man somit in seine Linearfaktoren zerfallen lassen: $f(x) = (x - 1) (x - 3) (x + 2)$. Auch hier führen wir die Probe durch:

Probe: $(x - 1) (x - 3) (x + 2) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ // Die Lösung stimmt

Gebrochen rationale Funktionen

Definition 145:

Eine gebrochen rationale Funktion hat folgende Form

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots\dots\dots + b_1 x + b_0}$$

Es befindet jeweils im Zähler und Nenner eine ganzrationale Funktion.

Definition 146:

Man nennt den größten Exponenten m im Zähler den Grad des Zählers und den höchsten vorkommenden Exponenten n im Nenner den Grad des Nenners. Das Zählerpolynom u(x) hat also den Grad m, das Nennerpolynom den Grad n. Die Differenz m - n ist der sogenannte Asymptotengrad.

Form gebrochen rationaler Funktionen

Die Gleichungen gebrochen rationaler Funktionen können in ganz unterschiedlichen Formen dargestellt sein.

Beispiel 225:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 9}$$

$$f_2(x) = x^2 - \frac{8}{x}$$

$$f_3(x) = \frac{2}{x + 2} + \frac{4}{x - 6}$$

Die erste Funktionsgleichung stellt die Standardform dar, dort wird alles auf einem Bruchstrich geschrieben.

Die zweite und die dritte Funktionsgleichung bestehen aus zwei Summanden. Werden diese auf den Hauptnenner gebracht, so hat man wieder eine gebrochen rationale Funktion.

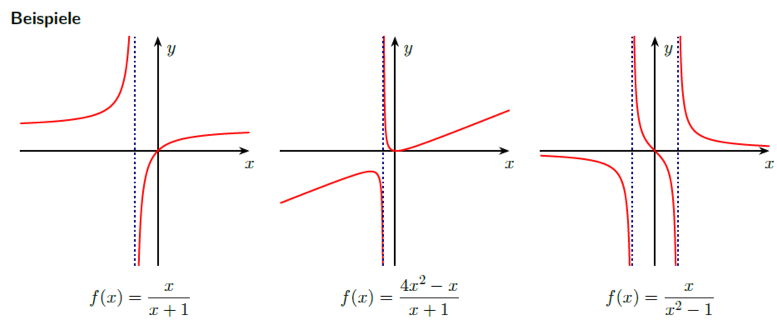
Von den oben angeschriebenen Funktionen hat

f_1 den Zählergrad 2, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad 0.

f_2 den Zählergrad 3, den Nennergrad 1 und den Asymptotengrad 2

f_3 den Zählergrad 1, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad -1

Beispiel 226:



Nullstellen und Definitionslücken

Definition 147:

Sei f eine gebrochenrationale Funktion $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$. Die Definitionslücken von f sind genau die Nullstellen von $h(x)$, d.h.

$$\Rightarrow \; D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, h(x) \neq 0\} \; .$$

Die Nullstellen von f sind genau die Nullstellen von $g(x)$, die im Definitionsbereich liegen, d.h.

$$\Rightarrow f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (g(x) = 0 \;\wedge\; x \in D) \; .$$

Asymptoten

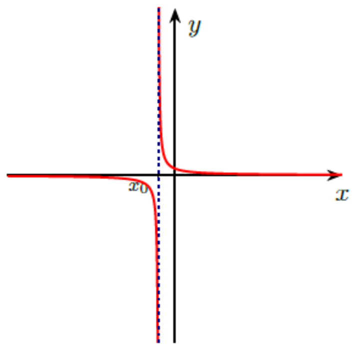
Definition 148:

Das systematische Untersuchen von Asymptoten erfolgt mit Hilfe einer Grenzwertbetrachtung.

Senkrechte Asymptoten

Definition 149:

Die senkrechten Asymptoten einer gebrochenrationalen Funktionen befinden sich genau an den Stellen nicht-hebbarer Definitionslücken. D.h. ist x_0 eine Polstellen von f, dann nähert sich das Schaubild von f für $x \to x_0$ der senkrechten Gerade $x = x_0$ an.



Waagerechte, schiefe und nichtgerade Asymptoten

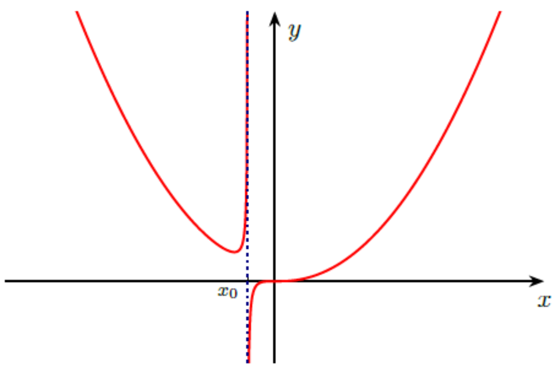
Definition 150:

Bei einer echt gebrochenrationalen Funktion ist stets die x-Achse ($y = 0$) die Asymptote für $x \to \infty$.

Ist $f(x)$ unecht gebrochenrational, dann wird f zum Bestimmen des asymptotischen Verhaltens für $x \to \pm\infty$ mit einer Polynomdivision zerlegt in

$$f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \, . \tag{II.4}$$

Dabei ist dann $p(x)$ das Polynom, das die schiefe Asymptote beschreibt. Der Grad von p ist $m - n$, d.h. Zählergrad - Nennergrad.



Partialbruchzerlegung

Definition 151:

Die Partialbruchzerlegung oder Partialbruchentwicklung ist die Darstellung einer rationalen Funktion als Summe einer Polynomfunktion und Brüchen, welche als Nenner die Linearfaktoren des Nennerpolynoms der rationalen Funktion besitzen.

Zerlegung:

Eine **echt** gebrochenrationale Funktion lässt sich stets in eine Summe

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

von Partialbrüchen P_i zerlegen. Die Partialbrüche P_i bestimmt man dabei folgendermaßen:

a) Zerlegung des Nennerpolynoms: Linearfaktoren und unzerlegbare quadratische Polynome, sowie deren Vielfachheit n

b) Zuordnung von Partialbrüchen zu den Faktoren

Typ	Ansatz für Partialbruch/Partialbrüche
$x - x_i$	$\frac{A_i}{x - x_i}$
$(x - x_i)^n$	$\frac{A_{i,1}}{x - x_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - x_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,n}}{(x - x_i)^n}$
$x^2 + ax + b$	$\frac{Bx + C}{x^2 + ax + b}$
$(x^2 + ax + b)^n$	$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + ax + b} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \ldots \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + ax + b)^n}$

c) Zusammenfassen der Partialbrüche (Hauptnenner!)

d) Bestimmung der Koeffizienten A_i, B_i, C_i durch Vergleich mit dem Zählerpolynom $g(x)$

Beispiel 227:

$$\frac{7x+1}{x^2-1} = \dots$$

Der Nenner ist einfach zu zerlegen. Die dritte Binomische Formel steckt da drin. Damit ergibt sich dieser Ansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{7x+1}{x^2-1} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} && | \cdot (x+1)\cdot(x-1) \\
7x+1 &= a\cdot(x-1) + b\cdot(x+1) \\
7x+1 &= ax - a + bx + b \\
7x+1 &= (a+b)\cdot x + (-a+b)
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dieses Lineargleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr} (1) & a & +b & = & 7 \\ (2) & -a & +b & = & 1 \end{array}}$$

Durch Addition der Gleichungen fällt a weg, b kann berechnet werden.

$$\begin{aligned}
2b &= 8 \quad | : 2 \\
b &= 4
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in (1) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
a+b &= 7 \\
a+4 &= 7 \quad | -4 \\
a &= 3
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich die Zerlegung:

$$\boxed{\frac{7x+1}{x^2-1} = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{x-1}}$$

Beispiel 228:

$$\frac{2x^3-14x^2-4x+94}{x^3-5x^2-2x+24}=\ldots$$

Der Grad des Zählerpolynoms ist **nicht kleiner** als der Grad des Nennerpolynoms. Daher muss zunächst eine Polynomdivision[9] mit „Rest“ durchgeführt werden.

$$\begin{array}{rrrrl} (2x^3 & -14x^2 & -4x & +94) & : \ (x^3-5x^2-2x+24) \ = \ 2 \\ -(2x^3 & -10x^2 & -4x & +48) & \\ \hline & -4x^2 & & +46 & \end{array}$$

Der erste Zerlegungsschritt sieht damit so aus:

$$\frac{2x^3-14x^2-4x+94}{x^3-5x^2-2x+24}=2+\frac{-4x^2+46}{x^3-5x^2-2x+24}$$

Als nächstes werden die Nennernullstellen benötigt. Durch planvolles Raten erhält man z.B. $x_{01}=-2$. Wir können eine Polynomdivision durch $(x-x_{01})$, also durch $(x+2)$ durchführen.

$$\begin{array}{rrrrl} (x^3 & -5x^2 & -2x & +24) & : \ (x+2) \ = \ x^2-7x+12 \\ -(x^3 & +2x^2) & & & \\ \hline & -7x^2 & -2x & +24 & \\ - & (-7x^2 & -14x) & & \\ \hline & & 12x & +24 & \\ & - & (12x & +24) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Der Nenner kann also folgendermaßen zerlegt werden:

$$x^3-5x^2-2x+24=(x+2)\cdot(x^2-7x+12)$$

Die zweite Klammer kann nun mit Hilfe der p-q-Formel und dem Satz von Vieta weiter zerlegt werden.

$$\begin{aligned} x^2-7x+12 &= 0 \\ x_{02/03} &= \frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{48}{4}} \\ x_{02/03} &= \frac{7}{2}\pm\frac{1}{2} \\ x_{02}=3 & \quad x_{03}=4 \end{aligned}$$

Hiermit sieht die komplette Zerlegung des Nenners so aus:

$$x^3-5x^2-2x+24=(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$$

Mit dem Teilbruch aus der ersten Zerlegung des Bruches und dieser Nennerzerlegung kann nun der Ansatz für die Partialbruchzerlegung gemacht werden.

$$\begin{aligned} \frac{2x^3-14x^2-4x+94}{x^3-5x^2-2x+24} &= 2+\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-4} \\ 2+\frac{-4x^2+46}{x^3-5x^2-2x+24} &= 2+\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-4} \quad \Big| -2 \\ \frac{-4x^2+46}{x^3-5x^2-2x+24} &= \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-4} \quad \Big| \cdot \mathrm{HN} \\ -4x^2+46 &= a\cdot(x-3)\cdot(x-4)+b\cdot(x+2)\cdot(x-4)+c\cdot(x+2)\cdot(x-3) \\ -4x^2+46 &= ax^2-7ax+12a+bx^2-2bx-8b+cx^2-cx-6c \\ -4x^2+46 &= (a+b+c)\cdot x^2+(-7a-2b-c)\cdot x+(12a-8b-6c) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.
<u>Anmerkung:</u> Da auf der linken Gleichungsseite kein Linearer Term mit einfachem x auftritt, ist der zugehörige Koeffizient Null.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr} (1) & a & +b & +c & = & -4 \\ (2) & -7a & -2b & -c & = & 0 \\ (3) & 12a & -8b & -6c & = & 46 \end{array}}$$

Mit dem Teilbruch aus der ersten Zerlegung des Bruches und dieser Nennerzerlegung kann nun der Ansatz für die Partialbruchzerlegung gemacht werden.

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^3-14x^2-4x+94}{x^3-5x^2-2x+24} &= 2+\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-4} \\
2+\frac{-4x^2+46}{x^3-5x^2-2x+24} &= 2+\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-4} \quad |-2 \\
\frac{-4x^2+46}{x^3-5x^2-2x+24} &= \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-4} \quad |\cdot \mathrm{HN} \\
-4x^2+46 &= a\cdot(x-3)\cdot(x-4)+b\cdot(x+2)\cdot(x-4)+c\cdot(x+2)\cdot(x-3) \\
-4x^2+46 &= ax^2-7ax+12a+bx^2-2bx-8b+cx^2-cx-6c \\
-4x^2+46 &= (a+b+c)\cdot x^2+(-7a-2b-c)\cdot x+(12a-8b-6c)
\end{aligned}
$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.
Anmerkung: Da auf der linken Gleichungsseite kein Linearer Term mit einfachem x auftritt, ist der zugehörige Koeffizient Null.

$$
\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & a & +b & +c & = & -4 \\
(2) & -7a & -2b & -c & = & 0 \\
(3) & 12a & -8b & -6c & = & 46
\end{array}}
$$

Zur Abwechslung verwende ich diesmal für den ersten Reduktionsschritt das **Einsetzungsverfahren**. Dazu wird Gleichung (1) nach c umgestellt.

$$
\begin{aligned}
a+b+c &= -4 \quad |-a-b \\
c &= -4-a-b
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis wird in (2) und (3) eingesetzt.

$$
\begin{array}{lrcrl}
(2) & -7a-2b-(-4-a-b) & = & 0 & \\
(3) & 12a-8b-6\cdot(-4-a-b) & = & 46 & \\
\hline
(2) & -7a-2b+4+a+b & = & 0 & |-4 \\
(3) & 12a-8b+24+6a+6b & = & 46 & |-24 \\
\hline
(2) & -6a\ -b & = & -4 & \\
(3) & 18a-2b & = & 22 & \\
\hline
\end{array}
$$

Für den zweiten Reduktionsschritt möchte ich das Additions-/Subtraktionsverfahren verwenden. Ich dividiere Gleichung (3) durch 2, damit beim Subtrahieren b wegfällt.

$$
\begin{array}{lrrcrl}
(2a) & -6a & -b & = & -4 & \\
(3a) & 18a & -2b & = & 22 & |:2 \\
\hline
(2a) & -6a & -b & = & -4 & |- \\
(3a) & 9a & -b & = & 11 & | \\
\hline
 & 15a & & = & 15 & |:15 \\
 & a & & = & 1 &
\end{array}
$$

Dieses Ergebnis setze ich in $(2a)$ ein, um b zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
-6a-b &= -4 \\
-6\cdot 1-b &= -4 \quad |+6 \\
-b &= 2 \quad |\cdot(-1) \\
b &= -2
\end{aligned}
$$

Beide Ergebnisse werden in (1) eingesetzt, um c zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
a+b+c &= -4 \\
1-2+c &= -4 \quad |+1 \\
c &= -3
\end{aligned}
$$

Mit diesen Werten kann nun die Zerlegung des ursprünglichen Bruches angegeben werden.

$$
\boxed{\frac{2x^3-14x^2-4x+94}{x^3-5x^2-2x+24}=2+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-4}}
$$

Potenz- und Wurzelfunktionen

Definition 152:

Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion zur Potenzfunktion y = x^n .

Ist n gerade so ist die Potenzfunktion nicht injektiv (umkehrbar eindeutig) und daher nicht eindeutig umkehrbar.

Es gibt es zwei Möglichkeiten die Wurzelfunktion zu definieren:

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ *und* $f(x) = -\sqrt[n]{x}$.

Dabei wird im Allgemeinen die positive Variante als die Umkehrfunktion angesehen.

Falls n ungerade ist, so ist die Wurzelfunktion auf ganz R umkehrbar.

Exponent kleiner als 1

Alle haben den Definitionsbereich R^+

Der Graph ist monoton steigend

Gemeinsame Punkte (0|0) und (1|1)

Für x<1: Die Graphen liegen über der Geraden y=x.

Für x>1: Die Graphen liegen unter der Geraden y=x.

Je mehr sich der Exponent $\frac{m}{n}$ der Zahl 1 nähert, umso enger liegt der Graph an der Geraden y=x.

Exponent größer als 1

Alle haben den Definitionsbereich R^+.

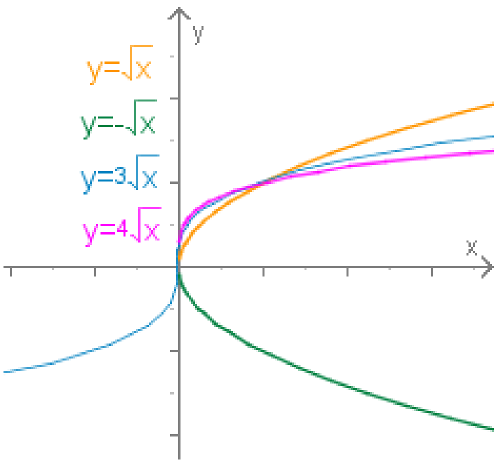
Der Graph ist streng monoton steigend

Gemeinsame Punkte (0|0) und (1|1)

Für x<1: Die Graphen liegen unter der Geraden y=x.

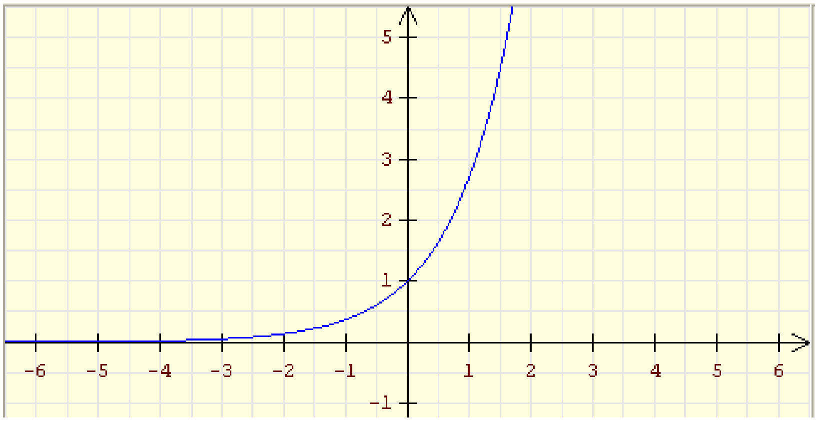
Für x>1: Die Graphen liegen über der Geraden y=x.

Je mehr sich der Exponent $\frac{m}{n}$ der Zahl 1 nähert, umso enger liegt der Graph an der Geraden y=x.



Exponentialfunktion

Grundeigenschaften der Funktion f(x) = e^x



Wichtige Funktionswerte:

$\mathrm{f}(0) = 1$

$\mathrm{f}(1) \approx 2{,}718$

$\mathrm{f}(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^1} \approx 0{,}37$

$\mathrm{f}(-2) = \frac{1}{\mathrm{e}^2} = 0{,}14$

Randwerte:

$x \to +\infty; f(x) = e^x \to \infty$

$x \to -\infty; f(x) = e^x \to 0$

d. h. die negative x-Achse ist eine waagrechte Asymptote mit

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt die Funktion keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

Krümmung:

Besitzt immer eine Linkskrümmung.

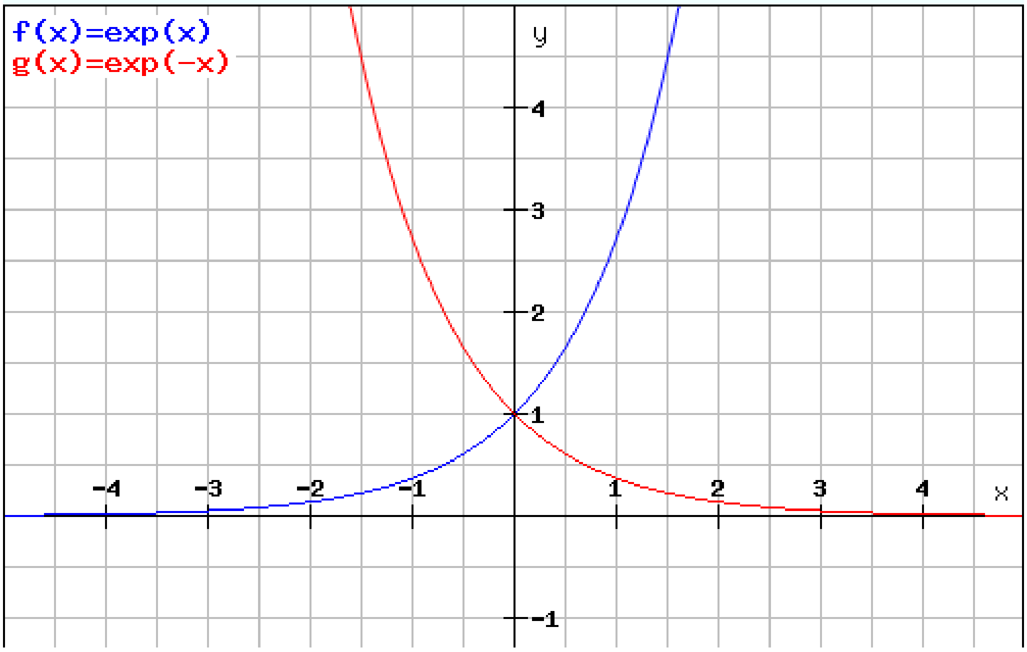
Wendepunkte:

Besitzt keine Wendepunkte.

Bemerkung 40:

Es gibt weitere Exponentialfunktionen, deren Schaubilder aus der Kurve y = e^x durch Spiegelung, Verschiebung oder Streckung entstehen. Das Erkennen dieser Eigenschaften hilft bei Aufgaben oft weiter. Daher werden auf den nächsten Seiten diese Abbildungen besprochen.

Spiegelung von K: y = e^x ergibt K': y = e^{-x}.



Wichtige Funktionswerte:

$\mathrm{f}(0) = 1$

$\mathrm{f}(1) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^1} \approx 0{,}37$

$\mathrm{f}(-1) = \mathrm{e}^1 \approx 2{,}718$

$\mathrm{f}(-2) = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}40$

Randwerte:

$x \to +\infty; f(x) = e^x \to 0$

$x \to -\infty; f(x) = e^x \to \infty$

d. h. die positive x-Achse ist eine waagrechte Asymptote mit

$\lim_{x \to +\infty} e^x = 0$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt die Funktion keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

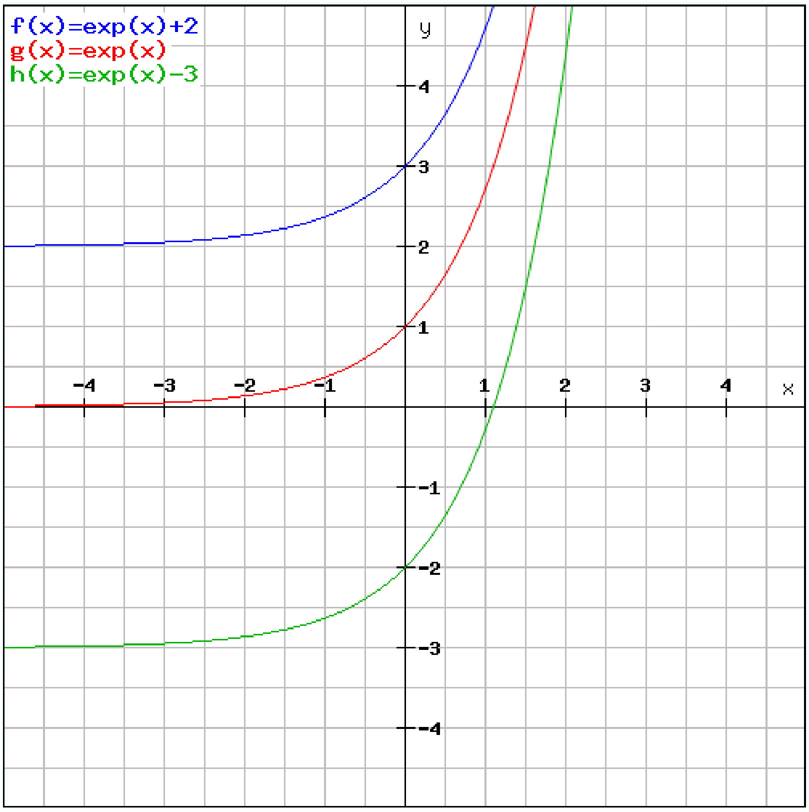
Krümmung:

Besitzt immer eine Linkskrümmung.

Wendepunkte:

Besitzt keine Wendepunkte.

Verschiebung der Kurve K: $y = e^x$.



Verschiebung in y-Richtung:

Durch die Verschiebung in die y-Richtung werden alle y-Werte um zwei Einheiten nach oben verschoben. Die dazugehörige Funktionsgleichung:

$$f(x) = e^x + 2$$

Damit verschiebt sich natürlich auch die waagrechte Asymptote um zwei Einheiten nach oben und hat die Gleichung $y = 2$ und schneidet jetzt die y-Achse im Punkt P(0|3).

Bei einer Verschiebung um 3 nach unten erhält man $y = e^x - 3$, die waagrechte Asymptote mit y=-3 und den Punkt S(0|-2)

Die Kurve $y=e^x+2$ entsteht aus $y=e^x$ durch Verschiebung um 2 nach oben.

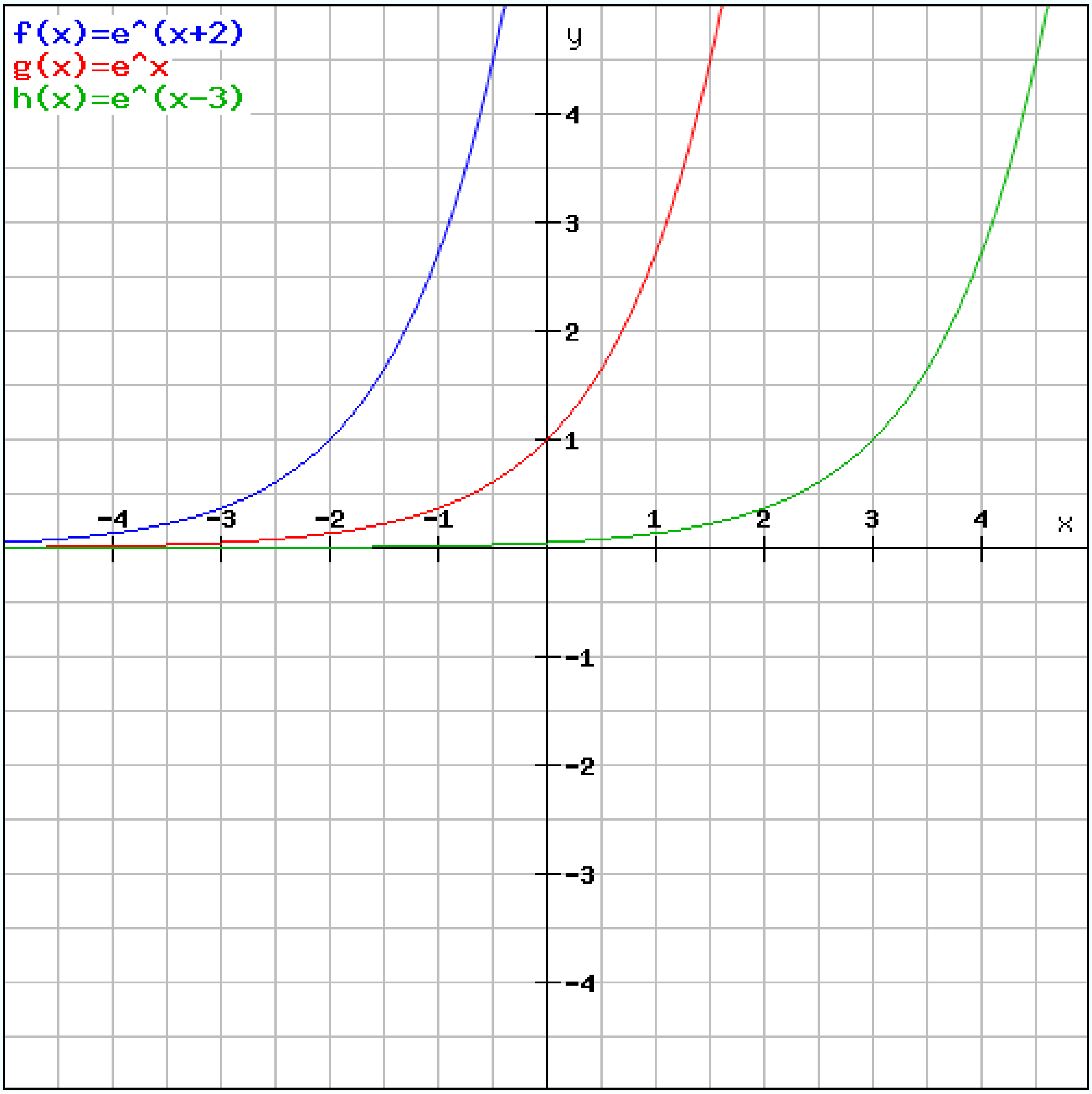
Die Kurve $y=e^x-3$ entsteht aus $y=e^x$ durch Verschiebung um 3 nach unten.

Verschiebung in x-Richtung

$y = e^{x+2}$

$y = e^{x}$

$y = e^{x-3}$



Die Kurve $y=e^{x+2}$ entsteht aus $y=e^{x}$ durch Verschiebung um 2 nach links.

