Aufgabensammlung Mathematik

WIRTSCHAFTSINGENIEURWESEN –
INTERNATIONAL PROJECT ENGINEERING

Dipl. Mathematiker (FH) Roland Geiger
Rosenstr. 23
72631 Aichtal
cs.geiger@t-online.de
www.cs-geiger.de

Inhaltsverzeichnis

Allgemeines

Prüfung

- Dauer 3 Stunden (schriftlich)
- 9 Aufgaben (inhaltliche Gestaltung je nach Gewichtung in der Vorlesung)

Zugelassene Hilfsmittel

- Kein Taschenrechner
- Handschriftlich erstellte Formelsammlung (max. 5 Blätter) und
- Das Handbuch der Funktionen

Lehrbücher

- Lothar Papula
  Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Verlag Vieweg und Teubner, Wiesbaden, 12. Auflage, 2009.
- Jürgen Koch, Martin Stämpfle
  Mathematik für das Ingenieursstudium, Hanser Verlag München, 2010.
- Jan van de Craats, Rob Bosch
  Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- Detlef Wille
  Mathematik Vorkurs für Studienanfänger, Binomi-Verlag Hannover 2010.
- Gerhard Merziger, Michael Holz, Detlef Wille
  Repetitorium Elementare Mathematik 1+2, Binomi-Verlag 2010.
- Hans Rudolf Schwarz, Norbert Köckler
  Numerische Mathematik, Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- Mathematik Online-Kurs
  Link: www.reutlingen-university.de/mathekurs

Zulassungstest Mathematik

Näheres finden im Relax zu dieser Vorlesung

Grundlagen

Aussagenlogik und Mengenalgebra

Aufgabe 1:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, wenn p und q wahr sind?

(a) $p \wedge \overline{q}$

(b) $\overline{p} \wedge q$

(c) $\overline{(p \wedge q)}$

(d) $p \Rightarrow q$

(e) $p \vee \overline{q}$

(f) $\overline{(\overline{p} \wedge q)}$

(g) $(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge \overline{p}$

(h) $\overline{(p \Rightarrow q)}$

Lösung:

Die Aussagen (d),(e),(f) sind wahr.

Aufgabe 2:

Welche der folgenden Implikationen sind für beliebige reelle Zahlen a, b, c, d stets wahr?

(a) $(a > b) \Rightarrow (a^2 > b^2)$

(b) $(a > b > c > 0) \Rightarrow (a^2 > ab > b^2 > bc > c^2)$

(c) $((a-b)^2 + 2ab > a^2 + b^2) \Rightarrow (a^2 > 12ab)$

(d) $(a > b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a - c > b - d)$

(e) $(ab > cd) \Rightarrow (\frac{a}{d} > \frac{c}{b}) \quad (b, d \neq 0)$

Lösung:

(a) ist falsch, man nehme z.B. $a = 0, b = -1$ dann folgt $a > b \not\Rightarrow a^2 > b^2$.
(b) ist wahr. Sei $a = b+x$ und $b = c+y$ mit $x, y > 0$. Dann gilt, dass $a^2 = a \cdot a = a \cdot (b+x) = ab+ax \overset{a,x>0}{>} ab$ und $ab = (b+x)(b) = b^2+bx \overset{b,x>0}{>} b^2$ und $b^2 = b \cdot b = b \cdot (c+y) = bc+by \overset{b,y>0}{>} bc$, sowie $bc = (c+y) \cdot c = c^2 + yc \overset{y,c>0}{>} c^2$.
(c) ist wahr, weil $(a-b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 > a^2 + b^2$ eine falsche Aussage ist.
(d) ist wahr. Sei $a = b + x$ und $d = c + y$ mit $x, y > 0$. Dann gilt $a - c = b + x - c \overset{x,y>0}{>} b - y - c = b - d$.
(e) ist falsch. Sei $a = b = c = -d = 1$, dann gilt zwar $ab = 1 > -1 = cd$ aber es folgt $\frac{a}{d} = -1 < 1 = \frac{c}{b}$.

Aufgabe 3:

Gegeben seien die folgenden Aussagen:

A: Es ist eiskalt

B: Es schneit.

Drücken Sie die nachfolgenden Sätze als aussagenlogische Formeln mit Hilfe der Aussagenvariablen A und B aus.

(a) Es ist eiskalt und es schneit.

(b) Es ist eiskalt, aber es schneit nicht.

(c) Es ist nicht eiskalt und es schneit nicht.

(d) Entweder es schneit oder es ist eiskalt (oder beides).

Lösung:

(a) $A \wedge B$

(b) $A \wedge \neg B$

(c) $\neg A \wedge \neg B$

(d) $A \vee B$

Aufgabe 4:

Gegeben sind die fünf Mengen: $A = \{3{,}5{,}7{,}12{,}14{,}17{,}19{,}23\}$,

$B = \{3{,}5{,}17\}$,

$C = \{12{,}14{,}17{,}24\}$,

$D = \{5{,}7{,}19\}$,

$E = \{7{,}12{,}19\}$.

Beurteile die folgenden Aussagen: a) $B \subset A$ b) $C \subseteq A$ c) $E \subset A$ d) $B \subset C$ e) $E \subset C$

Lösung:

a) wahr

b) falsch

c) wahr

d) falsch

e) falsch

Teilaufgabe a)

Diese Aussage ist wahr, da alle Elemente von B auch in A enthalten sind.

Teilaufgabe b)

Diese Aussage ist falsch, da C die Zahl 24 enthält, die Menge A enthält diese aber nicht. Außerdem sind die beiden Mengen nicht gleichmächtig, deswegen ist eine unechte Teilmenge auch nicht möglich.

Teilaufgabe c)

Diese Aussage ist wahr, da alle Elemente von E auch in A enthalten sind.

Teilaufgabe d)

Diese Aussage ist falsch, da B und C nur die 17 als gemeinsames Element haben.

Teilaufgabe e)

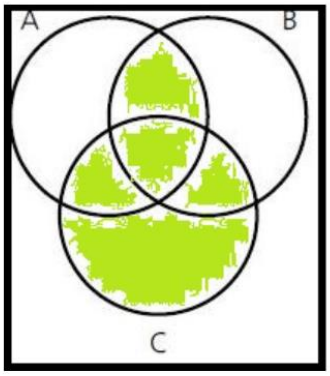
Diese Aussage ist falsch, da die beiden Mengen nur die Zahl 12 als gemeinsames Element haben.

Aufgabe 5:

Schraffieren Sie die gegebene Menge in einem Venn-Diagramm!

$(A \cap B) \cup C$

Lösung:

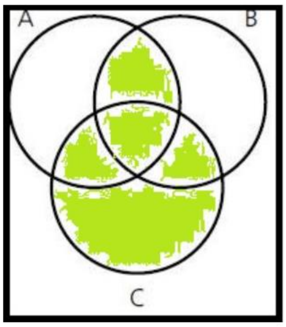


Aufgabe 6:

Schraffieren Sie die gegebene Menge in einem Venn-Diagramm!

$(A \cup C) \cap (B \cup C)$

Lösung:

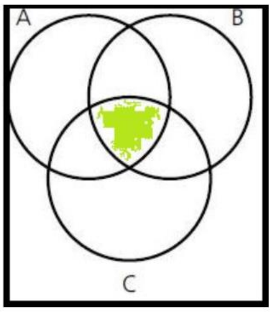


Aufgabe 7:

Schraffieren Sie die gegebene Menge in einem Venn-Diagramm!

$$(A \cap B) \cap C$$

Lösung:

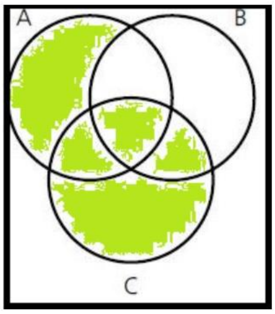


Aufgabe 8:

Schraffieren Sie die gegebene Menge in einem Venn-Diagramm!

$$(A \setminus B) \cup C$$

Lösung:



Aufgabe 9:

Geben Sie die folgenden Aussagen in intervallschreibweise an.

a) Alle Zahlen die grösser als 3 sind

b) Alle Zahlen die kleiner oder gleich groß wie 5 sind

Lösung:

a) $\{x|x > 3\}$
b) $\{x|x \leq 5\}$

Aufgabe 10:

Geben Sie folgende Aussagen in intervallschreibweise an

a) Offenes Intervall von 3 bis 4

b) Rechts halboffenes Intervall von 9 bis 11

c) Geschlossenes Intervall von 0 bis 8

d) Links halboffenes Intervall von 7 bis 12

e) Das Intervall mit allen Zahlen grösser oder gleich 6

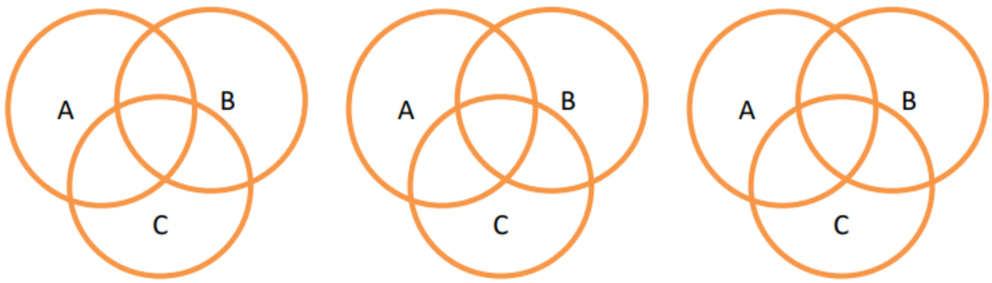
f) Das Intervall mit allen Zahlen kleiner als 1

Lösung:

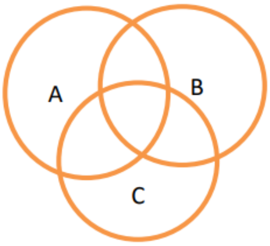
a) (3,4)
b) [9,11)
c) [0,8]
d) (7,12]
e) $(6, \infty)$
f) $(-\infty, 1)$

Aufgabe 11:

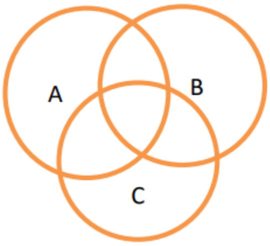
Schraffieren Sie die angegebenen Mengen



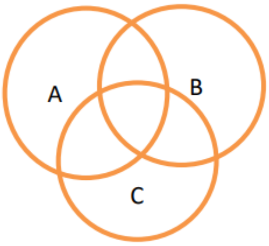
$(A \cap B)\backslash C$ $A \cap (B \cap C)$ $A \cup (B\backslash C)$



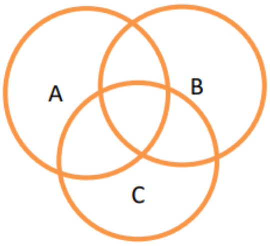
$(B\backslash C)\backslash A$



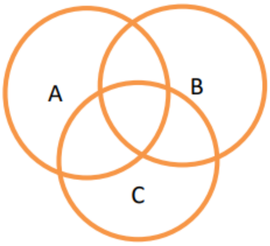
$(B\backslash C) \cup (C\backslash A)$



$((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C))\backslash(A \cap B \cap C)$

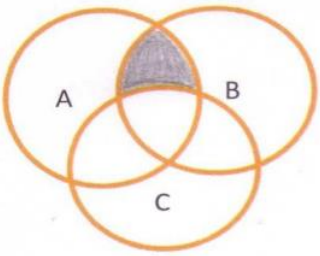


$C \cup ((A \cap B)\backslash C)$

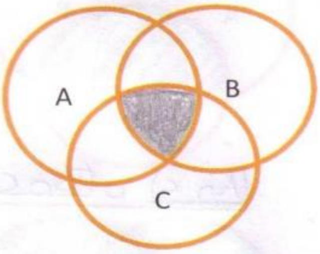


$((((A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B))\backslash(B \cap C))\backslash(A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$

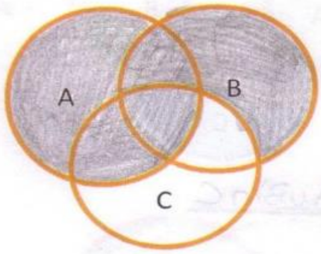
Lösung:



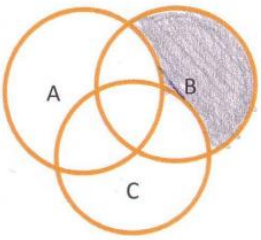
$(A \cap B)\backslash C$



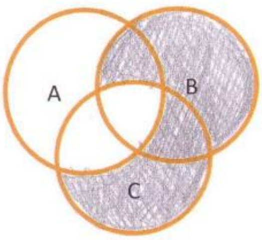
$A \cap (B \cap C)$



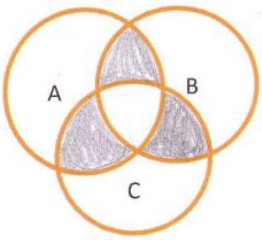
$A \cup (B\backslash C)$



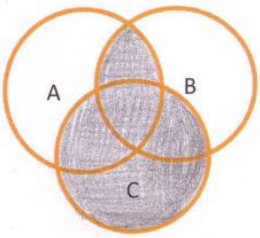
$(B\backslash C)\backslash A$



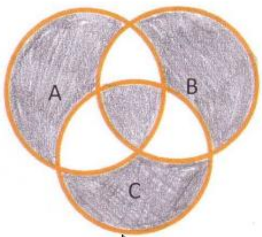
$(B\backslash C) \cup (C\backslash A)$



$((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C))\backslash(A \cap B \cap C)$



$C \cup ((A \cap B)\backslash C)$



$((((A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B))\backslash(B \cap C))\backslash(A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$

Summen-, Produktzeichen, Binomialkoeffizient und Fakultät

Aufgabe 12:

Berechnen Sie folgende Summe.

$$\sum_{i=3}^{7}(i)$$

Lösung:

$$\sum_{i=3}^{7}(i) = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$$

Aufgabe 13:

Berechnen Sie folgende Summe.

$$\sum_{i=2}^{6}(i-3)$$

Lösung:

$$\sum_{i=2}^{6}(i-3) = (2-3) + (3-3) + (4-3) + (5-3) + (6-3)$$

$$= -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

Aufgabe 14:

Berechnen Sie folgende Summe.

$$\sum_{i=-1}^{3}(i+2)^2$$

Lösung:

$$\sum_{i=-1}^{3}(i+2)^2 = (-1+2)^2 + (0+2)^2 + (1+2)^2 + (2+2)^2 + (3+2)^2$$

$$= 1 + 4 + 9 + 19 + 25 = 58$$

Aufgabe 15:

Berechnen Sie folgendes Produkt.

$$\prod_{i=2}^{5} i$$

Lösung:

$$\prod_{i=2}^{5} i = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie folgendes Produkt.

$$\prod_{i=2}^{5} (i+1)^2$$

Lösung:

$$\prod_{i=2}^{5} (i+1)^2 = (2+1)^2 \cdot (3+1)^2 \cdot (4+1)^2 \cdot (5+1)^2$$

$$= 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 = 309.600$$

Aufgabe 17:

Berechnen Sie folgendes Produkt.

$$\prod_{i=2}^{5} (i-1)$$

Lösung:

$$\prod_{i=2}^{5} (i-1) \quad = (2-1) \cdot (3-1) \cdot (4-1) \cdot (5-1)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Aufgabe 18:

Berechnen Sie folgendes Produkt.

$$\prod_{i=2}^{5}(i-i^2)^2$$

Lösung:

$$\prod_{i=2}^{5}(i-i^2)^2=(2-2^2)^2\cdot(3-3^2)^2\cdot(4-4^2)^2\cdot(5-5^2)^2$$

$$=4\cdot 36\cdot 144\cdot 400=8.294.400$$

Aufgabe 19:

Berechnen Sie die folgende Fakultät.

$6!$

Lösung:

$6!=720$

Aufgabe 20:

Berechnen Sie folgenden Binomialkoeffizienten.

$$\binom{4}{0}$$

Lösung:

$$\binom{4}{0}=1$$

Aufgabe 21:

Berechnen Sie folgenden Binomialkoeffizienten.

$$\binom{7}{2}$$

Lösung:

$$\binom{7}{2}=24$$

Ausmultiplizieren von Ausdrücken

Aufgabe 22:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$$\left(\frac{2}{3}x - 2\right) \cdot (x + 3)$$

Lösung:

$$\left(\frac{2}{3}x - 2\right) \cdot (x + 3) = \frac{2}{3}x^2 + 2x - 2x - 6 = \frac{2}{3}x^2 - 6$$

Aufgabe 23:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) \cdot (x + 5)$$

Lösung:

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) \cdot (x + 5)$$

$$= \frac{1}{2}x \cdot x + \frac{1}{2}x \cdot 5 - \frac{5}{2} \cdot x - \frac{5}{2} \cdot 5$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x - \frac{25}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{25}{5}$$

Aufgabe 24:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$$5a(8a - 11b) - b(9a - 5b)$$

Lösung:

$$5a(8a - 11b) - b(9a - 5b) = 40a^2 - 55ab - 9ab + 5b^2 = 40a^2 - 64ab + 5b^2$$

Aufgabe 25:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$$20xy - 4y[2x - x(3y + 5x)]$$

Lösung:

$$20xy - 4y[2x - x(3y + 5x)]$$

$$20xy - 4y[2x - 3xy - 5x^2]$$

$$= 20xy - 8xy + 12xy^2 + 20x^2y = 12xy + 12xy^2 + 20x^2y$$

Aufgabe 26:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$56a + 83b - 2(23a - 37b) - (67a - 23b)$

Lösung:

$56a + 83b - 2(23a - 37b) - (67a - 23b) = 56a + 83b - 46a + 74b - 67a + 23b$

$= -57a + 180b$

Aufgabe 27:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$(-5a) \cdot (10a - 12x) - (3a - 7ax)$

Lösung:

$(-5a) \cdot (10a - 12x) - (3a - 7ax) = -50a^2 + 60ax - 3a + 7ax = -50a^2 + 67ax - 3a$

Aufgabe 28:

Klammern Sie so viel wie möglich aus.

$45pq + 27p^2q^2$

Lösung:

$45pq + 27p^2q^2 = 9pq(5 + 3pq)$

Aufgabe 29:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$(2-x)\cdot(3x-4)-(x-1)\cdot(2x+3)-5x(2-x)$

Lösung:

$(2-x)\cdot(3x-4)-(x-1)\cdot(2x+3)-5x(2-x)$

$=6x-8-3x^2+4x-(2x^2+3x-2x-3)-10x+5x^2$

$=10x-8-3x^2-(2x^2+x-3)-10x+5x^2$

$=10x-8-3x^2-2x^2-x+3-10x+5x^2$

$=-x-5$

Aufgabe 30:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$(2-3x)\cdot(4+3x)-(x-4)\cdot(6x-2)+5x(5x-4)$

Lösung:

$(2-3x)\cdot(4+3x)-(x-4)\cdot(6x-2)+5x(5x-4)$

$=8+6x-12x-9x^2-(6x^2-2x-24x+8)+25x^2-20x$

$=8+6x-12x-9x^2-6x^2+2x+24x-8+25x^2-20x$

$=10x^2$

Aufgabe 31:

Klammern Sie so viel wie möglich aus.

$44ab-88ac$

Lösung:

$44ab-88ac=44a(b-2c)$

Aufgabe 32:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$(2x-y)\cdot(y+3x)-(x+2y)\cdot(6x-y)-(y-13x)\cdot y$

Lösung:

$(2x-y)\cdot(y+3x)-(x+2y)\cdot(6x-y)-(y-13x)\cdot y$

$=2xy+6x^2-y^2-3xy-(6x^2-xy+12xy-2y^2)-y^2+13xy$

$=2xy+6x^2-y^2-3xy-6x^2+xy-12xy+2y^2-y^2+13xy$

$=xy$

Aufgabe 33:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und fassen Sie zusammen.

$(2a - 3b) \cdot (b - 2a) - (a + 4b) \cdot (3a - b) + (a + b) \cdot (7a - b)$

Lösung:

$(2a - 3b) \cdot (b - 2a) - (a + 4b) \cdot (3a - b) + (a + b) \cdot (7a - b)$

$= 2ab - 4a^2 - 3b^2 + 6ab - (3a^2 - ab + 12ab - 4b^2) + 7a^2 - ab + 7ab - b^2$

$= 8ab - 4a^2 - 3b^2 - 3a^2 + ab - 12ab + 4b^2 + 7a^2 - ab + 7ab - b^2$

$= 3ab$

Aufgabe 34:

Klammern Sie so viel wie möglich aus.

$11ab - 77ac$

Lösung:

$11ab - 77ac = 11a(b - 7c)$

Bruchrechnung

Aufgabe 35:

Berechnen Sie folgenden Bruch in Dezimaldarstellung um.

$$7\frac{4}{5}$$

Lösung:

$$7\frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{35}{5} + \frac{4}{5} = \frac{39}{5}$$

Aufgabe 36:

Berechnen Sie folgende Dezimalzahl in einen Bruch um.

$0{,}84$

Lösung:

$$0{,}84 = \frac{84}{100} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$$

Aufgabe 37:

Berechnen Sie folgenden Bruch in Dezimaldarstellung um.

$$17\frac{3}{8}$$

Lösung:

$$17\frac{3}{8} = \frac{17 \cdot 8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{136}{8} + \frac{3}{8} = \frac{139}{8}$$

Aufgabe 38:

Vergleichen Sie die folgenden Brüche ihrer Größe nach und schreiben es als a<b, a>b oder a=b.

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{5}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{10} > \frac{4}{10}$$

Aufgabe 39:

Addieren Sie folgende Brüche und kürzen Sie wenn es geht.

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{8}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{8+10}{16}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$$

Aufgabe 40:

Subtrahieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist. Schreiben Sie das Ergebnis als Bruch und als gemischten Bruch.

$$7\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}$$

Lösung:

$$7\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}=\frac{15}{2}-\frac{13}{4}=\frac{30}{4}-\frac{13}{4}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$$

Aufgabe 41:

Multiplizieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist.

$$\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot 3$$

Lösung:

$$\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot 3=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$$

Aufgabe 42:

Dividieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist.

$$3\frac{1}{4}:\frac{1}{4}$$

Lösung:

$$3\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=\frac{13}{4}:\frac{1}{4}=\frac{13}{4}\cdot\frac{4}{1}=13$$

Aufgabe 43:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$\frac{3}{4}+\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{4}{21}:\frac{1}{7}-\frac{5}{12}$$

Lösung:

$$\frac{3}{4}+\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{4}{21}:\frac{1}{7}-\frac{5}{12}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{4}{21}\cdot\frac{7}{1}-\frac{5}{12}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{12}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9+8-5}{12}=\frac{12}{12}=1$$

Aufgabe 44:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und Kürzen Sie möglich.

$$\left(2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-1\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

Lösung:

$$\left(2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-1\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{3}{3}\right)=-\frac{7}{3}$$

Aufgabe 45:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$1\frac{1}{3}:1\frac{13}{15}\cdot\left(6\frac{2}{3}-5\frac{4}{15}\right)$$

Lösung:

$$1\frac{1}{3}:1\frac{13}{15}\cdot\left(6\frac{2}{3}-5\frac{4}{15}\right)=\frac{4}{3}:\frac{28}{15}\cdot\left(\frac{20}{3}-\frac{79}{15}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{28}\cdot\left(\frac{100-79}{15}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{21}{15}\right)=\frac{15}{15}=1$$

Aufgabe 46:

Berechnen Sie folgenden Doppelbruch und kürzen Sie möglich.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$$

Aufgabe 47:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$\left[2{,}75-0{,}25:\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\right)\right]\cdot 1{,}6+0{,}4$$

Lösung:

$$\left[2{,}75-0{,}25:\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\right)\right]\cdot 1{,}6+0{,}4=\left[\frac{11}{4}-\frac{1}{4}:\left(\frac{14-15}{24}\right)\right]\cdot\frac{16}{10}+\frac{4}{10}$$
$$=\left[\frac{11}{4}-\frac{1}{4}:\left(-\frac{1}{24}\right)\right]\cdot\frac{16}{10}+\frac{4}{10}=\left[\frac{11}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{24}{1}\right]\cdot\frac{16}{10}+\frac{4}{10}=\frac{35}{4}\cdot\frac{16}{10}+\frac{4}{10}$$
$$=\frac{28}{2}+\frac{4}{10}=\frac{140+4}{10}=\frac{144}{10}=\frac{72}{5}$$

Aufgabe 48:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$\frac{5}{8}:\frac{1}{2}+1\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}-\frac{9}{14}:\frac{3}{7}$$

Lösung:

$$\frac{5}{8}:\frac{1}{2}+1\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}-\frac{9}{14}:\frac{3}{7}=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{1}+\frac{12}{7}\cdot\frac{7}{4}-\frac{9}{14}\cdot\frac{7}{3}=\frac{10}{8}+\frac{84}{28}-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{70+168-84}{56}=\frac{154}{56}=\frac{77}{28}=\frac{11}{4}$$

Aufgabe 49:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und Kürzen Sie möglich.

$$\left[6{,}1+\left[\frac{1}{10}-\left(1{,}2:\frac{1}{5}+0{,}1\right)\right]\right]\cdot 10$$

Lösung:

$$\left[6{,}1+\left[\frac{1}{10}-\left(1{,}2:\frac{1}{5}+0{,}1\right)\right]\right]\cdot 10=\left[6{,}1+\left[\frac{1}{10}-\left(\frac{12}{10}\cdot\frac{5}{1}+\frac{1}{10}\right)\right]\right]\cdot 10$$
$$=\left[6{,}1+\left[\frac{1}{10}-\left(\frac{61}{10}\right)\right]\right]\cdot 10=\left[\frac{61}{10}-\frac{60}{10}\right]\cdot 10=\frac{1}{10}\cdot 10=1$$

Aufgabe 50:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$4\frac{1}{2}\cdot 3\frac{7}{12}-3\frac{5}{9}\cdot 3\frac{3}{8}$$

Lösung:

$$4\frac{1}{2}\cdot 3\frac{7}{12}-3\frac{5}{9}\cdot 3\frac{3}{8}=\frac{9}{2}\cdot\frac{43}{12}-\frac{32}{9}\cdot\frac{27}{8}=\frac{129}{8}-\frac{36}{3}=\frac{129}{8}-12=\frac{129-96}{8}=\frac{33}{8}$$

Aufgabe 51:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$\left(2\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}\right):\left(1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}\right)$$

Lösung:

$$\left(2\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}\right):\left(1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{8}{3}-\frac{7}{6}\right):\left(\frac{7}{4}+\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{16-7}{6}\right):\left(\frac{14+20}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{6}\right) : \left(\frac{34}{8}\right) = \left(\frac{9}{6}\right) \cdot \left(\frac{8}{34}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{17}\right) = \frac{6}{17}$$

Aufgabe 52:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$7\frac{1}{7} - \frac{3}{4} : \left(2 \cdot \frac{5}{8} - \frac{13}{16}\right)$$

Lösung:

$$7\frac{1}{7} - \frac{3}{4} : \left(2 \cdot \frac{5}{8} - \frac{13}{16}\right) = \frac{50}{7} - \frac{3}{4} : \left(\frac{10}{8} - \frac{13}{16}\right) = \frac{50}{7} - \frac{3}{4} : \left(\frac{20}{16} - \frac{13}{16}\right) = \frac{50}{7} - \frac{3}{4} : \left(\frac{7}{16}\right)$$
$$= \frac{50}{7} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{16}{7}\right) = \frac{50}{7} - \frac{12}{7} = \frac{38}{7}$$

Aufgabe 53:

Berechnen Sie folgende Dezimalzahl in einen Bruch um.