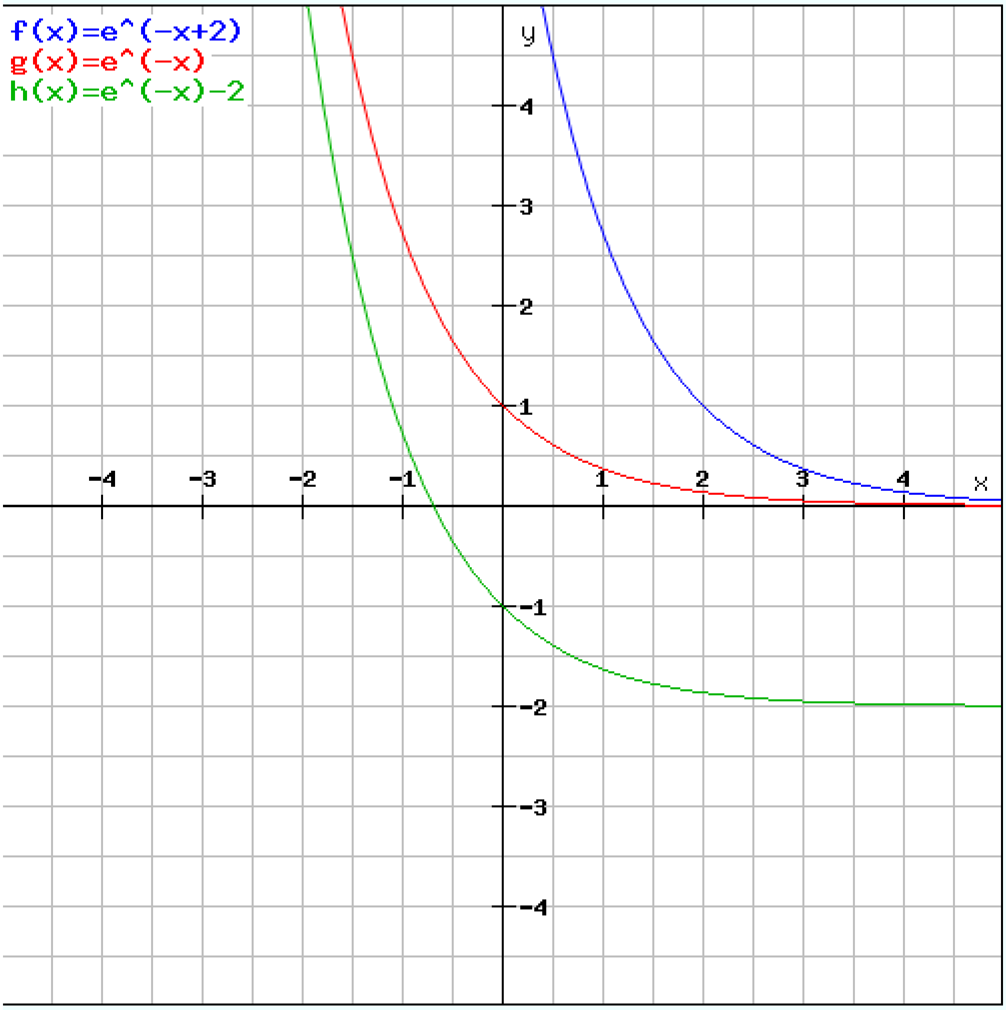
Die Kurve $y=e^{x-3}$ entsteht aus $y=e^{x}$ durch Verschiebung um 3 nach rechts.

Weitere Verschiebungen

$y = e^{-x+2}$

$y = e^{-x}$

$y = e^{-x} - 2$

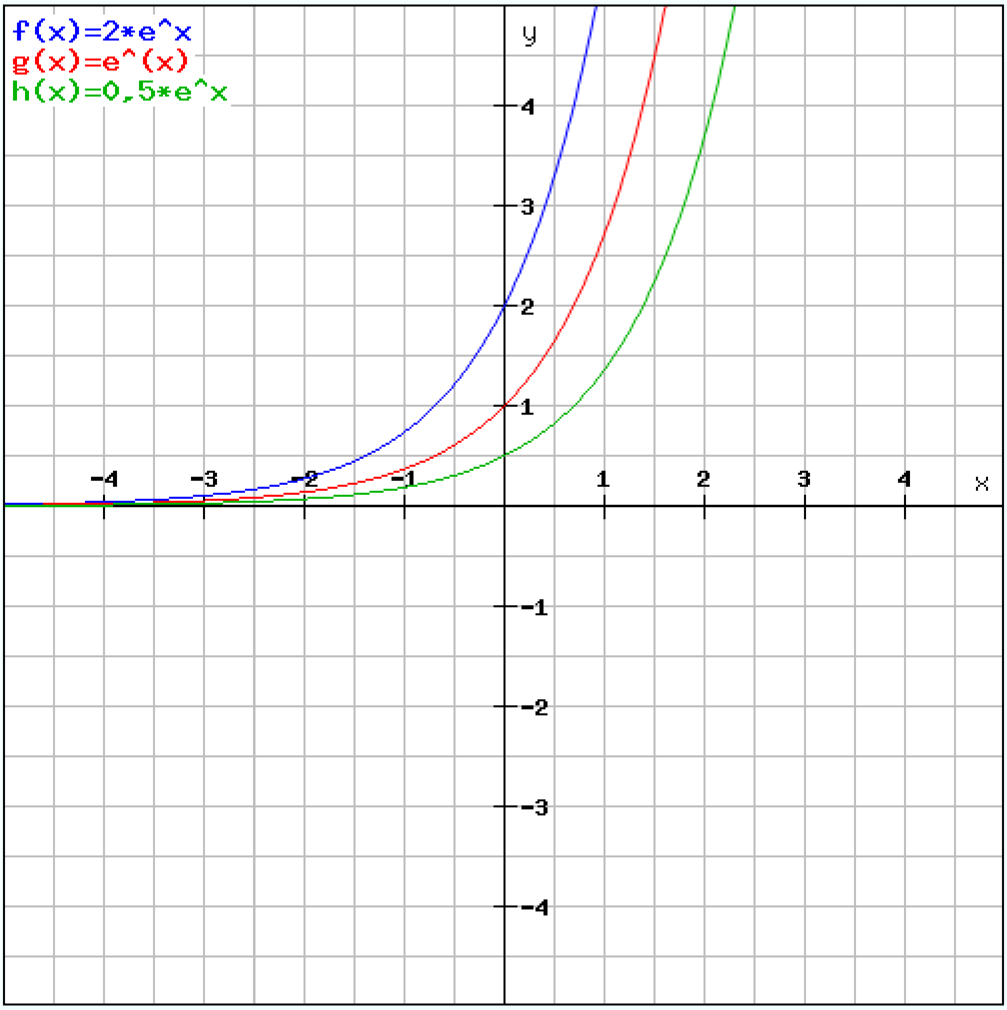


Streckung in y-Richtung

$y = 2e^x$

$y = e^x$

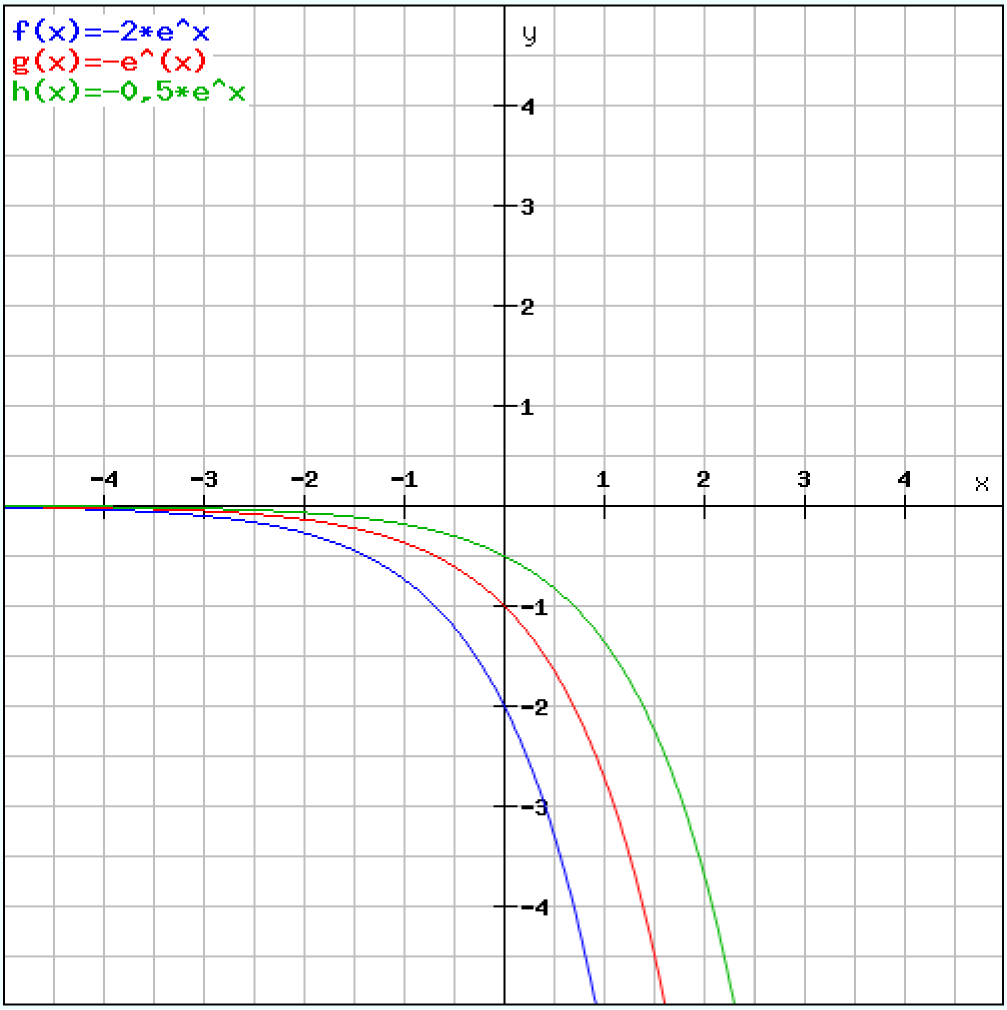
$y = 0{,}5e^x$



$y = -2e^x$

$y = -e^x$

$y = -0{,}5e^x$

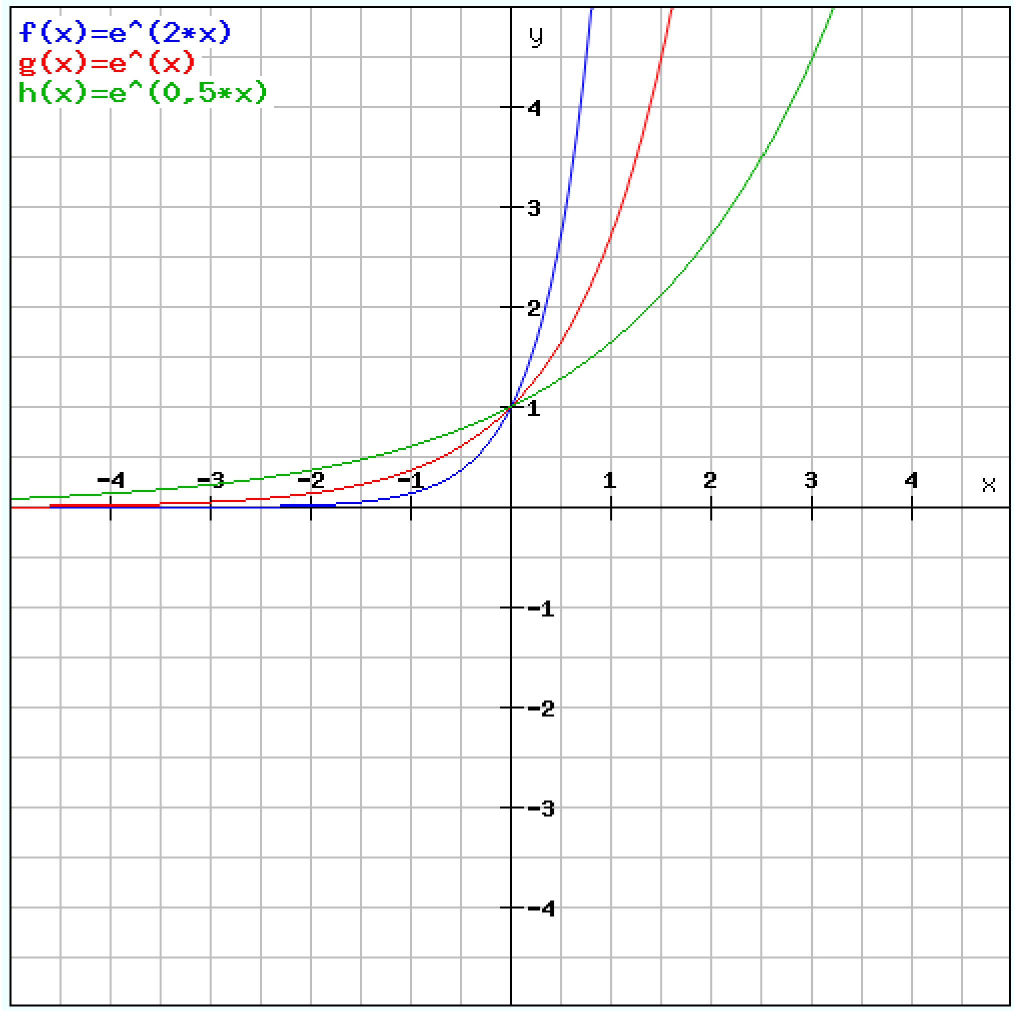


Streckung in x-Richtung

$y = e^{2x}$

$y = e^{x}$

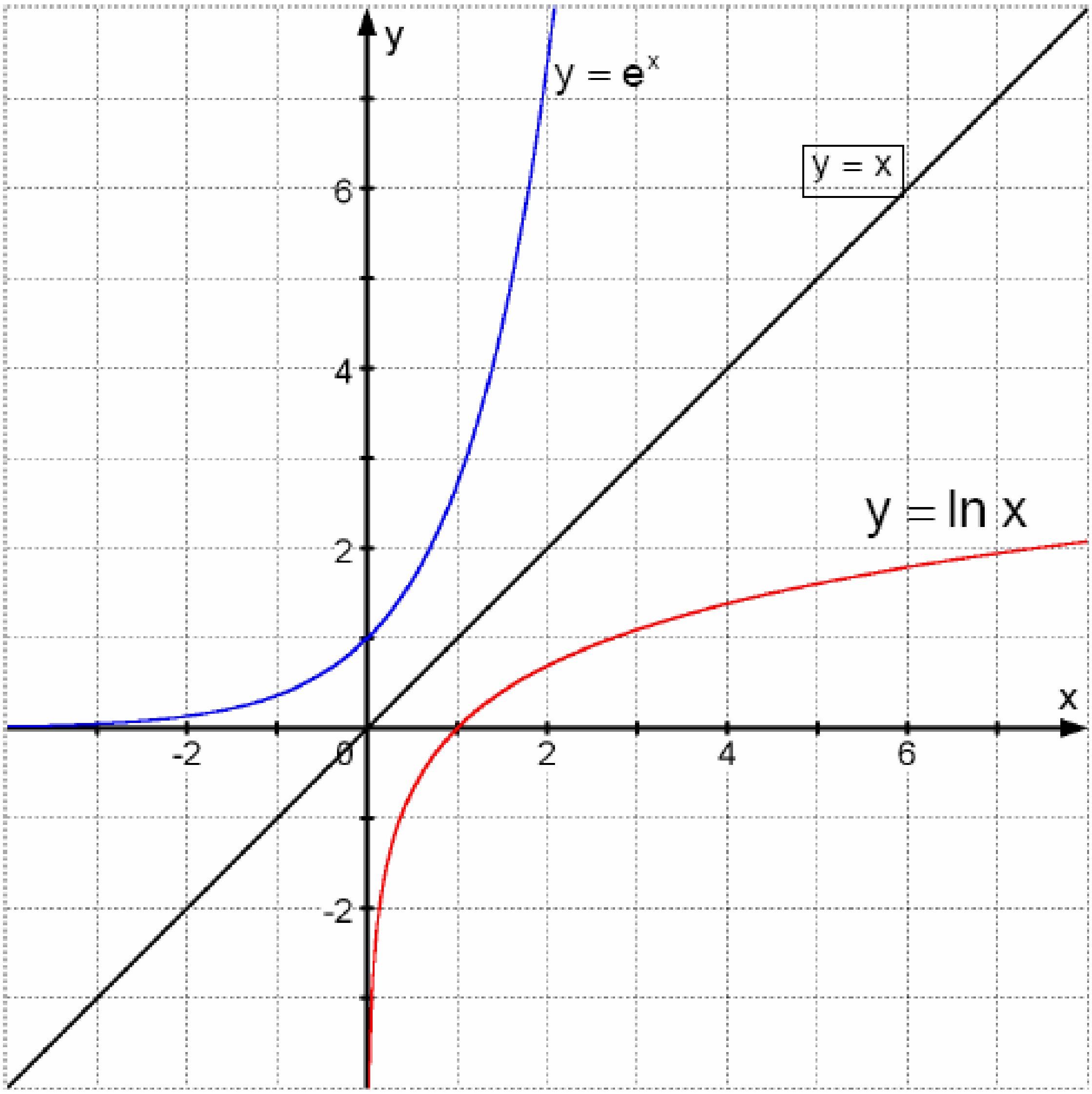
$y = e^{0,5x}$



Logarithmusfunktionen

Eigenschaften von Logarithmusfunktionen

Bei der Logarithmusfunktion handelt es sich um die Umkehrfunktion zur e-Funktion.

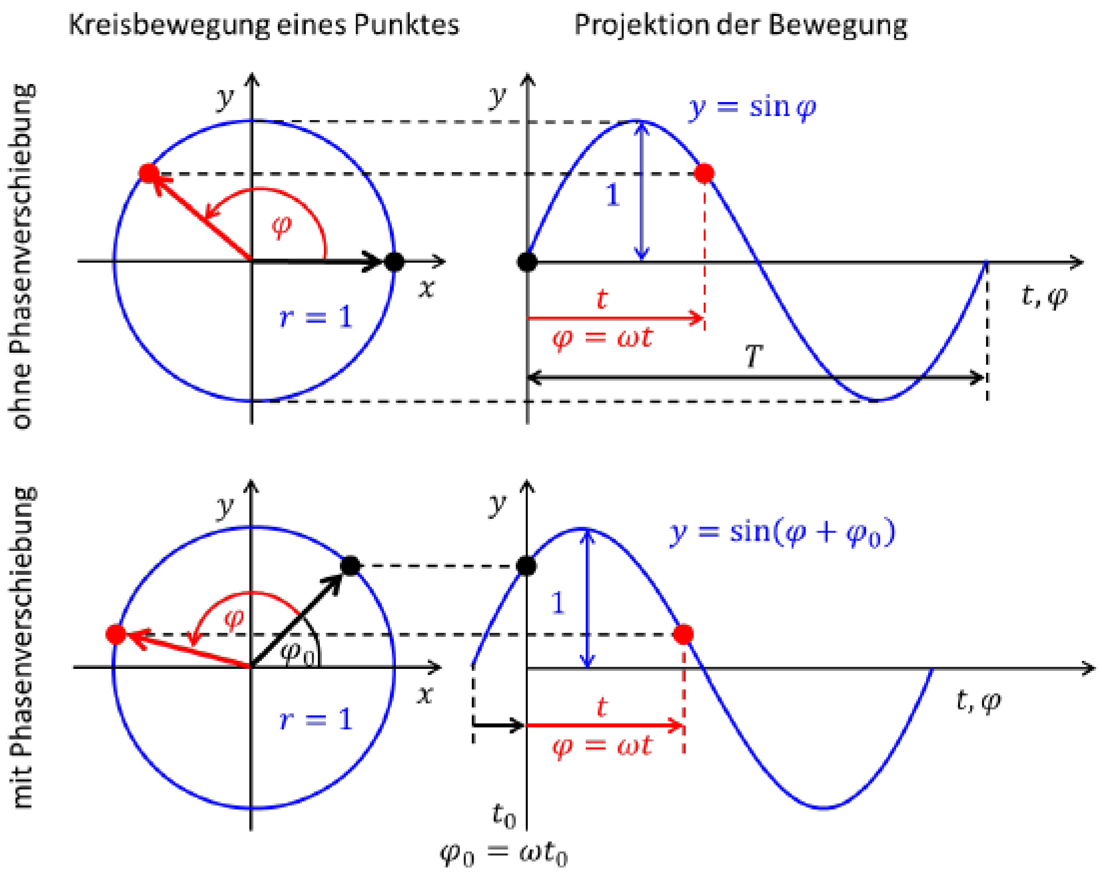


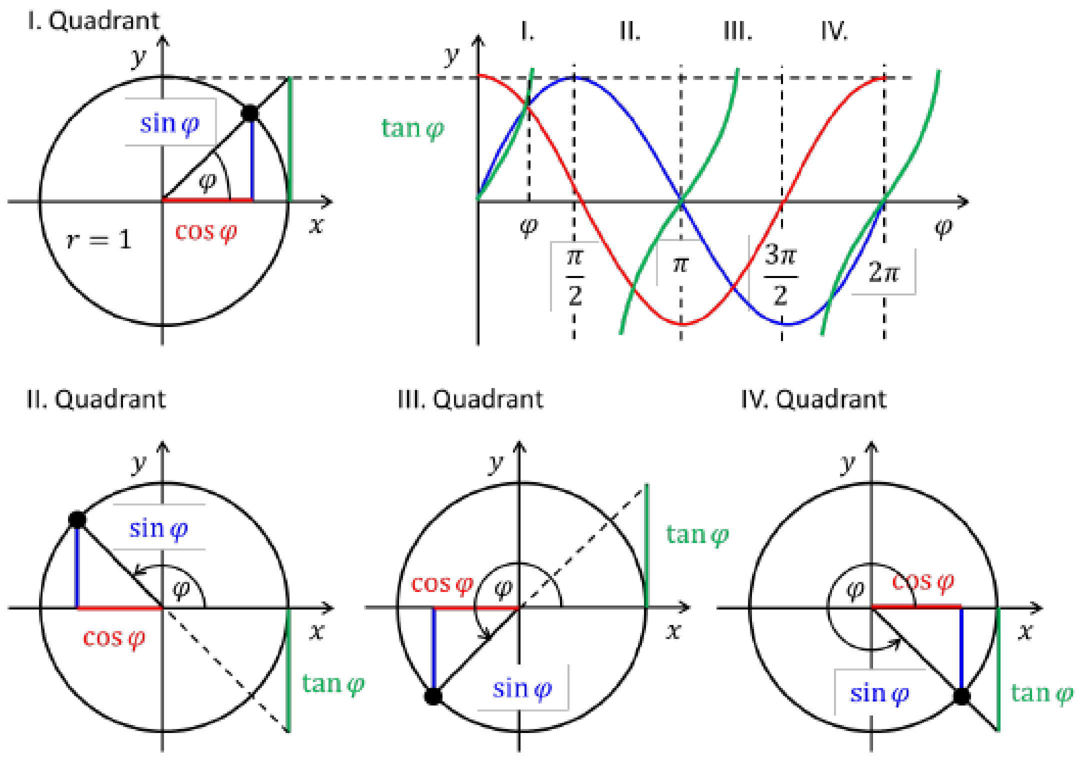
Eigenschaften für die Kurvendiskussion

	$f(x) = \ln x$	$f(x) = \ln \mathrm{Arg}(x)$
Definitionsbereich	Bed.: $x > 0$ $\mathbf{D} = \mathbf{R}^+$	Bed.: $\mathrm{Arg}(x) > 0 \Rightarrow \mathbf{D} = ...$
Nullstelle	$x_N = 1$ denn $\ln 1 = 0$	Bed.: $\mathrm{Arg}(x_N) = 1 \Rightarrow x_N = ...$
Randwerte	$x \to 0 \;\Rightarrow\; \ln x \to -\infty$ d.h. senkrechte Asymptote $x \to \infty \;\Rightarrow\; \ln x \to \infty$	$x \to$ Argument-Nullstelle $\;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$ d.h. senkrechte Asymptote (nach unten) $x \to$ Argument-Polstelle $\;\Rightarrow\; f(x) \to \infty$ d.h. senkrechte Asymptote (nach oben)
Ableitung:	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{\mathrm{Arg}'(x)}{\mathrm{Arg}(x)}$
Wertmenge	$\mathbf{W} = \mathbf{R}$	Unterschiedlich

Trigonometrische Funktionen

Zusammenfassung





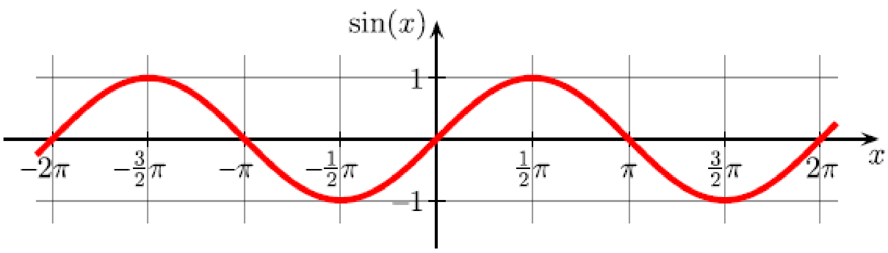
Sinusfunktion

Funktionsterm: $f(x) = \sin x$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Wertebereich: $W = [-1, 1]$



Umkehrfunktion

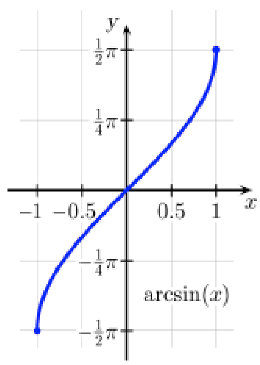
Die Funktion ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend, dort also eindeutig umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion ist $f(x) = \arcsin x$.

Die Lösungen von $\sin x = c$ mit $c \in [-1, 1]$ sind:

Hauptwert[1]: $x_1 = \arcsin c$ mit $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$

2. Lösung: $x_2 = \pi - x_1$

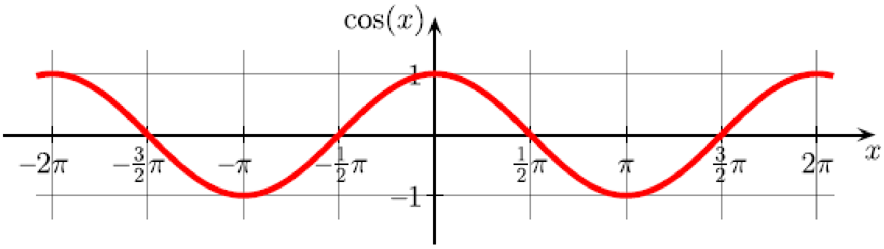
Sämtliche Lösungen: $x = \begin{cases} \arcsin c + k \cdot 2\pi \\ (\pi - \arcsin c) + k \cdot 2\pi \end{cases}$ mit $k \in \mathbb{Z}$



Kosinusfunktion

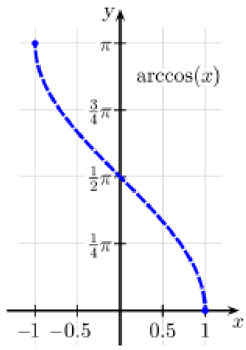
Funktionsterm: $f(x) = \cos x$ Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Wertebereich: $W = [-1, 1]$



Umkehrfunktion

Die Funktion ist im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend, dort also eindeutig umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion ist $f(x) = \arccos x$.



Die Lösungen von $\cos x = c$ mit $c \in [-1, 1]$ sind:

Hauptwert: $x_1 = \arccos c$ mit $0 \leq x_1 \leq \pi$

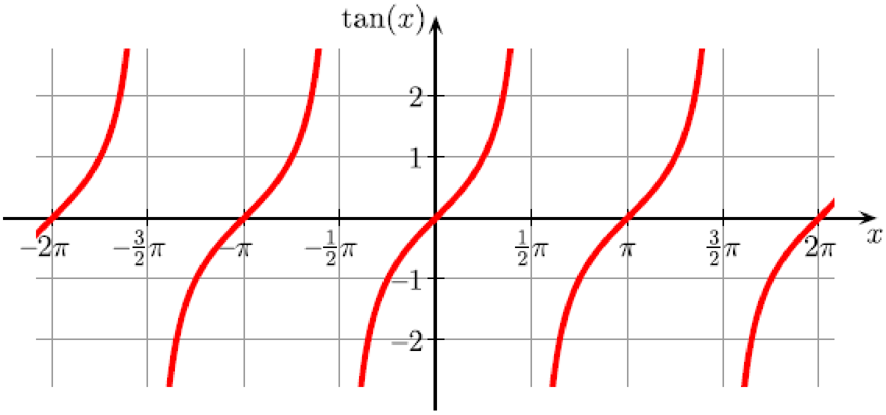
2. Lösung: $x_2 = -x_1 = -\arccos c$

Sämtliche Lösungen: $x = \pm \arccos x + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Tangensfunktion

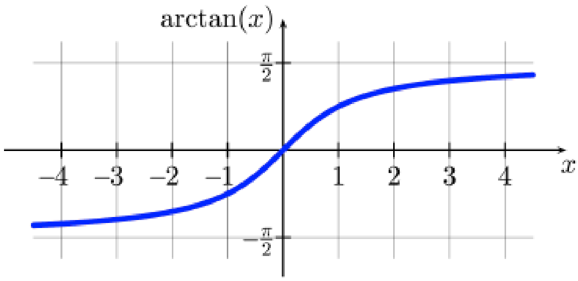
Funktionsterm: $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$

Nullstellen: $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Wertebereich: $W = (-\infty, \infty)$



Umkehrfunktion

Die Funktion ist im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend, dort also eindeutig umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion ist $f(x) = \arctan x$.



Die Lösungen von $\tan x = c$ $c \in \mathbb{R}$ sind:

Hauptwert: $x_1 = \arctan c$ mit $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$

Sämtliche Lösungen: $\arctan c + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

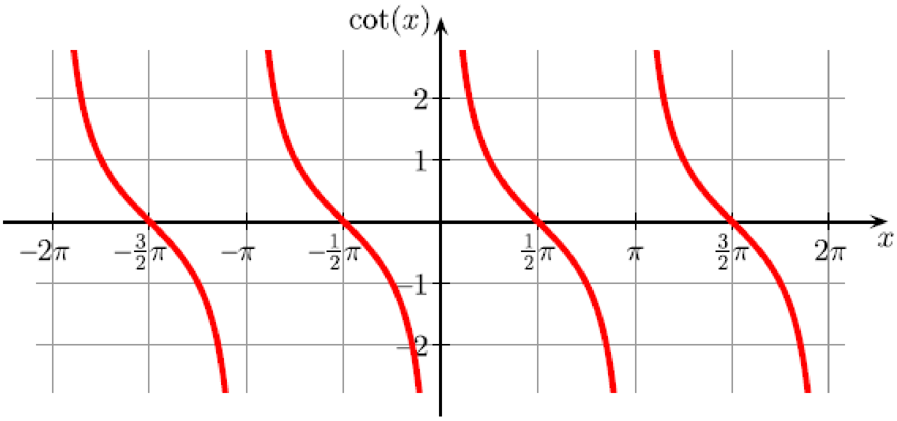
Cotangensfunktion

Funktionsterm: $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$

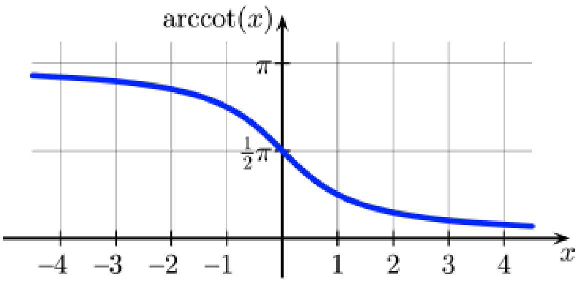
Nullstellen: $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Wertebereich: $W = (-\infty, \infty)$



Umkehrfunktion

Die Funktion ist im Intervall $(0, \pi)$ streng monoton fallend, dort also eindeutig umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion ist $f(x) = \operatorname{arccot} x$.



Die Lösungen von $y = \cot c$ sind:

Hauptwert: $x_1 = \operatorname{arccot} c$ mit $0 < x_1 \pi$

Sämtliche Lösungen: $\arctan c + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Hyperbelfunktionen

Definition 153:

Unter Verwendung der Exponentialfunktion y=e^{x} lassen sich weitere Funktionen, die sogenannten hyperbolischen Funktionen (bzw. Hyperbelfunktionen), definieren.

Sinus Hyperbolicus

Definition 154:

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Kosinus Hyperbolicus

Definition 155:

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Tangens/Kotangens Hyperbolicus

Definition 156:

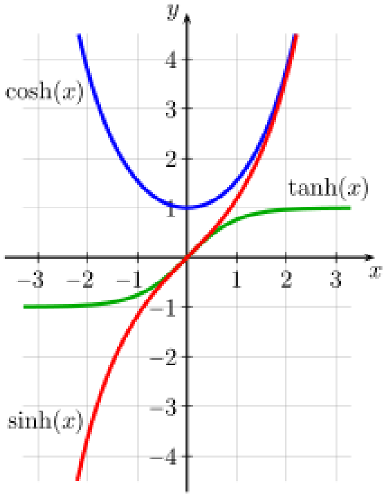
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

Eigenschaften

	sinhx	coshx	tanhx	cothx
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$, $x \neq 0$
Wertebereich	$\mathbb{R}$	$[1; +\infty[$	$]-1; +1[$	$]-\infty; -1[\cup]+1; +\infty[$
Nullstellen	$x = 0$	keine	$x = 0$	keine
Asymptoten	keine	keine	$y = \pm 1$	$x = 0$; $y = \pm 1$
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm 1$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm 1$
Monotonie	monoton wachsend	$]-\infty; 0[$: m. fallend $]0; +\infty[$: m. wachs.	monoton wachsend	$]-\infty; 0[$: m. fallend $]0; +\infty[$: m. fallend
Extrema	keine	$x = 0$	keine	keine
Wendepunkte	$x = 0$	keine	$x = 0$	keine
Symmetrie	ungerade Funktion	gerade Funktion	ungerade Funktion	gerade Funktion

Darstellung



Areafunktionen

Definition 157:

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktion sind die sogenannten Areafunktionen

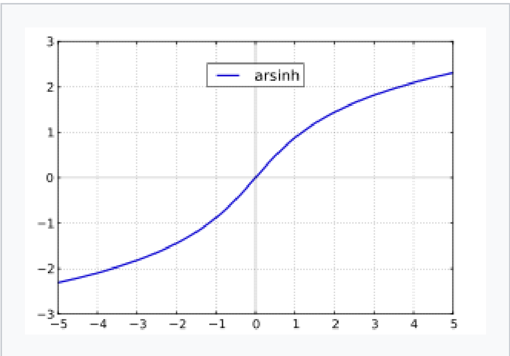
Areasinus Hyperbolicus arsinh

Areakosinus Hyperbolicus arcosh

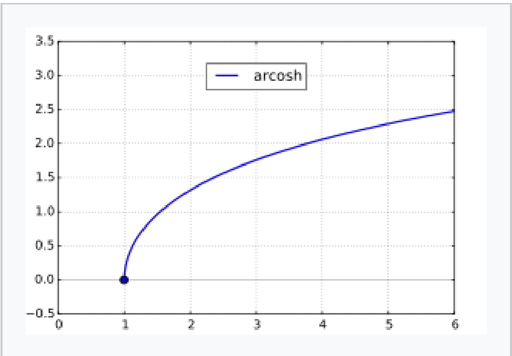
Areatangens Hyperbolicus artanh

Areakotangens Hyperbolicus arcoth

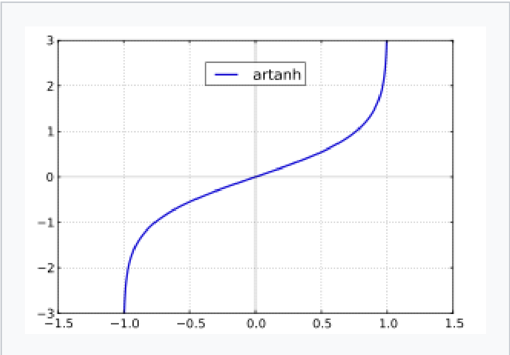
Darstellung



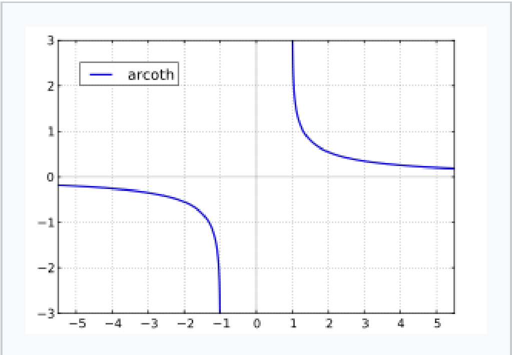
Areasinus hyperbolicus



Areakosinus hyperbolicus



Areatangens hyperbolicus



Areakotangens hyperbolicus

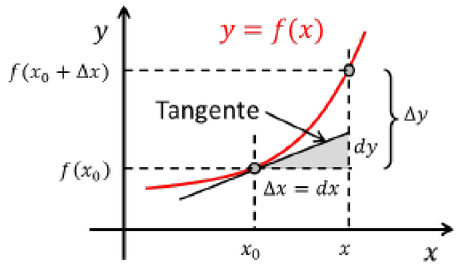
Differentialrechnung

Geometrische Deutung

Ziel: Steigung der Tangente an der Stelle x_0, bzw. im Punkt $(x_0 \,|\, y_0)$.

Vorgehen:

- Festlegen von zwei Stellen x_0 und x
- Berechnen der Differenzen Δx, Δy
- Berechnen der Steigung $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- Verkleinerung des Abstandes $\Delta x = x - x_0$
- liefert immer genauere Ergebnisse



Ableitungsbegriff

Definition 158:

Existiert der Grenzwert

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

dann nennt man f differenzierbar in x_0 und A ist die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Bezeichnungen

Definition 159:

Die Sekantensteigung $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt Differenzenquotient

Der Grenzwert $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Tangentensteigung) heißt Differentialquotient

Die Ableitungsvorschrift $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ heißt Differentialoperator

Beispiel 229:

Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit:

$f(x) = x^2 \,;\, x_0 = 3$

Ableitungsregeln

Grundlegende Ableitungsregeln

Funktion f (x)		Ableitung f ′(x)
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$f(x) = n \cdot x^{n-1}$
	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

	$f(x) = a^x; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
Trigonometrische Funktion	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
	$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
Arkusfunktionen	$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
	$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
Hyperbelfunktionen	$f(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
	$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$
	$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
	$f(x) = \coth(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$

Funktion f (x)		Ableitung f ′(x)
Areafunktionen	$f(x) = \text{arsinh}\,(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$f(x) = \text{arcosh}\,(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$f(x) = \text{artanh}\,(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
	$f(x) = \text{arcoth}\,(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
Exponentialfunktionen	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = a^x; a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \ln\,(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln\,(a) \cdot x}$

Faktorregel

Definition 160:

$f(x) = a \cdot g(x); a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$

Summenregel

Definition 161:

$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Produktregel

Definition 162:

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Quotientenregel

Definition 163:

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$

Kettenregel

Definition 164:

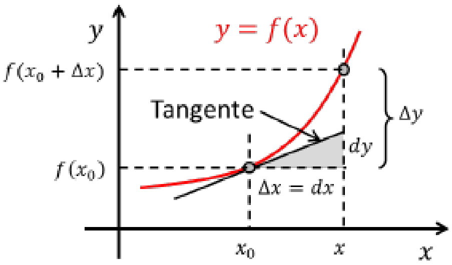
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Tangente, Differential und Linearisierung

Mit der Ableitung $f'(x_0)$ ergibt sich die Gleichung der Tangente nach der Punkt-Steigungsform:

$$t : g(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.1}$$

Soll eine differenzierbare Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 durch eine lineare Funktion $g(x)$ angenähert werden, so kann man die Kurve durch ihre Tangente im Punkt $P_0\,(\,x_0\,|\,y_0\,)$ ersetzen. Man nennt das die Linearisierung von f an der Stelle x_0, bzw. im Punkt $P_0\,(\,x_0\,|\,y_0\,)$.



Definition 165:

Das Differential $\mathrm{d}y$ einer Funktion $y = f(x)$ beschreibt den Ordinatenzuwachs $\mathrm{d}y$ der Tangente in $P_0(x_0\,|\,y_0)$ bei einer (infinitisimal kleinen) Abszissenänderung um $\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$$

Bemerkung 41:

Aus der Definition des Differentials $\mathrm{d}y$ ergibt sich die Ableitung formal als Quotient der Differentiale $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \implies f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Linearisierung einer Funktion

Definition 166:

Unter der Linearisierung einer differenzierbaren Funktion versteht man die Annäherung (Approximation) der Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0 durch die Tangente an den Funktionsgraphen in diesem Punkt.

Relative Extremwerte

Definition 167:

Graphenpunkte, an denen sich das Monotonieverhalten ändert.

Kriterium für differenzierbare Funktionen:

G_f hat an der Stelle x_0 einen **Hochpunkt**,

falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

G_f hat an der Stelle x_0 einen **Tiefpunkt**,

falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$,

Ein Vorzeichenwechsel muss durchgeführt werden,

falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.

Definition 168:

Vorzeichenwechsel

Statt zu prüfen, ob die zweite Ableitung an der Stelle x_E kleiner oder größer als Null ist, kann man auch untersuchen, ob die erste Ableitung an der Stelle x_E ihr Vorzeichen wechselt.

Durchläuft man (im wörtlichen und übertragenen Sinne) eine Kurve an einem Hochpunkt von links nach rechts, so lässt sich das Verhalten von *f* bzw. das der Steigung von f folgendermaßen beschreiben:

Vor der Hochstelle steigt die Kurve, es geht bergauf. Die Steigung ist positiv

An der Hochstelle selbst ist die Steigung Null (die Tangente also waagerecht).

Hinter der Hochstelle fällt die Kurve, es geht bergab. Die Steigung ist negativ.

Zusammengefasst:

An einer Hochstelle wechselt die Steigung von plus nach minus.

Oder:

Dort hat die Steigung (also f') einen Vorzeichenwechsel von plus nach minus (von + nach −).

Analog gilt für eine Tiefstelle:

An einer Tiefstelle wechselt die Steigung von minus nach plus. Oder: Dort hat die Steigung (also f') einen Vorzeichenwechsel von minus nach plus (von − nach +).

Wendepunkte

Definition 169:

An der Stelle x_0 liegt ein Wendepunkt vor, wenn sich an x_0 das Krümmungsverhalten der Kurve ändert.

G_f hat an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**,

falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Terrassenpunkt:

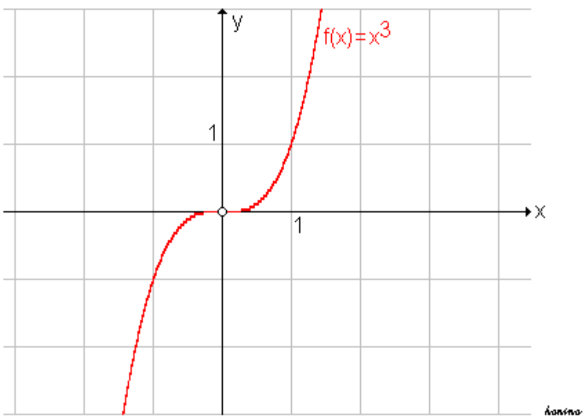
Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente (zusätzlich: $f'(x_0) = 0$)

Sattelpunkte

Einen Wendepunkt mit zugleich waagerechter Tangente nennt man einen Sattelpunkt oder Terrassenpunkt. Für ihn gilt demnach $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, wie im Beispiel der Funktion mit der Gleichung

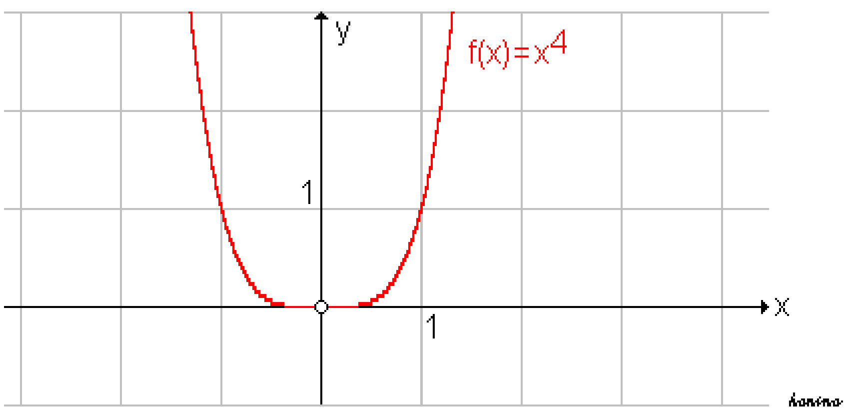
$f(x) = x^3$

an der Stelle $x = 0$.



Allerdings ist das kein hinreichendes Kriterium, es kann auch $f'(x)=0$ und $f''(x) = 0$ werden, ohne dass ein Sattelpunkt auftritt, wie im nachfolgenden Beispiel gezeigt.

$f(x) = x^4$



Erst wenn $f''' \neq 0$ ist, ist ein Sattelpunkt erwiesen; allgemeiner gilt:

Definition 170:

Es liegt ein Wendepunkt vor, wenn der Grad der ersten von 0 verschiedenen Ableitung ungerade ist; ist der Grad gerade, so handelt es sich um ein Extremum.

Kurvendiskussion

Definition 171:

Ziel einer Kurvendiskussion ist die Untersuchung der wichtigsten Eigenschaften einer Funktion:

a) Definitionsbereich

b) Kurvensymmetrie

c) Schnittpunkte mit den Achsen (x = 0, y = 0)

d) Berechnung der 1.-3. Ableitung

e) Extrem-, Wende- und Sattelpunkte

f) Asymptotisches Verhalten und Wertebereich

g) Schaubild

Extremwertaufgaben

Vorgehensweise

Definition 172:

Beschreiben der Größe, die extremal werden soll, durch einen Term. Diese Extremalbedingung kann mehrere Variable enthalten.

Aufsuchen von Nebenbedingungen, d.h. Herstellen von Beziehungen zwischen den Variablen anhand der Aufgabenstellung.

Einsetzen der Nebenbedingung(en) in die Extremalbedingung, so dass eine Funktion mit nur einer Variablen, die Zielfunktion, entsteht.

Untersuchung der Zielfunktion auf Extremwerte:

a) Ermittlung lokaler Extrema mithilfe der Differentialrechnung

b) Berechnung der Randwerte

c) Ermittlung des globalen Extremums

Formulierung des Ergebnisses und Plausibilitätsprüfung.

Beispiel 230:

Zur Zeit des Goldrausches im "Wilden Westen" galt in einer Region folgende Regel für die Festlegung der Grenzen eines Claims:

"Ein Goldgräber bekam die rechteckige Fläche zugesprochen, die er mit einem Seil einer vorher festgelegten Länge abstecken konnte."

Welche Maße muss diese Rechteckige Fläche haben, damit eine maximale Fläche entsteht, wenn die Länge des Seils 100m beträgt.

Lösung:

Zielfunktion:

$\mathrm{A} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$

Nebenbedingungen:

$\mathrm{U} = 2\mathrm{a} + 2\mathrm{b}$

$100 = 2\mathrm{a} + 2\mathrm{b}$

$2a = 100 - 2b$

$a = 50 - b$

In die Zielfunktion einsetzen:

$a = 50 - b$

$\mathrm{A} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$

$\mathrm{A} = (50 - \mathrm{b}) \cdot \mathrm{b}$

$A = 50b - b^2$

Die Zielfunktion zweimal ableiten:

$A = 50b - b^2$

$A' = 50 - 2b$

$A'' = -2$

Extremwert bestimmen:

$A' = 0$

$A' = 50 - 2b$

$50 - 2b = 0$

$2b = 50$

$b = 25$

Überprüfung auf Maximum oder Minimum:

$A''(25) = -2 < 0 \ \rightarrow \text{Maximum}$

Lösung bestimmen:

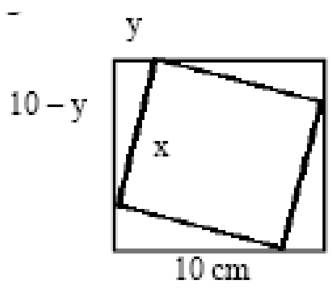
$a = 50 - b = 50 - 25 = 25$

Der Claim sollte quadratisch sein (a=b=25m)

Beispiel 231:

Aus einer quadratischen Platte mit der Kantenlänge 10 cm soll eine quadratische Platte derart ausgeschnitten werden, dass die Spitzen des Quadrats auf den Kanten der gegebenen Platte liegen. Wie lang sind die Kanten des inneren Quadrats, dessen Flächeninhalt möglichst klein sein soll?

Lösung:



Zielfunktion:

$A = x^2$

Nebenbedingungen:

$x^2 = y^2 + (10 - y)^2$

In die Zielfunktion einsetzen:

$A = x^2$

$A = y^2 + (10 - y)^2$

$A = y^2 + 100 - 20y + y^2$

$A = 2y^2 - 20y + 100$

Die Zielfunktion zweimal ableiten:

$A = 2y^2 - 20y + 100$

$A' = 4y - 20$

$A'' = 4$

Extremwert bestimmen:

$A' = 0$

$A' = 4y - 20$

$4y - 20 = 0$

$4y = 20$

$y = 5$

Überprüfung auf Maximum oder Minimum:

$A'' = 4 > 0 \ \rightarrow \text{Minimum}$

Lösung bestimmen:

$x^2 = 5^2 + (10 - 5)^2$

$x^2 = 50$

$A = x^2$

$A = 50$

Newtonsches Iterationsverfahren

Definition 173:

Das Newton-Verfahren dient zur Annäherung an Nullstellen; durch das immer wieder neu Einsetzen des Ergebnisses in die Newton-Formel nähert man die Nachkommastellen der Nullstelle immer mehr an. Diese Art von Verfahren nennt man Iterationsverfahren.

Iterationsformel:

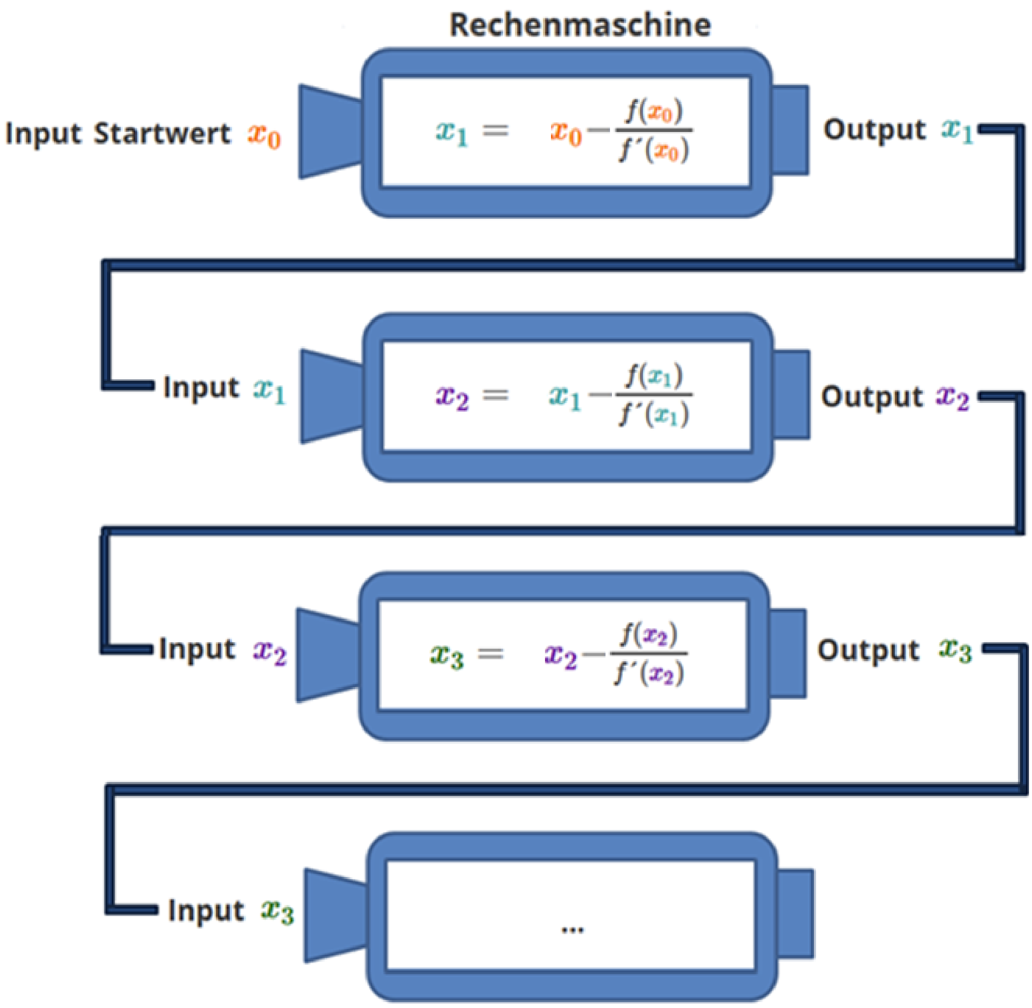
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bemerkung 42:

Da gewisse Nullstellen nicht genau bestimmbar sind, wird das Newton-Verfahren eingesetzt, um Nullstellen anzunähern. Um diese zu berechnen, benötigst du die Ableitung.

Verfahren

Dies bedeutet, dass Ergebnisse eines Schrittes wieder als Ausgangswert für den jeweils nächsten Schritt genommen werden.



Beispiel 232:

Berechnen Sie die Nullstelle von

$f(x) = x^3 + 4x - 4$ im Intervall $[2; 4]$

Bestimmung des Startwertes durch eine Wertetabelle.

$f(x) = x^3 + 4x - 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-43	-20	-9	-4	1	12	35

Wähle x_0=0,5.

$$f(x) = x^3 + 4x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 4x_n - 4}{3x_n^2 + 4}$$

$x_2 = 0{,}8947368421$

$x_3 = \cdots$

Integralrechnung

Geometrische Definition des Integrals

Bemerkung 43:

- Flächeninhalte oberhalb der x-Achse haben ein positives Vorzeichen.
- Flächeninhalte unterhalb der x-Achse haben ein negatives Vorzeichen.

Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition 174:

Für eine gegebene Funktion $f(x)$ nennt man einen Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ eine Stammfunktion von f.

Beispiel 233:

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

a) $f(x) = 3x + 2$ b) $f(x) = \sin x$ c) $f(x) = e^{2x}$

Definition 175:

a) Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion f besitzt eine Stammfunktion F.

b) Zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 von f unterscheiden sich nur durch eine Konstante, d.h. $F_2(x) = F_1(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 44:

Die Gesamtheit aller Stammfunktionen, deren Ableitung wieder die Originalfunktion ergibt, ist eine Kurvenschar. Diese entsteht wird durch Verschieben einer Stammfunktion in y-Richtung.

Definition 176:

Die Menge aller Stammfunktionen von f nennt man das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Die Bestimmung der Stammfunktion nennt man Integration oder Integrieren (bzw. Aufleiten).

Stammfunktion elementarer Funktionen

Funktion $f(x)$		Stammfunktion $F(x)$
Konstanter Faktor	$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
Potenzfunktionen	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$; $n \neq -1$
	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + C; x \neq 0$
	$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \ln\lvert ax+b\rvert + C$
Exponentialfunktionen	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
	$f(x) = e^{ax}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
	$f(x) = x \cdot e^{ax}$	$F(x) = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right) \cdot e^{ax} + C$
	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + C; a \neq 1$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C$
	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + C; a \neq 1$
Trigonometrische Funktionen	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
	$f(x) = \sin(ax)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax) + C$
	$f(x) = \sin^2(ax)$	$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + C$
	$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$	$F(x) = -\cot(x) + C$
	$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\tan(x) + C$
	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
	$f(x) = \cos(ax)$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) + C$
	$f(x) = \cos^2(ax)$	$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax) + C$
	$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
	$f(x) = \cot(x)$	$F(x) = \ln\lvert\sin(x)\rvert + C$
	$f(x) = \sinh(x)$	$F(x) = \cosh(x) + C$
	$f(x) = \cosh(x)$	$F(x) = \sinh(x) + c$

Integrationsregeln

Stammfunktion:

F heißt Stammfunktion von f, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$

Mit $F(x)$ist auch jede Funktion$F(x) + c$ eine Stammfunktion

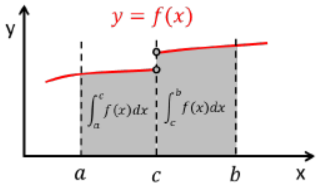
Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Eigenschaften eines Integrals



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Das Aufspalten von Integralen ist z.B. bei nicht stetigen oder zusammengesetzten Funktionen notwendig.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Uneigentliches Integrationsintervall

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 177:

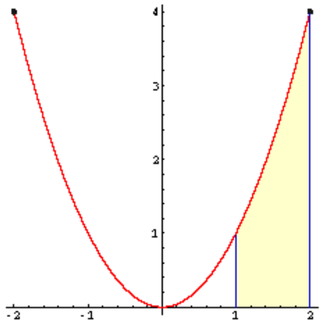
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

das heißt, die Fläche unter dem Graphen von f(x) ist eine Stammfunktion von f.

Beispiel 234:

Wir suchen die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen den Grenzen $a = 1$ und $b = 2$.

Folgende Vorgehensweise sollte immer angewandt werden:



Zuerst eine Zeichnung oder zumindest eine Skizze erstellen, um den Sachverhalt zu verdeutlichen.