0,125

Lösung:

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Aufgabe 54:

Subtrahieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist. Schreiben Sie das Ergebnis als Bruch und als gemischten Bruch.

$$4\frac{1}{9} - 3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3}$$

Lösung:

$$4\frac{1}{9} - 3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3} = \frac{37}{9} - \frac{23}{6} - \frac{5}{3} = \frac{74}{18} - \frac{69}{18} - \frac{30}{18} = -\frac{25}{18} = -1\frac{7}{18}$$

Aufgabe 55:

Dividieren Sie folgende Brüche und kürzen das Ergebnis, wenn es möglich ist.

$$4\frac{5}{6}:1\frac{2}{9}$$

Lösung:

$$4\frac{5}{6}:1\frac{2}{9}=\frac{29}{6}:\frac{11}{9}=\frac{29}{6}\cdot\frac{9}{11}=\frac{29}{2}\cdot\frac{3}{11}=\frac{87}{22}$$

Aufgabe 56:

Berechnen Sie folgende Aufgabe und kürzen Sie möglich.

$$\frac{19}{21}:\left(5\frac{3}{7}+1\frac{5}{14}\right)+\frac{1}{5}\cdot 4\frac{1}{3}$$

Lösung:

$$\frac{19}{21}:\left(5\frac{3}{7}+1\frac{5}{14}\right)+\frac{1}{5}\cdot 4\frac{1}{3}=\frac{19}{21}:\left(\frac{38}{7}+\frac{19}{14}\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{3}=\frac{19}{21}:\left(\frac{76+19}{14}\right)+\frac{13}{15}$$

$$=\frac{19}{21}:\frac{95}{14}+\frac{13}{15}=\frac{19}{21}\cdot\frac{14}{95}+\frac{13}{15}=\frac{2}{15}+\frac{13}{15}=\frac{15}{15}=1$$

Aufgabe 57:

Berechnen Sie folgenden Doppelbruch und kürzen Sie möglich.

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}}$$

Lösung:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{1}=\frac{5}{2}$$

Aufgabe 58:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$3-\left(\frac{3}{7}-\frac{5}{9}+2\frac{5}{21}\right)$$

Lösung:

$$3-\left(\frac{3}{7}-\frac{5}{9}+2\frac{5}{21}\right)=3-\left(\frac{27}{63}-\frac{35}{63}+\frac{141}{63}\right)=3-\frac{133}{63}=\frac{189}{63}-\frac{133}{63}=\frac{56}{63}=\frac{8}{9}$$

Aufgabe 59:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$\frac{14}{9}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right)$$

Lösung:

$$\frac{14}{9}-\left(\frac{3-2}{4}\right)-\left(\frac{3+2}{9}\right)=\frac{14}{9}-\frac{1}{4}-\frac{5}{9}=\frac{9}{9}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Aufgabe 60:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$\left(\frac{12}{24}+\frac{15}{20}\right):\frac{27}{36}$$

Lösung:

$$\left(\frac{12}{24}+\frac{15}{20}\right):\frac{27}{36}=\left(\frac{12\cdot 5}{24\cdot 5}+\frac{15\cdot 6}{20\cdot 6}\right):\frac{27}{36}=\left(\frac{60}{120}+\frac{90}{120}\right):\frac{27}{36}$$
$$=\left(\frac{150}{120}\right):\frac{27}{36}=\left(\frac{150}{120}\right)\cdot\frac{36}{27}=\frac{150\cdot 36}{120\cdot 27}=\frac{5\cdot 36}{4\cdot 27}=\frac{5\cdot 4}{4\cdot 3}=\frac{5}{3}$$

Aufgabe 61:

Berechnen Sie das Ergebnis und kürzen so weit wie möglich.

$$7\frac{3}{8}-\left(8\frac{11}{12}-9\frac{1}{3}\right)$$

Lösung:

$$7\frac{3}{8}-\left(8\frac{11}{12}-9\frac{1}{3}\right)=\frac{59}{8}-\left(\frac{107}{12}-\frac{28}{3}\right)=\frac{59}{8}-\left(\frac{107}{12}-\frac{28\cdot 4}{3\cdot 4}\right)=\frac{59}{8}-\left(\frac{107}{12}-\frac{112}{12}\right)$$
$$=\frac{59}{8}-\left(\frac{107}{12}-\frac{112}{12}\right)=\frac{59}{8}-\left(\frac{107-112}{12}\right)=\frac{59}{8}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{59}{8}+\frac{5}{12}$$
$$=\frac{59\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{177}{24}+\frac{10}{24}=\frac{177+10}{24}=\frac{187}{24}$$

Potenzen

Aufgabe 62:

Schreiben Sie die folgenden Aufgaben als Potenz mit möglichst kleiner Basis:

a) 9

b) 8

c) 1000

d) $\frac{1}{1000}$

e) 1 000 000 000

f) 1024

Lösung:

a) 9 = 3^2

b) 8 = 2^3

c) 1000 = 10^3

d) $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

e) 1 000 000 000 = 10^9

f) 1024 =2^{10}

Aufgabe 63:

Berechnen Sie folgenden Summenterm.

$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 3x^2 - 6xy - 3y^2$

Lösung:

$-x^2 - 2xy - y^2$

Aufgabe 64:

Schreiben Sie als Produkt von Potenzen

a) x^{3+5}

b) $\frac{5^9}{5^4}$

c) x^{n+5}

d) $\frac{x^{4p+1}}{x^{2p+2}}$

Lösung:

a) $x^{3+5} = x^3 \cdot x^5$

b) $\frac{5^9}{5^4} =\cdot 5^9 \cdot 5^{-4}$

c) $x^{n+5} = x^n \cdot x^5$

d) $\frac{x^{4p+1}}{x^{2p+2}} = x^{4p+1-(2p+2)} = x^{4p+1-2p-2} = x^{2p-1} = x^{2p} \cdot x^{-1}$

Aufgabe 65:

Vereinfachen Sie folgenden Term.

$a^{-2} : a^{-4}$

Lösung:

$$a^{-2} : a^{-4} = \frac{a^{-2}}{a^{-4}} = a^{-2-(-4)} = a^2$$

Aufgabe 66:

Berechnen Sie folgenden Summenterm.

$a^2 + b^3 + c^3 + b^2 + c^2 + b^2$

Lösung:

$a^2 + b^3 + c^3 + b^2 + c^3 + b^2 = a^2 + 2b^2 + b^3 + c^2 + c^3$

$= a^2 + b^2 \cdot (2 + b) + c^2 \cdot (1 + c)$

Aufgabe 67:

Vereinfachen Sie folgenden Term.

$$\left(\frac{4a^{-3}b^{0}}{x^{2}y^{-1}}\right)^{-2}$$

Lösung:

$$\left(\frac{4a^{-3}b^{0}}{x^{2}y^{-1}}\right)^{-2} = (4a^{-3}b^{0}x^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^{6}x^{4}y^{-2} = \frac{a^{6}x^{4}}{16y^{2}}$$

Aufgabe 68:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{18a^{9}b^{7}}{35x^{3}y^{2}}\right):\left(\frac{12a^{5}b^{3}}{21x^{4}y^{6}}\right)$$

Lösung:

$$\frac{18a^{9}b^{7}}{35x^{3}y^{2}}:\frac{12a^{5}b^{3}}{21x^{4}y^{6}} = \frac{18a^{9}b^{7}}{35x^{3}y^{2}}\cdot\frac{21x^{4}y^{6}}{12a^{5}b^{3}} = \frac{9}{10}a^{9-5}b^{7-3}x^{4-3}y^{6-2} = \frac{9}{10}a^{4}b^{4}x\,y^{4}$$

Aufgabe 69:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{a^{3}\cdot b^{7}}{a^{2}\cdot b^{4}}$$

Lösung:

$$\frac{a^{3}\cdot b^{7}}{a^{2}\cdot b^{4}} = a^{3-2}\cdot b^{7-4} = a\cdot b^{3}$$

Aufgabe 70:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{4z^{5}\cdot 8y^{7}}{2y^{6}\cdot z^{3}}$$

Lösung:

$$\frac{4z^{5}\cdot 8y^{7}}{2y^{6}\cdot z^{3}} = 16z^{5-3}\cdot y^{7-6} = 16yz^{2}$$

Aufgabe 71:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{15x^{5}y^{8}}{21a^{7}b^{5}}:\frac{2x^{3}y^{2}}{35a^{10}b^{6}}$$

Lösung:

$$\frac{15x^5y^8}{21a^7b^5}:\frac{2x^3y^2}{35a^{10}b^6}=\frac{15x^5y^8}{21a^7b^5}\cdot\frac{35a^{10}b^6}{2x^3y^2}=\frac{15x^5y^8\cdot 35a^{10}b^6}{21a^7b^5\cdot 2x^3y^2}=\frac{25}{2}x^{5-3}y^{8-2}a^{10-7}b^{6-5}$$

$$=\frac{25}{2}x^2y^6a^3b$$

Aufgabe 72:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{z^n\cdot z^{m-n}}{z^m}$$

Lösung:

$$\frac{z^n\cdot z^{m-n}}{z^m}=\frac{z^{n+m-n}}{z^m}=\frac{z^m}{z^m}=1$$

Aufgabe 73:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{2x^3y^2}{3a^2\cdot 2b^3}\right)^2:\left(\frac{x^2\cdot 2y}{2a^2\cdot 3b^2}\right)^3$$

Lösung:

$$\left(\frac{2x^3y^2}{3a^2\cdot 2b^3}\right)^2:\left(\frac{x^2\cdot 2y}{2a^2\cdot 3b^2}\right)^3=\left(\frac{2x^3y^2}{3a^2\cdot 2b^3}\right)^2\cdot\left(\frac{2a^2\cdot 3b^2}{x^2\cdot 2y}\right)^3$$

$$=\left(\frac{4x^6y^4}{9a^4\cdot 4b^6}\right)\cdot\left(\frac{8a^6\cdot 27b^6}{x^6\cdot 8y^3}\right)=3a^{6-4}b^{6-6}x^{6-6}y^{4-3}=3a^2y$$

Aufgabe 74:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n : \left(\frac{21a^2b^2c^4}{16x^6y^7z^8}\right)^n$$

Lösung:

$$\left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n : \left(\frac{21a^2b^2c^4}{16x^6y^7z^8}\right)^n = \left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n \cdot \left(\frac{16x^6y^7z^8}{21a^2b^2c^4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{7a^2b^3c^4 \cdot 16x^6y^7z^8}{8x^5y^7z^7 \cdot 21a^2b^2c^4}\right)^n = \left(\frac{2}{3}a^{2-2}b^{3-2}c^{4-4}x^{6-5}y^{7-7}z^{8-7}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2}{3}b \cdot x \cdot z\right)^n$$

Aufgabe 75:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{x^5 \cdot y^6}{a^2 \cdot b^3}\right)^5 : \left(\frac{x \quad \cdot y}{a^3 \cdot b^5}\right)^5$$

Lösung:

$$\left(\frac{x^5 \cdot y^6}{a^2 \cdot b^3}\right)^5 : \left(\frac{x \quad \cdot y}{a^3 \cdot b^5}\right)^5 = \left(\frac{x^5 \cdot y^6}{a^2 \cdot b^3}\right)^5 \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b^5}{x \quad \cdot y}\right)^5 = \left(\frac{x^5 \cdot y^6 \cdot a^3 \cdot b^5}{a^2 \cdot b^3 \cdot x \quad \cdot y}\right)^5$$

$$= (x^{5-1}y^{6-1}a^{5-2}b^{5-3})^5 = (x^4y^5ab^2)^5 = a^5b^{10}x^{20}y^{25}$$

Aufgabe 76:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{x^6 + x^5}{x^4 + x^3}$$

Lösung:

$$\frac{x^6 + x^5}{x^4 + x^3} = \frac{x^3(x^3 + x^2)}{x^3(x+1)} = \frac{(x^3 + x^2)}{(x+1)} = \frac{x^2(x+1)}{(x+1)} = x^2$$

Aufgabe 77:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$a^{5n-1} \cdot b^{1+5n} \cdot a \cdot b^{5+n}$$

Lösung:

$a^{5n-1} \cdot b^{1+5n} \cdot a \cdot b^{5+n} = a^{5n-1+1} \cdot b^{1+5n+5+n} = a^{5n} \cdot b^{6n+6}$

Aufgabe 78:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{22x^5y^6 - 121x^4y^5 + 77x^6y^7}{11x^3y^4}$$

Lösung:

$$\frac{22x^5y^6 - 121x^4y^5 + 77x^6y^7}{11x^3y^4} = \frac{11x^4y^5 \cdot (2xy - 11 + 7x^2y^2)}{11x^3y^4}$$

$$= x \cdot y \cdot (2xy - 11 + 7x^2y^2)$$

Aufgabe 79:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$(r^6 - r^5) \cdot r^{n-4}$$

Lösung:

$$(r^6 - r^5) \cdot r^{n-4} = r^{6+n-4} - r^{5-n-4} = r^{n+2} - r^{n+1}$$

Aufgabe 80:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{15x^9 \cdot 225y^9}{5x^6 \cdot 25by^6}$$

Lösung:

$$\frac{15x^9 \cdot 225y^9}{5x^6 \cdot 25by^6} = \frac{27x^{9-6}y^{9-6}}{b} = \frac{27x^3y^3}{b}$$

Aufgabe 81:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{y^{3n+1} - 2y^{3n} + y^{3n-1}}{y^{2n+1} - y^{2n-1}}$$

Lösung:

$$\frac{y^{3n+1} - 2y^{3n} + y^{3n-1}}{y^{2n+1} - y^{2n-1}} = \frac{y^{3n}(y^1 - 2 + y^{-1})}{y^{2n}(y^1 - y^{-1})} = \frac{y^n \cdot (y^1 - 2 + y^{-1})}{(y^1 - y^{-1})}$$

Aufgabe 82:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{x^2 - 4}{x^{2n+1}} - \frac{x - 1}{x^{2n-1}} - \frac{2x^5}{x^{2n+4}}$$

Lösung:

$$\frac{x^2 - 4}{x^{2n+1}} - \frac{x - 1}{x^{2n-1}} - \frac{2x^5}{x^{2n+4}} = \frac{(x^2 - 4) \cdot x^3 - x^5(x - 1) - 2x^5}{x^{2n+4}}$$

$$= \frac{x^5 - 4x^3 - x^6 + x^5 - 2x^5}{x^{2n+4}} = \frac{-4x^3 - x^6}{x^{2n+4}} = \frac{x^3(-4 - x^3)}{x^{2n+4}} = \frac{-4 - x^3}{x^{2n+1}} = -\frac{x^3 + 4}{x^{2n+1}}$$

$$= \frac{33}{8}$$

Aufgabe 83:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{8a^4y^2}{27a^5b}\right)^2 \cdot \left(\frac{9a^2x^{-2}}{4yb}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{x^3b^3}\right)^{-2}$$

Lösung:

$$\left(\frac{8a^4y^2}{27a^5b}\right)^2 \cdot \left(\frac{9a^2x^{-2}}{4yb}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{x^3b^3}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{8a^4y^2}{27a^5b}\right)^2 \cdot \left(\frac{9a^2x^{-2}}{4yb}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^3b^3}{a^{-2}}\right)^2$$

$$= \frac{8^2 \cdot a^8y^4 \cdot 9^3 \cdot a^6x^{-6} \cdot x^6b^6}{27^2a^{10}b^2 \cdot 4^3y^3b^3 \cdot a^{-4}} = \frac{2^6 \cdot a^8y^4 \cdot 3^6 \cdot a^6x^{-6} \cdot x^6b^6}{3^6a^{10}b^2 \cdot 2^6y^3b^3 \cdot a^{-4}} = \frac{a^8y^4a^6b^6}{a^{10}b^2y^3b^3 \cdot a^{-4}}$$

$$= a^{8+6-10+4}b^{6-2-3}y^{4-3} = a^8by$$

Aufgabe 84:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{12c^5 \cdot 15d^7}{36d^4 \cdot 5c^5}$$

Lösung:

$$\frac{12c^5 \cdot 15d^7}{36d^4 \cdot 5c^5} = c^{5-5}d^{7-4} = d^3$$

Aufgabe 85:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n : \left(\frac{21a^2b^2c^4}{16x^6y^7z^8}\right)^n$$

Lösung:

$$\left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n : \left(\frac{21a^2b^2c^4}{16x^6y^7z^8}\right)^n = \left(\frac{7a^2b^3c^4}{8x^5y^7z^7}\right)^n \cdot \left(\frac{16x^6y^7z^8}{21a^2b^2c^4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{7a^2b^3c^4 \cdot 16x^6y^7z^8}{8x^5y^7z^7 \cdot 21a^2b^2c^4}\right)^n = \left(\frac{2}{3}a^{2-2}b^{3-2}c^{4-4}x^{6-5}y^{7-7}z^{8-7}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2}{3}b \cdot x \cdot z\right)^n$$

Aufgabe 86:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{22x^5y^6 - 121x^4y^5 + 77x^6y^7}{11x^3y^4}$$

Lösung:

$$\frac{22x^5y^6 - 121x^4y^5 + 77x^6y^7}{11x^3y^4} = \frac{11x^4y^5 \cdot (2xy - 11 + 7x^2y^2)}{11x^3y^4}$$

$$= x \cdot y \cdot (2xy - 11 + 7x^2y^2)$$

Aufgabe 87:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{x^{2n+1} \cdot y^{3n+1}}{y^{3n} \cdot x^{2n-1}}$$

Lösung:

$$\frac{x^{2n+1} \cdot y^{3n+1}}{y^{3n} \cdot x^{2n-1}} = x^{2n+1-(2n-1)} \cdot y^{3n+1-3n} = x^{2n+1-2n+1} \cdot y^{1} = x^{2} \cdot y$$

Aufgabe 88:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$(r^{6} - r^{5}) \cdot r^{n-5}$$

Lösung:

$$(r^{6} - r^{5}) \cdot r^{n-5} = r^{6+n-4} - r^{5-n-4} = r^{n+2} - r^{n}$$

Aufgabe 89:

Vereinfachen Sie folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze.

$$\frac{16a^{5} \cdot 15b^{6}}{4a^{3} \cdot 3b^{5}}$$

Lösung:

$$\frac{16a^{5} \cdot 15b^{6}}{4a^{3} \cdot 3b^{5}} = 20a^{5-3}b^{6-5} = 20a^{2}b$$

Aufgabe 90:

Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$$\frac{15x^{5}y^{8}}{21a^{7}b^{5}} : \frac{2x^{3}y^{2}}{35a^{10}b^{6}}$$

Lösung:

$$\frac{15x^{5}y^{8}}{21a^{7}b^{5}} : \frac{2x^{3}y^{2}}{35a^{10}b^{6}} = \frac{15x^{5}y^{8} \cdot 35a^{10}b^{6}}{21a^{7}b^{5} \cdot 2x^{3}y^{2}} = \frac{25}{2}a^{10-7}b^{6-5}x^{5-3}y^{8-2} = \frac{25}{2}a^{3}bx^{2}y^{6}$$

Aufgabe 91:

Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$$\frac{6p^{5}q^{4}}{r^{2}t^{3}} : \frac{3p^{4}q^{2}}{r^{7}t^{5}}$$

Lösung:

$$\frac{6p^5q^4}{r^2t^3}:\frac{3p^4q^2}{r^7t^5}=\frac{6p^5q^4\cdot r^7t^5}{r^2t^3\cdot 3p^4q^2}=\frac{6}{3}p^{5-4}q^{4-2}r^{7-2}t^{5-3}=2pq^2r^5t^2$$

Aufgabe 92:

Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$(3\ x^{n+4} - 9x^{2n-4} + 12x^{n+5}) : 3x^2$

Lösung:

$$\frac{3x^{n+4}}{3x^2}-\frac{9x^{2n+4}}{3x^2}+\frac{12x^{n+5}}{3x^2}=x^{n+4-2}-3x^{2n+4-2}+4x^{n+5-2}=x^{n+2}-3x^{2n-6}+4x^{n+3}$$

Wurzeln

Aufgabe 93:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt[3]{24}$

Lösung:

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$

Aufgabe 94:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt{9a^3b^2}$

Lösung:

$\sqrt{9a^3b^2} = \sqrt{9a^2 \cdot a \cdot b^2} = 3ab \cdot \sqrt{a}$

Aufgabe 95:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$2a\sqrt{a} + 5\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} + 2\sqrt{a^3} - 2\sqrt{ab}$

Lösung:

$2a\sqrt{a} + 5\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} + 2\sqrt{a^3} - 2\sqrt{ab}$

$= 2a\sqrt{a} + 5\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} - 2\sqrt{ab}$

$= 4a\sqrt{a} + 3\sqrt{ab} - 3\sqrt{a}$

Aufgabe 96:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$3ab \cdot \sqrt{6bc} \cdot 4cd \cdot \sqrt{8de}$

Lösung:

$3ab \cdot \sqrt{6bc} \cdot 4cd \cdot \sqrt{8de}$

$= 12abcd \cdot \sqrt{48bcde}$

$= 12abcd \cdot 2\sqrt{12bcde}$

$= 24abcd \cdot \sqrt{12bcde} = 48abcd \cdot \sqrt{3bcde}$

Aufgabe 97:

Dividieren Sie folgende Wurzeln.

$$\frac{\sqrt{a^3b^5}}{\sqrt{a\cdot b^3}}$$

Lösung:

$$\frac{\sqrt{a^3b^5}}{\sqrt{a\cdot b^3}} = \sqrt{\frac{a^3b^5}{a\cdot b^3}} = \sqrt{a^2b^2} = ab$$

Aufgabe 98:

Berechnen Sie folgende Wurzeln:

$$\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{\frac{8}{a}}\cdot\sqrt{\frac{9}{a}}$$

Lösung:

$$\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{\frac{8}{a}}\cdot\sqrt{\frac{9}{a}} = \sqrt{2a^2\cdot\frac{8}{a}\cdot\frac{9}{a}} = 12$$

Aufgabe 99:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$$\sqrt{45ax} : \sqrt{2a}$$

Lösung:

$$\sqrt{45ax} : \sqrt{2a} = \frac{\sqrt{45ax}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{45ax}{2a}} = \sqrt{\frac{5\cdot 9x}{2}} = 3\cdot\sqrt{\frac{5x}{2}}$$

Aufgabe 100:

Fassen Sie folgenden Ausdruck durch teilweises Wurzelziehen zusammen.

$\sqrt{63}+\sqrt{112}$

Lösung:

$\sqrt{63}+\sqrt{112}=\sqrt{9\cdot 7}+\sqrt{16\cdot 7}=3\sqrt{7}+4\sqrt{7}=7\sqrt{7}$

Aufgabe 101:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und vereinfachen sie ihn. Ziehen Sie, falls möglich, teilweise die Wurzel! Bestimmen Sie den Wurzelwert, wenn er eine Rationale Zahl ist!

$(2\sqrt{6}+3\sqrt{3})(2\sqrt{6}-4\sqrt{3})$

Lösung:

$(2\sqrt{6}+3\sqrt{3})(2\sqrt{6}-4\sqrt{3})$

$=2\cdot 2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}-2\cdot 4\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}-3\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

$24-8\cdot\sqrt{18}+6\cdot\sqrt{18}-36=-12-2\cdot\sqrt{18}$

Aufgabe 102:

Dividieren Sie folgende Wurzeln.

$\frac{\sqrt{a^4b^4}}{\sqrt{a^2c^2}}$

Lösung:

$\frac{\sqrt{\mathrm{a}^4\mathrm{b}^4}}{\sqrt{\mathrm{a}^2\mathrm{c}^2}}=\sqrt{\frac{\mathrm{a}^4\mathrm{b}^4}{\mathrm{a}^2\mathrm{c}^2}}=\frac{a^2b^2}{ac}=\frac{ab^2}{c}$

Aufgabe 103:

Fassen Sie folgenden Ausdruck durch teilweises Wurzelziehen zusammen.

$\sqrt{45}+\sqrt{20}$

Lösung:

$\sqrt{45}+\sqrt{20}=\sqrt{5\cdot 9}+\sqrt{5\cdot 4}=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

Aufgabe 104:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\mathrm{a}}}$

Lösung:

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$$

Aufgabe 105:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt{45ax} : \sqrt{2a}$

Lösung:

$$\sqrt{45ax} : \sqrt{2a} = \frac{\sqrt{45ax}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{45ax}{2a}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 9x}{2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{5x}{2}}$$

Aufgabe 106:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\frac{k}{\sqrt[3]{k}}$

Lösung:

$$\frac{k}{\sqrt[3]{k}} = \frac{k^{\frac{3}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}} = k^{\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)} = k^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{k^2}$$

Aufgabe 107:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\left(\sqrt{3x}-\sqrt{12x}\right):\sqrt{x}$

Lösung:

$\left(\sqrt{3x}-\sqrt{12x}\right):\sqrt{x}$

$=\frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{12x}\right)}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{12x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{3x}{x}}-\sqrt{\frac{12x}{x}}=\sqrt{3}-\sqrt{12}=\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot 3}$

$=\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

Aufgabe 108:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\left(\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^2}-\left(4\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5^3}$

Lösung:

$\left(\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^2}-\left(4\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5^3}$

$=5\sqrt{5}+3\cdot 5-16\cdot 5+5\cdot 5=5\sqrt{5}-40$

Aufgabe 109:

Multiplizieren Sie folgenden Ausdruck aus und vereinfachen sie ihn. Ziehen Sie, falls möglich, teilweise die Wurzel! Bestimmen Sie den Wurzelwert, wenn er eine Rationale Zahl ist!

$\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-3\sqrt{20}\right)$

Lösung:

$\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-3\sqrt{20}\right)=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{20}=5-\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{4\cdot 5}=5-\sqrt{5}\cdot 3\cdot 2\sqrt{\cdot 5}$

$=5-30=-25$

Aufgabe 110:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\sqrt{3^4}+\left(-2\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3^2}\right)^3-5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3}$

Lösung:

$=3^2+16\cdot 3^2+3^3-5\cdot 3^2=9+16\cdot 9+27-45=135$

Aufgabe 111:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$$(u - v) \cdot \sqrt{1 + \frac{4uv}{(u - v)^2}}$$

Lösung:

$$(u - v) \cdot \sqrt{1 + \frac{4uv}{(u - v)^2}} = (u - v) \cdot \sqrt{\frac{(u - v)^2 + 4uv}{(u - v)^2}}$$

$$= (u - v) \cdot \sqrt{\frac{u^2 - 2uv + v^2 + 4uv}{(u - v)^2}} = (u - v) \cdot \sqrt{\frac{u^2 + 2uv + v^2}{(u - v)^2}} = (u - v) \cdot \frac{\sqrt{(u + v)^2}}{\sqrt{(u - v)^2}}$$

$$= (u + v)$$

Aufgabe 112:

Vereinfachen sie folgenden Ausdruck

$$12b^2c \cdot \sqrt{\frac{5a}{24b^2c}} \cdot \sqrt{30ac}$$

Lösung:

$$12b^2c \cdot \sqrt{\frac{5a}{24b^2c}} \cdot \sqrt{30ac} = 12b^2c \cdot \sqrt{\frac{5a}{6 \cdot 4b^2c}} \cdot \sqrt{30ac} = \frac{12b^2c}{2b} \cdot \sqrt{\frac{5a}{6c}} \cdot \sqrt{30ac}$$

$$= 6bc \cdot \sqrt{\frac{5a}{6c} \cdot 30ac} = 6bc \cdot \sqrt{\frac{150a^2c}{6c}} = 6bc \cdot \sqrt{25a^2} = 30abc$$

Aufgabe 113:

Berechnen Sie folgende Potenzen ohne Taschenrechner:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

b) $(-2)^{-3}$

c) $\left(\sqrt{2}\right)^4$

d) $\left(-\sqrt{3}\right)^2$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{1000}}$

Lösung:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1^4}{2^4}\right) = \frac{1}{16}$

b) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

c) $\left(\sqrt{2}\right)^4 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 2^2 = 4$

d) $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = (-1)^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{4^3}{10^3}} = \frac{4}{10}$

Aufgabe 114:

Vereinfachen Sie weit wie möglich.

$$\frac{\sqrt{u} \cdot \sqrt[4]{u^3}}{\sqrt[4]{u}}$$

Lösung:

$$\frac{\sqrt{u} \cdot \sqrt[4]{u^3}}{\sqrt[4]{u}} = \frac{u^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{4}}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{2}{4}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} = u^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = u^1 = u$$

Aufgabe 115:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt{x^3}}\right)$$

Lösung:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt{x^3}}\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}\right) = \left(\frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = 4^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2\cdot 2-3\cdot 3}{6}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{4-9}{6}}$$

$$= 4^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{x^{\frac{5}{6}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{x^5}}$$

Vereinfachen Sie die folgenden Wurzeln.

$$(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

Lösung:

$$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3$$

$$= -1 + \sqrt{3}$$

Aufgabe 117:

Vereinfachen Sie die folgenden Wurzeln.

$$\sqrt{8x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{2}$$

Lösung:

$$\sqrt{8x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot x^2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Binomische Formeln

Aufgabe 118:

Bilden Sie aus dem folgenden Ausdruck eine Binomische Formel.

$16 - 8t + t^2$

Lösung:

$16 - 8t + t^2 = (4 - t)^2$

Aufgabe 119:

Wenden Sie die entsprechende Binomische Formel an.

$(2x - 1)^2$

Lösung:

$(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

Aufgabe 120:

Bilden Sie aus dem folgenden Ausdruck eine Binomische Formel.

$4p^2 - 16pq^4 + 16q^8$

Lösung:

$4p^2 - 16p^2q^4 + 16q^8 = (2p - 4q^4)^2$

Aufgabe 121:

Berechnen Sie nach der dritten binomischen Formel.

$(2r + 4)(2r - 4)$

Lösung:

$(2r + 4)(2r - 4) = 4r^2 - 16$

Aufgabe 122:

Bilden Sie aus dem folgenden Ausdruck eine Binomische Formel.

$1 - r^2$

Lösung:

$1 - r^2 = (1 + r)(1 - r)$

Aufgabe 123:

Füllen Sie die Lücken aus.

$(8b - \_\_)^2 = \_\_ - 32bc + 4c^2$

Lösung:

$(8b - 2c)^2 = 64b^2 - 32bc + 4c^2$

Aufgabe 124:

Füllen Sie die Lücken aus.

$(\_\_ - 3)^2 = \_\_ - 36a + 9$

Lösung:

$(6a - 3)^2 = 36a^2 - 36a + 9$

Aufgabe 125:

Berechnen Sie nach der dritten binomischen Formel.

$(x + 3)(x - 3)$

Lösung:

$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

Aufgabe 126:

Multiplizieren Sie folgende Terme aus und fassen Sie anschließend zusammen.

$(a - \frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{3}b+3a)^2$

Lösung:

$(a-\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{3}b+3a\ )^2 = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{9}b^2 + 2ab + 9a^2$

$= 10a^2 + ab + \frac{9+4}{36}b^2 = 10a^2 + ab + \frac{13}{36}b^2$

Aufgabe 127:

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck mit Hilfe der binomischen Formeln.

$(3y + 7)^2$

Lösung:

$(3y + 7)^2 = 9y^2 + 42y + 49$

Aufgabe 128:

Multiplizieren Sie folgende Terme aus und fassen Sie anschließend zusammen.

$(5s + 4r)^2 - (4s-3r)(4s + 3r)$

Lösung:

$(5s + 4r)^2 - (\ 4s-3r)(\ 4s + 3r\ )$

$= 25s^2 + 40sr + 16r^2 - 16s^2 - 9r^2 = 9s^2 + 40sr + 25r^2$

Aufgabe 129:

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck mit Hilfe der binomischen Formeln.

$(4c + 5\ )(4c - 5\ )$

Lösung:

$(4c + 5\ )(4c - 5\ ) = 16c^2 - 25$

Aufgabe 130:

Bilden Sie aus dem folgenden Ausdruck eine Binomische Formel.

$x^2 - 25$

Lösung:

$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Aufgabe 131:

Füllen Sie die Lücken aus.

$(d + \_\_)^2 = d^2 + \_\_\_ + f^2$

Lösung:

$(d + \; f \;)^2 = d^2 + \; 2df \; + f^2$

Aufgabe 132:

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck mit Hilfe der binomischen Formeln.

$(6y - 5)^2$

Lösung:

$(6y - 5)^2 = 36y^2 - 60y + 25$

Aufgabe 133:

Füllen Sie die Lücken aus.

$(\_\_ - 2)^2 = d^2 - 4d + \_\_$

Lösung:

$(d - 2)^2 = d^2 - 4d + 4$

Logarithmen

Aufgabe 134:

Formen Sie folgende Gleichung in Logarithmusschreibweise um.

$2^x = 16$

Lösung:

$2^x = 16 \quad \rightarrow \quad \log_2 16 = x$

Aufgabe 135:

Formen Sie folgende Gleichung in Logarithmusschreibweise um.

$5^x = 125$

Lösung:

$5^x = 125 \quad \rightarrow \quad \log_5 125 = x$

Aufgabe 136:

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner.

$\log_4 8$

Lösung:

$$\log_4 8 = \frac{\ln(8)}{\ln(4)} = 1{,}5$$

Aufgabe 137:

Fassen Sie folgenden Ausdruck zusammen.

$\log_{10}(2) + \log_{10}(13)$

Lösung:

$\log_{10}(2) + \log_{10}(13) = \log_{10}(2 \cdot 13) = \log_{10}(26)$

Aufgabe 138:

Fassen Sie folgenden Ausdruck zusammen.

$\log_8(a) + \log_8(a^2)$

Lösung:

$\log_8(a) + \log_8(a^2) = \log_8(a \cdot a^2) = \log_8(a^3)$

Aufgabe 139:

Schreiben Sie folgenden Term als einzelne Terme.

$\log_4(2kx)$

Lösung:

$\log_4(2kx) = \log_4(2k) + \log_4(x)$

Aufgabe 140:

Formen Sie den folgenden Ausdruck mit den Logarithmengesetzen um.

$\log_{11}(8)$

Lösung:

$\log_{11}(8) = \log_{11}(2^3) = 3 \cdot \log_{11}(2)$

Aufgabe 141:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\log_2(a) - \log_2(b)$

Lösung:

$\log_2(a) - \log_2(b) = \log_2\left(\frac{a}{b}\right)$

Aufgabe 142:

Schreiben Sie folgenden Term als einzelne Terme.

$\log_3(tx)$

Lösung:

$\log_3(tx) = \log_3(t) + \log_3(x)$

Aufgabe 143:

Formen Sie den folgenden Ausdruck mit Logarithmengesetzen um.

$\log_{11}(8)$

Lösung:

$\log_{11}(8) = \log_{11}(2^3) = 3 \cdot \log_{11}(2)$

Aufgabe 144:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\log_3(x + y) - \log_3 x$

Lösung:

$\log_3(x + y) - \log_3 x$

$\log_3\left(\frac{x + y}{x}\right) = \log_3\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

Aufgabe 145:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\log_4(x^2) + \log_4\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Lösung:

$\log_4(x^2) + \log_4\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2 \cdot \log_4(x) + \log_4(x^{-2})$

$= 2 \cdot \log_4(x) - 2 \cdot \log_4(x)$

$= 0$

Aufgabe 146:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$\frac{1}{2}\log_{10}(4) + 3 \cdot \log_{10}(6) - 2 \cdot \log_{10}(3 \cdot 2^2)$

Lösung:

$$\frac{1}{2}\log_{10}(4) + 3 \cdot \log_{10}(6) - 2 \cdot \log_{10}(3 \cdot 2^2)$$

$$= \frac{1}{2}\log_{10}(2^2) + 3 \cdot \log_{10}(2 \cdot 3) - 2 \cdot \log_{10}(3) - 2 \cdot \log_{10}(2^2)$$

$$= \frac{2}{2}\log_{10}(2) + 3 \cdot \log_{10}(2) + 3 \cdot \log_{10}(3) - 2 \cdot \log_{10}(3) - 4 \cdot \log_{10}(2)$$

$$= \log_{10}(3)$$

Aufgabe 147:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck.

$$2 \cdot \log_5(x) + \frac{1}{2}\log_5(x^4) - \log_5(x^2)$$

Lösung:

$$2 \cdot \log_5(x) + \frac{1}{2}\log_5(x^4) - \log_5(x^2)$$

$$= 2 \cdot \log_5(x) + \frac{4}{2}\log_5(x) - 2 \cdot \log_5(x)$$

$$= 2 \cdot \log_5(x)$$

Trigonometrie und Winkelgesetze

Aufgabe 148:

Rechnen Sie die gegebenen Winkel entweder in die Einheit Grad oder Radiant um:

a)	$\alpha = 30°$	b)	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
c)	$\alpha = 60°$	d)	$\alpha = 27.8°$
e)	$\alpha = \frac{2\pi}{3}$	f)	$\alpha = 2\pi$

Lösung:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\alpha = 90°$

c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

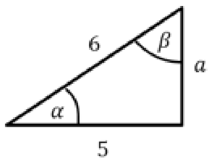
d) $\alpha = 0.485$

e) $\alpha = 120°$

f) $\alpha = 114.6°$

Aufgabe 149:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie die fehlenden Größen:

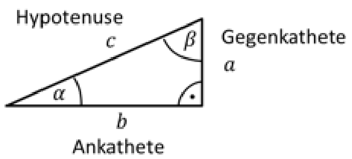


Lösung:

$a = \sqrt{11}$ $\alpha = 33{,}56°$ $\beta = 56{,}44°$

Aufgabe 150:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck. Berechnen Sie aus den gegebenen Größen die fehlende Größe mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen.



a) $a = 5 \quad b = 2 \quad \alpha = ?$

b) $b = 2 \quad c = 3 \quad \alpha = ?$

c) $a = 4 \quad c = 6 \quad \alpha = ?$

d) $b = 1 \quad c = 1.5 \quad \beta = ?$

e) $c = 5 \quad \alpha = 20° \quad a = ?$

f) $a = 4.2 \quad \beta = 78° \quad b =$

Lösung:

a) $\alpha = 68.2°$

b) $\alpha = 48.2°$

c) $\alpha = 41.8°$

d) $\beta = 41.8°$

e) $a = 1.71$

f) $b = 19.76$

Aufgabe 151:

Ein Körper legt auf einer Kreisbahn mit dem Radius r den Weg s (Bogenlänge) zurück und überstreicht dabei den Winkel α (Bogenmaß, Einheit Grad oder Radiant).

Berechnen Sie aus den gegebenen Größen die fehlende Größe:

a) $r = 10\,cm \quad \alpha = 30°$

b) $s = 0.8\,m \quad \alpha = 1.5$

c) $r = 5\,dm \quad s = 2\,m$

d) $\alpha = 379° \quad s = 86\,cm$

e) $r = 1.7\,m \quad \alpha = 227°$

f) $r = 0.75\,m \quad s = 0.564\,km$

Lösung:

a) $s = 5.24\,cm$

b) $r = 0.53\,m$

c) $\alpha = 4 \quad (229.2°)$

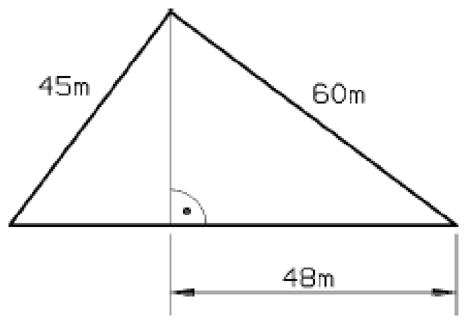
d) $r = 13\,cm$

e) $s = 6.74\,m$

f) $\alpha = 752 \quad (43086.4°)$

Aufgabe 152:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des unten aufgeführten Dreiecks. $(\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h})$



Lösung:

Im rechten Dreieck die fehlende Strecke berechnen (Höhe des Gesamtdreiecks):

$$60^2 = 48^2 + h^2$$

$$h^2 = 60^2 - 48^2$$

$$h = \sqrt{60^2 - 48^2}$$

$$h = 36$$

Im linken Dreieck die fehlende Strecke berechnen (Teilstück der Grundseite):

$$45^2 = 36^2 + x^2$$

$$x^2 = 45^2 - 36^2$$

$x = \sqrt{45^2 - 36^2}$

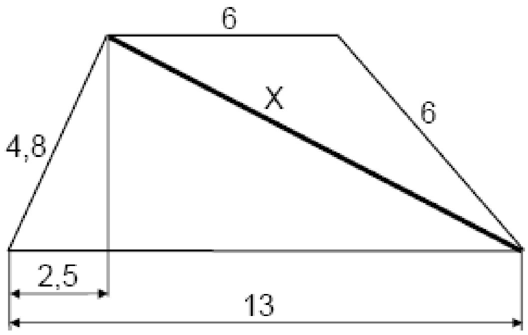
$x = 27$

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (27 + 48) \cdot 36$

$A = 1.350\ m^2$

Aufgabe 153:

Berechnen Sie die Länge der Strecke x.



Lösung:

$4{,}8^2 = 2{,}5^2 + h^2$

$h^2 = 4{,}8^2 - 2{,}5^2$

$h = \sqrt{4{,}8^2 - 2{,}5^2}$

$h = 4{,}1$

$x^2 = h^2 + (13 - 2{,}5)^2$

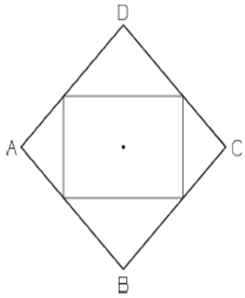
$x^2 = 4{,}1^2 + (13 - 2{,}5)^2$

$x = \sqrt{4{,}1^2 + (13 - 2{,}5)^2}$

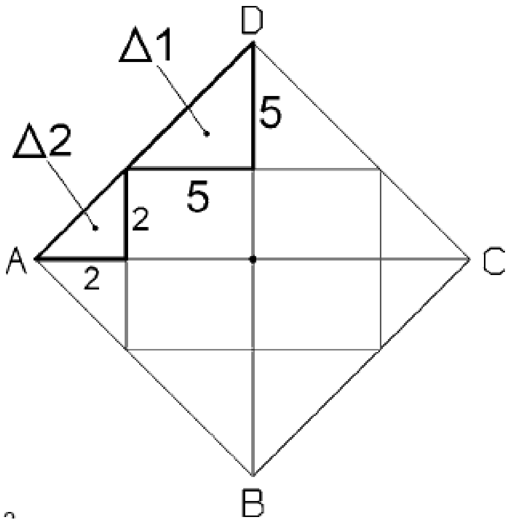
$x = 11{,}27$

Aufgabe 154:

Einem Quadrat ABCD ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 10cm und 4cm einbeschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrates.



Lösung:



$$A_{Rechteck} = 10\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} = 40\ \text{cm}^2$$

$$A_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = 12{,}5\ \text{cm}^2$$

$$A_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} = 2\ \text{cm}^2$$

$$A_{Gesamt} = A_{Rechteck} + 4 \cdot A_{\Delta 1} + 4 \cdot A_{\Delta 2}$$

$$A_{Gesamt} = 40\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 12{,}5\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 2\ \text{cm}^2$$

$$A_{Gesamt} = 98\ \text{cm}^2$$

Aufgabe 155:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit p=4cm und q=3cm. Bestimmen Sie die Höhe h.

Lösung:

Nach dem Höhensatz gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$

$h = \sqrt{p \cdot q}$

$h = \sqrt{4 \cdot 3}$

$h = 3{,}46$

Aufgabe 156:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit p=2cm und c= 5cm. Bestimmen Sie die Strecken a und b.

Lösung:

Nach dem Kathetensatz gilt:

$a^2 = p \cdot c$

$a = \sqrt{p \cdot c}$

$a = \sqrt{2 \cdot 5}$

$a = 3{,}16$

$b^2 = q \cdot c$

$b = \sqrt{q \cdot c}$

$b = \sqrt{(c - p) \cdot c}$

$b = \sqrt{(5 - 2) \cdot 5}$

$b = 3{,}87$

Aufgabe 157:

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist bekannt, dass die Höhe 5cm lang ist und der Hypothenusenabschnitt p=6,1cm lang ist und p um 2cm länger ist als der Hypothenusenabschnitt q. Berechnen Sie alle fehlenden Seitenlängen des Dreiecks ABC und berechnen außerdem den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung:

Berechnung der Seite c:

$c = p + q = 6{,}1 + 4{,}1$

$c = 10{,}2$

Berechnung der Seite b:

$b^2 = 5^2 + 6{,}1^2$

$b = \sqrt{5^2 + 6{,}1^2}$

$b = 7{,}89$

Berechnung der Seite a:

$a^2 = 5^2 + 4{,}1^2$

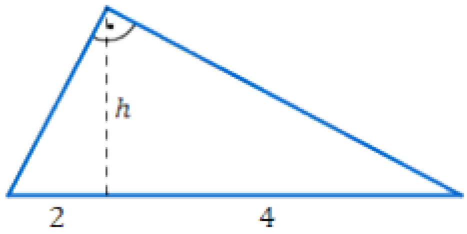
$b = \sqrt{5^2 + 4{,}1^2}$

$a = 6{,}47$

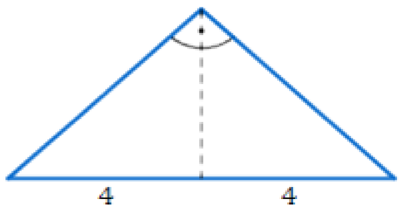
Aufgabe 158:

Welches der folgenden Dreiecke von A bis D hat eine Höhe von $\sqrt{8}$?

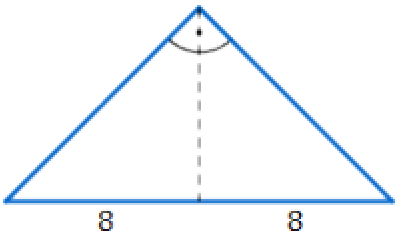
A:



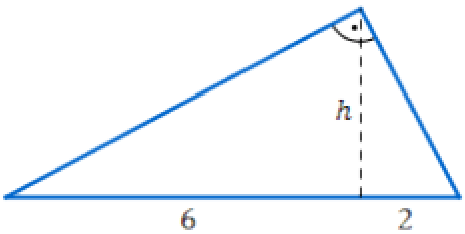
C:



B:



D:



Lösung:

Nach dem Höhensatz gilt:

A:

$h^2 = p \cdot q$

$h = \sqrt{p \cdot q}$

$h = \sqrt{2 \cdot 4}$

$h = 2{,}83$

B:

$h^2 = p \cdot q$

$h = \sqrt{p \cdot q}$

$h = \sqrt{8 \cdot 8}$

$h = 8$

C:

$h^2 = p \cdot q$

$h = \sqrt{p \cdot q}$

$h = \sqrt{4 \cdot 4}$

$h = 4$

D:

$h^2 = p \cdot q$

$h = \sqrt{p \cdot q}$

$h = \sqrt{6 \cdot 2}$

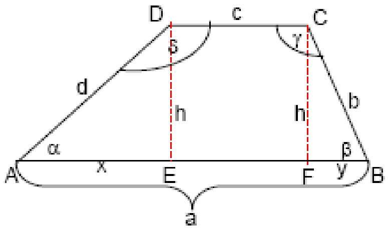
$h = 4$

Lösung: Dreieck A

Aufgabe 159:

Gegeben ist ein Trapez durch a=9cm, c=3cm, h=5cm und $\alpha = 42°$

Berechnen Sie alle Strecken und Winkel im Trapez (siehe Zeichnung).



Lösung:

Im Teildreieck AED folgt:

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$d = \frac{5}{\sin(42°)} = 7{,}47$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\tan\alpha}$$

$$x = \frac{5}{\tan(42°)} = 5{,}55$$

Als weiteres gilt:

$\alpha + \delta = 180°$

$\delta = 180° - \alpha$

$\delta = 180° - 42°$

$\delta = 138°$

Für die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ gilt:

$$\overline{\mathrm{AB}} = x + c + y$$

$$y = \overline{\mathrm{AB}} - x - c$$

$$y = 9 - 5{,}55 - 3$$

$$y = 0{,}45$$

Damit können wir im Dreieck FBC folgendes berechnen:

$$\tan\beta = \frac{h}{y}$$

$$\tan\beta = \frac{5}{0{,}45} = 84{,}86°$$

$$\sin\beta = \frac{h}{b}$$

$$b = \frac{h}{\sin\beta}$$

$$b = \frac{5}{\sin(84{,}86°)} = 5{,}02$$

Daraus folgt:

$$\gamma = 180° - \beta$$

$$\gamma = 180° - 84{,}86°$$

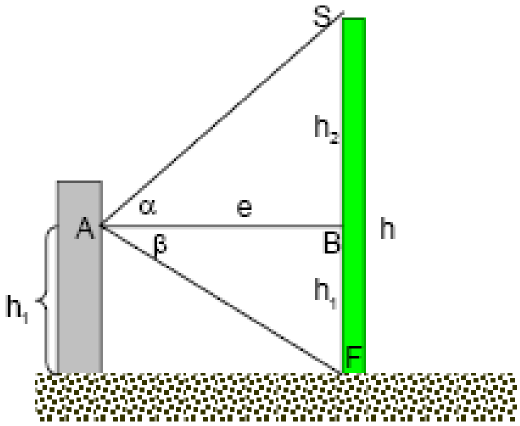
$$\gamma = 95{,}14°$$

Aufgabe 160:

Von einem Turmfenster in 12m Höhe sieht man die Spitze eines Schornsteins unter dem Höhenwinkel (Erhebungswinkel) $\alpha = 42°$ und den Fußpunkt unter dem Tiefenwinkel (Senkungswinkel) $\beta = 32°$

Wie weit ist der Schornstein vom Turm entfernt und wie hoch ist er?

Lösung:



Im Dreieck ABS gilt folgendes:

$$\tan(\alpha) = \frac{h_2}{e}$$

$$h_2 = e \cdot \tan(\alpha)$$

Im Dreieck ABF gilt folgendes:

$$\tan(\beta) = \frac{h_1}{e}$$

$$e = \frac{h_1}{\tan(\beta)}$$

Die Gesamthöhe ergibt sich aus:

$$h = h_1 + h_2 = h_1 + e \cdot \tan(\alpha) = h_1 + \frac{h_1}{\tan(\beta)} \cdot \tan(\alpha)$$

$$= \frac{h_1 \cdot \tan(\beta) + h_1 \cdot \tan(\alpha)}{\tan(\beta)}$$

$$= h_1 \cdot \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{\tan(\beta)}$$

$$h = h_1 \cdot \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{\tan(\beta)} = 12 \cdot \frac{\tan(32°) + \tan(42°)}{\tan(32°)} = 29{,}29\ \text{m}$$

$$h = 29{,}29\ \text{m}$$

Aufgabe 161:

Gegeben sind in einem beliebigen Dreieck die Seite c=18cm und die Winkel $\gamma = 118°$ und $\beta = 35°$. Berechnen Sie die Seiten a und b sowie den Winkel α.