Um eventuelle Besonderheiten zu erkennen, sollten die Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) berechnet werden

$$\int_1^2 x^2 dx =$$

Stammfunktion finden

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

Grenzen einsetzen, untere Grenze von oberer abziehen

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Spezielle Integrationsmethoden

Substitution

Definition 178:

(1) Da es für ein Integral der Form $\int \frac{5}{2x+1} dx$ keine eigene Integrationsregel gibt, müssen wir einen Trick anwenden. Wir formen durch eine **Substitution** den Integranden so um, dass der Nenner keine Summe mehr enthält. Dazu müssen wir lediglich 2x+1 durch u ersetzen :

Substitution: u = 2x + 1.

Jetzt kommt allerdings noch die Umrechnung von dx dran. Wir dürfen nun aber nicht einfach du statt dx schreiben. Wir müssen uns daran erinnern, dass dx ein Differential ist. Und für das Differential einer Funktion hatten wir diese Formel: $dy = y' \cdot dx$

Unsere Substitutions-Funktion heißt nun $u = 2x+1$ also gilt für sie $du = u' \cdot dx = 2 \cdot dx$

Jetzt lösen wir die letzte Gleichung nach dx auf und erhalten: $dx = \frac{1}{2} du$

Dies ist der 2. Teil der Substitution. Zusammen folgt nun:

$$\int \frac{5}{2x+1} dx = \int \frac{5}{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{5}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{5}{2} \ln u + C.$$

Nun folgt die Rücksubstitution, indem wir u wieder durch 2x+1 ersetzen:

$$\int \frac{5}{2x+1} dx = \int \frac{5}{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{5}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{5}{2} \ln u + C = \frac{5}{2} \ln(2x+1) + C$$

Beispiel 235:

$\int \frac{16}{(x-2)^2} dx$ Substitution: u = x – 2 also du = u' dx = dx

$$= \int \frac{16}{u^2} du = -\frac{16}{u} + C = -\frac{16}{x-2} + C$$

$\int \frac{8}{(4-x)^2} dx$ Substitution: u = 4 – x also du = - dx, dx = - du

$$= -\int \frac{8}{u^2} du = +\frac{8}{u} + C = \frac{8}{4-x} + C$$

$\int \frac{12}{(2x-1)^3} dx$ Substitution: u = 2x – 1 also du = 2 dx, $dx = \frac{1}{2} du$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{12}{u^3} du = 6 \int u^{-3} du = 6 \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{u^2} + C = -\frac{3}{(2x-1)^2} + C$$

Integration durch erweiterte Substitution

Definition 179:

Dieses x erschwert die Rechnung, denn es muss auch noch substituiert werden:

1. Schritt: Substitution: $u = 5x + 2$
2. Schritt: Differential: $du = u' \cdot dx = 5\,dx$
3. Schritt: Nach dx auflösen: $dx = \frac{1}{5}du$
4. Schritt: u nach x auflösen: $x = \frac{1}{5}(u-2)$
5. Schritt: Einzelbrüche „aufleiten“
6. Schritt: Rücksubstitution.

Beispiele

(5) $\int \frac{x}{(5x+2)^2}dx$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{u-2}{u^2}du$$

$$= \frac{1}{25}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u^2}\right)du = \frac{1}{25}\left(\ln u - 2\cdot\frac{u^{-1}}{-1}\right)+C = \frac{1}{25}\left(\ln u + \frac{2}{u}\right)+C$$

Rücksubstitution: $F(x) = \frac{1}{25}\left(\ln(5x+2)+\frac{2}{5x+2}\right)+C$

Beispiel 236:

(6) $\int \frac{x^2}{(x+3)^2}dx$ Substitution: $u = x + 3$, $du = dx$ und $x = u - 3$

$$= \int \frac{(u-3)^2}{u^2}du = \int \frac{u^2-6u+9}{u^2}du = \int\left(1-\frac{6}{u}+\frac{9}{u^2}\right)du = u - 6\cdot\ln u - \frac{9}{u}+C$$

Rücksubstitution: $F(x) = x+3-6\cdot\ln(x+3)-\frac{9}{x+3}+C$

(7) $\int \frac{x^2}{(2-x)^2}dx$ Substitution: $u = 2 - x$ also $du = -\,dx$, $dx = -\,du$ und $x = 2 - u$

$$= -\int \frac{(2-u)^2}{u^2}du = -\int \frac{4-4u+u^2}{u^2}du = -\int\left(\frac{4}{u^2}-\frac{4}{u}+1\right)du = +\frac{4}{u}+4\cdot\ln u - u + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = \frac{4}{2-x}+4\cdot\ln(2-x)+x-2+C$

(8) $\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$ Substitution: $u = x + 2$ also $du = dx$ und $x = u - 2$

$$= \int \frac{(u-2)^2-1}{u}du = \int \frac{u^2-4u+3}{u}du = \int\left(u-4+\frac{3}{u}\right)du = \frac{1}{2}u^2-4u+3\cdot\ln u + C$$

Rücksubstitution: $F(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2-4(x+2)+3\cdot\ln(x+2)+C$

$F(x) = \frac{1}{2}(x^2+4x+4)-4(x+2)+3\cdot\ln(x+2)+C$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2-2x-6+3\cdot\ln(x+2)+C$

Partielle Integration (Produktregel)

Da sich viele Stammfunktionen nicht berechnen lassen, haben die Mathematiker viele Methoden und Tricks ersonnen, um diese Probleme doch noch zu knacken. Die wohl berühmteste aller Methoden wird jetzt vorgestellt. Mit ihr erreicht man, daß, bestimmte komplizierte Integrale in einfachere umgewandelt werden können.

Zu Herleitung benötigen wir die Produktregel der Ableitung:
Aus $y = f(u) = u(x) \cdot v(x)$ folgt $y' = f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.

Also folgt $dy = y' \cdot du = \left(u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)\right) dx$, kurz $dy = (u' \cdot v + v' \cdot u)\,dx$

Nun gehen wir ganz formal vor und machen das Differential durch das Integral rückgängig: $y = \int dy = \int (u'v + v'u)\,dx = \int u'v\,dx + \int v'u\,dx$

Daraus folgt: $\int u'v\,dx = y - \int v'u\,dx$ bzw. $\int u'v\,dx = [u \cdot v] - \int v'u\,dx$

Was wir jetzt rein formal als unbestimmtes Intergral gezaubert haben, spielt sich in der Praxis beim bestimmten Integral so ab:

$$\boxed{\int_a^b u'v\,dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v'u\,dx}$$

Wer diese Formel zum ersten Male sieht, denkt vielleicht an Asterix und Obelix. Diese Gleichung sieht nicht vertrauenerweckend aus. Man muß ihren Aufbau verstehen, dann kann man sie anwenden:

<u>Auf der linken Seite</u> steht das zu berechnende <u>schwere</u> Integral.
Der Integrand besteht aus einem Produkt. Den einen Faktor interpretieren wir als eine Ableitung u' , den anderen v als eine „normale“ Funktion.
<u>Auf der rechten Seite</u> steht eine Formel, die sich auch u, v und v' zusammensetzt und ein zweites Integral beinhaltet.
Wenn es gelingt, die Faktoren u' und v geeignet so zu finden, dass das auf der rechten Seite entstehende zweite Integral einfacher ist als das gegebene auf der linken Seite (also leicht berechenbar), dann schafft es diese Formel, ein kompliziertes Integral in ein einfacheres zu verwandeln !

Es gibt viele Fälle. In denen sich diese Formel bewährt. Diese Gleichung trägt übrigens verschiedene Namen: Produktintegration, Partielle Integration sind die beiden gebräuchlichsten.

Die Anwendungen kommen in erster Linie bei Exponentialfunktionen, LN-Funktionen und Sinus-Cosinus-Funktionen vor.

Partielle Integration bei ln-Funktionen

Beispiel 237:

(1) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$ Hier die Formel : $\int_a^b u'v \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v'u \, dx$

Partielle Integration: 1. Versuch

$u' = \ln x \Rightarrow u = x \cdot \ln x - x$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

Partielle Integration: 2. Versuch:

$u' = x \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2$

$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

Genau wie bei den Exponentialfunktionen testen wir zuerst die beiden Möglichkeiten durch, um diejenige zu entdecken, die zum Ziel führt.

$$= [x \cdot (x \cdot \ln x - x)]_1^e - \int_1^2 (x \ln x - x) dx = ??$$

Wie man erkennt, führt die erste Methode zu einem komplizierteren Integral, während die zweite Methode zum Ziel führt.

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \tfrac{1}{x} dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x \, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \tfrac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \tfrac{1}{2}e^2 \cdot \underbrace{\ln e}_{1} - \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4}$$

$$= \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(e^2 + 1) \approx 2{,}10$$

Merke: **Bei der partiellen Integration mit LN-Funktionen behandelt man den LN-Faktor als v und den ganzrationalen Term als u':**

$u' = g(x) \Rightarrow u = ...$

$v = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

Wie man sofort sieht, liegt der Grund für die spezielle Wahl von v darin, daß eben bei der LN-Funktion die Ableitung sehr einfach wird (ln verschwindet!) während sich die e-Funktion praktisch nicht verändert, weshalb man dort anderes vorgeht.

Beispiel 238:

(2) $\int_1^{e^2} x^2 \cdot \ln x \, dx$

Partielle Integration: $u' = x^2 \Rightarrow u = \frac{1}{3}x^3$

$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x^2}{3} dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \tfrac{1}{9}x^3\right]_1^{e^2}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}e^6 \cdot \underbrace{\ln e^2}_{=2} - \tfrac{1}{9}e^6\right] - \left[\tfrac{1}{3} \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - \tfrac{1}{9}\right] = \tfrac{2}{3}e^6 - \tfrac{1}{9}e^6 + \tfrac{1}{9} = \tfrac{5}{9}e^6 + \tfrac{1}{9} = \frac{5e^6 + 1}{9}$$

Beispiel 239:

(3) $\int_a^b \ln x \, dx = \int_a^b 1 \cdot \ln x \, dx =$

Partielle Integration: $u' = 1 \Rightarrow u = x$

$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$$= \left[x \cdot \ln x\right]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[x \cdot \ln x\right]_a^b - \int_a^b 1 \, dx = \left[x \cdot \ln x - x\right]_a^b .$$

Das nächste Integral ist genauso berühmt, vor allem dadurch, daß man es auf zwei verschiedene Weisen partiell integrieren kann:

Integrale, die Substitution und partielle Integration verlangen

Beispiel 240:

Das Integral $A = \int_0^3 x \cdot \ln(4-x)\,dx$ muß einerseits mit partieller Integration berechnet werden, andererseits verlangt das komplizierte Argument (4-x) eine Vereinfachung durch Substitution.

Es gibt zwei Möglichkeiten, diese beiden Methoden in unterschiedlicher Reihenfolge anzuwenden.

1. Methode: Zuerst partielle Integration, dann Substitution:

$$\boxed{\begin{array}{lll} u' = x & \Rightarrow & u = \frac{1}{2}x^2 \\ v = \ln(4-x) & \Rightarrow & v' = \dfrac{-1}{4-x} = \dfrac{1}{x-4} \end{array}}$$

Dies ergibt:

$$A = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(4-x)\right]_0^3 - \tfrac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2}{x-4}\,dx$$

Nun wird in einer Nebenrechnung das neue Integral berechnet:

Substitution: $\mathbf{z} = x - 4 \Rightarrow d\mathbf{z} = dx$ und $x = \mathbf{z} + 4$

$$\int_0^3 \frac{x^2}{x-4}\,dx = \int_{-4}^{-1} \frac{\mathbf{z}^2 + 8\mathbf{z} + 16}{\mathbf{z}}\,d\mathbf{z} = \int_{-4}^{-1}\left(\mathbf{z} + 8 + \frac{16}{\mathbf{z}}\right)d\mathbf{z} = \left[\tfrac{1}{2}\mathbf{z}^2 + 8\mathbf{z} + 16 \cdot \ln|\mathbf{z}|\right]_{-4}^{-1}$$

Zusammengesetzt:

$$A = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(4-x)\right]_0^3 - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\mathbf{z}^2 + 8\mathbf{z} + 16 \cdot \ln|\mathbf{z}|\right]_{-4}^{-1} = \tfrac{9}{2}\ln 1 - 0 - \left[\tfrac{1}{4}\mathbf{z}^2 + 4\mathbf{z} + 8\ln|\mathbf{z}|\right]_{-4}^{-1}$$

$$= -\tfrac{1}{4} + 4 + 4 - 16 + 8 \cdot \ln 4 = -8{,}25 + 8 \cdot \ln 4 \approx 2{,}84$$

2. Methode: Zuerst Substitution, dann partielle Integration,

$A = \int_0^3 x \cdot \ln(4-x)\,dx$ Substitution: $z = 4 - x \Rightarrow x = 4 - z$ und $dx = -dz$

$A = -\int_4^1 (4-z) \cdot \ln z\, dz = \int_1^4 (4-z) \cdot \ln z\, dz$

$$\boxed{\begin{array}{lll} u' = 4 - z & \Rightarrow & u = 4z - \frac{1}{2}z^2 \\ v = \ln z & \Rightarrow & v' = \dfrac{1}{z} \end{array}}$$

Jetzt partielle Integration:

$$A = \left[\left(4z - \tfrac{1}{2}z^2\right) \cdot \ln z\right]_1^4 - \int_1^4 \left(4z - \tfrac{1}{2}z^2\right) \cdot \frac{1}{z} dz = \left[\left(4z - \tfrac{1}{2}z^2\right) \cdot \ln z\right]_1^4 - \int_1^4 \left(4 - \tfrac{1}{2}z\right) dz$$

$$= \left[\left(4z - \tfrac{1}{2}z^2\right) \cdot \ln z\right]_1^4 - \left[4z - \tfrac{1}{4}z^2\right]_1^4 =$$

$$= (16-8) \cdot \ln 4 - \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \ln 1 - (16-4) + \left(4 - \tfrac{1}{4}\right) = 8 \cdot \ln 4 - 8{,}25$$

Vergleicht man beide Methoden, so fällt auf, dass die zweite kürzer und einfacher ist. Der Grund ist schnell erkannt: Wenn man zuerst partiell integriert, ergibt das komplizierte Logarithmus-Argument einen Bruch für das nächste Integral, der eine Summe im Nenner hat. Dies bereitst Mühe.

Vereinfacht man dagegen das Argument zuerst durch eine Substitution, wird das zweite Integral nach der partiellen Integration deutlich einfacher.

MERKE:

Zuerst Vereinfachung durch Substitution,
dann erst partielle Integration!

Beispiel 241:

$$\int_{2}^{-2}\left(x^2-4\right)\cdot e^{-x}dx$$

Lösung:

(11) $\int_{2}^{-2}\left(x^2-4\right)\cdot e^{-x}dx$

$$\boxed{\text{Partielle Integration:}\quad u'=e^{-x}\ \Rightarrow\ u=-e^{-x}\qquad v=\left(x^2-4\right)\ \Rightarrow\ v'=2x}$$

$$\left[-\left(x^2-4\right)e^{-x}\right]_2^{-2}+2\int_{2}^{-2}x\cdot e^{-x}dx=$$

$$\boxed{\text{Weitere partielle Integration:}\quad u'=e^{-x}\ \Rightarrow\ u=-e^{-x}\qquad v=x\ \Rightarrow\ v'=1}$$

$$\int_{2}^{-2}x\cdot e^{-x}dx=\left[-x\cdot e^{-x}\right]_{-2}^{2}+\int_{2}^{-2}e^{-x}dx=\left[-x\cdot e^{-x}-e^{-x}\right]_2^{-2}$$

Zusammengesetzt:

$$\int_{2}^{-2}\left(x^2-4\right)\cdot e^{-x}dx=\left[-\left(x^2-4\right)e^{-x}\right]_2^{-2}+2\left[-x\cdot e^{-x}-e^{-x}\right]_2^{-2}=$$

$$=\left[-e^{-x}\left(x^2-4+2x+2\right)\right]_2^{-2}=\left[-e^{-x}\left(x^2+2x-2\right)\right]_2^{-2}=-e^2\left(-2\right)+e^{-2}\cdot 6=2e^2+6e^{-2}$$

Partialbruchzerlegung

Ein weiteres Integrationsverfahren ist die Partialbruchzerlegung. Sie wird zur Integration gebrochen rationaler Integranden benötigt. Mit ihrer Hilfe lassen sich alle gebrochen rationalen Funktionen integrieren. Diese Einsicht, die um 1799 aufkam, führte zur Frage nach der Existenz von Nullstellen des Nennerpolynoms und wurde dadurch zu einem wichtigen Motiv bei der Entwicklung des Fundamentalsatzes der Algebra.

Eine gebrochen rationale Funktion s(x) ist als ein Quotient aus ganzrationalen, stetigen Funktionen definiert

Ihr Definitionsbereich ist D=\{B}, wobei B die Menge der Nullstellen der Nennerfunktion ist.

Der Definitionsbereich kann aufgefasst werden als Vereinigung von endlich vielen Intervallen, in denen die gebrochen rationale Funktionen stetig sind.

Eine Stammfunktion ist folglich vorhanden.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots\dots\dots + b_1 x + b_0}$$

Einführendes Beispiel

Dies ein Verfahren, Funktionsterme von gebrochen rationalen Funktionen so in einzelne Brüche zu zerlegen, daß sie integriert werden können.

Ich beginne mit einem Beispiel.

Das Integral $\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-3}\right)dx$ kann so berechnet werden:

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = \int_{-1}^{2}\frac{3}{x+2}dx + \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx$$

Für jedes Integral führt man dann eine geeignete Substitution durch.

Doch es geht und jetzt nicht um diese verhältnismäßig leichten Berechnungen. Wenn man in die beiden Brüche auf den Hauptnenner bringt, entsteht

$$\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-3} = \frac{3\cdot(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{3x-9+x+2}{x^2-x-6} = \frac{4x-7}{x^2-x-6}.$$

Und nun stelle ich die Aufgabe: Berechnen Sie $\int_{-1}^{2}\frac{4x-7}{x^2-x-6}dx$!

Stellen wir uns vor, wir würden die obere Rechnung nicht kennen, wir müßten sicher kapitulieren, weil weder eine Substitution noch gar eine partielle Integration weiter hilft. Aber eigentlich haben wir die Methode parat. Sie heißt „Zerlege den Integranden is zwei kleinere Brüche, so daß die obige Rechnung zur Lösung führt“. Doch wie geht das ? Wir können selbst drauf kommen:

Zuerst brauchen wir die Nullstellen des Nenners, damit wir diesen in ein Produkt zweier Linearfaktoren zerlegen können:

$$x^2 - x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Also haben wir als erstes erreicht: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

Wir müssen dabei die umgekehrten Vorzeichen verwenden, weil gilt:

$$x = 3 \;\Leftrightarrow\; (x-3) = 0 \quad \text{und} \quad x = -2 \;\Leftrightarrow\; (x+2) = 0$$

Nun wissen wir also schon dieses:

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Nun bringen wir die rechte Seite wieder auf den Hauptnenner:

$$\frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

Wir vergleichen nun die Koeffizienten im Zähler des ersten und letzten Bruches:
Es muß gelten: $A + B = 4$ und $-3A + 2B = -7$.
Löst man dieses Gleichungssystem, zum Beispiel indem man $B = 4 - A$ in die zweite Gleichung einsetzt, so erhält man $A = 3$ und $B = 1$
Damit haben wir nun die Zerlegung in Partialbrüche und die Integration kann durchgeführt werden.

Die Restlösung geschieht wie gesagt durch Substitution des 1. Integrals durch $u = x + 2 \Rightarrow du = dx$ und des 2. Integrals durch $v = x - 3 \Rightarrow dv = dx$.

Damit folgt

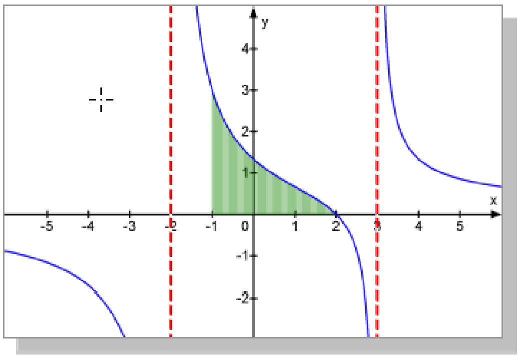
$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-3}\right)dx = \int_{-1}^{2}\frac{3}{x+2}dx + \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}dx = \int_{1}^{4}\frac{3}{u}du + \int_{-4}^{-1}\frac{1}{v}dv = \left[3\cdot\ln|u|\right]_1^4 + \left[\ln|v|\right]_{-4}^{1}$$

$$= 3\cdot\ln 4 - 3\cdot\ln 1 + \ln 1 - \ln 4 = 2\cdot\ln 4 = \ln 16$$

Nenner mit einfachen Nullstellen und Grad Z < Grad N

Beispiel 242:

$$A = \int_{-1}^{2} \frac{4x-8}{x^2-x-6}\,dx$$



1. Schritt: Faktorisierung des Nenners:

Nenner = 0: $x^2-x-6=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases}3\\-2\end{cases}$

Folgerung: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

2. Schritt: Zerlegung in eine Summe:

Ansatz: $\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}$ (1)

1. Methode: Koeffizientenvergleich

Berechnung der rechten Seite:

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{ax+2a+bx-3b}{(x-3)(x+2)} = \frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}$$

Also gilt: $\boxed{\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)} = \frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}}$

Grundsatz: Zwei gleich große Brüche mit gleichem Nenner müssen auch den gleichen Zähler besitzen. Und weil dieser x enthält, müssen alle Koeffizienten gleich sein.

Also führt man einen Koeffizientenvergleich durch: $\left\{\begin{matrix} a+\ b=4 \\ 2a-3b=-8\end{matrix}\right\}$

Aus diesem Gleichungssystem kann man a und b berechnen. Etwa so:

Aus der 1. Gleichung folgt: $b=4-a$

Eingesetzt in die 2. Gleichung: $2a-3(4-a)=-8$

Umgeformt: $2a-12+3a=-8$

$5a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{5}$

Daraus folgt dann: $b=4-\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$.

Ergebnis: $\frac{4x-8}{(x-3)(x+2)} = \frac{\frac{4}{5}}{x-3}+\frac{\frac{16}{5}}{x+2}$

Flächenberechnung:

$$A = \int_{-1}^{2} \frac{4x-8}{x^2-x-6}\,dx = \int_{-1}^{2}\left(\frac{\frac{4}{5}}{x-3}+\frac{\frac{16}{5}}{x+2}\right)dx = \frac{4}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}\,dx + \frac{16}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}\,dx$$

<u>Ausführliche Berechnung der Teilintegrale:</u>

$I_1 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}\,dx$ Substitution: $u = x-3 \;\Rightarrow\; du = dx$

Umrechnung der Grenzen: $x=-1 \;\Rightarrow\; u=-4$ und $x=2 \;\Rightarrow\; u=-1$

$$I_1 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}\,dx = \int_{-4}^{-1}\frac{1}{u}\,du = \left[\ln|u|\right]_{-4}^{-1} = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 4 = -\ln 4$$

$I_2 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}\,dx$ Substitution: $v = x+2 \;\Rightarrow\; dv = dx$

Umrechnung der Grenzen: $x=-1 \;\Rightarrow\; v=1$ und $x=2 \;\Rightarrow\; v=4$

$$I_2 = \int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}\,dx = \int_{1}^{4}\frac{1}{v}\,dv = \left[\ln|v|\right]_{1}^{4} = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

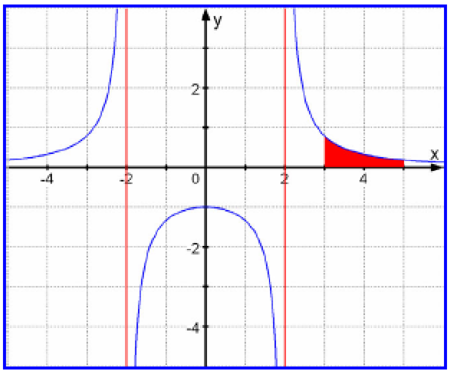
Zusammengefasst: $A = \frac{4}{5}\cdot I_1 + \frac{16}{5}\cdot I_2 = \frac{4}{5}\cdot(-\ln 4) + \frac{16}{5}\cdot \ln 4 = \left(-\frac{4}{5}+\frac{16}{5}\right)\cdot \ln 4 = \frac{12}{5}\cdot \ln 4$

<u>Kurzfassung der Integration ohne Substitution:</u>

$$A = \frac{4}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x-3}\,dx + \frac{16}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{4}{5}\cdot\left[\ln|x-3|\right]_{-1}^{2} + \frac{16}{5}\cdot\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{2}$$

$$A = \frac{4}{5}\cdot(\ln 1 - \ln 4) + \frac{16}{5}\cdot(\ln 4 - \ln 1) = -\frac{4}{5}\cdot \ln 4 + \frac{16}{5}\cdot \ln 4 = \frac{12}{5}\cdot \ln 4$$

Beispiel 243:



(1) $\int_3^5 \frac{4}{x^2-4}dx$

Nullstellen des Nenners: $x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Rechte Seite auf den Hauptnenner bringen:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{x^2-4} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$$

Zwischenergebnis: $\frac{4}{x^2-4} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$

Koeffizientenvergleich im Zähler:

$$\begin{aligned} (1)\quad & A+B=0 \\ (2)\quad & 2A-2B=4 \end{aligned}$$

Aus (1) folgt $B = -A$. Eingesetzt in (2):

$$2A+2A=4 \Leftrightarrow 4A=4 \Leftrightarrow A=1$$

Also $B = -1$

Ergebnis: $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

Berechnung des Integrals:

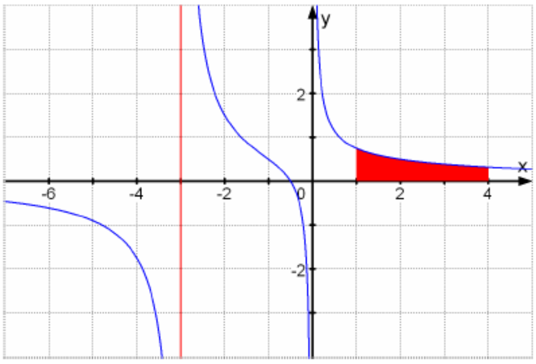
$$A = \int_3^5 \frac{4}{x^2-4}dx = \int_3^5 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \int_3^5 \frac{1}{x-2}dx - \int_3^5 \frac{1}{x+2}dx$$

Substitution des 1. Integrals durch $u = x-2 \Rightarrow du = dx$

Substitution des 2. Integrals durch $v = x+2 \Rightarrow dv = dx$

$$A = \int_1^3 \frac{1}{u}du - \int_5^7 \frac{1}{v}dv = [\ln u]_1^3 - [\ln v]_5^7 = \ln 3 - \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 7 + \ln 5 = \ln \frac{3\cdot 5}{7} = \ln\frac{15}{7} \approx 0{,}762$$

Beispiel 244:



(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+3x}dx$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{2x+1}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

Hauptnennerform der rechten Seite:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x^2+3x}$$

Zwischenergebnis: $\displaystyle\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{(A+B)x+3A}{x^2+3x}$

Koeffizientenvergleich der Zähler:

$$A+B=2 \qquad (1)$$
$$3A=1 \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $A=\frac{1}{3}$. Setzt man dies in (1) ein, folgt $\frac{1}{3}+B=2 \Rightarrow B=\frac{5}{3}$

Ergebnis: $\displaystyle\frac{2x+1}{x^2+3x} = \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x+3}$

Berechnung des Integrals:

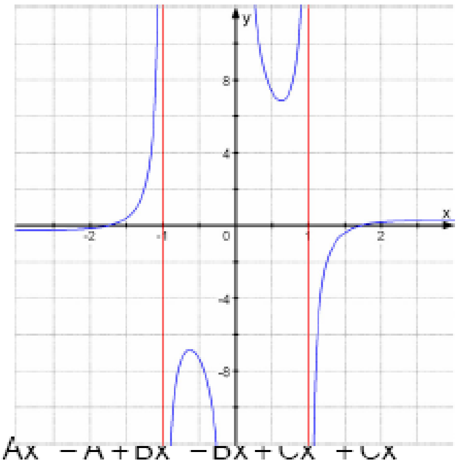
$$A = \int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+3x}dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x}dx + \frac{5}{3}\int_1^4 \frac{1}{x+3}dx$$

Substitution beim 2. Integral: $u = x+3 \Rightarrow du = dx$

$$A = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x}dx + \frac{5}{3}\int_4^7 \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}[\ln x]_1^4 + \frac{5}{3}[\ln u]_4^7 = \frac{1}{3}\cdot\ln 4 + \frac{5}{3}\cdot\ln 7 - \frac{5}{3}\cdot\ln 4 = \frac{5}{3}\cdot\ln 7 - \frac{4}{3}\ln 4 \approx 0{,}462$$

Beispiel 245:

(3) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}dx$



Nullstellen des Nenners: 0, 1 und – 1 , denn
$x^3 - x = x\left(x^2-1\right) = x(x+1)(x-1)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Hauptnennerform der rechten Seite:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A\left(x^2-1\right)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx}{x^3-x}$$

Also folgt: $\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{(A+B+C)x^2+(-B+C)x-A}{x^3-x}$

Koeffizientenvergleich der Zähler:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \qquad (1)\\ -B+C &= 0 \qquad (2)\\ -A &= -3 \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt: $A = 3$. Setzt man dies in (1) ein, folgt

$$B + C = -2 \qquad (4)$$

Addition von (2) und (4) liefert $2C = -2 \Rightarrow C = -1$

Aus (2) folgt schließlich $B = C = -1$

Ergebnis: $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

Berechnung des Integrals: $A = \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}dx = 3\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x}dx - \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x-1}dx - \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x+1}dx$

Substitution für das 2. Integral: $u = x-1 \Rightarrow du = dx$
Substitution für das 3. Integral: $v = x+1 \Rightarrow dv = dx$

$$A = 3\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x}dx - \int\limits_{\sqrt{3}-1}^{4} \frac{1}{u}du - \int\limits_{\sqrt{3}+1}^{6} \frac{1}{v}dv = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln u\right]_{\sqrt{3}-1}^{4} - \left[\ln v\right]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3\ln 5 - 3\ln\sqrt{3} - \ln 4 + \ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln 6 + \ln\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Wegen $\ln\left(\sqrt{3}-1\right) + \ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln(3-1) = \ln 2$ folgt

$$A = 3\cdot\ln 5 - 3\cdot\ln\sqrt{3} - \ln 24 + \ln 2 = 3\cdot\ln\frac{5}{\sqrt{3}} - \ln 12 \approx 0{,}7$$

Hinweis: Wenn man das Verfahren der Rücksubstitution anwendet, dann verläuft die Rechnung so:

$$A = 3\int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x}dx - \int_{\sqrt{3}-1}^{4}\frac{1}{u}du - \int_{\sqrt{3}+1}^{6}\frac{1}{v}dv = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln u\right]_{\sqrt{3}-1}^{4} - \left[\ln v\right]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln(x-1)\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln(x+1)\right]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}\right]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{x^2-1}\right]_{\sqrt{3}}^{5}$$

$$A = \ln\frac{125}{24} - \ln\frac{3\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{125}{24}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} = \ln\frac{125}{36\sqrt{3}} \approx 0{,}7$$

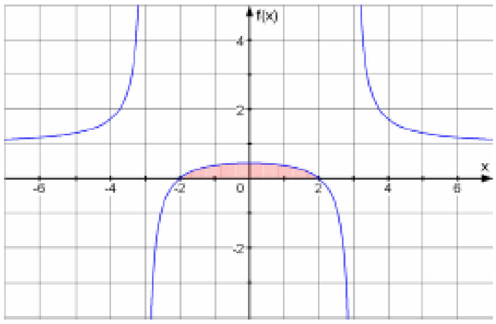
Dieses Verfahren ist dann anzuwenden, wenn nur die Stammfunktion, also das unbestimmte Integral gesucht ist, bei dem man ja ohne Grenzen arbeitet.