Lösung:

Die Summe der Winkel in einem beliebigen Dreieck ist 190°.

Daraus folgt für unsere Aufgabe:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 35° - 118° = 27°$$

$$\alpha = 27°$$

Mit dem Sinussatz können wir folgendes berechnen:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$b = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta) = \frac{18 \text{ cm}}{\sin(118°)} \cdot \sin(35°) = 11{,}69 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

$$a = \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha) = \frac{18 \text{ cm}}{\sin(118°)} \cdot \sin(27°) = 9{,}26\ cm$$

Aufgabe 162:

Gegeben sind die Größen a=7,5cm, c=8,2cm und $\beta = 85°$ in einem beliebigen Dreieck. Berechnen Sie die Seite b und die Winkel α und γ.

Lösung:

Hier lässt sich kein Sinussatz anwenden.

Hier wird der Kosinussatz angewendet:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$

$$b = \sqrt{7{,}5\text{cm}^2 + 8{,}2\text{cm}^2 - 2 \cdot 7{,}5\text{cm} \cdot 8{,}2\text{cm} \cdot \cos(85°)} = 10{,}62 \text{ cm}$$

Zu der Seite b haben wir auch den Gegenwinkel, also können wir jetzt den Sinussatz verwenden:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(\beta)}{b} \cdot a = \frac{\sin(85°)}{10{,}62\text{cm}} \cdot 7{,}5\text{cm} = 0{,}7035$$

$$\alpha = 44{,}71°$$

Der Winkel γ lasst sich wieder über die Winkelsumme berechnen:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 44{,}71° - 85° = 50{,}29°$$

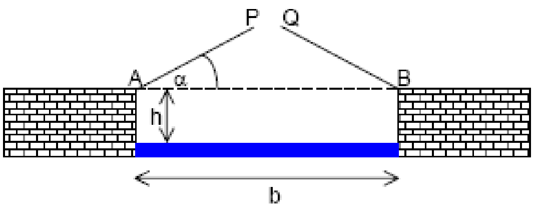
$$\gamma = 50{,}29°$$

Aufgabe 163:

Über einen Fluss mit der Breit b=13m führt eine Zugbrücke. Das Gelenk A der Brücke liegt h=3,7m über dem Wasserspiegel. Die Brücke lässt sich höchstens so weit öffnen, dass die beiden Brückenhälften unter dem Winkel $\alpha = 31°$ gegen die horizontale geneigt sind.

a) Wie hoch liegen die Punkte P und Q über dem Wasserspiegel, wenn die Brücke so weit wie möglich geöffnet ist? Wie weit sind sie auseinander?

b) Das Deck eines Schiffes ist 6m breit und ragt 4,5m aus dem Wasser. Das Schiff fährt genau in der Mitte des Flusses. Entscheiden Sie per Rechnung, ob das Schiff durchfahren kann, wenn die Zugbrücke soweit wie möglich geöffnet ist.



Lösung:

a)

Als erstes berechnen wir die Höhe des Punktes P(Q) von der Wasseroberfläche.

In Dreieck AWP gilt folgendes:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{PW}}{\overline{AP}}$$

$$\overline{PW} = \overline{AP} \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin(31°) = \frac{1}{2} \cdot 13\mathrm{m} \cdot \sin(31°) = 3{,}35\ \mathrm{m}$$

$$\overline{PW} = 3{,}35\ \mathrm{m}$$

Die Höhe der Punkte ergibt sich aus:

$$\overline{FP} = \mathrm{h} + \overline{PW} = 3{,}7\ \mathrm{m} + 3{,}35\ \mathrm{m} = 7{,}05\ \mathrm{m}$$

$$\overline{FP} = 7{,}05\ \mathrm{m}$$

Wie weit sind die beiden Punkte auseinander:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AW}}{\overline{AP}}$$

$$\overline{AW} = \overline{AP} \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 13\mathrm{m} \cdot \cos(31°) = 5{,}57\ \mathrm{m}$$

$\overline{AW} = 5{,}57\ \text{m}$

Für den Abstand gilt:

$\overline{PQ} = b - 2 \cdot \overline{AW} = 13\text{m} - 2 \cdot 5{,}57\text{m} = 1{,}86\ \text{m}$

$\overline{PQ} = 1{,}86\ \text{m}$

b)

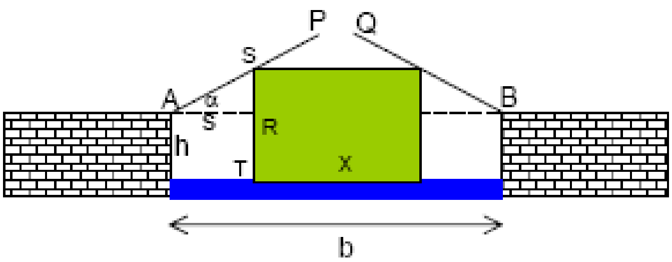
Das Schiff, welches unter der Zugbrücke durchfahren soll hat eine Breite von x=6m.

Wenn das Schiff genau in der Mitte fährt, bleibt rechts und links vom Schiff der gleiche Abstand frei:

$$s = \frac{1}{2}(b - x) = \frac{1}{2}(13\text{m} - 6\text{m}) = 3{,}5\ \text{m}$$

$s = 3{,}5\ \text{m}$

Nun müssen wir ausrechnen, wie hoch das Schiff am linken (oder auch am rechten) Rand sein darf, damit es unter der Brücke durchfahren kann:



Also, wie hoch der Punkt S über der Wasserfläche liegen kann:

$\overline{AR} = 3{,}5\text{m}$

$\alpha = 31°$

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{SR}}{\overline{AR}}$$

$\overline{SR} = \overline{AR} \cdot \tan(\alpha) = 3{,}5\text{m} \cdot \tan(31°) = 2{,}10\ \text{m}$

Für die zulässige Höhe des Schiffes ergibt sich folgendes:

$\overline{ST} = h + \overline{SR} = 3{,}70\text{m} + 2{,}10\text{m} = 5{,}80\ \text{m}$

Da das Schiff nur 4,50 m aus dem Wasser ragt, kann das Schiff die Brücke passieren.

Aufgabe 164:

Auf einer horizontalen Ebene stehen zwei senkrechte Sendemasten AB und CD, die 180m voneinander entfernt sind. Auf der Verbindungsstrecke ihrer Fußpunkte A und C befindet sich eine Verankerung F, von der aus Halteseile zu den Mastspitzen führen.

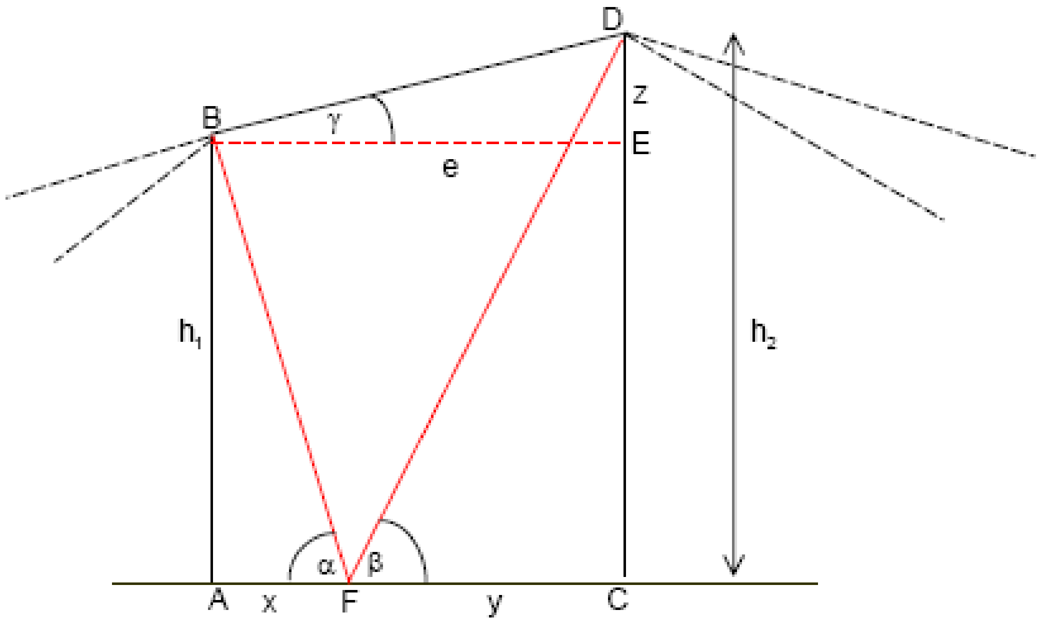
Von F aus erscheint der 48m hohe Mast AB unter dem Winkel $\alpha = 36{,}5°$, der Sendemast CD unter $\beta = 29°$.

a) Wie weit ist die Verankerung F von den Fußpunkten A und C der beiden Sendemasten entfernt.

b) Wie hoch ist der Sendemast CD?

c) Zwischen den beiden Mastspitzen ist ein Antennendraht gezogen. Wie lang ist dieser Draht, wenn er wegen seines Durchhangs um 15% länger ist als der Abstand der Mastspitzen?

Lösung:



a)

In dem Dreieck mit dem rechten Winkel AFB gilt folgendes:

$$\tan(\alpha) = \frac{h_1}{x}$$

$$x = \frac{h_1}{\tan(\alpha)} = \frac{48\mathrm{m}}{\tan(36{,}5°)} = 64{,}87\ \mathrm{m}$$

Damit ergibt sich für die Strecke y:

$$y = e - x = 180\mathrm{m} - 64{,}87\mathrm{m} = 115{,}13\ \mathrm{m}$$

$$y = 115{,}13\ \mathrm{m}$$

b)

In dem rechtwinkligen Dreieck FCD gilt folgendes:

$$\tan(\beta) = \frac{h_2}{y}$$

$\mathrm{h}_2 = \mathrm{y} \cdot \tan(\beta) = 115{,}13\mathrm{m} \cdot \tan(29°) = 63{,}82\mathrm{m}$

$\mathrm{h}_2 = 63{,}82\mathrm{m}$

c)

In dem rechtwinkligen Dreieck BED gilt folgendes:

$$\tan(\gamma) = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{e}} = \frac{h_2 - h_1}{e} = \frac{63{,}82m - 48m}{180m} = 0{,}088$$

$\gamma = 5{,}03°$

Daraus folgt:

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$$

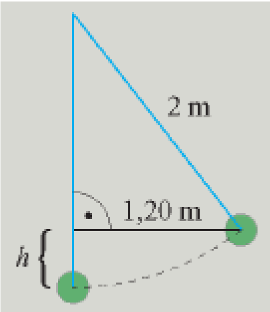
$$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\cos(\gamma)} = \frac{180\mathrm{m}}{\cos(5{,}03°)} = 180{,}70\ \mathrm{m}$$

Das Seil ist um 15% länger:

$\mathrm{L} = \overline{\mathrm{BD}} \cdot 1{,}15 = 180{,}70\mathrm{m} \cdot 1{,}15 = 207{,}81\ \mathrm{m}$

Aufgabe 165:

Auf den Bild sieht man ein Pendel, das 1,20m zur Seite ausgelenkt wurde. Wie viel Zentimeter hat das Pendel an Höhe h gewonnen?



Lösung:

$2^2 = x^2 + 1{,}2^2$

$x^2 = 2^2 - 1{,}2^2$

$x = \sqrt{2^2 - 1{,}2^2}$

$x = 1{,}6$

$h = 2 - x = 2\,m - 1{,}6\,m = 0{,}4\,m$

$h = 0{,}4\,m$

Aufgabe 166:

Für den Bau einer pyramidenförmigen Lautsprecherbox sind vier gleichschenklige Dreiecksflächen aus Spanplatten gesägt worden. Die Höhe der Dreiecke beträgt $\mathrm{h_a} = 90\mathrm{cm}$. Welche Höhe hat die fertige Box bei einer quadratischen Grundfläche der Länge a=45cm?

Lösung:

$\mathrm{h_a^2} = \mathrm{h}^2 + \left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)^2$

$\mathrm{h}^2 = \mathrm{h_a^2} - \left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)^2$

$\mathrm{h} = \sqrt{\mathrm{h_a^2} - \left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)^2} = \sqrt{90^2 - 22{,}5^2} = 87{,}14\ \mathrm{cm}$

Aufgabe 167:

Ein 90m hoher Funkmast wird bei $\frac{4}{5}$ seiner Höhe durch 4 Spannseile befestigt. Die Befestigungspunkte der Spannseile am Boden sind jeweils 5m vom Fuß des Mastes entfernt und bilden ein Quadrat.

a) Wie lang sind die 4 Seile zusammen?

b) Wenn man sie Fläche um die Befestigungspunkte herum einzäunen würde, wie Lang wäre der Zaun?

Lösung:

a)

Die Länge eines Seiles ergibt sich aus:

$$x^2 = 72^2 + 5^2$$

$$\mathrm{x} = \sqrt{72^2 + 5^2} = 72{,}17\ \mathrm{m}$$

Die Länger von vier Seilen:

$$\mathrm{L} = 4 \cdot 72{,}17\ \mathrm{m} = 288{,}68\ \mathrm{m}$$

Lineare, quadratische und kubische Gleichungen

Aufgabe 168:

Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge, im Anschluss lösen Sie diese Gleichung und geben die Lösungsmenge an.

$3(2x+5)-4=18-2(6-3x)$

Lösung:

$\mathbb{D}=\mathbb{R}$

$3(2x+5)-4=18-2(6-3x)$

$6x+15-4=18-12+6x$

$6x+11=6x+6$

$11=6$

Hier haben wir einen Widerspruch, deshalb ist die Lösungsmenge leer.

$\mathbb{L}=\{\quad\}$

Aufgabe 169:

Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge, im Anschluss lösen Sie diese Gleichung und geben die Lösungsmenge an.

$\frac{3}{8}x-5=2-\left(3+\frac{5}{8}x\right)$

Lösung:

$\mathbb{D}=\mathbb{R}$

$\frac{3}{8}x-5=2-\left(3+\frac{5}{8}x\right)$

$\frac{3}{8}x-5=2-3-\frac{5}{8}x \quad |+\frac{5}{8}x$

$x-5=-1 \quad |+5$

$x=4$

$\mathbb{L}=\{4\}$

Aufgabe 170:

Bestimmen Sie Lösung der folgenden Gleichung.

$x^2+2x+1=0$

Lösung:

$x^2+2x+1=0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\mathbb{L} = \{-1\}$

Aufgabe 171:

Bestimmen Sie Lösung der folgenden Gleichung.

$x^2 + 4x = 0$

Lösung:

$x^2 + 4x = 0$

$x(x + 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -4$

$\mathbb{L} = \{-4; 0\}$

Aufgabe 172:

Bestimmen Sie für folgende Gleichung die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

$$\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Lösung:

$$\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$

Hauptnenner: $(x + 1)(x - 1)$

$$\frac{(x + 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} - \frac{(x - 1) \cdot (x - 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x^2}{(x^2 - 1)} \quad \cdot \mathrm{HN}$$

$(x + 1) \cdot (x + 1) - (x - 1) \cdot (x - 1) = x^2$

$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = x^2 \quad | - x^2$

$-x^2 + 4x = 0$

$x(-x + 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

$\mathbb{L} = \{4; 0\}$

Aufgabe 173:

Bestimmen Sie für folgende Gleichung die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

$$\frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4}$$

Lösung:

$$\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{x+2}{x^2+4x+4}$$

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$

$$\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+2)}{(x+2)^2}$$

Hauptnenner: $(x+2)^2(x-2)$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2}\quad |\cdot \mathrm{HN}$$

$$(x-2)(x+2)=(x+2)(x-2)$$

$$0=0$$

$\mathbb{L}=\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$

Aufgabe 174:

Bestimmen Sie für folgende Gleichung die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

$$\frac{2}{x-2}-2=\frac{1}{4-2x}$$

Lösung:

$$\frac{2}{x-2}-2=\frac{1}{4-2x}$$

$$\mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$$

$$\frac{2}{x-2}-2=\frac{1}{-2(x-2)}$$

Hauptnenner: $-2(x-2)$

$$\frac{2\cdot(-2)}{-2(x-2)}-\frac{2\cdot(-2)\cdot(x-2)}{-2(x-2)}=\frac{1}{-2(x-2)} \quad |\cdot \text{HN}$$

$$-4+4x-8=1$$

$$4x-12=1 \quad |+12$$

$$4x=13 \quad |:4$$

$$x=\frac{13}{4}$$

$$\mathbb{L}=\left\{\frac{13}{4}\right\}$$

Aufgabe 175:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$$3x^3-10x^2+7x-12=0$$

Lösung:

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$$x=3 \rightarrow 3\cdot 3^3-10\cdot 3^2+7\cdot 3-12=0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$$

$$(3x^3-10x^2+7x-12):(x-3)=3x^2-x+4$$

$$\underline{-(3x^3-9x^2)}$$

$$-x^2\ +7x$$

$$\underline{-(-x^2\ +3x)}$$

$$4x-13$$

$$\underline{-(4x-12)}$$

$$\underline{\qquad -}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

Keine weiteren Lösungen mehr: $x_1 = 3$

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 176:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

Lösung:

$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 12 = 0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) : (x - 1) = x^2 - x - 12 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad -x^2 - 11x \\
\qquad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad\qquad -12x + 12 \\
\qquad\qquad \underline{-(-12x + 12)} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-}
\end{array}$$

$x^2 - x - 12 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

Weiteren Lösungen:

$$x_2 = \frac{1 + 7}{2} = 4$$

$$x_3 = \frac{1 - 7}{2} = -3$$

$\mathbb{L} = \{-3; 1; 4\}$

Aufgabe 177:

Bestimmen Sie Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$2x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

Lösung:

Es muss als erstes eine ganzzahlige Lösung gefunden werden. Dies geschieht durch einsetzen verschiedener x-Werte in die Gleichung.

$x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 = 0 \rightarrow \text{wahre Aussage}$

$$
\begin{array}{l}
\quad (2x^3 - 6x^2 + 8) : (x - 2) = 2x^2 - 2x - 4 \\
\underline{-(2x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\quad -2x^2 \qquad\quad + 8 \\
\underline{\qquad\quad -(-2x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad\qquad -4x + 8 \\
\underline{\qquad\qquad\qquad -(-4x + 8)} \\
\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -}
\end{array}
$$

$2x^2 - 2x - 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 6}{4}$$

Weiteren Lösungen:

$$x_2 = \frac{2 + 6}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{2 - 6}{4} = -1$$

$\mathbb{L} = \{-1; 2\}$

Wurzelgleichungen

Aufgabe 178:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt{x+6} = 3$

Lösung:

$\sqrt{x+6} = 3 \quad |(\quad)^2$

$x + 6 = 9 \quad | - 6$

$x = 3$

Probe:

$\sqrt{3+6} = 3$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 179:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt{x+4} = 8$

Lösung:

$\sqrt{x+4} = 8 \quad |(\quad)^2$

$x + 4 = 64 \quad | - 4$

$x = 60$

Probe:

$\sqrt{60+4} = 8$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{60\}$

Aufgabe 180:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$3 \cdot \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+207}$

Lösung:

$3 \cdot \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+207} \quad |(\quad)^3$

$27(x-1) = x + 207$

$27x - 27 = x + 207 \quad | - x$

$26x - 9 = 207 \quad | + 27$

$26x = 234 \quad |: 26$

$x = 9$

Probe:

$3 \cdot \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+207}$

$3 \cdot \sqrt[3]{9-1} = \sqrt[3]{9+207}$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{9\}$

Aufgabe 181:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$4\sqrt{x-7} = \sqrt{x+8}$

Lösung:

$4\sqrt{x-7} = \sqrt{x+8} \quad |(\quad)^2$

$16(x-7) = x+8$

$16x - 112 = x + 8 \quad | - x$

$15x - 112 = 8 \quad | + 112$

$15x = 120 \quad |: 15$

$x = 8$

Probe:

$4\sqrt{x-7} = \sqrt{x+8}$

$4\sqrt{8-7} = \sqrt{8+8}$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{8\}$

Aufgabe 182:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt{x-5} - \sqrt{x+7} = -2$

Lösung:

$\sqrt{x-5} - \sqrt{x+7} = -2 \quad | + \sqrt{x+7}$

$\sqrt{x-5} = -2 + \sqrt{x+7} \quad |(\quad)^2$

$x - 5 = \left(-2 + \sqrt{x+7}\right)^2$

$x - 5 = 4 - 4\sqrt{x+7} + x + 7$

$x - 5 = x + 11 - 4\sqrt{x+7} \quad | - x$

$-5 = 11 - 4\sqrt{x+7} \quad | -11$

$-16 = -4\sqrt{x+7} \quad |(\quad)^2$

$256 = 16(x+7)$

$256 = 16x + 112 \quad | -112$

$16x = 144 \quad |:16$

$x = 9$

Probe:

$\sqrt{x-5} - \sqrt{x+7} = -2$

$\sqrt{9-5} - \sqrt{9+7} = -2$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{9\}$

Aufgabe 183:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt{x+5} - 3 = \sqrt{x+32}$

Lösung:

$\sqrt{x+5} - 3 = \sqrt{x+32} \quad |(\quad)^2$

$\left(\sqrt{x+5} - 3\right)^2 = x + 32$

$x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9 = x + 32 \quad | -x$

$14 - 6\sqrt{x+5} = 32 \quad | -14$

$-6\sqrt{x+5} = 18 \quad |:(-6)$

$\sqrt{x+5} = -3 \quad |(\quad)^2$

$x + 5 = 9 \quad | -5$

$x = 4$

Probe:

$\sqrt{x+5} - 3 = \sqrt{x+32}$

$\sqrt{4+5} - 3 = \sqrt{4+32}$

$0 = 6$

Probe stimmt nicht

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

Aufgabe 184:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt{x-6}-2=\sqrt{x+10}$

Lösung:

$\sqrt{x-6}-2=\sqrt{x+10} \quad |(\quad)^2$

$\left(\sqrt{x-6}-2\right)^2=x+10$

$x-6-4\sqrt{x-6}+4=x+10 \quad |-x$

$-2-4\sqrt{x-6}=10 \quad |+2$

$-4\sqrt{x-6}=12 \quad |:(-4)$

$\sqrt{x-6}=-3 \quad |(\quad)^2$

$x-6=9 \quad |+6$

$x=15$

Probe:

$\sqrt{x-6}-2=\sqrt{x+10}$

$\sqrt{15-6}-2=\sqrt{15+10}$

$1=5$

Probe stimmt nicht

$\mathbb{L}=\{\quad\}$

Aufgabe 185:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+6}=12$

Lösung:

$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+6}=12$

$\sqrt{(x-1)\cdot(x+6)}=12$

$\sqrt{x^2+5x-6}=12 \quad |(\quad)^2$

$x^2+5x-6=144 \quad |-144$

$x^2+5x-150=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-150)}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm25}{2}$$

$$x_1=\frac{-5\pm25}{2}=10$$

$x_2 = \frac{-5-25}{2} = -15$

Probe:

$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+6} = 12$

$x_1 = 10$

$\sqrt{10-1} \cdot \sqrt{10+6} = 12$

$3 \cdot 4 = 12$

Wahre Aussage

Probe:

$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+6} = 12$

$x_2 = 15$

$\sqrt{-15-1} \cdot \sqrt{-15+6} = 12$

Wurzel negativ, ergibt keine wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{10\}$

Aufgabe 186:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt[3]{x-5} \cdot \sqrt[3]{x+2} = 2$

Lösung:

$\sqrt[3]{x-5} \cdot \sqrt[3]{x+2} = 2$

$\sqrt[3]{(x-5) \cdot (x+2)} = 2$

$\sqrt[3]{x^2 - 3x - 10} = 2 \quad |(\quad)^3$

$x^2 - 3x - 10 = 8 \quad | - 8$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$

$x_1 = \frac{+3+9}{2} = 6$

$x_2 = \frac{+3-9}{2} = -3$

Probe:

$x_1 = 6$

$\sqrt[3]{x-5} \cdot \sqrt[3]{x+2} = 2$

$\sqrt[3]{6-5} \cdot \sqrt[3]{6+2} = 2$

$2 = 2$

Die Aussage ist wahr.

$x_2 = -3$

$\sqrt[3]{x-5} \cdot \sqrt[3]{x+2} = 2$

$\sqrt[3]{-3-5} \cdot \sqrt[3]{-3+2} = 2$

Wurzel negativ, ergibt keine wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{6\}$

Aufgabe 187:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt{5x+29} = \sqrt{x+9} + 2\sqrt{x-3}$

Lösung:

$\sqrt{5x+29} = \sqrt{x+9} + 2\sqrt{x-3} \quad |(\quad)^2$

$5x + 29 = x + 9 + 4\sqrt{x+9} \cdot \sqrt{x-3} + 4(x-3)$

$5x + 29 = 5x - 3 + 4\sqrt{x^2 + 6x - 27} \quad | - 5x$

$+29 = -3 + 4\sqrt{x^2 + 6x - 27} \quad | + 3$

$32 = 4\sqrt{x^2 + 6x - 27} \quad |: 4$

$8 = \sqrt{x^2 + 6x - 27} \quad |(\quad)^2$

$64 = x^2 + 6x - 27 \quad | - 64$

$x^2 + 6x - 91 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 91}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 20}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+20}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{-6-20}{2} = -13$$

Probe:

$x_1 = 7$

$\sqrt{5x+29} = \sqrt{x+9} + 2\sqrt{x-3}$

$\sqrt{5 \cdot 7 + 29} = \sqrt{7+9} + 2\sqrt{7-3}$

$8 = 4 + 4$

$8 = 8$

Wahre Aussage

$x_2 = -13$

$\sqrt{5x+29} = \sqrt{x+9} + 2\sqrt{x-3}$

$\sqrt{5\cdot(-13)+29} = \sqrt{-13+9} + 2\sqrt{-13-3}$

Wurzel negativ, ergibt keine wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{7\}$

Aufgabe 188:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$$\sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 2$$

Lösung:

$\sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 2 \quad |(\quad)^2$

$x+\sqrt{x-2} = 4 \quad |-x$

$\sqrt{x-2} = 4-x \quad |(\quad)^2$

$x-2 = (4-x)^2$

$x-2 = 16-8x+x^2 \quad |-x$

$x^2-9x+16 = -2 \quad |+2$

$x^2-9x+18 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot18}}{2\cdot1}$$

$$x_1 = \frac{9+3}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{9-3}{2} = 3$$

Probe:

$x_1 = 6$

$\sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 2$

$\sqrt{6+\sqrt{6-2}} = 2$

$\sqrt{8} = 2$

Keine wahre Aussage

$x_2 = 3$

$\sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 2$

$$\sqrt{3+\sqrt{3}-2}=2$$

$$2=2$$

Wahre Aussage

$$\mathbb{L}=\{3\}$$

Aufgabe 189:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$$\sqrt{2x+\sqrt{7x+4}}=\sqrt{3x+2}$$

Lösung:

$$\sqrt{2x+\sqrt{7x+4}}=\sqrt{3x+2} \quad |(\quad)^2$$

$$2x+\sqrt{7x+4}=3x+2 \quad |-2x$$

$$\sqrt{7x+4}=x+2 \quad |(\quad)^2$$

$$7x+4=(x+2)^2$$

$$7x+4=x^2+4x+4 \quad |-7x$$

$$4=x^2-3x+4 \quad |-4$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

$$x_1=0$$

$$x_2=3$$

Probe:

$$\sqrt{2x+\sqrt{7x+4}}=\sqrt{3x+2}$$

$$x_1=0$$

$$\sqrt{2\cdot 0+\sqrt{7\cdot 0+4}}=\sqrt{3\cdot 0+2}$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

Wahre Aussage

$$\sqrt{2x+\sqrt{7x+4}}=\sqrt{3x+2}$$

$$x_2=3$$

$$\sqrt{2\cdot 3+\sqrt{7\cdot 3+4}}=\sqrt{3\cdot 3+2}$$

$\sqrt{11} = \sqrt{11}$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{0; 3\}$

Aufgabe 190:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichung.