Nenner mit einfachen Nullstellen und Grad Z mindestens Grad N

Beispiel 246:

Nenner mit einfachen Nullstellen und Grad Z mindestens Grad N

(4) $\int_{-2}^{2} \frac{x^2-4}{x^2-9}\,dx$



Jetzt ist der Funktionsterm nicht mehr "echt" gebrochen. Man muß ihn dann zuerst so zerlegen:

$$\frac{x^2-4}{x^2-9} = \frac{x^2-9+5}{x^2-9} = \frac{x^2-9}{x^2-9} + \frac{5}{x^2-9} = 1 + \frac{5}{x^2-9}$$

Wer dies nicht erkennt, findet die Zerlegung stets über eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2-4):(x^2-9)=1 \\ \underline{-(x^2-9)} \\ \quad 5 \end{array}$$

Dies ergibt $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9} = 1 + \frac{5}{x^2-9}$

Nun folgt die Partialbruchzerlegung für den Restterm:

$$\frac{5}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-3B)}{x^2-9}$$

Koeffizientenvergleich für den ersten und letzten Zähler:

$$A+B=0 \;\Rightarrow\; B=-A \qquad (1)$$

$$3A-3B=5 \qquad (2)$$

(1) in (2) liefert $\quad 6A=5 \;\Rightarrow\; A=\frac{5}{6}$ und damit $B=-\frac{5}{6}$

Ergebnis: $\frac{5}{x^2-9} = \frac{\frac{5}{6}}{x-3} - \frac{\frac{5}{6}}{x+3}1$

Berechnung des Integrals (unter Ausnützung der Symmetrie der Fläche):

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{x^2-4}{x^2-9}\,dx = 2\int_{0}^{2}\left(1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{5}{6}\frac{1}{x+3}\right)dx = 2\int_{0}^{2} dx + \frac{5}{3}\int_{0}^{2}\frac{1}{x-3}\,dx - \frac{5}{3}\int_{0}^{2}\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$A = [2x]_0^2 + \frac{5}{3}\int_{-3}^{-1}\frac{1}{u}\,du - \frac{5}{3}\int_{3}^{5}\frac{1}{v}\,dv = 4 + \frac{5}{3}\big[\ln|u|\big]_{-3}^{-1} - \frac{5}{3}\big[\ln|v|\big]_{3}^{5} = 4 - \frac{5}{3}\ln 5$$

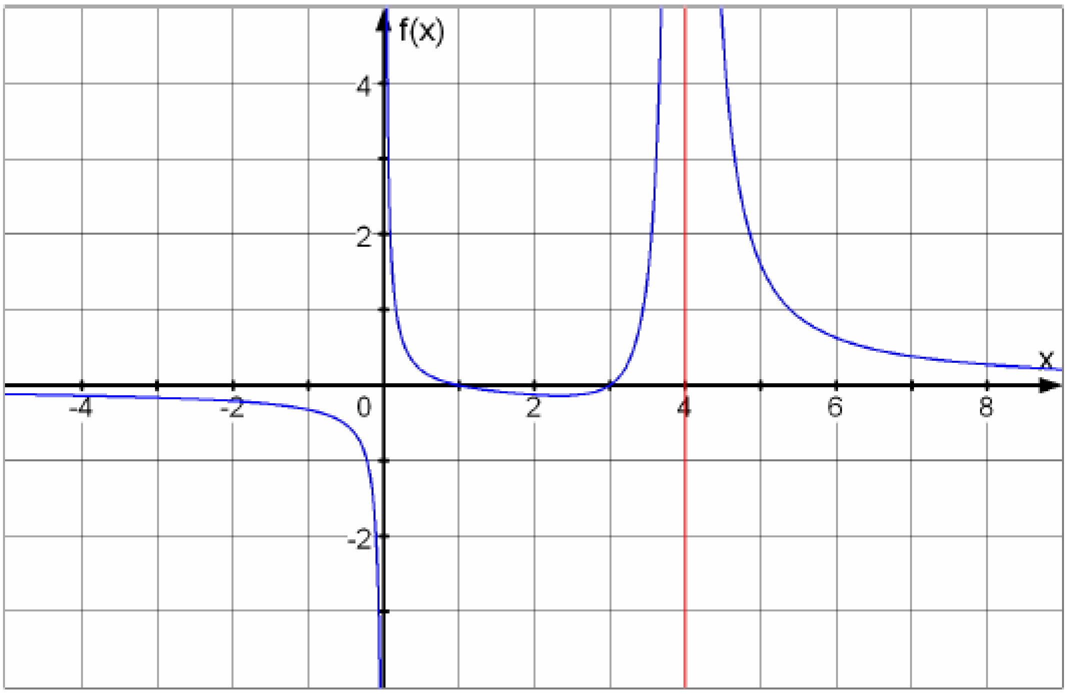
Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen Grad Z < Grad N

Beispiel 247:

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z < Grad N

$$(6) \qquad f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2-8x+16)} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2}$$

Gesucht ist die Fläche, die K und die x-Achse zwischen 1 und 3 begrenzen.



Lösung: $A = -\int_1^3 f(x)\,dx = \int_3^1 \frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}dx$

Die jetzt erforderliche Partialbruchzerlegung klappt nur mit diesem Ansatz:

$$\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

Warum ? Sagen wir doch einfach – das Ergebnis rechtfertigt dieses Mittel.
(Da der linke Zähler 3 Summanden hat, benötigen wir rechts 3 Brüche mit den Zählern A, B und C; sonst ist ein Koeffizientenvergleich nicht möglich!)
Man sollte in einem solchen Fall immer einen vergleichbaren Ansatz machen !
Nun bringen wir die rechte Seite auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} = \frac{A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx}{x\cdot(x-4)^2} = \frac{A(x^2-8x+16) + B(x^2-4x) + Cx}{x\cdot(x-4)^2}$$

Daraus folgt $\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-8A-4B+C)x + 16A}{x(x-4)^2}$

Koeffizientenvergleich:

$$A + B = 1 \qquad (1)$$
$$-8A - 4B + C = -4 \qquad (2)$$
$$16A = 3 \;\Rightarrow\; A = \tfrac{3}{16}$$
$$\text{A in (1):}\quad B = 1 - \tfrac{3}{16} = \tfrac{13}{16}$$
$$\text{A, B in (2):}\quad -8 \cdot \tfrac{3}{16} - 4 \cdot \tfrac{13}{16} + C = -4$$
$$-\tfrac{3}{2} - \tfrac{13}{4} + C = -4 \;\Rightarrow\; C = -4 + \tfrac{19}{4} = \tfrac{3}{4}$$

Ergebnis:
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-4)^2} = \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{13}{16}}{x-4} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}$$

Berechnung des Flächeninhaltes:

$$A = -\int_1^3 f(x)\,dx = \int_3^1 \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-4)^2}\,dx = \int_3^1 \left(\frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{13}{16}}{x-4} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2} \right) dx =$$
$$A = \tfrac{3}{16}\int_3^1 \frac{1}{x}\,dx + \tfrac{13}{16}\int_3^1 \frac{1}{x-4}\,dx + \tfrac{3}{4}\int_3^1 \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$$

Substitution: $u = x - 4 \;\Rightarrow\; du = dx$

$$A = \tfrac{3}{16}\int_3^1 \frac{1}{x}\,dx + \tfrac{13}{16}\int_{-1}^{-3} \frac{1}{u}\,du + \tfrac{3}{4}\int_{-1}^{-3} \frac{1}{u^2}\,du = \tfrac{3}{16}\big[\ln|x|\big]_3^1 + \tfrac{13}{16}\big[\ln|u|\big]_{-1}^{-3} + \tfrac{3}{4}\cdot\big[-\tfrac{1}{u}\big]_{-1}^{-3}$$
$$A = \tfrac{3}{16}(0 - \ln 3) + \tfrac{13}{16}(\ln 3 - 0) + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = -\tfrac{3}{16}\ln 3 + \tfrac{13}{16}\ln 3 + \tfrac{3}{4}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)$$
$$A = \tfrac{10}{16}\ln 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8}\cdot\ln 3 - \tfrac{1}{2} \approx 0{,}19$$

Nenner mit nur einer doppelten Nullstelle Grad Z> Grad N

Beispiel 248:

Nenner mit mur einer doppelten Nullstelle, Grad Z > Grad N

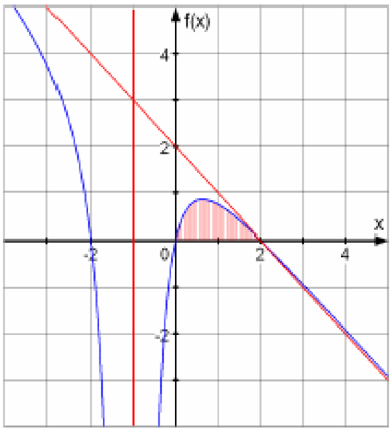
(7) $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{(x+1)^2}$

Hier hat der Nenner **nur eine** doppelte Nullstelle.
Dann ist **keine Partialbruchzerlegung** erforderlich.
Die Substitution $u = x+1 \Rightarrow x = u-1 \Rightarrow dx = du$
löst das Integral:

$$A = \int_0^2 \frac{4x - x^3}{(x+1)^2} dx = \int_1^3 \frac{4(u-1) - (u-1)^3}{u^2} du$$

$$= \int_1^3 \frac{4u - 4 - (u^3 - 3u^2 + 3u - 1)}{u^2} du = \int_1^3 \frac{-u^3 + 3u^2 + u - 3}{u^2} du$$

$$= \int_1^3 \left(-u + 3 + \frac{1}{u} - \frac{3}{u^2}\right) dx = \left[-\tfrac{1}{2}u^2 + 3u + \ln|u| + \tfrac{3}{u}\right]_1^3 = -\tfrac{9}{2} + \tfrac{1}{2} + 9 - 3 + \ln 3 + 1 - 3 = \ln 3 \approx 1{,}1$$



Bemerkung 45:

Typ I: $g_i(x) = \dfrac{c}{x+a}$

Elementare Integration zu $G(x) = c \cdot \ln(x+a)$

Typ II: $g_i(x) = \dfrac{c}{(x+a)^n}$, $n > 1$:

Elementare Integration zu $G(x) = \dfrac{c}{-(n-1)(x+a)^{(n-1)}}$

Typ III: $g_i(x) = \dfrac{c}{x^2 + px + q}$:

- Quadratisches Ergänzen des Nenners zu $(x+a)^2 + b$
- Substitution $u = x + a$, Interpretation $b = v^2$
- Integration zu $G(x) = \dfrac{c}{v} \arctan\left(\dfrac{x+a}{v}\right)$

Typ IV: $g_i(x) = \dfrac{cx + d}{x^2 + px + q}$:

- Umformen in $\dfrac{cx+d}{x^2+px+q} = \dfrac{c}{2} \cdot \dfrac{2x+p+r}{x^2+px+q} = \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{2x+p}{x^2+px+q} + \dfrac{r}{x^2+px+q}\right)$
- Der linke Teil wird dann über Substitution $u = x^2 + px + q$ integriert, der rechte Teil entspricht Typ III von oben.

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z = Grad N

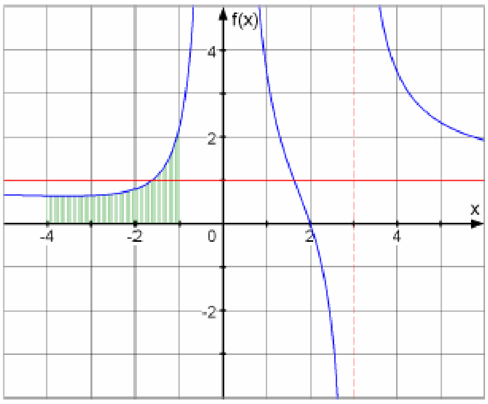
Beispiel 249:

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z = Grad N

(8) $f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-8}{x^2(x-3)}$

Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und den Geraden x=-1 und x = - 4:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx$$



Zuerst müssen wir den Funktionsterm so zerlegen, daß der ganzrationale Anteil herausgezogen wird und ein echter Bruch (mit Grad Z < Grad N) übrig bleibt. Dies geht entweder trickreich so:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2}{x^3-3x^2}+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

oder man erreicht dasselbe Ergebnis via Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^3+0x^2-8):(x^3-3x^2)=1\\ \underline{-(x^3-3x^2)}\\ \quad 3x^2-8\end{array}\qquad \Rightarrow\ f(x)=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

Nun muß man für den Restbruch die **besondere Partialbruchzerlegung** an, die dann eingesetzt wird, wenn wie hier eine doppelte und eine einfache Polstelle auftauchen.

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B)-3B}{x^2(x-3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dieses Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}A+C=3 & (1)\\ -3A+B=0 & (2)\\ -3B=-8\ \Rightarrow\ B=\frac{8}{3}\end{array}$$

$$\text{B in (2) ergibt}\quad 3A=B=\tfrac{8}{3}\ \Rightarrow\ A=\tfrac{8}{9}$$

$$\text{A in (1)}:\quad C=3-A=3-\tfrac{8}{9}=\tfrac{19}{9}$$

Ergebnis: $$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

Somit haben wir jetzt $$f(x)=1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

<u>**Berechnung der Fläche**</u>:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx=\int_{-4}^{-1}\left(1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}\right)dx=\left[x+\tfrac{8}{9}\ln|x|-\frac{8}{3x}+\tfrac{19}{9}\ln|x-3|\right]_{-4}^{-1}$$

(Der letzte Term wurde mit Substitution u = x -3 und folgender Rücksubstitution integriert).

$$A=-1+4+\tfrac{8}{9}\underbrace{\ln 1}_{=0}-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{8}{3}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{19}{9}\ln 4-\tfrac{19}{9}\ln 7=5-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{19}{9}\ln\tfrac{4}{7}\approx 2{,}59$$

Anwendungen des bestimmten Integrals

Flächenberechnung

Achtung: Für f(x) < 0 ist auch das Integral negativ. Der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse ist dann der *Betrag* des Integrals.

Wenn die Funktion im angegebenen Intervall ein oder mehrere **Nullstellen** hat, müssen wir daher die einzelnen Flächenstücke getrennt berechnen und ihre Beträge addieren.

Wenn die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse berechnet werden soll (ohne dass ein Intervall angegeben ist), müssen wir zuerst die **Nullstellen** bestimmen - das sind dann die Integrationsgrenzen.

Die Fläche, die von ***zwei Kurven*** - den Graphen der Funktionen f(x) und g(x) - eingeschlossenen wird, berechnen wir nach der Formel

$$A = \int_{x1}^{x2} (f(x) - g(x))dx$$

Die Integrationsgrenzen sind dabei die x-Koordinaten der Schnittpunkte. Wenn es mehr als zwei Schnittpunkte gibt, muss man wieder die einzelnen Flächenstücke getrennt verrechnen.

Beispiel 250:

Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ und der x-Achse zwischen den Grenzen a = 0 und b = 2 eingeschlossen wird?

Lösung:

Die Funktion hat bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle, wir müssen daher von 0 bis 1 und von 1 bis 2 *getrennt integrieren:*

$$\int_0^1 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

Beispiel 251:

Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$ und der x-Achse begrenzt wird?

Lösung:

Nullstellen bestimmen: $-x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$$A = \int_0^3 \left(-x^3 + 3x^2\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3 = 6\tfrac{3}{4}$$

Beispiel 252:

Wie groß ist die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$?

Lösung:

Schnittpunkte bestimmen: $x^2 = x^3 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{12}$$

Flächenberechnung zwischen zwei Graphen

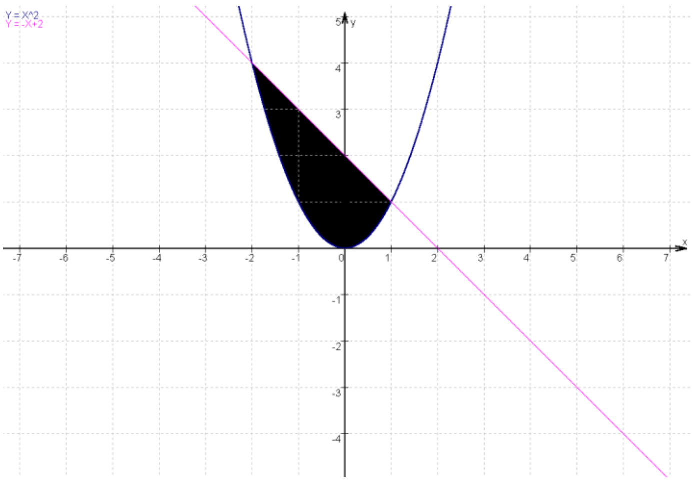
Beispiel 253:

Berechne den Inhalt der von den Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche.

$f(x)=x^2$; $g(x)=-x+2$

Folgende Vorgehensweise hat sich bewährt

(1) Auch hier zeichnen wir wieder eine Skizze, um uns den Sachverhalt besser zu verdeutlichen.



(2) Um die Integralgrenzen zu erhalten, bestimmen wir die Schnittpunkte der Graphen.

$$x^2=-x+2$$

$$x^2+x-2=0$$

$$p,q-Formel$$

$$x1,2=-\frac{1}{2}+-\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{1}{2}+-\frac{3}{2}$$

$$x1=1$$

$$x2=-2$$

(3) Man sieht hieraus:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Also gilt:

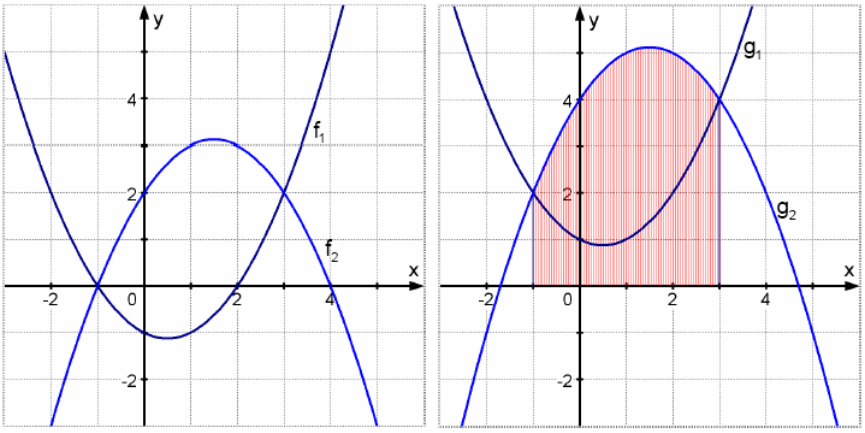
$$A=\left|\int_{1}^{-2}(-x+2)dx-\int_{1}^{-2}x^2dx\right|=\left|-1\bullet\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}-\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$=|-1,5-6+3|=|-4,5|=4,5$$

Beispiel 254:

Wie groß ist die Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen $f_1(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ und $f_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ begrenzt wird ?

Lösung:



Hinführung: Zunächst betrachten wir die linke Abbildung. Diese zeigt die gesuchte Fläche zwischen den beiden Parabeln.

1. Schritt: Wir verschieben beide Kurven und damit auch die zu berechnende Fläche um eine Strecke +C so nach oben, daß die Zielfläche ganz oberhalb der x-Achse liegt. Die Funktionsgleichungen ändern sich damit in: $g_1(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1+C$ und $g_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2+C$

2. Schritt: Wir denken uns nun die gesuchte Fläche als Differenz zweier krummliniger Trapeze (rechtes Bild): Das große „Kru-Li-Trap" wird oben durch das Schaubild von g_2 begrenzt. Sein Inhalt ist $A_1=\int_{-1}^{3} g_1(x)\,dx$
Das kleine „Kru-Li-Trap" wird durch das Schaubild von g_2 Begrenzt. Sein Inhalt ist: $A_2=\int_{-1}^{3} g_2(x)\,dx$

3. Schritt: Die gesuchte Fläche hat daher diesen Inhalt:

$$A=A_1-A_2=\int_{-1}^{3} g_1(x)\,dx-\int_{-1}^{3} g_2(x)\,dx=\int_{-1}^{3}\left[\left(\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x-1+C\right)-\left(-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x+2+C\right)\right]dx$$

Beim genauen Hinsehen erkennt man, daß der zur Verschiebung über die x-Achse eingefügte Summand +C durch die Subtraktion der beiden Funktionen wieder wegfällt. Daher kann man ihn eigentlich weglassen und gleich mit den Funktionen f_1 und f_2 arbeiten. Damit erhält man folgende Berechnung:

$$A=A_1-A_2=\int_{-1}^{3} f_1(x)\,dx-\int_{-1}^{3} f_2(x)\,dx=\int_{-1}^{3}\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx$$

Berechnung der Fläche:

$$A=A_1-A_2=\int_{-1}^{3}\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx=\int_{-1}^{3}\left[\left(\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x-1\right)-\left(-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x+2\right)\right]dx$$

$$A=\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^{3}=\left[9-9+9\right]-\left[-\tfrac{1}{3}-1+3\right]=7+\tfrac{1}{3}=\tfrac{22}{3}$$

Bemerkung 46:

Die Integration darf nicht über Schnittpunkte der Kurven hinweggehen. Besitzen die Kurven mehrere Schnittpunkte, so muss die Integration an den einzelnen Schnittpunkten aufgespalten werden.

Bei den einzelnen Integrationen ist darauf zu achten, dass die Differenz der Funktionen positiv ist, ggf. muss die Reihenfolge von f(x) und g(x) vertauscht werden.

Rotationsvolumen um die x-Achse

Definition 180:

Die Funktion f sei stetig über dem Intervall [a; b]. Ihr Graph rotiere über dem Intervall [a; b] um die x-Achse. Dann gilt für das Volumen V des entstehenden Körpers

$$V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx$$

Beispiel 255:

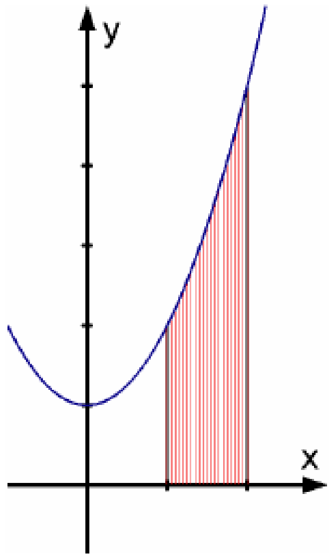
Randfunktion: $f(x) = x^2 + 1$

Krummliniges Trapez von x = 1 bis x = 2.
Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \int_1^2 \left(x^2+1\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) dx =$$

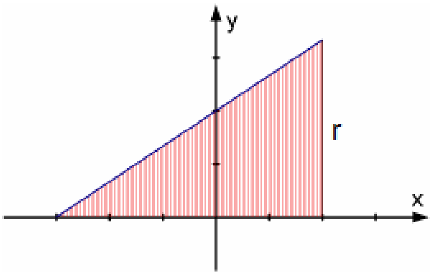
$$V = \pi \left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \pi\left[\tfrac{32}{5} + \tfrac{16}{3} + 2\right] - \pi\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3} + 1\right]$$

$$V = \pi \cdot \left(\tfrac{31}{5} + \tfrac{14}{3} + 1\right) = \pi \cdot \tfrac{93+70+15}{15} = \tfrac{178}{15}\pi$$



(2) Gerade $y = \frac{2}{3}x + 2$ für x= - 3 bis x = 2 begrenzt zusammen mit der x-Achse und der Geraden x = 2 ein Dreieck, das bei Drehung um die x-Achse zu einem Kegel wird.

Berechne dessen Volumen.



1. Lösung: $V = \pi \int_{-3}^{2} \left(\frac{2}{3}x+2\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{2} \left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 4\right) dx = \pi \left[\frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + 4x\right]_{-3}^{2}$

$$V = \pi\left[\frac{32}{27} + \frac{16}{3} + 8\right] - \pi\left[\underbrace{-\frac{4}{27}\cdot 27 + \frac{4}{3}\cdot 9 - 12}_{=0}\right] = \pi \cdot \frac{32+144+324}{27} = \pi \cdot \frac{500}{27} \approx 58{,}2$$

2. Lösung: Die Formel für das Kegelvolumen lautet: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

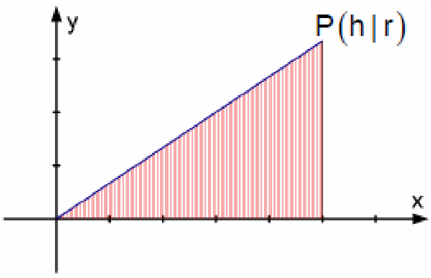
wobei der Radius $r = f(2) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$ ist und h = 2 – (-3) = 5

Es folgt: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{100}{9} \cdot 5 = \frac{500}{27}\pi$.

---

(3) Wir wollen diese Volumenformel herleiten:

Wir legen die Kegelspitze in den Ursprung und verwenden den Endpunkt P (h I r) .
Dann erhält die Usprungsgerade die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r}{h}$ und die Gerade die Gleichung $y = \frac{r}{h}x$.



Volumen des Drehkörpers:

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx = \pi\left[\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi \cdot \frac{1}{3}r^2 h$$

Mittelwert

Ist $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig, dann gibt es eine Stelle $c \in [a,b]$m bzw. ein $y_m = f(c)$, für die gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot f(c) = (b-a)\cdot m\,.$$

Das bestimmte Integral kann also durch ein Rechteck der Seitenlänge $b-a$ und der Höhe $f(c) = y_m$ dargestellt werden.
Umgekehrt gilt für den Mittelwert:

$$y_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beispiel 256:

Ein Fahrzeug bewegt sich zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 0{,}2\,\mathrm{h}$ und $t_2 = 0{,}8\,\mathrm{h}$ mit der Geschwindigkeit $v(t) = -400t^3 + 575t^2 - 150t + 100$ (in km/h).