$\sqrt[4]{x+2} = \sqrt[8]{4x+8}$

Lösung:

$\sqrt[4]{x+2} = \sqrt[8]{4x+8} \quad |(\quad)^8$

$(x+2)^2 = 4x+8$

$x^2 + 4x + 4 = 4x + 8 \quad | - 4x$

$x^2 + 4 = 8 \quad | - 8$

$x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2) = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Probe:

$\sqrt[4]{x+2} = \sqrt[8]{4x+8}$

$x_1 = 2$

$\sqrt[4]{2+2} = \sqrt[8]{4 \cdot 2 + 8}$

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[8]{16}$

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4}$

Wahre Aussage

$\sqrt[4]{x+2} = \sqrt[8]{4x+8}$

$x_2 = -2$

$\sqrt[4]{-2+2} = \sqrt[8]{4 \cdot (-2) + 8}$

$0 = 0$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{\pm 2\}$

Ungleichungen

Aufgabe 191:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$3x + 4 < 5(2 - x) + 18x$

Lösung:

$3x + 4 < 5(2 - x) + 18x$

$3x + 4 < 10 - 5x + 18x$

$3x + 4 < 10 + 13x \quad | - 13x$

$-10x + 4 < 10 \quad | - 4$

$-10x < 6 \quad |:(-10)$

$x > -\frac{6}{10}$

$\mathbb{L} = \left\{x | x > -\frac{6}{10}\right\}$

Aufgabe 192:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$810x - 13 + 45(34 - 18x) < 1354$

Lösung:

$810x - 13 + 45(34 - 18x) < 1354$

$810x - 13 + 1530 - 810x < 1354$

$1517 < 1354$

Diese Bedingung stimmt nicht, es handelt sich um eine Ungleichung für die es keine Lösung gibt.

$\mathbb{L} = \{ \quad \}$

Aufgabe 193:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$x^2 - 3x + 11 \leq 0$

Lösung:

$x^2 - 3x + 11 \leq 0$

Lösen der linken Seite durch Faktorisierung.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1}$$

Die Wurzel ist negativ, es gibt keine Lösung für diese quadratische Gleichung und man findet keinen Wert, mit dem man die Gleichung gültig machen könnte.

$\mathbb{L} = \{\ \ \}$

Aufgabe 194:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$2x^2 + 2x + 5 > 0$

Lösung:

$2x^2 + 2x + 5 > 0$

Die drei Faktoren auf der linken Seite sind auf jeden Fall immer positiv, damit ist diese Ungleichung für alle Werte erfüllt.

$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

Aufgabe 195:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$x^2 - 3x \geq 0$

Lösung:

$x^2 - 3x \geq 0$

$x(x - 3) \geq 0$

$\mathbb{L} = \{]-\infty; 0] \cup [3: \infty[\}$

Aufgabe 196:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$x^2 - 2x - 4 \geq 0$

Lösung:

$x^2 - 2x - 4 \geq 0$

Lösen der linken Seite durch Faktorisierung.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$x^2 - 2x - 4 \geq 0$

$\mathbb{L} = \{]-\infty; 1 - \sqrt{5}] \cup [1 + \sqrt{5}: \infty[\}$

Aufgabe 197:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$$\frac{x-2}{x-5} \geq 0$$

Lösung:

$$\frac{x-2}{x-5} \geq 0$$

Hier muss eine Fallunterscheidung gemacht werden.

1. Fall:

Der Nenner ist positiv.

$x - 5 > 0$

$x > 5$

$\frac{x-2}{x-5} \geq 0 \quad | \cdot (x-5)$

$x - 2 \geq 0 \;| + 2$

$x \geq 2$

Mit $x > 5$ und $x \geq 2$ ergibt sich $x > 5$.

2. Fall:

Der Nenner ist negativ.

$x - 5 < 0$

$x < 5$

$\frac{x-2}{x-5} \geq 0 \quad | \cdot -(x-5)$

$x - 2 \leq 0 \quad | + 2$

$x \leq 2$

Mit $x < 5$ und $x \leq 2$ ergibt sich $x < 5$.

$\mathbb{L} = \{x | x \leq 2 \cup x > 5\}$

Aufgabe 198:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq 0$$

Lösung:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq 0$$

Hier muss eine Fallunterscheidung gemacht werden.

1. Fall:

Für $\mathrm{x} < -1$ sind beide Nenner negativ.

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq 0 \quad | + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} \quad | \cdot x$$

$$\frac{x}{x+1} \geq \frac{x}{x} \quad | \cdot x$$

$$\frac{x}{x+1} \geq 1 \quad | \cdot (x+1)$$

$$\frac{x}{x+1} \geq 1 \quad | \cdot (x+1)$$

$$x \leq (x+1) \quad | - x$$

$$0 \leq 1$$

Dies ist eine wahre Bedingung, also gilt für diesen Fall:

$x < -1 \in \mathbb{L}$

2. Fall:

Für $-1 < x < 0$ ist nur der zweite Nenner negativ.

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} \quad | \cdot x$$

$$\frac{x}{x+1} \geq 1 \quad | \cdot (x+1)$$

$$x \geq (x+1) \quad | - x$$

$$0 \geq 1$$

Dies ist eine falsche Bedingung, also ist $-1 < x < 0 \ \notin \ \mathbb{L}$

3. Fall:

Für $x > 0$ sind beide Nenner positiv.

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} \quad | \cdot x$$

$$\frac{x}{x+1} \leq 1 \quad | \cdot (x+1)$$

$$x \leq (x+1) \quad | - x$$

$$0 \leq 1$$

$x > 0 \in \mathbb{L}$

$\mathbb{L} = \{x|x < -1 \cup x > 0\}$

Aufgabe 199:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$$\frac{x}{x-1} < 1$$

Lösung:

$$\frac{x}{x-1} < 1$$

1. Fall:

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$\frac{x}{x-1} < 1 \quad |\cdot (x-1)$

$x < (x-1) \quad |-x$

$0 < -1$

Dies ist eine falsche Bedingung, also ist $x > 1 \notin \mathbb{L}$

2. Fall:

$x - 1 < 0$

$x < 1$

$\frac{x}{x-1} < 1 \quad |\cdot (x-1)$

$x > (x-1) \quad |-x$

$0 > -1$

Dies ist eine wahre Bedingung, also gilt für diesen Fall:

$x < 1$ ist in der Lösungsmenge enthalten.

$\mathbb{L} = \{x|x < 1\}$

Aufgabe 200:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$$\frac{4x+1}{3x-2} > 5$$

Lösung:

$$\frac{4x+1}{3x-2} > 5$$

1. Fall:

$3x - 2 > 0$

$x > \frac{2}{3}$

$\frac{4x + 1}{3x - 2} > 5 \quad | \cdot (3x - 2)$

$4x + 1 > 5(3x - 2)$

$4x + 1 > 15x - 10 \quad | - 15x$

$-11x + 1 > -10 \quad | - 1$

$-11x > -11 \quad |: (-11)$

$x < 1$

$x \in]\frac{2}{3}; 1[$

2. Fall:

$3x - 2 < 0$

$x < \frac{2}{3}$

$\frac{4x + 1}{3x - 2} > 5 \quad | \cdot (3x - 2)$

$4x + 1 < 5(3x - 2)$

$4x + 1 < 15x - 10 \quad | - 15x$

$-11x + 1 < -10 \quad | - 1$

$-11x < -11 \quad |: (-11)$

$x > 1$

Keine weiteren Lösungen.

$\mathbb{L} = \left\{x | x \in]\frac{2}{3}; 1[\right\}$

Aufgabe 201:

Geben sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

$$\frac{3}{4x - 4} \leq \frac{2}{x - 6}$$

Lösung:

$\frac{3}{4x - 4} \leq \frac{2}{x - 6}$

1. Fall:

Für $x < 1$ beide sind negativ.

$\frac{3}{4x-4} \leq \frac{2}{x-6} \quad | \cdot (x-6)$

$\frac{3(x-6)}{4x-4} \geq 2 \quad | \cdot (4x-4)$

$3x - 18 \leq 2(4x-4)$

$3x - 18 \leq 8x - 8 \quad | - 8x$

$-5x - 18 \leq -8 \quad | + 18$

$-5x \leq 10 \quad |: (-5)$

$x \geq -2$

$x \in [-2; 1[$

2. Fall:

Für $1 < x < 6$ ist nur der zweite Nenner negativ.

$\frac{3}{4x-4} \leq \frac{2}{x-6} \quad | \cdot (x-6)$

$\frac{3(x-6)}{4x-4} \geq 2 \quad | \cdot (4x-4)$

$3x - 18 \geq 2(4x-4)$

$3x - 18 \geq 8x - 8 \quad | - 8x$

$-5x - 18 \geq -8 \quad | + 18$

$-5x \geq 10 \quad |: (-5)$

$x \leq -2$

Für x ergibt sich ein Widerspruch.

3. Fall:

Für $x > 6$ sind beide Nenner positiv.

$\frac{3}{4x-4} \leq \frac{2}{x-6} \quad | \cdot (x-6)$

$\frac{3(x-6)}{4x-4} \leq 2 \quad | \cdot (4x-4)$

$3x - 18 \leq 2(4x-4)$

$3x - 18 \leq 8x - 8 \quad | - 8x$

$-5x - 18 \leq -8 \quad | + 18$

$-5x \leq 10 \quad |: (-5)$

$x \geq -2$

$x \in]6; +\infty[$

$\mathbb{L} = \{x|x \in [-2; 1[\cup]6; +\infty[\}$

Betragsgleichungen

Aufgabe 202:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x| = 11$

Lösung:

Fall 1:

$+(x) = 11$

$x = 11$

Fall 2:

$-(x) = 11$

$x = -11$

$\mathbb{L} = \{\pm 11\}$

Aufgabe 203:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x - 12| = 12$

Lösung:

$|x - 12| = 12$

Fall 1:

$+(x - 12) = 12$

$x - 12 = 12$

$x = 24$

Fall 2:

$-(x - 12) = 12$

$-x + 12 = 12$

$x = 0$

$\mathbb{L} = \{0; 24\}$

Aufgabe 204:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x + 6| = 2$

Lösung:

$|x+6|=2$

Fall 1:

$+(x+6)=2$

$x+6=2$

$x=-4$

Fall 2:

$-(x+6)=2$

$-x-6=2$

$-x=8$

$x=-8$

$\mathbb{L}=\{-4;-8\}$

Aufgabe 205:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x+15|=25$

Lösung

$|x+15|=25$

Fall 1:

$+(x+15)=25$

$x+15=25$

$x=10$

Fall 2:

$-(x+15)=25$

$-x-15=25$

$-x=40$

$x=-40$

$\mathbb{L}=\{-40;10\}$

Aufgabe 206:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$2x-|3-x|=18$

Lösung

$2x-|3-x|=18$

Fall 1:

$2x-(+(3-x))=18$

$2x-3+x=18$

$3x-3=18$

$x=7$

Fall 2:

$2x-(-(3-x))=18$

$2x+3-x=18$

$x+3=18$

$x=15$

$\mathbb{L}=\{7;15\}$

Aufgabe 207:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$2x+|2x+4|=-4$

Lösung

$2x+|2\mathrm{x}+4|=-4$

Fall 1:

$2x+(+(2\mathrm{x}+4))=18$

$2x+2x+4=-4$

$4x+4=-4$

$x=-2$

Fall 2:

$2x+\left(-(2\mathrm{x}+4)\right)=-4$

$2x-2x-4=-48$

$0=0$

Ist immer gültig, wenn

$(2x+4)<0$

$2x<-4$

$x<-2$

Daraus ergibt sich folgende Lösung:

$\mathbb{L}=\{\mathrm{x}|\mathrm{x}\leq\ -2\}$

Aufgabe 208:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|3x + 6| - 2x = -5$

Lösung

$|3x + 6| - 2x = -5$

Fall 1:

$\left(+(3x + 6)\right) - 2x = -5$

$3x + 6 - 2x = -4$

$x + 6 = -5$

$x = -11$

Die Lösung ergibt im Betrag keine positive Zahl deshalb keine Lösung.

Fall 2:

$\left(-(3x + 6)\right) - 2x = -5$

$-3x - 6 - 2x = -5$

$-5x - 6 = -5$

$x = -\frac{1}{5}$

Ist immer gültig, wenn

$(2x + 4) < 0$

$2x < -4$

$x < -2$

Die Lösung ergibt im Betrag keine negative Zahl deshalb keine Lösung.

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

Aufgabe 209:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x^2 + 3x| = 4$

Lösung:

$|x^2 + 3x| = 4$

Fall 1:

$+(x^2 + 3x) = 4$

$x^2 + 3x = 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

Fall 2:

$-(x^2 + 3x) = 4$

$-x^2 - 3x = 4$

$-x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{R}$$

Keine weiteren Lösungen

$\mathbb{L} = \{-4; 1\}$

Aufgabe 210:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x^2 + 4x - 33| = 12$

Lösung:

$|x^2 + 4x - 33| = 12$

Fall 1:

$+(x^2 + 4x - 33) = 12$

$x^2 + 4x - 45 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (-45)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 14}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 14}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-4 - 14}{2} = -9$$

Fall 2:

$-(x^2 + 4x - 33) = 12$

$-x^2 - 4x + 33 = 12$

$-x^2 - 4x + 21 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (21)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{+4 \pm 10}{-2}$$

$$x_1 = \frac{+4 + 10}{-2} = -7$$

$$x_2 = \frac{+4 - 10}{-2} = 3$$

$\mathbb{L} = \{-9; -7; 3; 5\}$

Aufgabe 211:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x^2 + 10x - 27| = 48$

Lösung:

$|x^2 + +10x - 27| = 48$

Fall 1:

$+(x^2 + 10x - 27) = 48$

$x^2 + 10x - 75 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (-75)}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 20}{2}$$

$x_1 = \frac{-10 - 20}{2} = -15$

$x_2 = \frac{-10 + 20}{2} = 5$

Fall 2:

$-(x^2 + 10x - 27) = 48$

$-x^2 - 10x + 27 = 48$

$-x^2 - 10x - 21 = 0$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(100)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-21)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{10 \pm 4}{-2}$

$x_1 = \frac{10 + 4}{-2} = -7$

$x_2 = \frac{10 - 4}{-2} = -3$

$\mathbb{L} = \{-15; -7; -3; 5\}$

Aufgabe 212:

Ermitteln Sie die Lösung dieser Betragsgleichung.

$|x + 1| + 5 = |2x - 4|$

Lösung:

Es müssen vier Fälle unterschieden werden:

Im Fall 1 sind die Terme in den Betragszeichen beide nicht-negativ (größer oder gleich Null).

$|x + 1| + 5 = |2x - 4|$

$+(x + 1) + 5 = +(2x - 4)$

$x + 1 + 5 = 2x - 4$

$-x = -10$

$x = 10$

Im Fall 2 ist der Term im ersten Betragszeichen nicht-negativ, im zweiten aber negativ.

$|x + 1| + 5 = |2x - 4|$

$+(x + 1) + 5 = -(2x - 4)$

$x + 1 + 5 = -2x + 4$

$3x = -2$

$x = -\frac{2}{3}$

Im Fall 3 ist der Term im ersten Betragszeichen negativ, im zweiten aber nicht-negativ.

$|x + 1| + 5 = |2x - 4|$

$-(x + 1) + 5 = +(2x - 4)$

$-x - 1 + 5 = 2x - 4$

$-3x = -8$

$x = +\frac{8}{3}$

Erfüllt nicht die Bedingung, dass das erste Betragszeichen negativ sein soll, also keine Lösung.

Im Fall 4 sind die Terme in den Betragszeichen beide negativ

$|x + 1| + 5 = |2x - 4|$

$-(x + 1) + 5 = -(2x - 4)$

$-x - 1 + 5 = -2x + 4$

$x = 0$

Erfüllt nicht die Bedingung, dass das erste Betragszeichen negativ sein soll, also keine Lösung.

$\mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{3}; 10\right\}$

Betragsungleichungen

Aufgabe 213:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x| < 20$

Lösung:

$|x| < 20$

Fall 1:

$x \geq 0$

$x < 20$

Fall 2:

$x < 0$

$-x < 20$

$x > -20$

$\mathbb{L} = \{x \in \,]-20; 20[\}$

Aufgabe 214:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x - 20| < 6$

Lösung:

$|x - 20| < 6$

Fall 1:

$x - 20 \geq 0$

$+(x - 20) < 6$

$x - 20 < 6$

$x < 26$

Fall 2:

$x - 20 < 0$

$-(x - 20) < 6$

$-x + 20 < 6$

$-x < -14$

$x > 14$

$\mathbb{L} = \{x \in]14; 26[\}$

Aufgabe 215:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x - 6| \leq 20$

Lösung:

$|x - 6| \leq 20$

Fall 1:

$x - 6 \geq 0$

$+(x - 6) \leq 20$

$x - 6 \leq 20$

$x \leq 26$

Fall 2:

$x - 6 < 0$

$-(x - 6) \leq 20$

$-x + 6 \leq 20$

$-x \leq +14$

$x \geq -14$

$\mathbb{L} = \{x \in [-14; 26]\}$

Aufgabe 216:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x - 4| < 3$

Lösung:

$|x - 4| < 3$

Fall 1:

$x - 4 \geq 0$

$+(x - 4) < 3$

$x - 4 < 3$

$x < 7$

Fall 2:

$x-4<0$

$-(x-4)<3$

$-x+4<3$

$-x<-1$

$x>1$

$\mathbb{L}=\{x\in\,]1;7[\}$

Aufgabe 217:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|3x+2|\leq 26$

Lösung:

$|3x+2|\leq 26$

Fall 1:

$3x+2\geq 0$

$+(3x+2)\leq 26$

$3x+2\leq 26$

$x\leq 8$

Fall 2:

$3x+2<0$

$-(3x+2)\leq 26$

$-3x-2\leq 26$

$-3x\leq 28$

$x\geq -\frac{28}{3}$

$\mathbb{L}=\left\{x\in\left[-\frac{28}{3};8\right]\right\}$

Aufgabe 218:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x+6|<20$

Lösung:

$|x+6|<20$

Fall 1:

$x+6\geq 0$

$+(x+6) < 20$

$x+6 < 20$

$x < 14$

Fall 2:

$x+6 < 0$

$-(x+6) < 20$

$-x-6 < 20$

$-x < 26$

$x > -26$

$\mathbb{L} = \{x \in \,]-26;14[\}$

Aufgabe 219:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$2+|x+3| < 3$

Lösung:

$2+|x+3| < 3$

Fall 1:

$x+3 \geq 0$

$2+(x+3) < 3$

$2+x+3 < 3$

$x < -2$

Fall 2;

$x+3 < 0$

$2-(x+3) < 3$

$2-x-3 < 3$

$-x < 4$

$x > -4$

$\mathbb{L} = \{x \in \,]-4;-2[\}$

Aufgabe 220:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$2 \cdot |x-1| > 8$

Lösung:

$2 \cdot |x-1| > 8$

Fall 1:

$x-1 \geq 0$

$2(x-1) > 8$

$2x-2 > 8$

$2x > 10$

$x > 5$

Fall 2:

$-2(x-1) > 8$

$-2x+2 > 8$

$-2x > 6$

$x < -3$

$\mathbb{L} = \{x < -3 \vee x > 5\}$

Aufgabe 221:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x+1|-|2x-6|\leq 10$

Lösung:

Es müssen vier Fälle unterschieden werden:

Im Fall 1 sind die Terme in den Betragszeichen beide nicht-negativ (größer oder gleich Null).

$|\mathrm{x}+1|-|2\mathrm{x}-6|\leq 10$

$+(x+1)-(2x-6)\leq 10$

$x+1-2x+6\leq 10$

$-x\leq 3$

$x\geq -3$

Im Fall 2 ist der Term im ersten Betragszeichen nicht-negativ, im zweiten aber negativ.

$|\mathrm{x}+1|-|2\mathrm{x}-6|\leq 10$

$+(x+1)+(2x-6)\leq 10$

$x+1+2x-6\leq 10$

$3x\leq 15$

$x\leq 5$

Im Fall 3 ist der Term im ersten Betragszeichen negativ, im zweiten aber nicht-negativ.

$|\mathrm{x}+1|-|2\mathrm{x}-6|\leq 10$

$-(x+1)+(2x-6)\leq 10$

$-x-1-2x+6\leq 10$

$x\geq -\frac{3}{5}$

Erfüllt nicht die Bedingung, dass das erste Betragszeichen negativ sein soll, also keine Lösung.

Im Fall 4 sind die Terme in den Betragszeichen beide negativ

$|\mathrm{x}+1|-|2\mathrm{x}-6|\leq 10$

$-(x+1)-(2x-6)\leq 10$

$-x-1+2x-6\leq 10$

$x\leq 17$

$x\geq -5$

Die verschiedenen Lösungen ergeben die reellen Zahlen.

$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

Aufgabe 222:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$|x^2 - 4x + 2| \leq 2$

Lösung:

$|x^2 - 4x + 2| \leq 2$

Fall 1:

$x^2 - 4x + 2 \geq 0$

$x^2 - 4x + 2 \leq 2$

$x^2 - 4x \leq 0$

$x(x - 4) \leq 0$

$\mathbb{L} = \{[0; 4]\}$

Aufgabe 223:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$$\frac{2x}{|x + 1|} \geq 1$$

Lösung:

$$\frac{2x}{|x + 1|} \geq 1$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Fall 1:

$x + 1 \geq 0$

$$\frac{2x}{|x + 1|} \geq 1$$

$2\mathrm{x} \geq \mathrm{x} + 1$

$x \geq 1$

Fall 2:

$x + 1 < 0$

$$\frac{2x}{-(\mathrm{x} + 1)} \geq 1$$

$2x \leq -x - 1$

$x \leq -1$

$\mathbb{L} = \{x \geq 1 \vee x \leq -1\}$

Aufgabe 224:

Lösen Sie folgende Betragsungleichung.

$$\frac{x+3}{|2x-1|} \leq 2$$

Lösung:

$$\frac{x+3}{|2x-1|} \leq 2$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Fall 1:

$2x - 1 \geq 0$

$$\frac{x+3}{|2x-1|} \leq 2$$

$x + 3 \leq 2(2x - 1)$

$x + 3 \leq 4x - 2$

$-3x \leq -5$

$$x \geq \frac{5}{3}$$

Fall 2:

$2x - 1 < 0$

$$\frac{x+3}{|2x-1|} \leq 2$$

$$\frac{x+3}{-(2x-1)} \leq 2$$

$x + 3 \leq -4x + 2$

$5x \leq -1$

$$x \leq -\frac{1}{5}$$

$$\mathbb{L} = \left\{x \leq -\frac{1}{5} \vee x \geq \frac{5}{3}\right\}$$

Trigonometrische Gleichungen

Aufgabe 225:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Lösung:

$$\sin(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Laut der Formelsammlung:

$$\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Daraus ergibt sich eine erste Lösung:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{1}{4}\pi$$

Im zweiten Feld ergibt sich eine weitere Lösung:

$$x_2 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Im Definitionsbereich von $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ ergeben sich weitere Lösungen:

$$x_3 = x_1 - 2\pi = \frac{1}{4}\pi - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$$

$$x_4 = x_2 - 2\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$$

$$x_5 = x_1 + 2\pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$$

$$x_6 = x_2 + 2\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{5}{4}\pi;\ \frac{1}{4}\pi;\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Aufgabe 226:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq 2\pi$.

Lösung:

Aus

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

folgt

$$x' = 30° = \frac{1}{6}\pi$$

Da der Sinus nur im 3. und 4. Feld negativ ist, ergeben sich folgende Lösungen:

$$x_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right\}$$

Aufgabe 227:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = 0{,}3$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Lösung:

Der Taschenrechner liefert für das erste Feld:

$$x_1 = 1.266$$

Der Bereich geht von

$$-\pi \leq x \leq +\pi$$

Daraus ergibt sich die zweite Lösung:

$$x_2 = 0 - 1{,}266 = -1{,}266$$

$$\mathbb{L} = \{\pm 1{,}266\}$$

Aufgabe 228:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x) = -0{,}5$$

im Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Laut der Tabelle aus der Formelsammlung ergibt sich für die Gleichung eine erste Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Da der Kosinus im zweiten und im dritten Feld negativ ist:

$$x_2 = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

Da der Bereich von $-2\pi \leq x \leq +2\pi$ geht, existieren auch die entsprechenden negativen Lösungen.

$$\mathbb{L} = \left\{\pm\frac{2}{3}\pi; \pm\frac{4}{3}\pi\right\}$$

Aufgabe 229:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +\pi$.

Lösung:

$$3 \cdot \sin(x) = 4$$

$$\sin(x) = \frac{4}{3}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, weil alle Sinuswerte in dem Intervall $[-1; 1]$ liegen.

$$\mathbb{L} = \{\ \ \}$$

Aufgabe 230:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$\cos(x) = 0$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Der Kosinus ist laut Formelsammlung bei

$x_1 = \frac{1}{2}\pi$

und periodisch wieder bei

$x_2 = \frac{3}{2}\pi$

im vorgegebenen Bereich Null.

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right\}$

Aufgabe 231:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$\cos(x) = 0{,}8$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Erste Lösung mit dem Taschenrechner berechnet:

$x_1 = 0{,}644$

Diese Lösung befindet sich im ersten Feld,

und periodisch wieder bei

$x_2 = 2\pi - 0{,}644 = 5{,}639$

$\mathbb{L} = \{0{,}644; 5{,}639\}$

Aufgabe 232:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Erste Lösung mit dem Taschenrechner berechnet:

$x_1 = 2{,}186$

Diese Lösung befindet sich im zweiten Feld,

und periodisch wieder bei

$x' = \pi - 2{,}186 = 0{,}956$

$x_2 = \pi + 0{,}956 = 4{,}096$

$\mathbb{L} = \{0{,}956; 4{,}096\}$

Aufgabe 233:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$\tan(x) = -\sqrt{3}$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Aus der Formelsammlung der gibt sich die erste Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Geht man eine Periode zurück, so erhält man eine weiter Lösung:

$$x_2 = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi$$

Geht man von der x1-Lösung eine Periode vorwärts, so erhält man eine weitere Lösung:

$$x_3 = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Aufgabe 234:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-3 \leq x \leq 12$.

Lösung:

Substitution:

$u = \frac{\pi}{6}x$

damit ergibt sich:

$\cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Aus der Formelsammlung ergibt sich eine erste Lösung:

$u_1 = \frac{1}{6}\pi$

Rücksubstitution:

$u = \frac{\pi}{6}x$

$\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$

$x_1 = 1$

Der Kosinus ist im vierten Feld positiv, also ergibt sich eine weitere Lösung:

$u_2 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$

Rücksubstitution:

$u = \frac{\pi}{6}x$

$\frac{11}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$

$x_2 = 11$

Im positiven Bereich keine weiteren Lösungen mehr.

Im negativen Bereich ergibt sich eine weitere Lösung:

$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi$

Rücksubstitution:

$u = \frac{\pi}{6}x$

$-\frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}x$

$x_3 = -1$

Im negativen Bereich auch keine weiteren Lösungen mehr.

$\mathbb{L} = \{-1; 1; 11\}$

Aufgabe 235:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +4\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$$

damit ergibt sich:

$$\sin(u)=-\frac{1}{2}$$

Aus der Tabelle ergibt sich:

$$u'=\frac{1}{6}\pi$$

Negative Werte nimmt der Sinus im dritten und vierten Feld an. Daraus ergeben sich die ersten Lösungen:

$$u_1=\pi+\frac{1}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{7}{6}\pi=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{7}{6}\pi+\frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{x}{2}=\frac{14+3}{12}\pi$$

$$\frac{x}{2}=\frac{17}{12}\pi$$

$$x_1=\frac{17}{6}\pi$$

Die zweite Lösung:

$$u_2=2\pi-\frac{1}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{11}{6}\pi=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{22+3}{12}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{25}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{25}{6}\pi$$

Keine gültige Lösung, da außerhalb des definierten Bereiches.

Weitere Lösung:

$$u_3 = 0 - \frac{1}{6}\pi$$

$$u_3 = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{1}{6}\pi = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{-2+3}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{1}{6}\pi$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi\right\}$$

Aufgabe 236:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$u = x - \frac{\pi}{2}$

damit ergibt sich:

$\tan(u) = 2$

Mit Hilfe des Taschenrechners ergibt sich eine erste Lösung:

$u_1 = 1{,}107$

Rücksubstitution:

$u = x - \frac{\pi}{2}$

$1{,}107 = x - \frac{\pi}{2}$

$x = 1{,}107 + \frac{1}{2}\pi$

$x_1 = 2{,}678$

Eine Periode in den positiven Bereich:

$u_2 = 1{,}107 + \pi = 4{,}249$

Rücksubstitution:

$u = x - \frac{\pi}{2}$

$4{,}249 = x - \frac{\pi}{2}$

$x = 4{,}249 + \frac{1}{2}\pi$

$x_2 = 5{,}820$

Eine Periode in den negativen Bereich:

$u_2 = 1{,}107 - \pi = -2{,}035$

Rücksubstitution:

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

$$-2{,}035 = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x = -2{,}035 + \frac{1}{2}\pi$$

$$x_3 = -0{,}464$$

$$\mathbb{L} = \{-0{,}464; 2{,}678; 5{,}820\}$$

Aufgabe 237:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin(3x) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = 3x$$

$$\sin(u) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

Mit dem Taschenrechner erhalten wir eine erste Lösung:

$$u_1 = 0{,}593$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$

$$0{,}593 = 3x$$

$$x_1 = 0{,}198$$

Im zweiten Feld haben wir eine weitere Lösung:

$$u_2 = \pi - 0{,}593 = 2{,}549$$

Rücksubstitution:

$$u = 3x$$

$$2{,}549 = 3x$$

$$x_2 = 0{,}850$$

Da es sich im Original um eine gestauchte Funktion handelt, müssen wir hier unbedingt weitere Werte überprüfen:

$u_3 = u_1 + 2\pi = 0{,}593 + 2\pi = 6{,}876$

Rücksubstitution:

$u = 3x$

$6{,}876 = 3x$

$x_3 = 2{,}292$

$u_4 = u_2 + 2\pi = 2{,}549 + 2\pi = 8{,}832$

Rücksubstitution:

$u = 3x$

$8{,}832 = 3x$

$x_4 = 2{,}944$

$u_5 = u_1 + 4\pi = 0{,}593 + 4\pi = 13{,}159$

Rücksubstitution:

$u = 3x$

$13{,}159 = 3x$

$x_4 = 4{,}386$

$u_6 = u_2 + 4\pi = 2{,}549 + 4\pi = 15{,}115$

Rücksubstitution:

$u = 3x$

$15{,}115 = 3x$

$x_5 = 5{,}038$

$u_5 = u_1 + 6\pi = 0{,}593 + 6\pi = 19{,}443$

Rücksubstitution:

$u = 3x$

$19{,}443 = 3x$

$x_6 = 6{,}481$

Liegt nicht mehr im vorgegebenen Bereich, also auch keine Lösung mehr.

$\mathbb{L} = \{0{,}198; 0{,}850; 2{,}292; 2{,}944; 4{,}386; 5{,}038\}$

Aufgabe 238:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}$$

im Bereich von $0 \leq x \leq +3\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = \frac{2}{3}x$$

$$\sin(u) = -\frac{1}{2}$$

Aus der Formelsammlung erhält man den positiven Wert:

$$u' = \frac{1}{6}\pi$$

Der Sinus ist im dritten und vierten Feld negativ, also ergeben sich folgende Lösungen:

$$u_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{7}{6}\pi = \frac{2}{3}x$$

$$x_1 = \frac{21}{12}\pi$$

$$x_1 = \frac{7}{4}\pi$$

$$u_1 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{2}{3}x$$

$$x_2 = \frac{33}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{11}{4}\pi$$

Im Bereich von 2π bis 3π gibt es keine weiteren Lösungen, da der Sinus dort positiv ist.

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi\right\}$$

Aufgabe 239:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos(x-1) = \frac{1}{4}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$$u = x - 1$$

$$\cos(u) = \frac{1}{4}$$

Mit Hilfe des Taschenrechners erhält man:

$$u_1 = 1{,}318$$

Rücksubstitution:

$$u = x - 1$$

$$1{,}318 = x - 1$$

$$x_1 = 1{,}318 + 1 = 2{,}318$$

$$x_1 = 2{,}318$$

Die nächste Lösung in positiver Richtung ergibt sich aus:

$$u_2 = 2\pi - 1{,}318 = 4{,}965$$

Rücksubstitution:

$$u = x - 1$$

$$4{,}965 = x - 1$$

$$x_2 = 4{,}965 + 1 = 5{,}965$$

$$x_2 = 5{,}965$$

Im negativen Bereich ergibt sich eine weitere Lösung:

$$u_3 = 0 - 1{,}318 = -1{,}318$$

Rücksubstitution:

$u = x - 1$

$-1{,}318 = x - 1$

$x_3 = -1{,}318 + 1 = -0{,}318$

$x_3 = -0{,}318$

$\mathbb{L} = \{-0{,}318; 2{,}318; 5{,}965\}$

Aufgabe 240:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichung

$$\cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

im Bereich von $-\pi \leq x \leq +2\pi$.

Lösung:

Substitution:

$u = x + \frac{5}{6}\pi$

$\cos(u) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Aus der Formelsammlung können wir den positiven Wert ablesen:

$u' = \frac{1}{6}\pi$

Der Kosinus ist im zweiten und dritten Bereich negativ, daraus ergeben sich folgende Lösungen:

$u_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

Rücksubstitution:

$u = x + \frac{5}{6}\pi$

$\frac{5}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$

$x_1 = 0$

$u_2 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

Rücksubstitution:

$$u_2 = x + \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{7}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\pi$$

Weiter in positiver Richtung:

$$u_3 = u_1 + 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_2 = x + \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{17}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$

$$x_3 = \frac{12}{6}\pi = 2\pi$$

$$x_3 = 2\pi$$

In positiver Richtung gibt es keine weiteren Lösungen.

In negativer Richtung finden wir eine weitere Lösung:

$$u_4 = -\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi$$

$$u_4 = -\frac{1}{6}\pi$$

Rücksubstitution:

$$u_4 = x + \frac{5}{6}\pi$$

$$-\frac{5}{6}\pi = x + \frac{5}{6}\pi$$

$$x_4 = -\frac{10}{6}\pi$$

Liegt nicht mehr im gültigen Bereich, also keine Lösung.

Exponentialgleichungen

Aufgabe 241:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$5^x = 125$

Lösung:

$5^x = 125$

$5^x = 5^3$

$x = 3$

Probe:

$5^x = 125$

$x = 3$

$5^3 = 125$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 242:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$25^{\mathrm{x}+2} = 125$

Lösung:

$25^{\mathrm{x}+2} = 125$

$(5^2)^{\mathrm{x}+2} = 125$

$5^{2\mathrm{x}+4} = 5^3$

$2\mathrm{x} + 4 = 3 \quad | - 4$

$2\mathrm{x} = -1 \quad |: 2$

$\mathrm{x} = -\frac{1}{2}$

Probe:

$25^{\mathrm{x}+2} = 125$

$\mathrm{x} = -\frac{1}{2}$

$25^{-\frac{1}{2}+2} = 125$

$125 = 125$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Aufgabe 243:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$2^{x-10} = 3.125$

Lösung:

$2^{x-10} = 3.125 \quad |\ln(\quad))$

$\ln\left(2^{x-10}\right) = \ln(3.125)$

$(x-10) \cdot \ln(2) = \ln(3.125) \quad |:\ln(2))$

$x - 10 = \frac{\ln(3.125)}{\ln(2)} \quad |+10$

$x = \frac{\ln(3.125)}{\ln(2)} + 10$

$x = 21{,}61$

Probe:

$2^{x-10} = 3.125$

$x = \frac{\ln(3.125)}{\ln(2)} + 10$

$2^{\frac{\ln(3.125)}{\ln(2)}+10-10} = 3.125$

$2^{\frac{\ln(3.125)}{\ln(2)}} = 3.125$

$3.125 = 3.125$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \left\{\frac{\ln(3.125)}{\ln(2)} + 10\right\}$

Aufgabe 244:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$100^{x+1} = 128$

Lösung:

$100^{x+1} = 128 \quad | \ln(9)$

$\ln(100^{x+1}) = \ln(128)$

$(x+1) \cdot \ln(100) = \ln(128) \quad |: \ln(100))$

$x + 1 = \frac{\ln(128)}{\ln(100)} \quad | -1$

$x = \frac{\ln(128)}{\ln(100)} - 1$

$x = 0{,}054$

Probe:

$100^{x+1} = 128$

$x = \frac{\ln(128)}{\ln(100)} - 1$

$100^{\frac{\ln(128)}{\ln(100)}-1+1} = 128$

$100^{\frac{\ln(128)}{\ln(100)}} = 128$

$128 = 128$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \left\{\frac{\ln(128)}{\ln(100)} - 1\right\}$

Aufgabe 245:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$10^{2x+30} = 100^{6x}$

Lösung:

$10^{2x+30} = 100^{6x}$

$10^{2x+30} = (10^2)^{6x}$

$10^{2x+30} = 100^{12x}$

$2x + 30 = 12x \quad | -2x$

$10x = 30 \quad |: 10$

$x = 3$

Probe:

$10^{2x+30} = 100^{6x}$

$x = 3$

$10^{2 \cdot 3+30} = 100^{6 \cdot 3}$

$10^{36} = 100^{18}$

$10^{36} = 10^{36}$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 246:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$9^{x+2} = 27^{x-1}$

Lösung:

$9^{x+2} = 27^{x-1}$

$(3^2)^{x+2} = (3^3)^{x-1}$

$3^{2x+4} = 3^{3x-3}$

$2x + 4 = 3x - 3 \quad | - 2x$

$4 = x - 3 \quad | + 3$

$x = 7$

Probe:

$9^{x+2} = 27^{x-1}$

$x = 7$

$9^{7+2} = 27^{7-1}$

$9^9 = 27^6$

$3^{18} = 3^{18}$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{7\}$

Aufgabe 247:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$32^{x+1} = 16^{x-1}$

Lösung:

$32^{x+1} = 16^{x-1}$

$(2^5)^{x+1} = (2^4)^{x-1}$

$2^{5x+5} = 2^{4x-4}$

$5x + 5 = 4x - 4 \quad | - 4x$

$x + 5 = -4 \quad | - 5$

$x = -9$

Probe:

$32^{x+1} = 16^{x-1}$

$x = -9$

$32^{-9+1} = 16^{-9-1}$

$32^{-8} = 16^{-10}$

$2^{-40} = 2^{-40}$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{-9\}$

Aufgabe 248:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$8 \cdot 4^{x+3} = 16^{x+1} \cdot 8^{x+2}$

Lösung:

$8 \cdot 4^{x+3} = 16^{x+1} \cdot 8^{x+2}$

$2^3 \cdot (2^2)^{x+3} = (2^4)^{x+1} \cdot (2^3)^{x+2}$

$2^3 \cdot 2^{2x+6} = 2^{4x+4} \cdot 2^{3x+6}$

$2^{2x+9} = 2^{7x+10}$

$2x + 9 = 7x + 10 \quad | - 7x$

$-5x + 9 = 10 \quad | - 9$

$-5x = 1 \quad |: (-5)$

$$x = -\frac{1}{5}$$

Probe:

$8 \cdot 4^{x+3} = 16^{x+1} \cdot 8^{x+2}$

$$x = -\frac{1}{5}$$

$$8 \cdot 4^{-\frac{1}{5}+3} = 16^{-\frac{1}{5}+1} \cdot 8^{-\frac{1}{5}+2}$$

$$8 \cdot 4^{\frac{14}{5}} = 16^{\frac{4}{5}} \cdot 8^{\frac{9}{5}}$$

Wahre Aussage

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

Aufgabe 249:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$5^{4x} - 30 \cdot 5^{2x} + 125 = 0$

Lösung:

$5^{4x} - 30 \cdot 5^{2x} + 125 = 0$

Substitution:

$u = 5^{2x}$

$u^2 - 30u + 125 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 125}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm 20}{2}$$

$$u_1 = \frac{30 + 20}{2} = 25$$

$$u_2 = \frac{30 - 20}{2} = 5$$

Rücksubstitution:

$u = 5^{2x}$

$u_1 = 25$

$5^{2x} = 25$

$x_1 = 1$

$u = 5^{2x}$

$u_1 = 5$

$5^{2x} = 5$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Probe:

$5^{4x} - 30 \cdot 5^{2x} + 125 = 0$

$x_1 = 1$

$5^{4 \cdot 1} - 30 \cdot 5^{2 \cdot 1} + 125 = 0$

$625 - 750 + 125 = 0$

Wahre Aussage

$5^{4x} - 30 \cdot 5^{2x} + 125 = 0$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$5^{4\cdot\frac{1}{2}} - 30 \cdot 5^{2\cdot\frac{1}{2}} + 125 = 0$

$5^2 - 30 \cdot 5^1 + 125 = 0$

Wahre Ausage

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$

Aufgabe 250:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$2^{4x} - 2^{2x+6} + 1024 = 0$

Lösung:

$2^{4x} - 2^{2x+6} + 1024 = 0$

$2^{4x} - 2^{2x} \cdot 2^6 + 1024 = 0$

Substitution:

$u = 2^{2x}$

$u^2 - 64u + 1024 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{64 \pm \sqrt{(-64)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1024}}{2 \cdot 1} = \frac{64}{2} = 32$$

$u = 32$

Rücksubstitution:

$u = 32$

$u = 2^{2x}$

$32 = 2^{2x}$

$2^5 = 2^{2x}$

$5 = 2x \quad |:2$

$x = \frac{5}{2}$

Probe:

$2^{4x} - 2^{2x+6} + 1024 = 0$

$x = \frac{5}{2}$

$2^{4\cdot\frac{5}{2}} - 2^{2\cdot\frac{5}{2}+6} + 1024 = 0$

$2^{10} - 2^{11} + 1024 = 0$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Aufgabe 251:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$16^{x} - 512 \cdot 2^{2x} + 65536 = 0$

Lösung:

$16^{x} - 512 \cdot 2^{2x} + 65536 = 0$

$(2^{4})^{x} - 512 \cdot 2^{2x} + 65536 = 0$

$2^{4x} - 512 \cdot 2^{2x} + 65536 = 0$

Substitution:

$u = 2^{2x}$

$u^{2} - 512u + 65536 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} = \frac{512 \pm \sqrt{(-512)^{2} - 4 \cdot 1 \cdot 65536}}{2 \cdot 1} = \frac{512}{2} = 256$$

$u = 256$

Rücksubstitution:

$u = 2^{2x}$

$u = 256$

$256 = 2^{2x}$

$2^{8} = 2^{2x}$

$8 = 2x \quad |:2$

$x = 4$

Probe:

$16^{x} - 512 \cdot 2^{2x} + 65536 = 0$

$x = 4$

$16^{4} - 512 \cdot 2^{2 \cdot 4} + 65536 = 0$

$0 = 0$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{4\}$

Aufgabe 252:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$25^{10x} - 2 \cdot 5^{10x+2} + 625 = 0$

Lösung:

$25^{10x} - 2 \cdot 5^{10x+2} + 625 = 0$

$(5^2)^{10x} - 2 \cdot 5^{10x} \cdot 5^2 + 625 = 0$

$5^{20x} - 50 \cdot 5^{10x} + 625 = 0$

Substitution:

$5^{10x} = u$

$u^2 - 50u + 625 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 625}}{2 \cdot 1} = \frac{50}{2} = 25$$

$u = 25$

Rücksubstitution:

$u = 25$

$5^{10x} = u$

$5^{10x} = 25$

$x = \frac{1}{5}$

Probe:

$25^{10x} - 2 \cdot 5^{10x+2} + 625 = 0$

$x = 2$

$25^{10 \cdot \frac{1}{5}} - 2 \cdot 5^{10 \cdot \frac{1}{5} + 2} + 625 = 0$

$25^2 - 2 \cdot 5^4 + 625 = 0$

$0 = 0$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

Logarithmusgleichungen

Aufgabe 253:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$5 \cdot \log_3(\mathrm{x}) = 15$

Lösung:

$5 \cdot \log_3(\mathrm{x}) = 15 \quad |:5$

$\log_3(\mathrm{x}) = 3$

$x = 3^3$

$x = 27$

Probe:

$5 \cdot \log_3(27) = 15$

$15 = 15$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{27\}$

Aufgabe 254:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$2 \cdot \log_{27}(\mathrm{x}) = \frac{2}{3}$

Lösung:

$2 \cdot \log_{27}(\mathrm{x}) = \frac{2}{3} \quad |:2$

$\log_{27}(\mathrm{x}) = \frac{1}{3}$

$27^{\frac{1}{3}} = x$

$x = 3$

Probe:

$2 \cdot \log_{27}(3) = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Wahre Aussage:

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 255:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$\log_5(15x - 10) = \log_5(10x + 35)$

Lösung:

$\log_5(15x - 10) = \log_5(10x + 35)$

Beide Basen sind gleich, also kann der Numerus direkt verglichen werden:

$15x - 10 = 10x + 35 \quad | - 10x$

$5x - 10 = 35 \quad | + 10$

$5x = 45 \quad |:5$

$x = 9$

Probe:

$\log_5(15x - 10) = \log_5(10x + 35)$

$x = 9$

$\log_5(15 \cdot 9 - 10) = \log_5(10 \cdot 9 + 35)$

$\log_5(125) = \log_5(125)$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{9\}$

Aufgabe 256:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$2 \cdot \log_2(x - 1) = \log_2(3x + 1)$

Lösung:

$2 \cdot \log_2(x - 1) = \log_2(3x + 1)$

$\log_2(x - 1)^2 = \log_2(3x + 1)$

Die beiden Logarithmen besitzen die gleiche Basis, als kann der Numerus gleichgesetzt werden.

$(x - 1)^2 = 3x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 3x + 1 \quad | - 3x$

$x^2 - 5x + 1 = 1 \quad | - 1$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

Probe:

$2 \cdot \log_2(x-1) = \log_2(3x+1)$

$x_1 = 0$

$2 \cdot \log_2(0-1) = \log_2(3 \cdot 0 + 1)$

Keine wahre Aussage

$2 \cdot \log_2(x-1) = \log_2(3x+1)$

$x_2 = 5$

$2 \cdot \log_2(5-1) = \log_2(3 \cdot 5 + 1)$

$2 \cdot \log_2(4) = \log_2(16)$

$\log_2(4^2) = \log_2(16)$

$\log_2(16) = \log_2(16)$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{5\}$

Aufgabe 257:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$\log_{10}(20x^2 + 10x) = \log_{10}(50x)$

Lösung:

$\log_{10}(20x^2 + 10x) = \log_{10}(50x)$

Die beiden Logarithmen besitzen die gleiche Basis, als kann der Numerus gleichgesetzt werden.

$20x^2 + 10x = 50x \quad | -50x$

$20x^2 - 40x = 0$

$x(20x - 40) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

Probe:

$\log_{10}(20x^2 + 10x) = \log_{10}(50x)$

$x_1 = 0$

$\log_{10}(20 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0) = \log_{10}(50 \cdot 0)$

Keine wahre Aussage

$\log_{10}(20x^2 + 10x) = \log_{10}(50x)$

$x_2 = 2$

$\log_{10}(20 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2) = \log_{10}(50 \cdot 2)$

$\log_{10}(100) = \log_{10}(100)$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{2\}$

Aufgabe 258:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$\log_3(x^2 + x + 15) = \log_3(2x^2 + 2x + 3)$

Lösung:

$\log_3(x^2 + x + 15) = \log_3(2x^2 + 2x + 3)$

Die beiden Logarithmen besitzen die gleiche Basis, als kann der Numerus gleichgesetzt werden.

$x^2 + x + 15 = 2x^2 + 2x + 3 \quad | - x^2$

$x + 15 = x^2 + 2x + 3 \quad | - x$

$15 = x^2 + x + 3 \quad | - 15$

$x^2 + x - 12 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-1 - 7}{2} = -4$$

Probe:

$\log_3(x^2 + x + 15) = \log_3(2x^2 + 2x + 3)$

$x_1 = 3$

$\log_3(3^2 + 3 + 15) = \log_3(23^2 + 2 \cdot 3 + 3)$

$\log_3(27) = \log_3(27)$

Wahre Aussage

$\log_3(x^2 + x + 15) = \log_3(2x^2 + 2x + 3)$

$x_2 = -4$

$\log_3((-4)^2 - 4 + 15) = \log_3(2(-4)^2 + 2 \cdot (-4) + 3)$

$\log_3(27) = \log_3(27)$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{-4; 3\}$

Aufgabe 259:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$\log_2(3x - 1) + \log_2(x + 5) = 6$

Lösung:

$\log_2(3x - 1) + \log_2(x + 5) = 6$

$\log_2\big((3x - 1) \cdot (x + 5)\big) = 6$

$\log_2(3x^2 + 14x - 5) = 6$

$2^6 = 3x^2 + 14x - 5 \quad | - 64$

$3x^2 + 14x - 69 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-69)}}{2 \cdot 3} = \frac{-14 \pm 32}{6}$$

$$x_1 = \frac{-14 + 32}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-14 - 32}{6} = -\frac{46}{6} = -\frac{23}{3}$$

Probe:

$\log_2(3x - 1) + \log_3(x + 5) = 6$

$x_1 = 3$

$\log_2(3 \cdot 3 - 1) + \log_3(3 + 5) = 6$

$\log_2(8) + \log_3(8) = 6$

Wahre Aussage

$\log_2(3x - 1) + \log_3(x + 5) = 6$

$$x_2 = -\frac{23}{3}$$

$$\log_2\left(3 \cdot \left(-\frac{23}{3}\right) - 1\right) + \log_3\left(-\frac{23}{3} + 5\right) = 6$$

Keine wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 260:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$\log_2(2x - 2) + \log_2(x + 1) = \log_2(4x + 4)$

Lösung:

$\log_2(2x - 2) + \log_2(x + 1) = \log_2(4x + 4)$

$\log_2\big((2x - 2)(x + 1)\big) = \log_2(4x + 4)$

$\log_2(2x^2 - 2) = \log_2(4x + 4)$

Die beiden Logarithmen besitzen die gleiche Basis, als kann der Numerus gleichgesetzt werden.