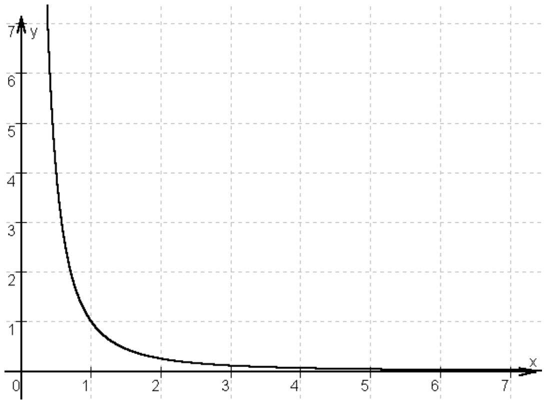
Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs?

Uneigentliche Integrale

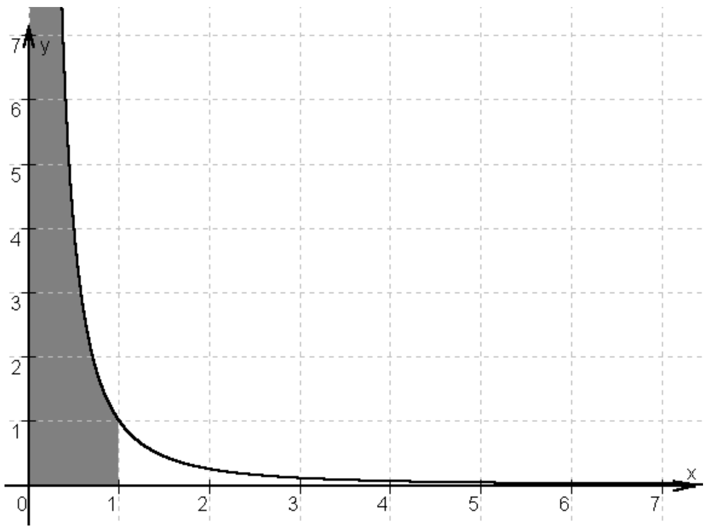
Gelegentlich gibt es Flächen, die „ins Unendliche" reichen, also z. B. eine „offene rechte oder linke Integrationsgrenze haben

Beispiel 257:

Schauen wir uns am Anfang die Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Und zwar nur den Teil im 1. Quadranten.



Wenn wir nun die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen wollen, stellen wir fest, dass die y-Achse eine Asymptote ist und es somit keinen Schnittpunkt mit der y-Achse gibt.



Die Fläche „reicht ins Unendliche". Zu ihrer Berechnung kann man das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil f nicht im ganzen Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist f unbeschränkt.

Zur Berechnung der Fläche verspricht folgender Gedanke Aussicht auf Erfolg.

Wir berechnen $\int_a^1 f(x)dx$ (für 0<a<1) und bestimmen den Grenzwert $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx$ (a>0).

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion f.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}; F(x)=\frac{1}{-2+1}\bullet x^{-2+1}=-\frac{1}{x}$$

Somit erhalten wir:

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^2}dx=\lim_{a\to 0}[-\frac{1}{x}]_a^1=\lim_{a\to 0}(-1+\frac{1}{a})$$

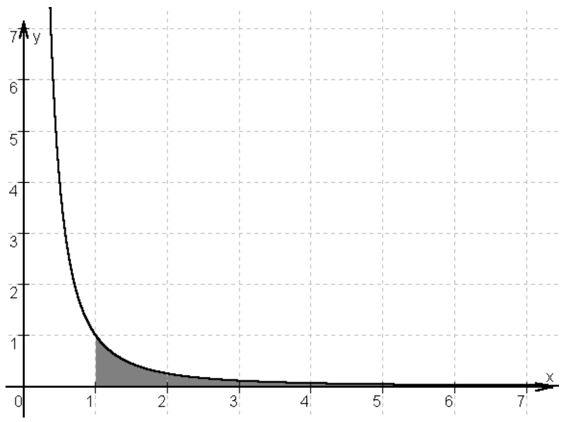
Der Grenzwert $\lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{a}$ existiert nicht. Gibt es also doch keinen Grenzwert? Ist unsere Idee doch nicht so aussichtsreich, wie wir uns das gedacht haben?

Wir halten fest:

Für $a\to 0$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x^2}$ von a bis 1 jede Schranke.

Nicht verzweifeln, nehmen wir einfach ein weiteres Beispiel.

Wir wollen von dieser Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x^2}$ die Fläche über dem Intervall $[1;\infty]$ berechnen.



Und gehen genauso wie oben vor. Wir erhalten:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}+1)=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b})+\lim_{b\to\infty}1=0+1=1$$

Die Fläche von f über diesem Intervall beträgt also 1.

Wir sehen, dass unsere Idee doch nicht so schlecht ist.

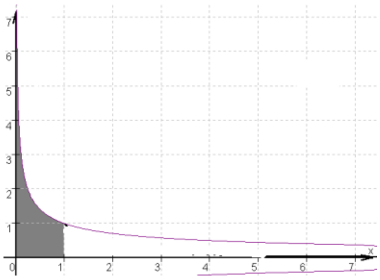
Halten wir erst einmal unser Ergebnis fest:

Die Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x^2}$ von 1 bis Unendlich hat den Flächeninhalt 1.

Beispiel 258:

Weil es so gut geklappt hat, nehmen wir uns nun eine zweite Funktion. Und zwar g mit $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Die Funktion sieht wie folgt aus:



Auch hier wollen wir die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen. Auch hier stoßen wir auf das gleiche Problem. Die Fläche „reicht ins Unendliche“. Zu ihrer Berechnung kann man das Integral $\int_0^1 g(x)dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil g nicht im ganzen Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist g unbeschränkt.

Zur Berechnung der Fläche gehen wir mit derselben Methode wie oben vor.

Wir berechnen $\int_a^1 g(x)dx$ (für 0<a<1) und bestimmen den Grenzwert $\lim_{a\to 0}\int_a^1 g(x)dx$ (a>0).

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion g.

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}};G(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\bullet x^{-\frac{1}{2}+1}=2\sqrt{x}$$

Wir berechnen den Flächeninhalt:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0}\int_a^1\frac{1}{\sqrt{x}}dxdx=\lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1=\lim_{a\to 0}(2-2\sqrt{a})=\lim_{a\to 0}2-\lim_{a\to 0}2\sqrt{a})=2-0=2$$

Der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ von 0 bis 1 beträgt 2.

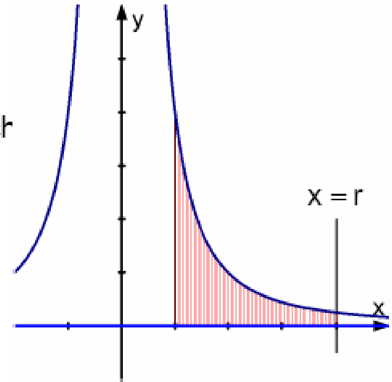
Berechnet auch hier die Fläche über dem Intervall $[1;\infty]$:

$$\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b}-2)=\lim_{b\to\infty}2\sqrt{b}-\lim_{b\to\infty}2$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\lim_{b\to\infty}2\sqrt{b}$ beliebig groß wird.

Für $b\to\infty$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g mit $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ von 1 bis b jede Schranke.

Beispiel 259:



(8) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

Das Schaubild dieser Funktion nähert sich asymptotisch der x-Achse an. Daher schließen das Schaubild K, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine bis ins unendliche reichende Fläche ein.
Die Schreibweise

$$A = \int_1^{\infty} \frac{4}{x^2} dx \qquad (*)$$

ist leider nicht zulässig, und das hat einen einfachen Grund: Man muß ja die beiden Grenzen in die Stammfunktion einsetzen und sollte dann mit „Unendlich“ rechnen. Dies geht nicht, obwohl man mit diesem Begriff natürlich rechenähnliche Überlegungen anstellen kann. Aber ∞ ist nun mal keine Zahl !.
Dennoch findet man Schreibweisen wie in (*) dargestellt sehr oft. Vor allem Physiker neigen dazu, in ihren Integralanwendungen derartige Schreibweisen zu verwenden. Dann aber bezeichnen sie damit das Ergebnis nach Abschluß der Berechnungen. Aber zum Durchführen der Rechnung ist das Zeichen ∞ als Integrationsgrenze verboten.

In unserem Beispiel sieht das so aus:

$$A(r) = \int_1^r \frac{4}{x^2} dx = \left[-\frac{4}{x} \right]_1^r = -\frac{4}{r} + 4 = 4 - \frac{4}{r}$$

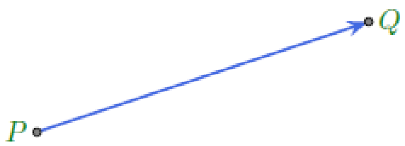
Und nun verschiebt man den rechten Rand ins Unendliche:

$$A^* = \lim_{r \to \infty} A(r) = 4\,, \quad \text{denn} \quad \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} = 0\,.$$

Vektoralgebra

Skalare und vektorielle Größen

Definition 181:

	Mathematik	Physik
Skalar	Reelle Zahl, z.B. $0, 1, -3, \sqrt{2}, \pi$	Richtungslose Größe (mit Einheit/Dimension) zum Beispiel: Temperatur T (K), Zeit t (s), Masse m (kg)
Vektor	Objekt, das eine Position oder Parallelverschiebung im Raum beschreibt 	Größe (mit Einheit/Dimension), die einen Betrag und eine Richtung besitzt zum Beispiel: Position $\vec{p}$ (m), Geschwindigkeit $\vec{v}$ $(\frac{\text{m}}{\text{s}})$, Kraft $\vec{F}$ (N), Moment $\vec{M}$ (N m)

Vektoren

Definition 182:

Schreibweise von Vektoren:

$\vec{a}$; $\overrightarrow{PQ}$

Bemerkung 47:

Zu einer vektoriellen physikalischen Größe gehört in der Regel noch eine Maßeinheit. Der Betrag eines physikalischen Vektors ist daher Maßzahl + Maßeinheit.

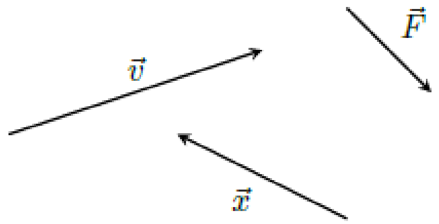
Wichtig: Ein mathematischer Vektor ist nicht an einen Ort gebunden. Er darf frei verschoben werden.

Anwendungen für Vektoren

In den technischen Anwendungen zum Beschreiben einer physikalischen Größe.

Darstellung von Vektoren

Zeiger- bzw. Pfeilform



Koordinatenform

$$\text{Spaltenvektor } \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \text{Zeilenvektor } \vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

Beispiel 260:

a) Die Strecke (Luftlinie) $\vec{s}$ von Reutlingen nach Berlin kann als Vektor der Länge 535 km mit ungefährer Richtung *Nord-Nord-Ost* angegeben werden.

b) Die Information des Vektor $\vec{s}$ aus a) könnte aber auch mit der Information

$$313\,\text{km nach Osten, } 437\,\text{km nach Norden, kurz } \vec{s} = \begin{pmatrix} 313 \\ 437 \end{pmatrix}$$

Grundbegriffe

Definition 183:

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ heißen

gleich	bei gleicher Länge (Betrag) und gleicher Richtung	$\vec{a} = \vec{b}$
parallel	bei gleicher Richtung	$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$
antiparallel	bei entgegengesetzter Richtung	$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
kollinear	wenn sie parallel oder antiparallel sind	
inverse Vektoren	bei gleichem Betrag und entgegengesetzter Richtung	$\vec{a} = -\vec{b}$

Spezielle Vektoren

Definition 184:

Nullvektor

Ein Vektor der Länge 0 wird Nullvektor $\vec{0}$ genannt. Die Richtung des Nullvektors ist unbestimmt.

Einheitsvektor

Für einen Vektor $\vec{a}$ nennt man den zu $\vec{a}$ parallelen Vektor der Länge 1 den Einheits- oder Einsvektor $\vec{e}_a$ in Richtung $\vec{a}$. Es gilt also $|\vec{e}_a| = 1$.

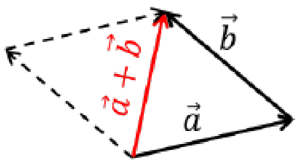
Geometrische Vektorrechnung

Addition

Definition 185:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden geometrisch folgendermaßen addiert:

- Der Vektor $\vec{b}$ wird parallel verschoben, bis sein Anfangspunkt in den Endpunkt von $\vec{a}$ fällt.
- Der Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ verläuft dann vom Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ bis zum Endpunkt des verschobenen Vektors $\vec{b}$.



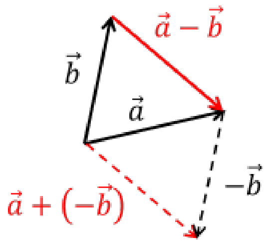
Regel 2.3: Rechenregeln

Kommutativgesetz	$\vec{a}+\vec{b}$	$=$	$\vec{b}+\vec{a}$
Assoziativgesetz	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$	$=$	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Subtraktion

Definition 186:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden geometrisch subtrahiert, indem zu $\vec{a}$ der Gegenvektor $-\vec{b}$ von $\vec{b}$ addiert wird.



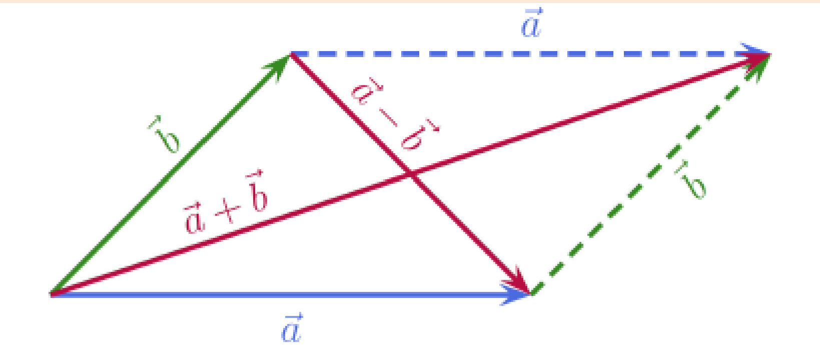
Regel 2.4: Rechenregeln

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$$
$$\vec{a}-\vec{b} = -(\vec{b}-\vec{a})$$

Bemerkung 48:

Parallelogrammregel

Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergeben sich die Summe $\vec{a}+\vec{b}$ und die Differenz $\vec{a}-\vec{b}$ als orientierte Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

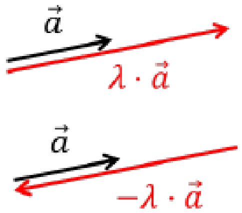


Multiplikation mit einem Skalar

Definition 187:

Für einen Vektor $\vec{a}$ erhält man durch Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ einen neuen Vektor

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$$



Geometrische Bedeutung

$\lvert\lambda\rvert > 1$	Streckung
$\lvert\lambda\rvert < 1$	Stauchung
$\lambda < 0$	Richtungsumkehr

Allgemeiner reeller Vektorraum

Definition 188:

Eine Menge V heißt reeller Vektorraum, wenn für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechnungen (Addition und skalere Multiplikation) definiert sind und die Ergebnisse jeweils wieder in V liegen. Außerdem muss gelten:

A1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A3) es gibt einen Nullvektor $\vec{0}$ mit $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

A4) es gibt einen inversen Vektor $-\vec{v}$ mit $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$

S1) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

S2) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$

S3) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$

Komponentenzerlegung

Definition 189:

Unter gewissen Umständen lässt sich ein Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Lineare Abhängigkeit

Definition 190:

Kollineare Vektoren sind zu ein und derselben Richtung parallel (s. Def. 2.2). Sie sind also parallel oder antiparallel. Für zwei kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Dabei nennt man $\vec{a}$ ein lineares Vielfaches von $\vec{b}$.

Im zweidimensionalen Raum sind drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ stets komplanar. Allgemein nennt man drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der Anderen schreiben lässt (wie in (2.1)): wenn z.B. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind, dann kann der Vektor $\vec{c}$ mithilfe des Parallelogramms in Komponenten bzgl. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zerlegt werden:

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad \text{bzw.} \quad \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} - \vec{c} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Geometrisch bedeutet komplanar, dass die Vektoren in einer Ebene liegen.

Definition 191:

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn es drei reelle Parameter λ_1, λ_2 und λ_3 gibt mit

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}\,.$$

Dabei muss noch gelten, dass mindestens einer der Parameter λ_i ungleich 0 ist.

Definition 192:

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heißen linear abhängig, wenn es eine nicht-triviale Linearkombination

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}\ ;\ \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

gibt.

Besitzt die Gleichung (2.2) nur die triviale Lösung (d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$), dann nennt man die Vektoren linear unabhängig.

Bemerkung 49:

Zwei kollineare oder drei komplanare Vektoren sind immer linear abhängig.

Die Prüfung auf lineare Abhängigkeit für zu einem LGS.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren definiert die Dimension eines Vektorraums V.

Vektorrechnung mit Koordinaten

Zum Rechnen mit Vektoren benötigen wir die Koordinatendarstellung. Damit können Winkel, Längen, Flächen, . . . berechnet werden.

Wir definieren die Koordinatendarstellung und das Rechnen mit Vektoren im dreidimensionalen Raum.

Den zweidimensionalen Raum sehen wir dabei als Spezialfall an.

Generell lassen sich Vektoren auch in höherdimensionalen Räumen definieren, in denen uns die Anschauung fehlt.

Basis

In einem n-dimensionalen Vektorraum V sind maximal n Vektoren linear unabhängig. Eine solche Menge $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ von n linear unabhängigen Vektoren nennt man Basis von V.

Umgekehrt heißt das aber, dass $n+1$ Vektoren aus V immer linear abhängig sind. Das bedeutet (nach Gleichung 2.2), dass jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination

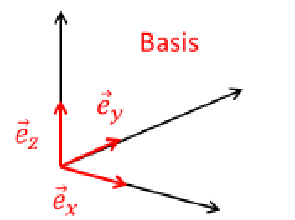
$$\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{b}_n \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

dargestellt werden kann. **Die Darstellung**, d.h. die Wahl der λ_i, **ist** nach Wahl einer Basis B **eindeutig**! Umgekehrt gibt es unendlich viele verschiedene Möglichkeiten für die Wahl der Basis B. Man nennt die λ_i die Koordinaten von $\vec{v}$ (bezüglich B).

Kartesisches Koordinatensystem

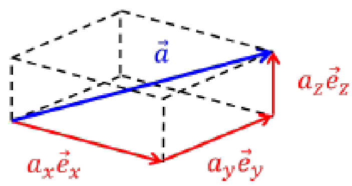
Definition 193:

Die kartesische Koordinatendarstellung eines 3-dimensionalen Vektors erhält man, indem man als Basis drei senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (Vektoren der Länge 1) wählt.



Nach (2.3) lässt sich jeder Vektor $\vec{a}$ **eindeutig** als Summe von Vielfachen dieser Basisvektoren darstellen:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{2.4}$$



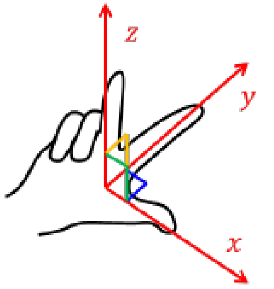
- Die Skalare a_x, a_y, a_z heißen (kartesische) Koordinaten von $\vec{a}$.
- Die Vektoren $\vec{a}_x = a_x\vec{e}_x$, $\vec{a}_y = a_y\vec{e}_y$ und $\vec{a}_z = a_z\vec{e}_z$ sind die Komponenten von $\vec{a}$ in x, y, z-Richtung.

Die Menge aller 3-dim. Vektoren bilden den Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 50:

In der Regel werden die Basisvektoren so gewählt, dass sie ein Rechtssystem bilden, d.h. sie stehen senkrecht aufeinander (klar!) und es gilt die 'Rechte-Hand-Regel':

- Daumen: x-Achse
- Zeigefinger: y-Achse
- Mittelfinger: z-Achse



Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in jeder Koordinate übereinstimmen

Für den Betrag bzw. die Länge des Vektors $\vec{a}$ gilt

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.5}$$

Die Koordinaten der Basisvektoren sind

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Definition von kartesischen Koordinaten kann leicht auf einen beliebig dimensionalen Vektor übertragen werden. Im Sonderfall von 2-dimensionalen Vektoren gilt:

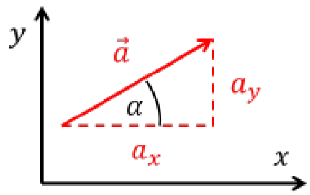
Definition 194:

Koordinatendarstellung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Winkel zur x-Achse $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$ oder $\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x}$

d.h. $\vec{a} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$



Beispiel 261:

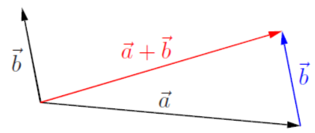
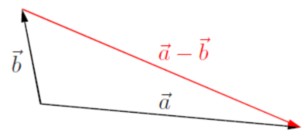
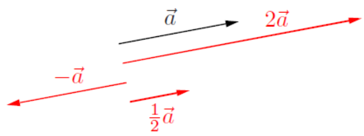
a) Welchen Betrag und Winkel hat der Vektor $\vec{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Ein Vektor hat den Betrag 4 und die Richtung $30°$. Wie lauten die Koordinaten?

Grundrechenarten

Die Grundrechenarten für Vektoren (hier beispielhaft wieder 3-dim.) in kartesischen Koordinaten ergeben sich, indem man die jeweilige Rechenoperation jeweils auf die einzelnen Koordinaten anwendet:

Definition 195:

Addition $\vec{a}+\vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$	
Subtraktion $\vec{a}-\vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$	
Skalare Multiplikation $\lambda \cdot \vec{a}$	$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$	

Allgemeiner reeller Vektorraum

Definition 196:

Eine Menge V heißt reeller Vektorraum, wenn für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechnungen (Addition und skalere Multiplikation) definiert sind und die Ergebnisse jeweils wieder in V liegen. Außerdem muss gelten:

A1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

A2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

A3) es gibt einen Nullvektor $\vec{0}$ mit $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$

A4) es gibt einen inversen Vektor $-\vec{v}$ mit $\vec{v}-\vec{v}=\vec{0}$

S1) $\lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

S2) $(\lambda+\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$

S3) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$

Komponentenzerlegung

Unter gewissen Umständen lässt sich ein Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Lineare Abhängigkeit

Definition 197:

Kollineare Vektoren sind zu ein und derselben Richtung parallel (s. Def. 2.2). Sie sind also parallel oder antiparallel. Für zwei kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Dabei nennt man $\vec{a}$ ein lineares Vielfaches von $\vec{b}$.

Im zweidimensionalen Raum sind drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ stets komplanar. Allgemein nennt man drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der Anderen schreiben lässt (wie in (2.1)): wenn z.B. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind, dann kann der Vektor $\vec{c}$ mithilfe des Parallelogramms in Komponenten bzgl. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zerlegt werden:

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad \text{bzw.} \quad \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} - \vec{c} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Geometrisch bedeutet komplanar, dass die Vektoren in einer Ebene liegen.

Definition 198:

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn es drei reelle Parameter λ_1, λ_2 und λ_3 gibt mit

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}\,.$$

Dabei muss noch gelten, dass mindestens einer der Parameter λ_i ungleich 0 ist.

Definition 199:

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heißen linear abhängig, wenn es eine nicht-triviale Linearkombination

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}\;;\; \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

gibt.

Besitzt die Gleichung (2.2) nur die triviale Lösung (d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$), dann nennt man die Vektoren linear unabhängig.

Aus der Definition folgt: sind Vektoren linear abhängig, dann kann einer der Vektoren als Linearkombination der Anderen ausgedrückt werden.

Bemerkung 51:

Zwei kollineare oder drei komplanare Vektoren sind immer linear abhängig.

Die Prüfung auf lineare Abhängigkeit für zu einem LGS.

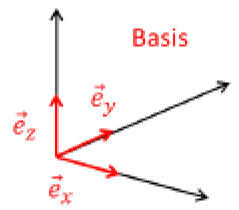
Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren definiert die Dimension eines Vektorraums V.

Vektorrechnung mit Koordinaten

Eine besonders schöne' Darstellung erhält man, wenn man die Basisvektoren geschickt wählt. Dies soll am Beispiel von 3-dimensionalen Vektoren gezeigt werden:

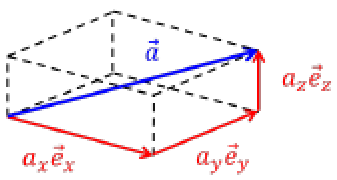
Definition 200:

Die kartesische Koordinatendarstellung eines 3-dimensionalen Vektors erhält man, indem man als Basis drei senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (Vektoren der Länge 1) wählt.



Nach (2.3) lässt sich jeder Vektor $\vec{a}$ **eindeutig** als Summe von Vielfachen dieser Basisvektoren darstellen:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

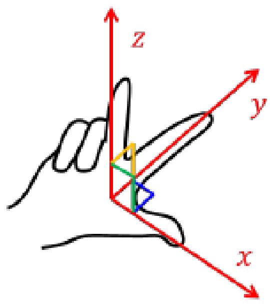


- Die Skalare a_x, a_y, a_z heißen (kartesische) Koordinaten von $\vec{a}$.
- Die Vektoren $\vec{a}_x = a_x\vec{e}_x$, $\vec{a}_y = a_y\vec{e}_y$ und $\vec{a}_z = a_z\vec{e}_z$ sind die Komponenten von $\vec{a}$ in x, y, z-Richtung.

Die Menge aller 3-dim. Vektoren bilden den Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 52:

- In der Regel werden die Basisvektoren so gewählt, dass sie ein Rechtssystem bilden, d.h. sie stehen senkrecht aufeinander (klar!) und es gilt die 'Rechte-Hand-Regel':
  - Daumen: x-Achse
  - Zeigefinger: y-Achse
  - Mittelfinger: z-Achse



- Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in jeder Koordinate übereinstimmen
- Für den Betrag bzw. die Länge des Vektors $\vec{a}$ gilt

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Die Koordinaten der Basisvektoren sind

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Definition von kartesischen Koordinaten kann leicht auf einen beliebig dimensionalen Vektor übertragen werden. Im Sonderfall von 2-dimensionalen Vektoren gilt:

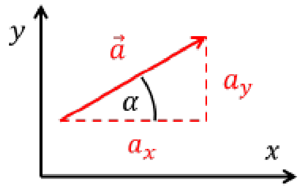
Spezialfall: kartesische Vektoren im 2-dimensionalen Raum

Koordinatendarstellung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Winkel zur x-Achse $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$ oder $\tan\alpha = \dfrac{a_y}{a_x}$

d.h. $\vec{a} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$



Beispiel 262:

a) Welchen Betrag und Winkel hat der Vektor $\vec{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Ein Vektor hat den Betrag 4 und die Richtung $30°$. Wie lauten die Koordinaten?

Grundrechenarten

Die Grundrechenarten für Vektoren (hier beispielhaft wieder 3-dim.) in kartesischen Koordinaten ergeben sich, indem man die jeweilige Rechenoperation jeweils auf die einzelnen Koordinaten anwendet:

Definition 201:

Addition und Subtraktion $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$

Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$

Beispiel 263:

a) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $4\vec{a} + 3\vec{b} - 8\vec{c}$.

b) Zeigen Sie, dass die an einem Massepunkt gleichzeitig angreifenden Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix} \text{N} \quad , \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \text{N} \quad , \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} \text{N} \quad , \quad \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} -25 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \text{N}$$

sich in ihrer physikalischen Wirkung aufheben.

c) Bestimmen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

die zugehörigen Einheitsvektoren (s. 2.1.5), d.h. Vektoren, die in dieselbe Richtung zeigen und Länge 1 haben.

Punkte im Anschauungsraum

Um räumliche Punkte mit Koordinaten versehen zu können, muss zunächst ein Ursprung O definiert werden.

In diesem Ursprung 'fixiert' man nun die kartesischen Basisvektoren.

Ausgehend vom Ursprung lässt sich dann jeder andere Punkt P eindeutig mit einem Vektor, dem Ortsvektor $\vec{p}$ erreichen.

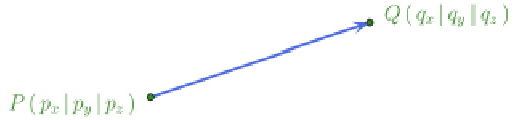
Auf diese Weise lässt sich jedem Punkt P ein Satz Koordinaten, nämlich genau die von $\vec{p}$ zuordnen:

$$\text{Punkt } P \longleftrightarrow \text{ Ortsvektor } \overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \longleftrightarrow \text{ Punktkoordinaten } P\,(\,p_x\,|\,p_y\,|\,p_z\,)$$

Definition 202:

Für den Vektor zwischen zwei Punkten $P\,(\,p_x\,|\,p_y\,|\,p_z\,)$ und $Q\,(\,q_x\,|\,q_y\,|\,q_z\,)$ mit den Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix}$$



Beispiel 264:

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$, der die Punkte $A\,(3\,|\,-4\,|\,4)$ und $B\,(1\,|\,-2\,|\,5)$ verbindet.

b) Welche Koordinaten hat der Punkt Q, der die Strecke zwischen den Punkten $P_1\,(-4\,|\,3\,|\,2)$ und $P_2\,(1\,|\,0\,|\,4)$ halbiert? Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

Linear unabhängige Vektoren

Die Bedingung aus der Definition linear unabhängiger Vektoren kann in Koordinatenschreibweise direkt überprüft werden.