$2x^2 - 2 = 4x + 4 \quad | - 4x$

$2x^2 - 4x - 2 = 4 \quad | - 4$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = \frac{4 + 8}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 8}{4} = -1$$

Probe:

$\log_2(2x - 2) + \log_2(x + 1) = \log_2(4x + 4)$

$x_1 = 3$

$\log_2(2 \cdot 3 - 2) + \log_2(3 + 1) = \log_2(4 \cdot 3 + 4)$

$\log_2(4) + \log_2(4) = \log_2(16)$

$\log_2(16) = \log_2(16)$

Wahre Aussage

$\log_2(2x - 2) + \log_2(x + 1) = \log_2(4x + 4)$

$x_2 = -1$

$\log_2(2 \cdot (-1) - 2) + \log_2(-1 + 1) = \log_2(4 \cdot (-1) + 4)$

Keine wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgabe 261:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$$\frac{4 \cdot \log_{10}(20x + 20) + 2}{4 \cdot \log_{10}(20x + 20) - 7} = 10$$

Lösung:

$$\frac{4 \cdot \log_{10}(20x + 20) + 2}{4 \cdot \log_{10}(20x + 20) - 7} = 10$$

Substitution:

$u = \log_{10}(20x + 20)$

$$\frac{4 \cdot u + 2}{4 \cdot u - 7} = 10 \quad | \cdot (4u - 7)$$

$4u + 2 = 10(4u - 7)$

$4u + 2 = 40u - 70 \quad | - 40u$

$-36u + 2 = -70 \quad | - 2$

$-36u = -72 \quad |: (-36)$

$u = 2$

Rücksubstitution:

$u = \log_{10}(20x + 20)$

$u = 2$

$2 = \log_{10}(20x + 20)$

$10^2 = 20x + 20 \quad | - 20$

$20x = 80 \quad |: 20$

$x = 4$

Probe:

$$\frac{4 \cdot \log_{10}(20x + 20) + 2}{4 \cdot \log_{10}(20x + 20) - 7} = 10$$

$x = 4$

$$\frac{4 \cdot \log_{10}(20 \cdot 4 + 20) + 2}{4 \cdot \log_{10}(20 \cdot 4 + 20) - 7} = 10$$

$$\frac{4 \cdot \log_{10}(100) + 2}{4 \cdot \log_{10}(100) - 7} = 10$$

$10 = 10$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{4\}$

Aufgabe 262:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichung.

$4 \cdot [\log_{10}(x+95)]^2 - 16 \cdot \log_{10}(x+95) = -16$

Lösung:

$4 \cdot [\log_{10}(x+95)]^2 - 16 \cdot \log_{10}(x+95) = -16$

Substitution:

$u = \log_{10}(x+95)$

$4 \cdot [u]^2 - 16 \cdot u = -16$

$4u^2 - 16u + 16 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{2 \cdot 4} = \frac{16}{8} = 2$$

$u = 2$

Rücksubstitution:

$u = \log_{10}(x+95)$

$u = 2$

$2 = \log_{10}(x+95)$

$10^2 = x + 95$

$100 = x + 95 \quad | -95$

$x = 5$

Probe:

$4 \cdot [\log_{10}(x+95)]^2 - 16 \cdot \log_{10}(x+95) = -16$

$x = 5$

$4 \cdot [\log_{10}(5+95)]^2 - 16 \cdot \log_{10}(5+95) = -16$

$-16 = -16$

Wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{5\}$

Lineare Algebra

Matrizen

Aufgabe 263:

Welchen Typ oder Ordnung besitzt die Matrix A und die Matrix B?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

A=Typ(2,3) und B=Typ(2,2)

Aufgabe 264:

Berechnen Sie die Spur der Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

-8

Aufgabe 265:

Multiplizieren Sie die Matrix B mit dem Skalar Ω=2

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\Omega \cdot B = \Omega \cdot \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 266:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizenaddition ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 267:

Transponieren Sie die Matrix A zu A^T.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 268:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizenaddition ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 269:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Addition A+B ist nicht erlaubt, da beiden nicht den gleichen Typ besitzen.

A: Typ(2,2)

B: Typ(3,2)

Aufgabe 270:

Führen Sie folgende Matrizensubtraktion A-B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Subtraktion überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 271:

Führen Sie folgende Matrizensubtraktion A-B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Subtraktion überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 272:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Lösung:

		1	-1
		-2	-10
2	3	-4	-32
4	5	-6	-54

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -32 \\ -6 & -54 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 273:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Geht nicht

Typ(2,3)xTyp(2,2)=> geht nicht

Aufgabe 274:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

			3	0
			1	2
			0	1
1	2	3	5	7
0	1	1	1	3

Aufgabe 275:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

			1	1	0	0
			0	1	1	0
			1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	2	1	0
0	1	1	1	2	2	1
1	1	1	2	3	2	1

Aufgabe 276:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $(A \cdot B) \cdot C$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

			0	1	1
			1	0	1
			0	1	0
1	2	1	2	2	3
0	1	0	1	0	1
1	1	-1	1	0	2

			1	1	1
			0	1	1
			1	1	0
2	2	3	5	7	4
1	0	1	2	2	1
1	0	2	3	3	1

Aufgabe 277:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $A \cdot (B \cdot C)$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

			1	1	1
			0	1	1
			1	1	0
0	1	1	1	2	1
1	0	1	2	2	1
0	1	0	0	1	1

			1	2	1
			2	2	1
			0	1	1
1	2	1	5	7	4
0	1	0	2	2	1
1	1	-1	3	3	1

Aufgabe 278:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1	-1	0		1	0	0	
1	1	2		0	1	0	(1)mal(-1)+(2)
2	-1	-1		0	0	1	(1)mal(-2)+(3)
1	-1	0		1	0	0	
0	2	2		-1	1	0	(2)und(3) tauschen
0	1	-1		-2	0	1	
1	-1	0		1	0	0	(2)+(1)
0	1	-1		-2	0	1	
0	2	2		-1	1	0	(2)mal(-2)+(3)
1	0	-1		-1	0	1	
0	1	-1		-2	0	1	
0	0	4		3	1	-2	(3)/4
1	0	-1		-1	0	1	(3)+(1)
0	1	-1		-2	0	1	(3)+(2)
0	0	1		0,75	0,25	-0,5	
1	0	0		-0,25	0,25	0,5	
0	1	0		-1,25	0,25	0,5	
0	0	1		0,75	0,25	-0,5	

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ -1{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 279:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

3	2	-1	1	0	0	(1)und (2)tauschen
1	0	3	0	1	0	
4	4	2	0	0	1	
1	0	3	0	1	0	
3	2	-1	1	0	0	(1)mal(-3)+(2)
4	4	2	0	0	1	(1)*(-4)+(3)
1	0	3	0	1	0	
0	2	-10	1	-3	0	(2)/2
0	4	-10	0	-4	1	(2)mal(-2)+(3)
1	0	3	0	1	0	
0	1	-5	0,5	-1,5	0	
0	0	10	-2	2	1	(3)/10
1	0	3	0	1	0	(3)mal(-3)+(1)
0	1	-5	0,5	-1,5	0	(3)mal(5)+(2)
0	0	1	-0,2	0,2	0,1	
1	0	0	0,6	0,4	-0,3	
0	1	0	-0,5	-0,5	0,5	
0	0	1	-0,2	0,2	0,1	

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 280:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

0	1	1		1	0	0	(1)und (2)tauschen
1	0	1		0	1	0	
1	1	0		0	0	1	
1	0	1		0	1	0	
0	1	1		1	0	0	
1	1	0		0	0	1	(1)*(-1)+(3)
1	0	1		0	1	0	
0	1	1		1	0	0	
0	1	-1		0	-1	1	(2)mal(-1)+(3)
1	0	1		0	1	0	
0	1	1		1	0	0	
0	0	-2		-1	-1	1	(3)/-2
1	0	1		0	1	0	(3)mal(-1)+(1)
0	1	1		1	0	0	(3)mal(-1)+(2)
0	0	1		0,5	0,5	-0,5	
1	0	0		-0,5	0,5	0,5	
0	1	0		0,5	-0,5	0,5	
0	0	1		0,5	0,5	-0,5	

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 281:

Berechnen Sie die Inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten-Methode.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Berechne die Determinante von A:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = 13$$

Berechne hierfür jeweils die Determinante der Matrix, welche entsteht, wenn du die i -te Zeile und j -te Spalte von A streichst. Versehe die Determinante mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$

$$a'_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \det(7)$$

$$= 7$$

$$a'_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \det(5)$$

$$= -5$$

$$a'_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \det(3)$$

$$= -3$$

$$a'_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \det(4)$$

$$= 4$$

Setze deine Berechnungen in die Zielformel ein und bilde anschließend die Transponierte:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^T$$

Transponiere, indem du alle Zeilen und Spalten vertauschst.

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 282:

Berechnen Sie die Inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten-Methode.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 5 & -1 & 8 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Berechne die Determinante von A:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 5 & -1 & 8 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -6 + 192 - 200 + 40 - 90 + 64 = 0$$

Es existiert keine inverse Matrix zu der Matrix A.

Aufgabe 283:

Berechnen Sie die Inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten-Methode.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Berechne die Determinante von A:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{Sarrus}}{=} -1 + 24 - 12 - 9 - 4 - 8 = -10$$

Berechne alle Einträge a'_{ij}:

Berechne hierfür jeweils die Determinante der Matrix, welche entsteht, wenn du die i-te Zeile und j-te Spalte von A streichst. Versehe die Determinante mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$

$$a'_{1,1} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= -1 - 8 = -9$$

$$a'_{1,2} = -\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= -(2 - 12) = 10$$

$$a'_{1,3} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= -4 - 3 = -7$$

$$a'_{2,1} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= -(-2 - 6) = 8$$

$$a'_{2,2} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 - 9 = -10$$

$$a'_{2,3} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -(2 - 6) = 4$$

$$a'_{3,1} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 8 - 3 = 5$$

$$a'_{3,2} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -(4 + 6) = -10$$

$$a'_{3,3} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 4 = 5$$

etze deine Berechnungen in die Zielformel ein und bilde anschließend die Transponierte:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ a'_{3,1} & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -9 & 10 & -7 \\ 8 & -10 & 4 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Transponiere, indem du alle Zeilen und Spalten vertauschst.

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -8 & -5 \\ -10 & 10 & 10 \\ 7 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 284:

Berechnen Sie die Inverse Matrix mit Hilfe der Adjunkten-Methode.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Berechne die Determinante von A:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -10$$

Berechne alle Einträge a'_{ij}:

Berechne hierfür jeweils die Determinante der Matrix, welche entsteht, wenn du die i -te Zeile und j -te Spalte von A streichst. Versehe die Determinante mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$

$$a'_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -12$$

$$a'_{1,2} = -\det \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -19$$

$$a'_{1,3} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= -11$$

$$a'_{2,1} = -\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -3$$

$$a'_{2,2} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -3$$

$$a'_{2,3} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= -1$$

$$a'_{3,1} = \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= 7$$

$$a'_{3,2} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= 14$$

$$a'_{3,3} = \det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$
$$= 7$$

Setze deine Berechnungen in die Zielformel ein und bilde anschließend die Transponierte:

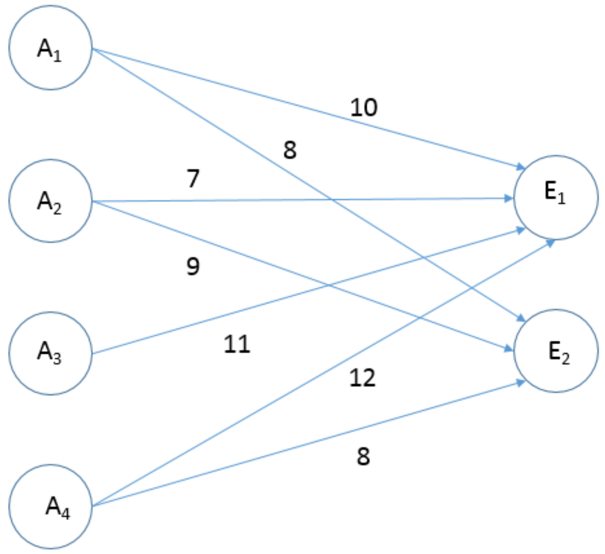
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3}\\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3}\\ a'_{3,1} & a'_{3,2} & a'_{3,3}\end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-7}\begin{pmatrix}-12 & -19 & -11\\ -3 & -3 & -1\\ 7 & 14 & 7\end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}12 & 19 & 11\\ 3 & 3 & 1\\ -7 & -14 & -7\end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 285:

Zwei Produkte E_1 und E_2 werden mit Hilfe von 4 Baugruppen A_1, A_2, A_3 und A_4 hergestellt. Die Beziehungen werden durch den folgenden Graphen dargestellt:



Ein Kunde bestellt 230 Stück von E_1 und 410 Stück von E_2. Wie viele Baugruppen braucht er dazu?

Lösung:

$$A_{B,E} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 9 \\ 11 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B_{E,S} = \begin{pmatrix} 230 \\ 410 \end{pmatrix}$$

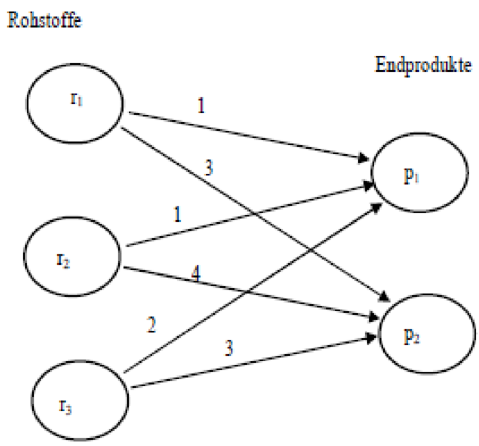
$A_{B,E} \cdot B_{E,S}$:

			230			
			410			
10	8		5580			
7	9		5300			
11	0		2530			
12	8		6040			

Man benötigt 5.580 von A_1, 5.300 von A_2, 2.530 von A_3 und 6.400 von A_4.

Aufgabe 286:

Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Der folgende Graph gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in Euro werden durch den Vektor $\vec{K} = (5; 34; 23)$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert einer Bestellung von 6 ME P_1 und 3 ME P_2?

Lösung:

$$A_{R,P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ A^T_{P,R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B_{K,R} = \begin{pmatrix} 5 & 34 & 23 \end{pmatrix};\ B^T_{R,K} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$A^T_{P,R} \cdot B^T_{R,K}$:

			5
			34
			23
1	1	2	85
3	4	3	220

$$C_{P,K} = \begin{pmatrix} 85 \\ 220 \end{pmatrix}$$

$$C^T_{K,P} = \begin{pmatrix} 85 & 220 \end{pmatrix}$$

$$D_{P,M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$C^T_{K,P} \cdot D_{P,M}$:

		6
		3
85	220	1170

Der Gesamtwert beträgt 1170 Euro.

Aufgabe 287:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizenaddition ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 288:

Transponieren Sie die Matrix A zu A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 289:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix};\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizenaddition ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 290:

Führen Sie folgende Matrizenaddition A+B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Addition überhaupt durchführbar ist.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Addition A+B ist nicht erlaubt, da beiden nicht den gleichen Typ besitzen.

A: Typ(2,2)

B: Typ(2,3)

Aufgabe 291:

Führen Sie folgende Matrizensubtraktion A-B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Subtraktion überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizensubtraktion ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \\ -6 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 292:

Führen Sie folgende Matrizensubtraktion A-B durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Subtraktion überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Matrizensubtraktion ist auf jeden Fall durchführbar, wenn der Typ (Zeilen, Spalten) übereinstimmt.

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 293:

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Multiplikation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

				0	1
				2	3
				2	4
5	1	-3		-4	-4
2	-2	5		6	16
0	2	7		18	34

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 16 \\ 18 & 34 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 294:

Führen Sie folgende Rechenoperation A^2 mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Bedingung:

$\text{Typ}(3,2) \cdot \text{Typ}(3,2)$

Kann nicht multipliziert werden.

Aufgabe 295:

Führen Sie folgende Rechenoperation A^2 mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperation überhaupt durchführbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Bedingung:

$\text{Typ}(3{,}3) \cdot \text{Typ}(3{,}3)$

Kann multipliziert werden.

			1	2	3
			3	2	1
			2	3	1
1	2	3	13	15	8
3	2	1	11	13	12
2	3	1	13	13	10

Aufgabe 296:

Führen Sie folgende Rechenoperationen $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperationen überhaupt durchführbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Auch hier muss zuerst die Klammer berechnet werden.

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

			-2	1
			6	2
2	5		26	12
1	-1		-8	-1

		3	-3
		-2	-1
26	12	54	-90
-8	-1	-22	25

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

			3	-3
			-2	-1
-2	1		-8	5
6	2		14	-20

			-8	5
			14	-20
2	5		54	-90
1	-1		-22	25

Aufgabe 297:

Führen Sie folgende Rechenoperationen $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot\mathrm{C}$ und $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}+\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$

mit Matrizen durch. Überprüfen Sie bitte, ob die Rechenoperationen überhaupt durchführbar sind.

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$; $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

Lösung:

$A+B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 7 & 1\end{pmatrix}$

			3	-3
			-2	-1
0	6		-12	-6
7	1		19	-22

$A\cdot C$:

			3	-3
			-2	-1
2	5		-4	-11
1	-1		5	-2

$B\cdot C$:

			3	-3
			-2	-1
-2	1		-8	5
6	2		14	-20

$A\cdot C+B\cdot C=\begin{pmatrix}-4 & -11\\ 5 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 5\\ 14 & -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -6\\ 19 & -22\end{pmatrix}$

Aufgabe 298:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

2	1	0		1	0	0	(1) und (3) tauschen
1	1	1		0	1	0	
1	0	2		0	0	1	
1	0	2		0	0	1	
1	1	1		0	1	0	(1)mal (-1)+(2)
2	1	0		1	0	0	(1)mal(-2)+(3)
1	0	2		0	0	1	
0	1	-1		0	1	-1	(2)mal(-1)+(3)
0	1	-4		1	0	-2	
1	0	2		0	0	1	
0	1	-1		0	1	-1	
0	0	-3		1	-1	-1	(3)/(-3)
1	0	2		0	0	1	(3)mal(-2)+(1)
0	1	-1		0	1	-1	(3)-(2)
0	0	1		-1/3	1/3	1/3	
1	0	0		2/3	-2/3	1/3	
0	1	0		-1/3	4/3	-2/3	
0	0	1		-1/3	1/3	1/3	

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 299:

Bilden Sie von der Matrix A die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{7}{30} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{7}{30} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$$

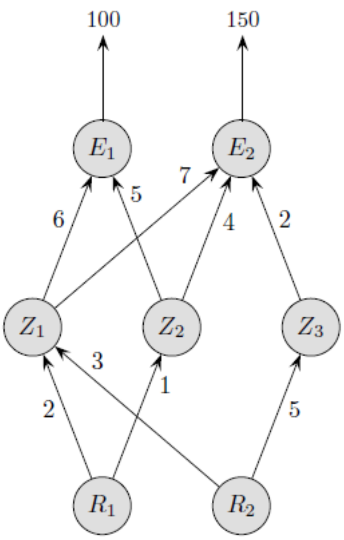
Lösung:

1/6	1/30	7/30	1	0	0	(1)mal (30)
1/6	-1/6	-1/6	0	1	0	(2)mal (6)
-1/6	-7/30	11/30	0	0	1	(3)mal (30)
5	1	7	30	0	0	(1) und (2) tauschen
1	-1	-1	0	6	0	
-5	-7	11	0	0	30	
1	-1	-1	0	6	0	
5	1	7	30	0	0	(1)mal(-5)+(2)
-5	-7	11	0	0	30	(1)mal(5)+(3)
1	-1	-1	0	6	0	(2)/6+(1)
0	6	12	30	-30	0	(2)/6
0	-12	6	0	30	30	(2)mal(2)+(3)
1	0	1	5	1	0	
0	1	2	5	-5	0	
0	0	30	60	-30	30	(3)/30
1	0	1	5	1	0	(3)mal(-1)+(1)
0	1	2	5	-5	0	(3)mal(-2)+(2)
0	0	1	2	-1	1	
1	0	0	3	2	-1	
0	1	0	1	-3	-2	
0	0	1	2	-1	1	

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 300:

Wie viel Rohstoffe R_1 und R_2 werden benötigt um 100 Endprodukte E_1 und 150 Endprodukte E_2 herzustellen?



Lösung:

$$A_{R,Z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{R,Z} \cdot B_{Z,E}$:

			6	7
			5	4
			0	2
2	1	0	17	18
3	0	5	18	31

$$C_{R,E} = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

$$D_{E,S} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$C_{R,E} \cdot D_{E,S}$:

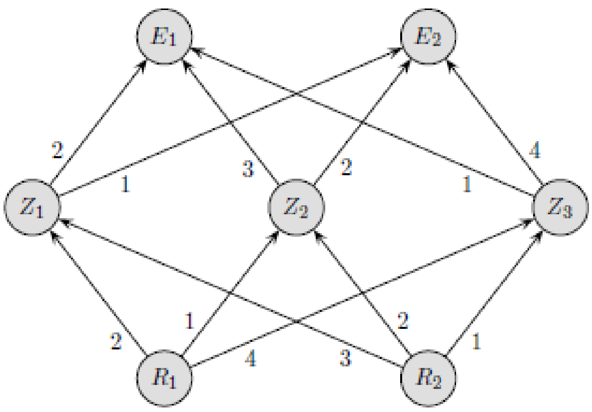
		100
		150
17	18	4400
18	31	6450

Man benötigt 4.400 von R_1 und 6.450 von R_2.

Aufgabe 301:

In einem Unternehmen mit einem mehrstufigen Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:

Es sollen 4 Mengeneinheiten (ME) von E_1 und 7 ME von E_2 produziert werden. Wie viel Rohstoffe sind nötig?



Lösung:

$$A_{R,Z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_{Z,E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$A_{R,Z} \cdot B_{Z,E}$:

			2	1
			3	2
			1	4
2	1	4	11	20
3	2	1	13	11

$C_{R,E} = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$

$D_{E,S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$C_{R,E} \cdot D_{E,S}$:

		4
		7
11	20	184
13	11	129

Man benötigt 184 von R_1 und 129 von R_2.

Rang einer Matrix

Aufgabe 302:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Bestimmung des Ranges mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Rang der Matrix gleich 3.

Aufgabe 303:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \cdot I \\ -2 \cdot I \\ -I \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{5}{2} \cdot II \\ -\frac{5}{4} \cdot II \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{23}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -III \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 304:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3 \cdot I \\ \\ -4 \cdot I \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -II \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +III \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit hat die Matrix einen Rang von 3.

Aufgabe 305:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -4 \cdot I \\ -6 \cdot I \\ -I \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -II \\ -\frac{1}{4} \cdot II \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Somit ist $\text{Rang}(A) = 3$.

Aufgabe 306:

Gegeben sei folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$, so dass gilt: Rang(B)=2

Lösung:

Bestimmung von c:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R}$$

Da die ersten beiden Spaltenvektoren offensichtlich linear unabhängig sind, hat die Matrix B mindestens den Rang$(B) = 2$.

Um diesen auch beizubehalten, kann man das über die Determinante der Matrix machen.

Berechnung der Determinanten mit Hilfe der Regel von Sarrus:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= 2c + 0 + 0 - 24 - 0 - 0$$

$$= 2c - 24$$

Prüfung auf lineare Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} \det(B) &= 0 \\ \Leftrightarrow\; 2c - 24 &= 0 \qquad \mid +24 \mid : 2 \\ \Leftrightarrow\; c &= 12 \end{aligned}$$

Somit ist Rang$(B) = 2$ mit $c = 12$.

Aufgabe 307:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +2\cdot I \\ +I \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vertauschung der 2. und 4. Zeile:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -III \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist Rang$(A) = 3$.

Aufgabe 308:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{4}{3}\cdot I \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Somit ist Rang$(A) = 2$.

Aufgabe 309:

Es seien folgende Matrizen gegeben

$$A=\begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -c & 0 & 2 \\ 0 & -c & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix}$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt: Rang(A)=Rang(B)

Lösung:

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix} \qquad \wedge \begin{pmatrix} -c & 0 & 2 \\ 0 & -c & 0 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix}$$

Vertauschung der 1. und 3. Zeile:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & c+1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} -c\cdot I \quad \wedge \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ -c & 0 & 2 \end{pmatrix} +c\cdot I$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 0 & -c^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \wedge \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & c^2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vertauschung der 2. und 3. Zeile:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & -c^2 & 1 \\ 0 & c+1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \wedge \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & c^2 & 2 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Damit hätten die Matrizen den gleichen Rang, wenn

$$c+1 \neq 0 \qquad |-1$$

$$\Leftrightarrow c \neq -1$$

und

$$-c \neq 0 \qquad |\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow c \neq 0$$

Determinanten

Aufgabe 310:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1$$

Aufgabe 311:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) - (-1) \cdot (-3) = 8 - 3 = 5$$

Aufgabe 312:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \\ 9 & 4 \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 \cdot 9 + 4 \cdot 1 \cdot 4 - 9 \cdot 6 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \cdot 3$$

$$= -36 + 81 + 16 - 216 - 24 + 9 = -170$$

Aufgabe 313:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) \cdot 2$$

$-2\cdot(-1)\cdot(-5)-2\cdot(-3)\cdot 1-(-1)\cdot(-1)\cdot 4$

$=+1-24+10-10+6-4=-21$

Aufgabe 314:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 4\\ 8 & 10\\ -2 & 1\end{matrix}$$

$=2\cdot 10\cdot 1+4\cdot 8\cdot(-2)+6\cdot 8\cdot 1$

$-(-2)\cdot 10\cdot 6-1\cdot 8\cdot 2-1\cdot 8\cdot 4=20-64+48+120-16-32=76$

Aufgabe 315:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür an den grau markierten Stellen Nullen. Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile mal (-2) und auf die erste Zeile addieren.

$$D=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix} -3 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -1\end{matrix}$$

$=(-3)\cdot(-1)\cdot 4+1\cdot 1\cdot 2+0\cdot 3\cdot(-1)$

$-2\cdot(-1)\cdot 0-(-1)\cdot 1\cdot(-3)-4\cdot 3\cdot 1=12+2+0-0-3-12=-1$

Aufgabe 316:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür an den grau markierten Stellen Nullen. Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Die zweite Spalte mal (-1) und auf die erste Spalte addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Die zweite Spalte mal (-0,5) und auf die dritte addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3{,}5 \\ 1 & 1 & -0{,}5 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$= 0 \cdot 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-0{,}5) \cdot (-1) + 3{,}5 \cdot 1 \cdot 2$$

$$-(-1) \cdot 1 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot (-0{,}5) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot -3$$

$$= 0 - 1{,}5 + 7 + 3{,}5 - 0 - 0 = 9$$

Aufgabe 317:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür an den grau markierten Stellen Nullen. Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Da zwei Zeilen gleich sind, ist die Determinante gleich Null.