Beispiel 265:

a) Die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, denn

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda_2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_1\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda_2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

gilt nur, wenn alle drei Koordinaten der Summe 0 sind, also

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

und damit nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

b) Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

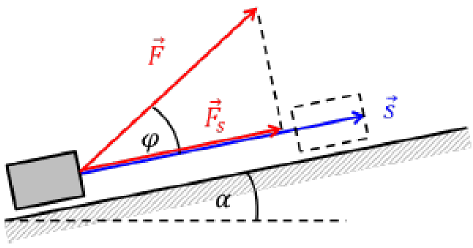
linear abhängig sind.

Skalarprodukt

Die physikalische Gleichung *Arbeit* = *Kraft* · *Weg* für die geleistete Arbeit bei konstanter Kraft und geradlinigem Weg, ist aus vektorieller Sicht

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

eine Operation ·, die zwei Vektoren ein Skalar zuordnet.



Für die geleistete Arbeit gilt (in skalaren Größen):

$$\text{Arbeit} = \text{Betrag der Kraft in Wegrichtung} \cdot \text{Länge des Weges}$$

$$W = |\vec{F_s}| \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot (\cos\varphi) \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$$

Definition 203:

Das Skalarprodukt oder innere Produkt zweier beliebiger[a] Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Für den Winkel φ zwischen zwei Vektoren gilt daher :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

In kartesischen Koordinaten gilt für einen allgemeinen Vektor

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n \,,$$

in 3D also,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Rechenregeln

Definition 204:

Kommutativgesetz	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Distributivgesetz	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
Multiplikation mit Skalar	$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$

Bemerkung 53:

Der Winkel ϕ welcher berechnet wird ist immer der kleinere der beiden von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel.

Beispiel 266:

a) Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

(i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) (TR) Berechnen Sie den Winkel, den die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

miteinander einschließen.

Test auf Orthogonalität

Für das Skalarprodukt gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &> 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &< 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Definition 205:

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \tag{2.10}$$

Beispiel 267:

Für welche Werte von b_2 stehen die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

senkrecht aufeinander.

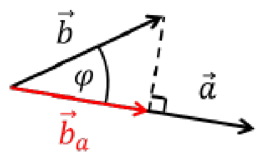
Vektorprojektion und orthogonale Komponentenzerlegung

Beim einleitenden Beispiel zum Skalarprodukt (Berechnung der Arbeit, die eine Kraft an einem Körper verrichtet) war die Komponente der Kraft in Wegrichtung relevant. Mit Hilfe des Skalarprodukts kann diese Projektion einfach berechnet werden:

Definition 206:

Die Komponente $\vec{b}_a$ des Vektors $\vec{b}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}$ berechnet sich wie folgt:

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a} = \left(\vec{e}_a \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{e}_a \tag{2.11}$$



Beispiel 268:

Berechnen Sie die Vektorprojektion $\vec{b}_a$ für

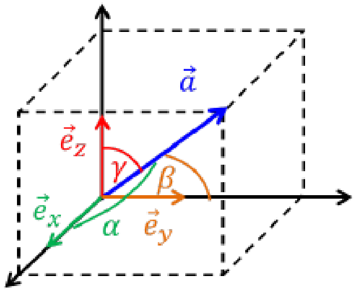
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Richtungswinkel

Fragestellung: Wie definiert man die Richtung eines Vektors im dreidimensionalen Raum?

Für den Winkel zwischen dem Vektor und der x-Achse gilt nach Gleichung (2.7)

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_x}{|\vec{a}|\cdot 1} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$



Definition 207:

Für die Richtungswinkel zwischen einem Vektor $\vec{a}$ und den Koordinatenachsen gilt

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Die Richtungswinkel hängen folgendermaßen zusammen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Beispiel 269:

(TR) Berechnen Sie die Richtungswinkel für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{9}} = +\frac{2}{3}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{3}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$$

Vektorprodukt

Wie berechnet man mit dem Computer die Oberfläche eines 3D-Objekts?

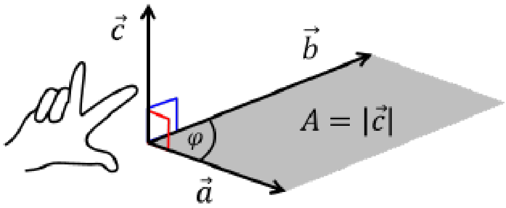
Definition 208:

Das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt bzw. äußere Produkt) zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist definiert als der Vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit

- für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt die Rechte-Hand-Regel[1]
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$
  mit $0 \leq \varphi \leq \pi \mathrel{\widehat{=}} 180°$



Bemerkung 54:

Das Vektorprodukt ist nur für 3-dimensionale Vektoren definiert!

Definition 209:

Anti-Kommutativgesetz	$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$
Distributivgesetz	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
Distributivgesetz	$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
Multiplikation mit Skalar	$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
Graßmann-Identität	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Definition 210:

In Koordinaten berechnet sich das Vektorprodukt als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

oder

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad (1) \quad \text{oder} \quad \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \quad (2)$$

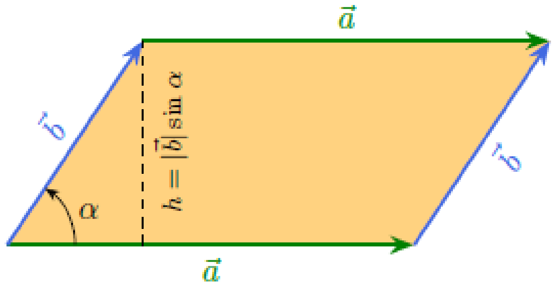
Beispiel 270:

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist das Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Anwendung – Flächeninhalt eines Parallelogramms

Definition 211:

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:



$$\begin{aligned} F &= \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} \\ &= |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \end{aligned}$$

Anwendung – Flächeninhalt eines Dreiecks

Definition 212:

Sind A, B und C 3-dimensionale Punkte, dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle(A, B, C)$

$$F_\triangle = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| .$$

Beispiel 271:

Gegeben sind die Punkte $P_1\,(1\,|\,1)$, $P_2\,(2\,|\,0)$ und $P_3\,(3\,|\,2)$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Punkte in der xy-Ebene aufspannen.

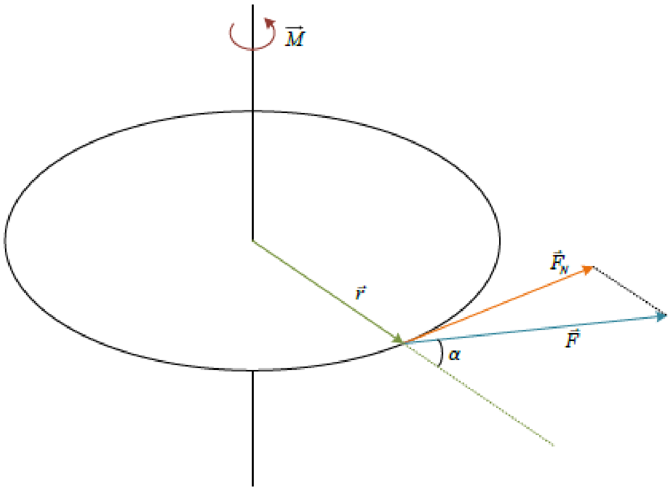
Das Drehmoment

Die physikalische Gleichung 'Drehmoment = Hebelarm · Kraft', ist eine Operation, die den beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ den Drehmomentvektor $\vec{M}$ zuordnet. Das geschieht genau mit dem Vektorprodukt

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} .$$

Die Richtung von $\vec{M}$ beschreibt die Achse um die das Moment wirkt, der Betrag die Größe des Moments. Für $\vec{M}$ gilt:

- $\vec{M} \perp \vec{r}$ und $\vec{M} \perp \vec{F}$
- Das Moment wirkt in Richtung von $\vec{M}$ mathematisch positiv
- $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_\mathrm{N}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$



Definition 213:

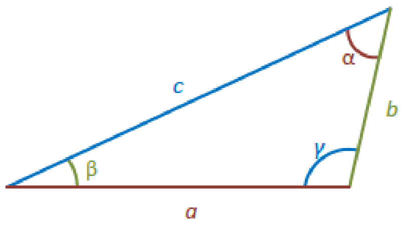
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear (parallel oder anti-parallel), wenn gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}\,.$$

In der Praxis prüft man die Kollinearität aber in der Regel schneller durch 'Hinschauen', bzw. durch Testen , ob $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Kosinussatz und Sinussatz

Skalar- und Vektorprodukt können dazu benutzt werden, um zwei wichtige Eigenschaften von allgemeinen Dreiecken herzuleiten



Definition 214:

Kosinussatz:

In einem beliebigen Dreieck gilt $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Mit Hilfe des Vektorprodukts zeigt man:

Definition 215:

Sinussatz:

In einem beliebigen Dreieck gilt $\quad \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

Spatprodukt

Für die Volumenberechnung eines 3D-Objekts geht man ähnlich vor, wie bei der Flächenberechnung.

Verbindet man die Eckpunkte der triangulierten Oberfläche geeignet, dann wird der Körper in eine Reihen von Tetraedern zerlegt.

Zum Teil wird der Körper im Innern noch weiter zerlegt um eine gleichmäßige 3D-Triangulierung zu erreichen.

Für eine möglichst genaue Volumenberechnung wird das Volumen mit sehr vielen Tetraedern approximiert, d.h. eine effiziente Methode zur Volumenberechnung ist nötig.

Definition 216:

Unter dem Spatprodukt (oder auch gemischtes Produkt) dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ versteht man das Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit dem Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a}||\vec{b} \times \vec{c}| \cos\varphi$$

Die Berechnung geschieht am einfachsten so:

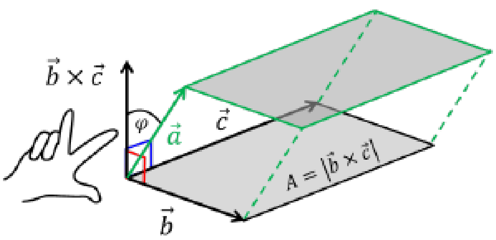
$$\boxed{\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] := \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(SP2)}}$$

Bemerkung 55:

- Das Spatprodukt ist eine skalare Größe
- Der Betrag des Spatprodukts beschreibt das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipedes (Spat)

$$|V_{\text{Spat}}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

- Das Spatprodukt ist genau dann positiv, wenn die Vektoren (qualitativ) ein Rechtssystem bilden (auch wenn sie im Allgemeinen nicht senkrecht aufeinander stehen)



Definition 217:

Paarweises Vertauschen	$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right]$	Vorzeichen ändert sich
Zyklisches Vertauschen	$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right]$	insb. Vorzeichen bleibt gleich

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Beispiel 272:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Geometrische Ergänzungen

Parameterdarstellung einer Geraden

Definition 218:

Eine räumliche Gerade g wird beschrieben durch einen Fixpunkt P_0 mit Ortsvektor $\vec{p}_0$ und einen Richtungsvektor $\vec{a}$.
Bezeichnet man einen beliebigen Punkt auf der Geraden mit P und den dazugehörigen Ortsvektor mit $\vec{p}$, dann lässt sich die Gerade wie folgt beschreiben:

- in Vektorform

$$g:\ \vec{p} = \vec{p}(\lambda) = \vec{p}_0 + \lambda\vec{a} \qquad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{a} \neq \vec{0}$$

- mit Koordinaten

$$g:\ \vec{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}_{\vec{p}_0} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Wird auch als Punkt-Richtung-Form der Geraden bezeichnet.

Beispiel 273:

Ein Fahrzeug soll sich auf einer geradlinigen Bahn bewegen, die durch zwei Punkte $P\,(\,1\,|\,3\,|\,2\,)$ und $Q\,(\,2\,|\,-1\,|\,3\,)$ verlaufen soll.

a) Geben Sie die Bahn in Punkt-Richtungsform an.

b) Befindet sich der Punkt $R\,(\,4\,|\,-9\,|\,13\,)$ auch auf der Bahnlinie?

Parameterdarstellung einer Ebene

Definition 219:

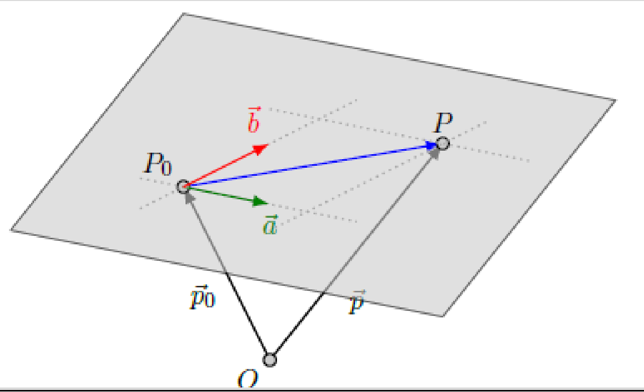
Eine Ebene E im Raum wird definiert durch einen Fixpunkt P_0 und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{a}, \vec{b}$

- in Vektorform

$$E:\ \vec{p}(\lambda,\mu) = \vec{p}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad \text{mit} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$$

- mit Koordinaten

$$E:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$



Beispiel 274:

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte $A\,(1\,|\,2\,|\,3)$, $B\,(1\,|\,3\,|\,3)$ und $C\,(2\,|\,2\,|\,2)$.

Parameterfreie Darstellung einer Ebene

Definition 220:

Durch drei **nicht-kollineare** Punkte $P_1\,(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$, $P_2\,(x_2\,|\,y_2\,|\,z_2)$ und $P_3\,(x_3\,|\,y_3\,|\,z_3)$ geht eine eindeutig bestimmte Ebene E.

Ist $P\,(x\,|\,y\,|\,z)$ ein beliebiger Punkt auf E, dann sind die Vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P}$, $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$ komplanar. Nach Abschnitt 2.6.1 heißt das, dass das Spatprodukt verschwindet:

Regel III.3

Mit den Bezeichnungen von oben gilt: Ein Punkt $P\,(x\,|\,y\,|\,z)$ liegt genau dann auf der Ebene E durch die Punkte P_1, P_2 und P_3, wenn gilt

$$E: \left[\vec{v}\;\vec{a}\;\vec{b}\right] = 0\,, \tag{III.1}$$

bzw. mit Hilfe der Determinante (s. Abschnitt 3.3):

$$E: \left|\vec{v}\;\vec{a}\;\vec{b}\right| = 0\,. \tag{III.2}$$

Definition 221:

Eine Ebene E im Raum ist eindeutig bestimmt durch einen Fixpunkt P_0 mit Ortsvektor $\vec{p}_0$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$, der senkrecht auf allen Vektoren innerhalb der Ebene steht. Ist $\vec{p}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P innerhalb der Ebene E, dann gilt:

Regel III.4: Punkt-Normalen-Form einer Ebene

Ein Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ liegt genau dann in der Ebenen E, wenn gilt

$$E:\ \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0) = \vec{n}\cdot\vec{p} - \vec{n}\cdot\vec{p}_0 = 0\,.$$

Mit $\vec{n}\cdot\vec{p}_0 = c$ gilt

$$E:\ \vec{n}\cdot\vec{p} - c = 0 \quad \text{bzw.} \quad E:\ \vec{n}\cdot\vec{p} = c \tag{III.3}$$

Mit Koordinaten:

$$E:\ n_x(x-x_0) + n_y(y-y_0) + n_z(z-z_0) = 0$$

bzw.

$$E:\ n_x x + n_y y + n_z z - c = 0 \ \text{ bzw. } \ E:\ n_x x + n_y y + n_z z = c \tag{III.4}$$

Bemerkung 56:

Die parameterfreie Darstellung einer Ebene E nennt man auch Koordinatenform von E.

Normalenvektor

Definition 222:

Sind zwei Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von E gegeben, dann gilt für den Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

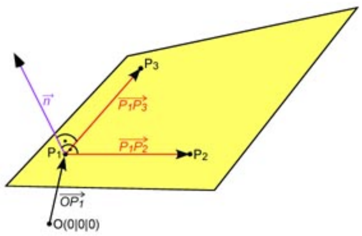
Beispiel 275:

Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A(-1|0|12), B(-1|1|19) und C(3|-2|6) auf.

Lösung:

Wir nehmen den Ortsvektor des ersten Punkts als Stützvektor. Die Verbindungsvektoren zwischen 1. und 2. bzw. zwischen 1. und 3. Punkt bilden die beiden Spannvektoren. Die Parametergleichung der Ebene ist also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$



Wir berechnen einen Normalenvektor, der senkrecht zu den beiden Spannvektoren steht, mittels des Kreuzproduktes:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-6)-7\cdot(-2) \\ 7\cdot4-0\cdot(-6) \\ 0\cdot(-2)-1\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-(-14) \\ 28--0 \\ -0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 28 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Unsere Ebenengleichung in Koordinatenform ist also $-2x_1 - 7x_2 + x_3 = \mathrm{d}$

Durch Einsetzen des Aufpunktes der Ebene A$(-1|0|12)$ erhält man

d = $(-2) \cdot (-1) + (-7) \cdot 0 + 1 \cdot 12$

also:

$$-2x_1 - 7x_2 + x_3 = 14$$

Die Darstellung der Ebene wird eindeutig, wenn man den Normalenvektor $\vec{n}$ normiert und dessen Richtung so einstellt, dass die Konstante c (bzw. dann d genannt) positiv wird.

Hesse'sche Normalform

Definition 223:

Die Hessesche Normalform einer Ebene ist definiert als

$$E : \vec{e}_n \cdot \vec{p} - d = 0 \quad \text{bzw.} \quad E : \vec{e}_n \cdot \vec{p} = d \;\; ; \;\; d \geq 0\,.$$

Dabei ist

$\vec{e}_n = \pm \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$ normierter Normalenvektor, so dass

$d \geq 0$ Abstand der Ebene zum Ursprung

Definition 224:

Interessant ist die Hesse'sche Normalenform für Abstandsberechnungen von beliebigen Punkten zur Ebene.

Mit unserem normierten Normalenvektor (man sagt auch „Normaleneinheitsvektor") haben wir gewissermaßen die Möglichkeit, Abstände zu „messen".

Hierfür setzen wir einfach die Koordinaten des Punktes in die Ebenengleichung ein.

Das, was als Ergebnis rauskommt, ist der gesuchte Abstand. Anmerkung: Ist das Ergebnis Null, so liegt der Punkt natürlich auf der Ebene.

Beispiel 276:

E: $4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 36$

Betrag des Normalenvektors: $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$

Division der Ebenengleichung durch diesen Betrag 9:

$\frac{4}{9}x_1 - \frac{4}{9}x_2 + \frac{7}{9}x_3 - 4 = 0$ Dies ist die Hessesche Normalform (HNF)

Hierin steckt nun der Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}^\circ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und der Abstand des Ursprungs von E ist $d(O;E) = 4$.

Fußpunkt des Lotes von O auf E: $\overrightarrow{OF} = \vec{f} = d \cdot \vec{n}^\circ = 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\frac{16}{9} \middle| \frac{-16}{9} \middle| \frac{28}{9}\right)$.

Übrigens lohnt es sich, für spätere Anwendungen die HNF so zu schreiben:

$$\frac{4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 36}{9} = 0$$

Beispiel 277:

Gegeben sei die Gleichung einer Ebene mit 3x - 4y + 2z = 6. Ziel ist es, die Hessesche Normalform zu ermitteln.

$$E: 3x - 4y + 2z = 6$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$
$$E: \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Aus der Ebenengleichung lesen wir den Normalenvektor "n" ab. Zu dem wählen wir uns einen Ortsvektor für einen beliebigen Punkt (3 · 2 -4 · 0 + 2 · 0 = 6). Im Anschluss bilden wir den Betrag des Normalenvektors. Als Letztes bilden wir die Hessesche Normalform.

Beispiel 278:

Berechne den Abstand des Punktes $Q(4|3|2)$ zur Ebene
$E: \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2.$

Für den Normalenvektor gilt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

Der Abstand des Punktes Q von E ist dann
$d = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 2}{\sqrt{14}} = \frac{8+9+2-2}{\sqrt{14}} = \frac{17}{\sqrt{14}} \approx 4,54$ Längeneinheiten.

Achsenabschnittsform

Definition 225:

Schneidet die Ebene die Koordinatenachsen in den Punkten $P_x\,(a\,|\,0\,|\,0)$, $P_y\,(0\,|\,b\,|\,0)$ und $P_z\,(0\,|\,0\,|\,c)$ (mit $a, b, c \neq 0$, d.h. keiner der Punkte liegt im Ursprung), dann lässt sich die Ebene in folgender Form schreiben:

$$E:\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Beispiel 279:

Aufgabe 1: Berechne die Schnittpunkte der Ebene E: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$ mit den Koordinatenachsen.

1. Lösung:

> ***Wissen***: *Die Punkte auf den Koordinatenachsen habe zwei Koordinaten 0:*
> *Punkte auf der x_1 –Achse haben diese Koordinaten:* $P_1(x_1|0|0)$
> *Punkte auf der x_2 –Achse haben diese Koordinaten:* $P_2(0|x_2|0)$
> *Punkte auf der x_3 –Achse haben diese Koordinaten:* $P_3(0|0|x_3)$.

Schnittpunkt mit der x_1-Achse: Wir setzen $x_2 = x_3 = 0$ in E ein und erhalten:
$6x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow P_1(4|0|0)$

Schnittpunkt mit der x_2-Achse: Wir setzen $x_1 = x_3 = 0$ in E ein und erhalten:
$4x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow P_1(0|6|0)$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse: Wir setzen $x_1 = x_2 = 0$ in E ein und erhalten:
$3x_3 = 24 \Rightarrow x_3 = 8 \Rightarrow P_1(0|0|8)$.

2. Lösung: Wir dividieren die Ebenengleichung durch 24, so daß rechts 1 steht:

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24 \quad |:24$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{8} = 1$$

Wenn wir jetzt die Nenner ansehen, dann entdecken wir dort genau die Koordinaten der Schnittstellen: Die x_1-Achse wird bei 4 geschnitten, die x_2-Achse bei 6, und die x_3-Achse bei 8.

Bemerkung 57:

Die Achsenabschnittsform in obiger Form existiert nicht, wenn die Ebene durch den Ursprung geht, bzw. wenn die Ebene parallel zu einer der Koordinatenachsen verläuft. Die Punkte P_x, P_y und P_z nennt man die Spurpunkte von E.

Geometrische Grundaufgaben

Abstand Punkt-Punkt

Definition 226:

Der Abstand h zweier Punkte P und Q mit Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ ist

$$h = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}|$$

Beispiel 280:

Setze die beiden Punkte in die Formel $d = \sqrt{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}$ ein.

$$d = \sqrt{(2-8)^2 + (6-9)^2 + (8-10)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

Abstand Punkt-Gerade

Definition 227:

Der Abstand h eines Punktes Q mit dem Ortsvektor $\vec{q}$ von einer Geraden $g: \vec{p}(\lambda) = \vec{p}_0 + \lambda\vec{a}$ ist

$$h = \frac{|\vec{a} \times (\vec{q} - \vec{p}_0)|}{|\vec{a}|} \quad ($$

Für den Parameter λ_L des Lotfußpunktes L gilt

$$\lambda_L = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{q} - \vec{p}_0)}{|\vec{a}|^2} \quad ($$

Beispiel 281:

Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q von der Geraden g.

Gegeben sei eine Gerade g in Parameterform und ein Punkt $P = (3|3|3)$ mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt-Ebene

Definition 228:

Der Abstand h eines Punktes Q zur Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{p} - c = 0$ ist

$$h = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{q} - c|}{|\vec{n}|}.$$

Ist E in HNF gegeben, dann ist

$$h^* = \vec{e}_n \cdot \vec{q} - d$$

der gerichtete Abstand h^* des Punktes Q von der Ebene $E: \vec{e}_n \cdot \vec{r} - d = 0$. Es gilt $h = |h^*|$

Bemerkung 58:

Geometrische Bedeutung des Abstandes:

$h > 0$: Punkt Q und der Nullpunkt liegen auf verschiedenen Seiten von E

$h < 0$: Punkt Q und der Nullpunkt liegen auf der gleichen Seite von E

Beispiel 282:

Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E.

$E: 3x_1 + 4x_2 = 4 \,; Q(1|4|0)$

Lösung:

Der Abstand von P(1 | 4 | 0) zu der Ebene

$$E: \; 3x_1 + 4x_2 = 4$$

lässt sich errechnen durch

$$d(P; E) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|15|}{5} = 3.$$

Beispiel 283:

Bestimme den Abstand der Punkte $A(8, 10, -5), B(0, 4, -4)$ und $C(3, 1, -6)$ von der Ebene $E: 12x_1 + 5x_3 = 6$.

Lösung:

$$d(A; E) = \left| \frac{12 \cdot 8 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot (-5) - 6}{\sqrt{12^2 + 0^2 + 5^2}} \right| = \left| \frac{65}{13} \right| = 5$$

$$d(B; E) = \left| \frac{12 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot (-4) - 6}{\sqrt{12^2 + 0^2 + 5^2}} \right| = \left| \frac{-26}{13} \right| = 2$$

$$d(C; E) = \left| \frac{12 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot (-6) - 6}{\sqrt{12^2 + 0^2 + 5^2}} \right| = \left| \frac{0}{13} \right| = 0$$

Punkt C liegt sogar in der Ebene, da der errechnete Abstand 0 beträgt.

Abstand Ebene-Ebene

Der Abstand zweier paralleler Ebenen E_1 und E_2 berechnet sich einfach durch Wahl eines beliebigen Punktes auf E_1 oder E_2.

Definition 229:

Der Abstand h eines Punktes Q zur Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{p} - c = 0$ ist

$$h = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{q} - c|}{|\vec{n}|}.$$

Der Abstand h eines Punktes Q zur Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{p} - c = 0$ ist

$$h = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{q} - c|}{|\vec{n}|}.$$

Beispiel 284:

Bestimme den Abstand von $A(8, 10, -5)$ zur Ebene $E: 12x_1 + 5x_3 = 6$.

Lösung:

1. $h: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 & = & 8 + 12r \\ x_2 & = & 10 + 0r \\ x_3 & = & -5 + 5r \end{matrix}$

2. $g \cap E: 12 \cdot (8 + 12r) + 0 \cdot (10 + 0r) + 5 \cdot (-5 + 5r) = 6$

   $\Leftrightarrow r = -\dfrac{5}{13}$

   $\overrightarrow{0L} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + \left(-\dfrac{5}{13}\right) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44/13 \\ 10 \\ -90/13 \end{pmatrix} \Rightarrow L\left(\dfrac{44}{13} \middle| 10 \middle| -\dfrac{90}{13}\right)$

3. $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{0L} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -60/13 \\ 0 \\ -25/13 \end{pmatrix}$

4. $d(A; E) = |\overrightarrow{AL}| = \sqrt{\left(-\frac{60}{13}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{25}{13}\right)^2} = \cdots = 5$

Abstand Gerade-Gerade

Abstand zweier paralleler Geraden

Definition 230:

Für den kürzesten Abstand zwischen zwei parallelen Geraden wird der Abstand eines beliebigen Punktes der ersten Geraden zur anderen Geraden berechnet.

Der Abstand h eines Punktes Q mit dem Ortsvektor $\vec{q}$ von einer Geraden $g: \vec{p}(\lambda) = \vec{p}_0 + \lambda\vec{a}$ ist

$$h = \frac{|\vec{a} \times (\vec{q} - \vec{p}_0)|}{|\vec{a}|} \quad ($$

Für den Parameter λ_L des Lotfußpunktes L gilt

$$\lambda_L = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{q} - \vec{p}_0)}{|\vec{a}|^2} \quad ($$

Beispiel 285:

Berechne den Abstand d der parallelen Geraden

$$g_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$h = \frac{|\vec{a} \times (\vec{q} - \vec{p_0})|}{|\vec{a}|}$$

Abstand zweier windschiefer Geraden

Definition 231:

Für den Abstand zweier windschiefer Geraden

$$g_1 : \vec{p}(\lambda) = \vec{p}_0 + \lambda \vec{a} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{r}(\mu) = \vec{r}_0 + \mu \vec{b}$$

gilt mit $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$d = \frac{|(\vec{r}_0 - \vec{p}_0) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} .$$

Beispiel 286:

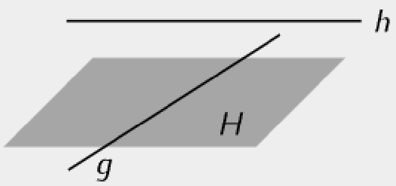
Gegeben sind zwei windschiefe Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}; \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist der Abstand zwischen g und h.

Lösung:

- **Schritt 1:** Stelle eine Hilfsebene H aus g und dem Richtungsvektor von h auf und wandle diese in Koordinatenfom um:



$$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad H: -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 31.$$

- **Schritt 2:** Berechne den Abstand zwischen H und Stützpunkt P(12 | 0 | 1) von Gerade h:

$$d(g; h) = d(\mathrm{P}; H) = \frac{|-2 \cdot 12 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 - 31|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{49}{7} = 7.$$

Der Abstand zwischen g und h beträgt 7 Längeneinheiten.

Schnitt von zwei Geraden

Definition 232:

Der Schnitt von zwei Geraden $g_1 : \vec{p}(\lambda) = \vec{p}_0 + \lambda\vec{a}_1$ und $g_2 : \vec{r}(\mu) = \vec{r}_0 + \mu\vec{a}_2$ wird folgendermaßen bestimmt:

(1) Gleichsetzen der Geradengleichungen in Parameterform ergibt LGS für λ und μ:

$$\vec{p}(\lambda) = \vec{r}(\mu) \;\Rightarrow\; \vec{p}_0 + \lambda\vec{a}_1 = \vec{r}_0 + \mu\vec{a}_2$$

(2) Lösen des Gleichungssystems

- eindeutige Lösung $\rightarrow$ Geraden haben einen Schnittpunkt
- unendlich viele Lösungen $\rightarrow$ Geraden sind identisch
- keine Lösung $\rightarrow$ Geraden sind parallel oder windschief

(3) Berechnung des Schnittwinkels

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} \qquad \text{mit } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90^\circ \tag{III.13}$$

Bemerkung 59:

Allgemein kann die Lage der beiden Geraden zueinander folgendermaßen klassifiziert werden:

	Abstand $h = 0$	Abstand $h \neq 0$
$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$	Geraden sind identisch	Geraden sind parallel
$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$	Geraden schneiden sich in einem Punkt	Geraden sind windschief

Beispiel 287:

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Schritte

- Setze Geradengleichungen gleich und löse das LGS:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcl} -1 + 2t &=& 1 \\ -2 + 2t &=& 3 + s \\ 6 - t &=& 11 + 2s \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcll} 2t & = & 2 & \Longrightarrow t = 1 \\ 2t - s & = & 5 & \Longrightarrow s = -3 \\ -t - 2s & = & 5 & \Longrightarrow s = -3 \end{array}$$

- Setze einen gewonnenen Parameter in die Geradengleichung ein und lies den Schnittpunkt S ab:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Schnittpunkt $S(1 \mid 0 \mid 5)$ gefunden.

Beispiel 288:

Bestimme den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden.

a

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Setze die Richtungsvektoren der Geraden ein. Berechne das Skalarprodukt und die Beträge der Vektoren.

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{2-2-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}}$$
$$= \frac{-2}{3 \cdot \sqrt{6}}$$

Verwende die Umkehrfunktion des Cosinus.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-2}{3 \cdot \sqrt{6}}\right) = 105{,}8^\circ$$

Dies ist augenscheinlich der größere der beiden Schnittwinkel. Der gesuchte (kleinere) Schnittwinkel ist also $180^\circ - 105.8^\circ = 74.2^\circ$.

Schnitt einer Geraden mit einer Ebene

Definition 233:

Mögliche Lagen einer Geraden zu einer Ebene sind

(1) Gerade liegt in der Ebene

Bedingung: 1. Richtungsvektor Gerade $\perp$ Normalenvektor Ebene $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$

2. für den Abstand Gerade/Ebene gilt $h = 0$

(2) Gerade ist parallel zur Ebene

Bedingung: 1. Richtungsvektor Gerade $\perp$ Normalenvektor Ebene $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$

2. für den Abstand Gerade/Ebene gilt $h \neq 0$

(3) Gerade schneidet Ebene

Bedingung: 1. Richtungsvektor Gerade $\angle$ Normalenvektor Ebene $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$

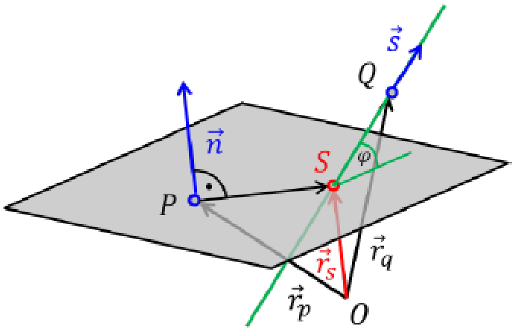
Für die Berechnung des Schnitts setzt man den Ortsvektor eines allgemeinen Geradenpunktes

$$g : \vec{r}(\lambda) = \vec{q} + \lambda\vec{a}$$

in die Koordinatenform der Ebene

$$E : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p}_0) = 0$$

ein. Dies ergibt eine Bestimmungsgleichung für den Parameter λ_S des (möglichen) Schnittpunktes.



Definition 234:

Im Falle eines echten Schnitts (Fall 3), lässt sich der Schnittpunkt zwischen einer Geraden und einer Ebene wie folgt berechnen:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_q + \lambda_s \vec{s} \quad \text{mit} \quad \lambda_s = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_q)}{\vec{n} \cdot \vec{s}}$$

Für den Schnittwinkel gilt

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}$$

Beispiel 289:

Bestimme jeweils die Schnittmenge von Ebene und Gerade.

$$E_1 : x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = -3 \text{ und } g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$E_1 : x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = -3$$

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Setze g in E_1 ein.

$$(3 + r \cdot 1) + (4 + r \cdot 1) - 2 \cdot (9 + r \cdot 3) = -3$$

Vereinfache soweit wie möglich und löse nach r auf.

$$-4 \cdot r - 11 = -3$$

$$\Rightarrow r = -2$$

Da für r ein reeller Wert rauskommt, schneidet die Gerade die Ebene in einem Punkt.

Setze r in g ein um den Schnittpunkt zu erhalten.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Gerade schneidet die Ebene im Punkt $S\,(1|2|3)$

$$\Rightarrow \quad E_1 \cap g = S\,(1|2|3)$$

Beispiel 290:

Bestimme den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} + 6 = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi) &= \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-6) \cdot (-1)}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\
&= \frac{12 + 6}{\sqrt{16 + 0 + 36} \cdot \sqrt{9 + 1 + 1}} \\
&= \frac{18}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{11}} = \frac{18}{2 \cdot \sqrt{143}}
\end{aligned}$$

Verwende die Umkehrfunktion des Cosinus um den Winkel φ zu bestimmen.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{18}{2 \cdot \sqrt{143}}\right) = 41.18^\circ$$

Berechne nun den gesuchten Schnittwinkel mit $\alpha = 90^\circ - \varphi$.

$$\alpha = 90.00^\circ - 41.18^\circ = 48.82^\circ$$

Schnitt zweier Ebenen

Definition 235:

Mögliche Lagen zweier Ebenen zueinander

(1) Ebenen sind identisch

Bedingung: 1. Normalenvektor Ebene 1 $\parallel$ Normalenvektor Ebene 2 $\quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

2. für den Abstand Ebene 1/Ebene 2 gilt $\quad h = 0$

(2) Ebenen sind parallel

Bedingung: 1. Normalenvektor Ebene 1 $\parallel$ Normalenvektor Ebene 2 $\quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

2. für den Abstand Ebene 1/Ebene 2 gilt $\quad h \neq 0$

(3) Ebenen schneiden sich

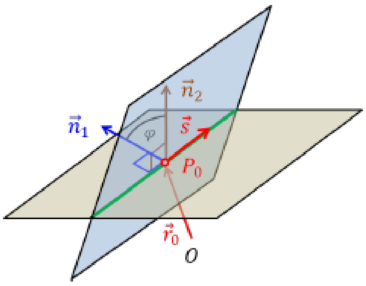
Bedingung: 1. Normalenvektor Ebene 1 $\angle$ Normalenvektor Ebene 2 $\quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$

Der mögliche Schnitt zwischen den Ebenen E_1 und E_2 kann z.B. bestimmt werden, indem man die beiden Ebenegleichungen

$$E_1 : n_{1,x}x + n_{1,y}y + n_{1,z}z = c_1$$

$$E_2 : n_{2,x}x + n_{2,y}y + n_{2,z}z = c_2$$

als zwei Gleichungen eines linearen Gleichungssystems für die Variablen x, y, z auffasst. Das Lösen des LGS führt zu einem der Fälle (1), (2) oder (3).



Definition 236:

Im Falle eines echten Schnitts (Fall 3) gilt für die Richtung $\vec{a}$ der Schnittgeraden

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Für den Schnittwinkel gilt

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Beispiel 291:

Untersuche die gegenseitige Lage der gegebenen Ebenen in Koordinatenform. Bestimme die Schnittgerade, falls sich die Ebenen schneiden.

$$E_1:\ -x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 = 1$$
$$E_2:\ x_1 + 4\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 7$$

Lösung:

$$\begin{array}{lccccccc} (\mathrm{I}) & -x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ (\mathrm{II}) & x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 7 \end{array}$$

Löse eine der beiden Gleichungen nach einer der Variablen auf, z.B. die erste Gleichung nach x_3.

$$(\mathrm{I})\quad -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \qquad |+x_1 - 2x_2$$
$$(\mathrm{I'})\qquad x_3 = 1 + x_1 - 2x_2$$

Setze dies in die Gleichung (II) ein.

(I′) in (II):

$$(\mathrm{II})\quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7$$

$\downarrow$ Setze $x_3 = 1 + x_1 - 2x_2$ ein.

$$x_1 + 4x_2 + 3\cdot(1 + x_1 - 2x_2) = 7$$

$\downarrow$ Multipliziere die Klammer aus.

$$x_1 + 4x_2 + 3 + 3x_1 - 6x_2 = 7$$

$\downarrow$ Fasse zusammen.

$$4x_1 - 2x_2 + 3 = 7 \qquad |-3$$

$\downarrow$ Vereinfache die Gleichung, indem du die konstanten Terme auf dieselbe Seite bringst und zusammenrechnest.

$$4x_1 - 2x_2 = 4 \qquad |-4x_1$$

$\downarrow$ Löse diese Gleichung jetzt nach einer der Variablen auf, zum Beispiel nach x_2.

$$-2x_2 = 4 - 4x_1 \qquad |:(-2)$$
$$(\mathrm{II'})\qquad x_2 = -2 + 2x_1$$

Setze dies wiederum in (I′) ein.

(II′) in (I′):

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}') \quad x_3 &= 1 + x_1 - 2x_2 \\
&\downarrow \text{ Setze } x_2 = -2 + 2x_1 \text{ ein.} \\
x_3 &= 1 + x_1 - 2 \cdot (-2 + 2x_1) \\
&\downarrow \text{ Löse die Klammer auf.} \\
x_3 &= 1 + x_1 + 4 - 4x_1 \\
&\downarrow \text{ Fasse zusammen.} \\
x_3 &= 5 - 3x_1
\end{aligned}
$$

Das ist die neue Gleichung, die du statt Gleichung (I′) nun erhalten hast.

$\Rightarrow (\mathrm{I}'') \quad x_3 = 5 - 3x_1$

Da das Gleichungssytem zwar drei Unbekannte enthält, aber nur aus zwei Gleichungen besteht, ist es **unterbestimmt.** Das heißt, es wird keine eindeutig bestimmte Lösung dazu geben.

Du hast jedoch mit den Gleichungen (II′) und (I″) das Gleichungssystem so umgeformt, dass du x_2 und x_3 in Abhängigkeit von x_1 dargestellt hast.

$$
\begin{array}{llcrcl}
(\mathrm{II}') & x_2 & = & -2 & + & 2x_1 \\
(\mathrm{I}'') & x_3 & = & 5 & - & 3x_1
\end{array}
$$

Betrachte nun x_1 als Parameter, der einen beliebigen reellen Wert annehmen kann, und wähle dafür geeigneter Weise irgendeinen für Parameter "üblichen" Buchstaben als Bezeichnung.

Setze $t = x_1$. Dadurch kannst du x_1, x_2 und x_3 in Abhängigkeit von t ausdrücken.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= t \\
x_2 &= -2 + 2t \\
x_3 &= 5 - 3t
\end{aligned}
$$

Damit kannst du die Lösungsmenge angeben.

$\mathbb{L} = \{(t| -2 + 2t|5 - 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Gleichung der Schnittgerade angeben

Mit Vektoren geschrieben, sieht die Lösungsmenge folgendermaßen aus:

$$
g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ -2+2t \\ 5-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

Antwort: Die gesuchte Schnittgerade der beiden Ebenen hat die Gleichung:

$$
g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

Lineare Abbildungen

Was ist eine Abbildung?

Wir haben die Struktur der Vektorräume kennengelernt und verschiedene Eigenschaften von ihnen untersucht.

Nun wollen wir Vektorräume nicht nur isoliert voneinander betrachten, sondern auch Abbildungen zwischen ihnen.

Manche dieser Abbildungen vertagen sich gut mit der zugrundeliegenden Vektorraumstruktur und werden deswegen lineare Abbildungen oder Vektorraumhomomorphismen genannt.

Dass wir solche strukturerhaltenden Abbildungen untersuchen, ist eine typische Vorgehensweise der Algebra.

Für viele algebraische Strukturen wie Gruppen, Ringe oder Körper untersucht die Algebra die dazugehörigen strukturerhaltenden Abbildungen zwischen den jeweiligen algebraischen Strukturen – Gruppenhomomorphismen, Ringhomomorphismen und Körperhomomorphismus.

Bei Vektorräumen sind die strukturerhaltenden Abbildungen die linearen Abbildungen bzw. die Vektorraumhomomorphismen.

Definition 237:

Seien also V und W zwei Vektorräume. Wann ist eine Abbildung

$$f : V \to W$$

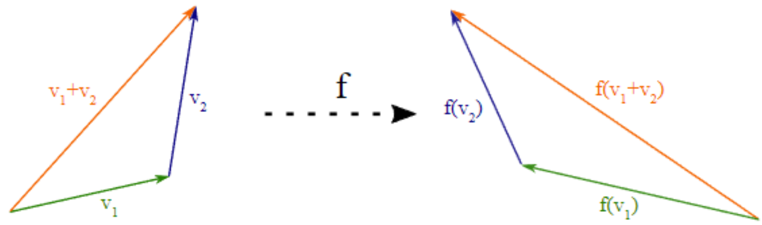
strukturerhaltend bzw. verträgt sich gut mit den zugrundeliegenden Vektorraumstrukturen in V und W?

Wiederholen wir hierzu, was die Vektorraumstruktur ausmacht: Vektorräume sind Strukturen, in denen zwei Operationen möglich sind:

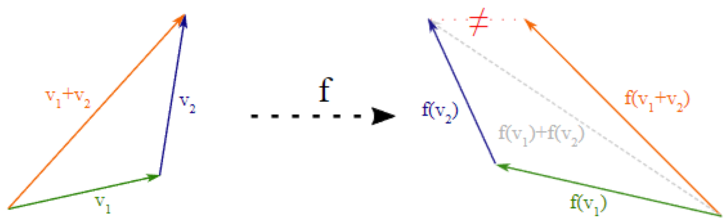
- Addition von Vektoren: Zwei Vektoren können miteinander addiert werden, wobei die Addition der Addition von Zahlen in ihren Eigenschaften ähnelt.
- Skalare Multiplikation: Vektoren können mit einem Skalierungsfaktor aus einem Körper skaliert (gestaucht, gestreckt oder gespiegelt) werden.

Verträglichkeit der Addition

Diese Gleichung beschreibt die charakteristische Eigenschaft der linearen Abbildung, verträglich zur Vektoraddition zu sein. Wir können sie auch gut für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ visualisieren. Eine Abbildung verträgt sich genau dann mit der Addition, wenn das durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 +_V \boldsymbol{v}_2$ gegebene Dreieck im Definitionsbereich durch die Abbildung erhalten bleibt. Sprich: Auch die drei Vektoren $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$ und $f(\boldsymbol{v}_3) = f(\boldsymbol{v}_1 +_V \boldsymbol{v}_2)$ bilden ein (Additions-)Dreieck:



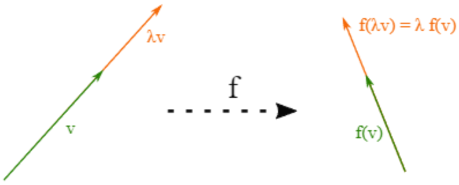
Wenn f sich nicht mit der Addition verträgt, gibt es Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ mit $f(\boldsymbol{v}_1 +_V \boldsymbol{v}_2) \neq f(\boldsymbol{v}_1) +_W f(\boldsymbol{v}_2)$. Das durch $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 +_V \boldsymbol{v}_2$ erzeugte Dreieck bleibt dann nicht erhalten, weil die Dreiecksseite $\boldsymbol{v}_1 +_V \boldsymbol{v}_2$ des Ausgangsdreiecks nicht auf die Dreiecksseite $f(\boldsymbol{v}_1) +_W f(\boldsymbol{v}_2)$ des Zieldreiecks abgebildet wird:



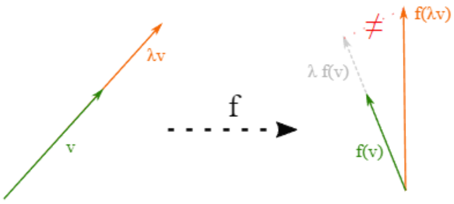
Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation

$$f(\lambda \cdot_v v) = \lambda \cdot_w f(v)$$

Für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bedeutet dies, dass ein skalierter Vektoren $\lambda \cdot_v v$ auf die entsprechende Skalierung $\lambda \cdot_w f(w)$ des Bildvektors abgebildet wird:



Wenn eine Abbildung nicht verträglich zur skalaren Multiplikation ist, so gibt es einen Vektor v und einen Skalierungsfaktor λ, so dass $f(\lambda \cdot_v v) \neq \lambda \cdot_w f(w)$ ist:



Erklärung der Eigenschaften einer linearen Abbildung

Die charakteristischen Gleichungen der linearen Abbildung sind $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ und $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$. Was bedeuten diese beiden Eigenschaften intuitiv? Nach der Additivitätseigenschaft ist es egal, ob man v_1 und v_2 zuerst addiert und dann abbildet oder ob man beide Vektoren erst abbildet und dann addiert. Beide Wege führen zum selben Ergebnis:

$$\underbrace{f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\text{Addition}})}_{\text{Funktionsabbildung}} = \underbrace{\underbrace{f(v_1)}_{\text{Funktionsabbildung}} + \underbrace{f(v_2)}_{\text{Funktionsabbildung}}}_{\text{Addition}}$$

Was besagt die Homogenitätseigenschaft? Unabhängig davon ob man zuerst v mit λ multipliziert und dann abbildet oder den Vektor erst abbildet und dann mit λ multipliziert, ist das Ergebnis das Gleiche:

$$\underbrace{f(\underbrace{\lambda \cdot v}_{\text{skalare Multiplikation}})}_{\text{Funktionsabbildung}} = \underbrace{\lambda \cdot \underbrace{f(v)}_{\text{Funktionsabbildung}}}_{\text{skalare Multiplikation}}$$

Die charakteristischen Eigenschaften der linearen Abbildungen verdeutlichen also, dass die Reihenfolge der Funktionsabbildung und der Vektorraumoperationen egal ist.

Charakterisierung

Definition 238:

Lineare Abbildungen sind genau die Abbildungen, die eine Linearkombination auf eine Linearkombination abbilden. Dabei müssen die beiden oben genannten Eigenschaften gültig sein.

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \\ f(\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot f(v) \end{aligned}$$

Beispiel 292:

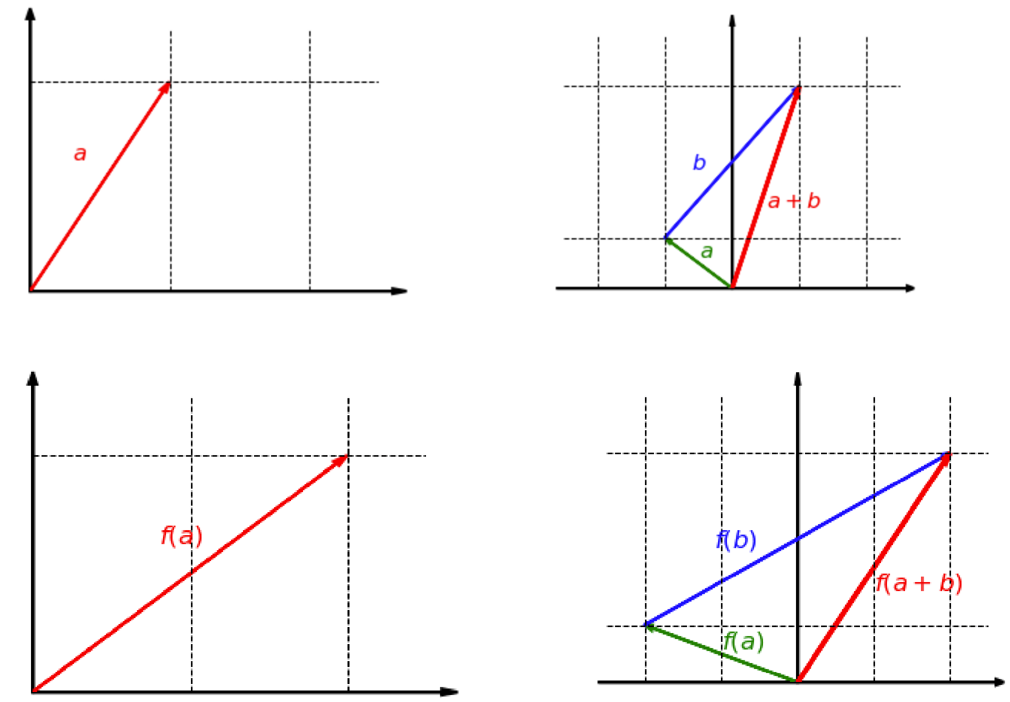
Wir können auf eine Linearkombination wie $3 \cdot u + 5 \cdot w - 2 \cdot z$ für Vektoren u, w und z aus V die beiden obigen Formeln schrittweise anwenden. So können wir diese Linearkombination aus der Funktion schrittweise „herausziehen“:

$$\begin{aligned} & f(3 \cdot u + 5 \cdot w - 2 \cdot z) \\ & \downarrow \text{Additivität von } f \\ = \; & f(3 \cdot u) + f(5 \cdot w - 2 \cdot z) \\ & \downarrow \text{Additivität von } f \\ = \; & f(3 \cdot u) + f(5 \cdot w) + f(-2 \cdot z) \\ & \downarrow \text{Homogenität von } f \\ = \; & 3 \cdot f(u) + 5 \cdot f(w) - 2 \cdot f(z) \end{aligned}$$

Die Linearkombination $3 \cdot u + 5 \cdot w - 2 \cdot z$ wird durch f auf $3 \cdot f(u) + 5 \cdot f(w) - 2 \cdot f(z)$ abgebildet und bleibt damit in ihrer Struktur erhalten. Ähnlich verhält es sich bei anderen Linearkombinationen. Denn durch die Eigenschaft $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ sind Summen und durch die Eigenschaft $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ sind skalare Multiplikationen streckbar. Wir erhalten damit folgende alternative Charakterisierung der linearen Abbildung:

Beispiel 293:

Streckung in x-Richtung



Allgemein gilt:

Definition 239:

$\vec{x}^* = A \cdot \vec{x}$

A: Abbildungsmatrix

$\vec{x}$: Vektor im Originalvektorraum

$\overrightarrow{x^*}$: Bildvektor im Bildvektorraum

Allgemeine Vorgehensweise

- Allgemeine Matrix bestimmen
- Zu erfüllende Gleichungen aufstellen und mit Hilfe eines LGS die Koeffizienten der Matrix berechnen.

Definition 240:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Typ(2{,}1) = Typ(2{,}2) \cdot Typ(2{,}1)$$

Beispiel 294:

Der Punkt P(1|3) soll auf P'(10|6) und der Punkt Q(2|1) auf den Punkt Q'(5|2) abgebildet werden.

Die Matrix soll folgendermaßen aussehen:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Es muss gelten:

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

1 $a + 3b = 10$
$c + 3d = 6$

2 $2a + b = 5$
$2c + d = 2$

$a + 3b = 10 \quad (-2)$
$2a + b = 5$
$-5b = -15$
$b = 3$
$a = 1$

$c + 3d = 6 \quad (-2)$
$2c + d = 2$
$-5d = -10$
$d = 2$
$c = 0$

$\Rightarrow$ Abbildungsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Probe: $\vec{x}^* = A \cdot \vec{x}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren und Eigenwerte

Def: Alle Vektoren $\vec{v}$, die durch eine quadratische Matrix auf ein Vielfaches λ von sich selbst abgebildet werden, nennt man "Eigenvektoren".
Sie erfüllen folgende Gleichung:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Dabei ist: λ "Eigenwert", beschreibt die Längenveränderung

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren:
- Lösen der "charakteristischen Gleichung
  $$|A - \lambda E| = 0$$
  Das Ergebnis sind die Eigenwerte λ_i
- Einsetzen der Eigenwerte in das homogene LGS
  $$(A - \lambda_i E)\vec{v}_i = \vec{0}$$
  Für jeden Eigenwert ergibt sich ein Eigenvektor als Lösung.

Beispiel: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden linearen Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 \\ 2 & (0-\lambda) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} \begin{matrix} (3-\lambda) & -1 \\ 2 & (0-\lambda) \\ -2 & 2 \end{matrix}$$

$$= (3-\lambda)\cdot(0-\lambda)\cdot(-1-\lambda) + 2(-1-\lambda)$$

$$= (-3\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda) - 2 - 2\lambda$$

$$= 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - 2 - 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

Diese kubische Gleichung hat die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \text{Eigenwerte der Matrix } A$$

Eigenvektoren berechnen:

Für $\lambda_1 = 1$ in die char. Gleichg einsetzen

$$\begin{pmatrix} (3-1) & -1 & 0 \\ 2 & (0-1) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Auf die Dreiecksform bringen
(Gaußsche Algorithmus)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{tauschen}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{matrix}$$

Das übrig gebliebene Gleichungssystem ist unterbestimmt (zwei Gleichgen, drei Variablen).
Es gibt also unendlich viele Lösungen
Eine spezielle Lösung erhalten wir, wenn wir für eine der Variablen einen bel. Wert einsetzen.

Wir setzen $x=1$ in die 1. Gleichung ein und erhalten:

$$2\cdot 1 - y = 0 \quad \Rightarrow y = 2$$

Wir setzen $y=2$ in die 2. Gleichung ein und erhalten

$$2 - 2z = 0 \Rightarrow z = 1$$

Damit ist der Eigenvektor

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_2 = 2$ in die char. Gleichung einsetzen

$$\begin{pmatrix} (3-2) & -1 & 0 \\ 2 & (0-2) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Auf Dreiecksform bringen (Gauß'scher Algorithmus)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \; (\cdot 2) \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - y = 0 \\ -3z = 0 \end{matrix}$$

Das übrig gebliebene Gleichungssystem ist unterbestimmt (zwei Gleichungen, drei Variablen)

Es gibt also unendlich viele Lösungen
Aus der 2. Gleichung folgt $z=0$

Eine spezielle Lösung erhalten wir demnach, wenn wir für x oder für y einen bel. Wert einsetzen.

Wir setzen $x=1$ in die erste Gleichung ein und erhalten:

$$1-y=0 \quad \Rightarrow y=1$$

Damit ist der Eigenvektor

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Für $\lambda_3=-1$ in die char. Gleichung einsetzen.

$$\begin{pmatrix}3-(-1) & -1 & 0\\ 2 & 0-(-1) & 0\\ -2 & 2 & (-1-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Auf Dreiecksform bringen (Gauß'scher Algorithmus)

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad \cdot(-0{,}5)\,+ \quad (\cdot 0{,}5)\,+$$

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 1{,}5 & 0\\ 0 & 3/2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}4x-y&=0\\ 1{,}5y&=0\\ 1{,}5y&=0\end{aligned}$$

Aus den obigen drei Gleichungen folgt, dass $x=0$ und $y=0$ gilt

Die Variable z hingegen kann einen bel. Wert annehmen.

Es gibt wieder unendlich viele Lösungen.

Eine spezielle Lösung erhalten wir, indem wir z.B. $z=1$ setzen.

Damit ist der Eigenvektor

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung:

Die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -1$

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehört der Eigenvektor

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ gehört der Eigenvektor

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Eigenwert $\lambda_3 = -1$ gehört der Eigenvektor

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und alle seine Vielfachen.

Hat man alle Eigenvektoren berechnet, lässt sich ganz einfach der Eigenraum bestimmen.