Aufgabe 318:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür an den grau markierten Stellen Nullen. Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Lösung:

In der ersten Zeile drei Nullen erzeugen. Dazu wird die zweite Spalte festgesetzt.

Die zweite Spalte mal (-2) und auf die erste Spalte addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2-4 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 57$$

Aufgabe 319:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Da zwei Zeilen gleich sind, ist die Determinante gleich Null.

Aufgabe 320:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Lösung:

546

Aufgabe 321:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 8 & 4 \\ -7 & 2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$$= 8 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot (-7) \cdot 4 - (-3) \cdot 2 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 8 - 5 \cdot (-7) \cdot 4$$

$$= 80 - 48 - 84 + 18 - 128 + 140 = -22$$

Aufgabe 322:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 10 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 10 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 2 \\ 6 & 10 \\ -2 & 3 \end{matrix}$$

$$= (-2) \cdot 10 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 6 \cdot 2$$

$$-(-1) \cdot 10 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot 6 \cdot 3$$

$$= 20 - 20 - 18 - 20 + 15 + 24 = 1$$

Aufgabe 323:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür an den grau markierten Stellen Nullen. Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 7 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 3$$

$$= -2 + 105 + 20 - 25 - 56 + 3 = 45$$

Aufgabe 324:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie hierfür eine Zeile oder eine Spalte mit zwei Nullen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Geht nicht, da nicht quadratisch.

Aufgabe 325:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

In der vierten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die dritte Zeile festgesetzt.

Die dritte Zeile mal (-3) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile mal (2) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Vierte Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen.

$$= -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Alle Unterdeterminanten mit dem Faktor Null werden Null und fallen weg.

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -8 & -7 \\ 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{matrix}$$

$$= -1[(-8) \cdot (-1) \cdot 6 + (-7) \cdot (-2) \cdot 4 + (-8) \cdot 4 \cdot 8$$

$$-4 \cdot (-1) \cdot (-8) - 8 \cdot (-2) \cdot (-8) - 6 \cdot 4 \cdot (-7)]$$

$= -1[48 + 56 - 256 - 32 - 128 + 168] = 144$

Aufgabe 326:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

In der ersten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die zweite Zeile festgesetzt.

Die zweite Zeile mal (-2) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile mal (-7) und auf die dritte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 24 & -2 & -25 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile mal (1) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 24 & -2 & -25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Erste Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen. Unterdeterminanten mit dem Schnittpunktelement Null werden weggelassen. Siehe Aufgabe 9.

$$= -1 \begin{vmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 24 & -2 & -25 \\ -4 & -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 4 \\ 24 & -2 \\ -4 & -1 \end{matrix}$$

$= (-1)[10 \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot (-25) \cdot (-4) + 0 \cdot 24 \cdot (-1)$

$-(-4) \cdot (-2) \cdot 0 - (-1) \cdot (-25) \cdot 10 - 6 \cdot 24 \cdot 4]$

$= (-1)[-120 + 400 + 0 - 0 - 250 - 576] = 546$

Aufgabe 327:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

In der zweiten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die dritte Zeile festgesetzt.

Die dritte Zeile mal (3) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 17 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile mal (-6) und auf die zweite Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ -28 & 0 & -10 & 26 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 17 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile mal (-6) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -27 & 0 & -11 & 27 \\ -28 & 0 & -10 & 26 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 17 & 0 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Zweite Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen. Unterdeterminanten mit dem Schnittpunktelement Null werden weggelassen. Siehe Aufgabe 9.

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} -27 & -11 & 27 \\ -28 & -10 & 26 \\ 17 & 8 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} -27 & -11 \\ -28 & -10 \\ 17 & 8 \end{matrix}$$

$$= -1 \cdot [(-27) \cdot (-10) \cdot (-13) + (-11) \cdot 26 \cdot 17 + 27 \cdot (-28) \cdot 8$$

$$-17 \cdot (-10) \cdot 27 - 8 \cdot 26 \cdot (-27) - (-13) \cdot (-28) \cdot (-11)$$

$$= -1 \cdot [-3.510 - 4.862 - 6.048 + 4.590 + 5.616 + 4004]$$

$$= 210$$

Aufgabe 328:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

In der vierten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die dritte Zeile festgesetzt.

Die dritte Zeile mal (-3) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile mal (2) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Vierte Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen.

$$= -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Alle Unterdeterminanten mit dem Faktor Null werden Null und fallen weg.

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -8 & -7 \\ 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{matrix}$$

$$= -1[(-8) \cdot (-1) \cdot 6 + (-7) \cdot (-2) \cdot 4 + (-8) \cdot 4 \cdot 8$$

$$-4 \cdot (-1) \cdot (-8) - 8 \cdot (-2) \cdot (-8) - 6 \cdot 4 \cdot (-7)]$$

$$= -1[48 + 56 - 256 - 32 - 128 + 168] = 144$$

Aufgabe 329:

Berechnen Sie folgende Determinante. Erzeugen Sie sich hierfür in einer beliebigen Zeile oder Spalte so viele Nullen wie möglich um Rechenarbeit zu sparen.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

In der ersten Spalte drei Nullen erzeugen. Dazu wird die zweite Zeile festgesetzt.

Die zweite Zeile mal (-2) und auf die erste Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile mal (-7) und auf die dritte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 24 & -2 & -25 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile mal (1) und auf die vierte Zeile addieren.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 24 & -2 & -25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten bilden: Erste Spalte festsetzen und jede einzelne Zeile streichen. Unterdeterminanten mit dem Schnittpunktelement Null werden weggelassen. Siehe Aufgabe 9.

$$= -1 \begin{vmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 24 & -2 & -25 \\ -4 & -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 4 \\ 24 & -2 \\ -4 & -1 \end{matrix}$$

$$= (-1)[10 \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot (-25) \cdot (-4) + 0 \cdot 24 \cdot (-1)$$

$$-(-4) \cdot (-2) \cdot 0 - (-1) \cdot (-25) \cdot 10 - 6 \cdot 24 \cdot 4]$$

$$= (-1)[-120 + 400 + 0 - 0 - 250 - 576] = 546$$

Aufgabe 330:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 89$$

Entwicklung nach der 5. Zeile — *Entwicklung nach der 4. Zeile*

Aufgabe 331:

Für welche $x \in R$ ist die folgende Determinante Null?

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3x-5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3x-5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3x-5 & 4 & 0 \\ x-3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2(x-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (3x-5) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - (x-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -52(x-3) - 12(3x-5) + 8(x-3)$$

$$= -80x + 192 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{5}.$$

Aufgabe 332:

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Zweite Zeile festsetzen.

Zweite Zeile mal (-2) und auf die vierte Zeile addieren.

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Dritte Spalte festsetzen und nach Laplace entwickeln.

$$= -1 \cdot \left|\begin{array}{ccc} 3 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 10 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & -7 \\ 2 & 3 \\ 1 & 10 \end{array} = 1 \cdot (45 - 7 + 60 - 9 - 30 + 70) = -129$$

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 333:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gleichsetzungsverfahren.

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 7y & = & 1 \\ 6x & + & 7y & = & 32 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 7y & = & 1 \\ 6x & + & 7y & = & 32 \end{array}$$

Beide Gleichungen addieren.

$11x = 33 \quad |:11$

$x = 3$

In die zweite Gleichung einsetzen:

$6x+7y=32 \quad |-6y$

$7y=32-6x=32-6\cdot 3=14$

$7y=14 \quad |:7$

$y=2$

$\mathbb{L}=(3;2)$

Aufgabe 334:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 10 \\ x & - & 3y & = & -10 \end{array}$$

Lösung:

Die zweite Gleichung nach x auflösen.

$x-3y=-10 \quad |+3y$

$x=3y-10$

In die erste Gleichung einsetzen.

$3x+y=10$

$3(3y-10)+y=10$

$9y-30+y=10 \quad |+30$

$10y=40 \quad |:10$

$y=4$

x berechnen.

$x=3y-10=3\cdot 4-10=2$

$x=2$

$\mathbb{L} = \{(2; 4)\}$

Aufgabe 335:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Additionsverfahren.

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 6y & = & 8{,}5 \\ x & + & 3y & = & 8 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 6y & = & 8{,}5 \\ x & + & 3y & = & 8 \end{array}$$

Beide Gleichungen werden nach x aufgelöst.

$$5x - 6y = 8{,}5 \quad | + 6y$$

$$5x = 8{,}5 + 6y \quad |: 5$$

$$x = 1{,}7 + \frac{6}{5}y$$

$$x = 8 - 3y$$

Beide Gleichungen gleichsetzen.

$$1{,}7 + \frac{6}{5}y = 8 - 3y \quad | - 1{,}7$$

$$\frac{6}{5}y = 6{,}3 - \frac{15}{5}y \quad | + \frac{15}{5}y$$

$$\frac{21}{5}y = 6{,}3 \quad |: \frac{21}{5}$$

$$y = 1{,}5$$

In eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.

$$x = 8 - 3y = 8 - 3 \cdot 1{,}5 = 3{,}5$$

$$x = 3{,}5$$

$$\mathbb{L} = \{(2; 4)\}$$

Aufgabe 336:

Aus 80%-iger Essigessenz (80% Essigsäure, 20% Wasser) wurde durch Zusatz von Wasser 5%-iger Essig hergestellt. Um die gleiche Menge 4%-igen Essig herzustellen, benötigte man 25 cm³ Essenz weniger. Wie viel Essigessenz enthielt die erste Mischung und wie viel Wasser wurde zugesetzt?

Lösung:

Variablen definieren.

x: Die Menge der Essigessenz in der ersten Mischung in cm³

y: Die Menge an Wasser in der ersten Mischung in cm³

Gleichungen aufstellen.

$80\%x + 0\%y = 5\%(x + y)$

$80\%(x - 25) + 0\%(y + 25) = 4\%(x + y)$

Erste Gleichung ausmultiplizieren.

$80\%x + 0\%y = 5\%(x + y)$

$80\%x = 5\%x + 5\%y \quad | - 5\%x$

$75\%x = 5\%y \quad |: 5\%$

$y = 15x$

Zweite Gleichung ausmultiplizieren und $y = 15x$ einsetzen.

$80\%(x - 25) + 0\%(y + 25) = 4\%(x + y)$

$80\%(x - 25) + 0\%(y + 25) = 4\%(x + 15x)$

$80\%x - 2000\% = 64\%x \quad | - 64\%x$

$16\%x = 2000\% \quad |: 16$

$x = 125$

$y = 15x = 15 \cdot 125 = 1.875$

$y = 1.875$

$\mathbb{L} = \{(125; 1.875)\}$

Aufgabe 337:

Hans und Klara haben sich verabredet. Sie starten beide um 15 Uhr mit ihren Fahrrädern in ihren 14 km voneinander entfernten Heimatorten. Hans schafft in jeder Stunde 12, Klara 16 km. Wie weit von Hans Heimatort entfernt treffen sie sich?

Lösung:

Formel für Geschwindigkeit.

$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v}$

x: Weg für Hans zum Treffpunkt

y: Weg für Klara zum Treffpunkt (y=14-x)

Beide sind die gleiche Zeit gefahren, also ist t von Hans gleich t von Klara.

$\frac{s}{v} = \frac{s}{v}$

$\frac{x}{12} = \frac{y}{16}$

$16x = 12y$

Einsetzen von y=14-x.

$16x = 12(14 - x)$

$16x = 168 - 12x \quad | + 12x$

$28x = 168 \quad |:28$

$x = 6$

Die beiden treffen sich 6km Hans und 8 km von Klara Heimatort entfernt.

Aufgabe 338:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 5y & + & 5z & = & 30 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 5y & + & 5z & = & 30 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Die erste und die zweite Gleichung vertauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 5x & + & 5y & + & 5z & = & 30 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (5) und auf die zweite addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & + & 10y & & & = & 20 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 19 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (2) und auf die dritte addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & + & 10y & & & = & 20 \\ & + & 3y & + & 3z & = & 15 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (3), die dritte Gleichung mal (-10) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & + & 10y & & & = & 20 \\ & & & - & 30z & = & -90 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$-30z = -90 \quad |:(-30)$

$z = 3$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$10y = 20 \quad |:10$

$y = 2$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$-x + y - z = -2$

$x = y - z + 2 = 2 - 3 + 2 = 1$

$x = 1$

$\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}$

Aufgabe 339:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 21 \\ 2x & & & + & z & = & 8 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 21 \\ 2x & & & + & z & = & 8 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (3), die zweite Gleichung mal (2) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 7y & + & 11z & = & 51 \\ 2x & & & + & z & = & 8 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 7y & + & 11z & = & 51 \\ & + & 3y & + & 2z & = & 11 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (3), die dritte Gleichung mal (-7) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ & + & 7y & + & 11z & = & 51 \\ & & & + & 19z & = & 76 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$19z = 76 \quad |:19$

$z = 4$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$7y + 11z = 51 \quad | - 11z$

$7y = 51 - 11z = 51 - 11 \cdot 4$

$7y = 7 \quad |:7$

$y = 1$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$-2x + 3y + z = 3$

$-2x = 3 - 3y - z = 3 - 3 \cdot 1 - 4$

$-2x = -4 \quad |:(-2)$

$x = 2$

$\mathbb{L} = \{(2; 1; 4)\}$

Aufgabe 340:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die zweite Gleichung tauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-2) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ & - & 21y & + & 8z & = & -8 \\ -x & + & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ & - & 21y & + & 8z & = & -8 \\ & + & 11y & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (11), die dritte Gleichung mal (21) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 10y & - & 3z & = & 5 \\ & - & 21y & + & 8z & = & -8 \\ & & & + & 46z & = & -46 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$46z = -46 \quad |:46$

$z = -1$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$-21y + 8z = -8 \quad |-8z$

$-21y = -8 - 8z = -8 - 8 \cdot (-1) = 0$

$y = 0$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$x + 10y - 3z = 5$$
$$x = 5 - 10y + 3z = 5 - 10 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2$$
$$x = 2$$

$\mathbb{L} = \{(2; 0; -1)\}$

Aufgabe 341:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 5 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 5 \end{array}$$

Die erste und die zweite Gleichung tauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 7 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 5 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal(-2) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ & - & 7y & + & 3z & = & -5 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 5 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal(-4) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ & - & 7y & + & 3z & = & -5 \\ & - & 5y & + & z & = & -19 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (-5), die dritte Gleichung mal (7) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ & - & 7y & + & 3z & = & -5 \\ & & & - & 8z & = & -108 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$-8z = -108 \quad |:(-8)$

$z = 13{,}5$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$-7y + 3z = -5$

$-7y = -5 - 3z = -5 - 3 \cdot (13{,}5) = 35{,}5$

$y = 35{,}5$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$x + 2y - z = 6$

$x = 6 - 2y + z = 6 - 2 \cdot 35{,}5 + 13{,}5$

$x = -51{,}5$

$\mathbb{L} = \{(-51{,}5; 35{,}5; 13{,}5)\}$

Aufgabe 342:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

Die erste und die zweite Gleichung tauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-2) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 7y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-4) und auf die dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 7y & + & 3z & = & 0 \\ & - & 5y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (-5), die dritte Gleichung mal (7) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 7y & + & 3z & = & 0 \\ & & & - & 8z & = & 0 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich:

$-8z = 0$

$z = 0$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$-7y + 3z = 0$

$y = 0$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$x + 2y - z = 0$

$x = 0$

$\mathbb{L} = \{(0; 0; 0)\}$

Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Aufgabe 343:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl. Bestimmen Sie folgende Lösungen:

a) Für welche Werte von a hat dieses LGS keine Lösung?

b) Für welche Werte von a hat dieses LGS eine eindeutige Lösung?

c) Für welche Werte von a hat dieses LGS unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcr} ax & - & 2y & = & -8 \\ -4x & + & 4y & = & 5 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcr} ax & - & 2y & = & -8 \\ -4x & + & 4y & = & 5 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (4) und die zweite Gleichung mal (a) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcr} ax & - & 2y & = & -8 \\ & + & (4a-8)y & = & (5a-32) \end{array}$$

a) Keine Lösung wenn:

$4a - 8 = 0 \quad |+8$

$4a = 8 \quad |:4$

$a = 2$

b) Für alle Werte $a \neq 2$

c) Unendlich viele Lösungen gibt es für dieses Beispiel nicht.

Aufgabe 344:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl. Bestimmen Sie folgende Lösungen:

a) Für welche Werte von a hat dieses LGS keine Lösung?

b) Für welche Werte von a hat dieses LGS eine eindeutige Lösung?

c) Für welche Werte von t hat dieses LGS unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & + & ay & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & + & ay & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Erste Gleichung mal (-2) und auf die dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & + & ay & + & 2z & = & 2 \\ & - & 3y & + & 3z & = & -3 \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (3), die dritte mal (a) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & + & ay & + & 2z & = & 2 \\ & & & + & (3a+6)z & = & (-3a+6) \end{array}$$

a) Keine Lösung für:

$a = -2$

b) Eine Lösung für $a \neq -2$

c)Unendlich viele Lösungen:

Diese Lösung gibt es hier nicht.

Aufgabe 345:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 4y & + & 5z & = & a \\ x & + & ay & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2ay & - & a^2z & = & a \end{array}$$

a) Für welche Werte von a hat dieses LGS keine Lösung?

b) Für welche Werte von a hat dieses LGS eine eindeutige Lösung?

c) Für welche Werte von a hat dieses LGS unendlich viele Lösungen?

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 4y & + & 5z & = & a \\ x & + & ay & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2ay & - & a^2z & = & a \end{array}$$

Erste Gleichung und die zweite Gleichung vertauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ay & - & 2z & = & 1 \\ ax & + & 4y & + & 5z & = & a \\ 2x & + & 2ay & - & a^2z & = & a \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-a) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ay & - & 2z & = & 1 \\ & & (4a-a^2)y & + & (2a+5)z & = & 0 \\ 2x & + & 2ay & - & a^2z & = & a \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-2) und auf die dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & - & 2z & = & 1 \\ & & (4a-a^2)y & + & (2a+5)z & = & 0 \\ & & & + & (4-a^2)z & = & (a-2) \end{array}$$

a) Keine Lösung für:

$a = -2$

b) Eine eindeutige Lösung für:

$a \neq \pm 2$

c) Unendlich viele Lösungen für:

$a = 2$

Aufgabe 346:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4ax & & & + & z & = & 3+2a \\ x & + & 2y & + & az & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

a) Für welche Werte von a hat dieses LGS keine Lösung?

b) Für welche Werte von a hat dieses LGS eine eindeutige Lösung?

c) Für welche Werte von a hat dieses LGS unendlich viele Lösungen?

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4ax & & & + & z & = & 3+2a \\ x & + & 2y & + & az & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Die erste Gleichung und die zweite Gleichung tauschen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 0 \\ 4ax & & & + & z & = & 3+2a \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-4a) und auf die zweite Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 0 \\ & - & 8a & + & (1-4a^2)z & = & 3+2a \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-2) und auf die dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 0 \\ & - & 8a & + & (1-4a^2)z & = & 3+2a \\ & - & y & + & (1-2a)z & = & 1 \end{array}$$

Die dritte Gleichung mal (-8a) und die zweite und dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 0 \\ & - & 8a & + & (1-4a^2)z & = & 3+2a \\ & & & + & (12a^2-8a+1)z & = & (3-6a) \end{array}$$

a) Keine Lösung für:

$$12a^2-8a+1=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 12\cdot 1}}{2\cdot 12}=\frac{8\pm 4}{24}$$

$$a=\frac{1}{6}$$

b) Eine eindeutige Lösung für:

$$a\neq\frac{1}{6}\wedge a\neq\frac{1}{2}$$

c) Unendlich viele Lösungen für:

$$a = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 347:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl. Bestimmen Sie folgende Lösungen:

a) Für welche Werte von t hat dieses LGS keine Lösung?

b) Für welche Werte von t hat dieses LGS eine eindeutige Lösung?

c) Für welche Werte von t hat dieses LGS unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (t+2)y & + & tz & = & 1 \\ tx & + & ty & & & = & (t+2) \\ (t+1)x & & & - & 2z & = & (3t+1) \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (t+2)y & + & tz & = & 1 \\ tx & + & ty & & & = & (t+2) \\ (t+1)x & & & - & 2z & = & (3t+1) \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-t) und zur zweiten Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (t+2)y & + & tz & = & 1 \\ & + & -t(t+1)y & - & t^2 & = & 2 \\ (t+1)x & & & - & 2z & = & (3t+1) \end{array}$$

Die erste Gleichung mal (-(t+1)) und auf die dritte Gleichung addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (t+2)y & + & tz & = & 1 \\ & - & t(t+1)y & - & t^2 & = & 2 \\ & - & (t+2)(t+1)y & + & (-t^2-t-2)z & = & 2t \end{array}$$

Die zweite Gleichung mal (t+2), die dritte Gleichung mal (-t) und addieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (t+2)y & + & tz & = & 1 \\ & - & t(t+1)y & - & t^2 & = & 2 \\ & & & - & t(t-2)z & = & -2(t-2)(t+1) \end{array}$$

a) Keine Lösung für:

$t \in \{0\}$

b) Eine eindeutige Lösung für:

$t \neq \{0; 2\}$

c) Unendlich viele Lösungen für:

$t \in 2$

Elementare Funktionen

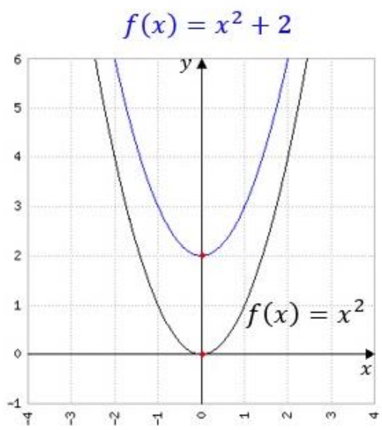
Verschiebung von Funktionen

Aufgabe 348:

Verschieben Sie die Funktion $f(x)=x^2$ um 2 Einheiten in y-Richtung.

Lösung:

Es sei f(x) eine Funktion, dann stellt f(x)+b eine Verschiebung von f(x) in y-Richtung dar. Für b>0 handelt es sich um eine Verschiebung um b nach oben, für b<0 ist es eine Verschiebung um b nach unten.



Aufgabe 349:

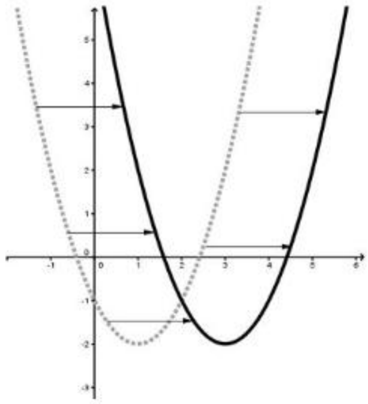
Verschieben Sie die Funktion $f(x)=x^2-2x-1$ um -2 Einheiten in x-Richtung.

Lösung:

Es sei f(x) eine Funktion, dann stellt f(x+a) eine Verschiebung des Graphen von f(x) in x-Richtung dar. Für a>0 handelt es sich um eine Verschiebung um a Einheiten nach links, für a<0 ist es eine Verschiebung um a Einheiten nach rechts.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x-2) \\ &= (x-2)^2 - 2(x-2) - 1 \\ &= x^2 - 6x + 7 \end{aligned}$$

Verschiebung um 2 nach rechts durch Ersetzen von x durch $(x-2)$



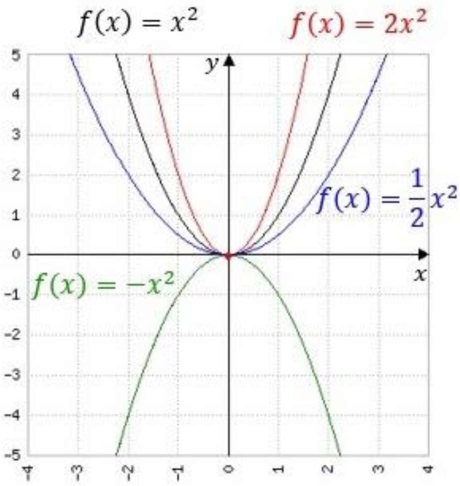
Skalierung von Funktionen

Aufgabe 350:

Skalieren Sie die Funktion $f(x)=x^2$ mit dem Faktor 2 und dem Faktor 0,5.

Lösung:

Es sei f(x) eine Funktion, dann stellt c·f(x) eine Streckung in y-Richtung dar, falls c>1 bzw. um eine Stauchung, falls 0<b<1.



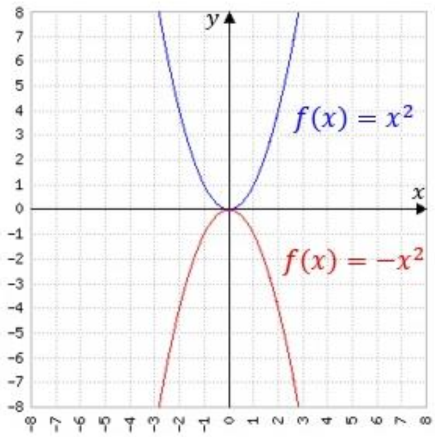
Spiegelung von Funktionen

Aufgabe 351:

Spiegeln Sie die Funktion $f(x)=x^2$ an der x-Achse.

Lösung:

Eine Funktion f(x) wird durch Multiplikation mit -1 an der x-Achse gespiegelt. f(x) wird somit zu -f(x).



Verändern von Funktionsgraphen

Aufgabe 352:

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2x + 5}$$

Geben Sie den Term an, der zu derjenigen Funktion gehört, deren Graph im Vergleich zum Graphen von f(x)

a) um 1 nach links verschoben ist

b) mit dem Faktor 5 in y-Richtung gestreckt wird

c)um 2 nach oben verschoben ist.

Lösung:

a)

$$f(x) = \frac{1}{2x+5}$$

Verschiebe den Graphen um 1 nach links.

$$g(x) = f(x+a)$$

Setze für $a = 1$ ein

$$g(x) = \frac{1}{2(x+1)+5}$$

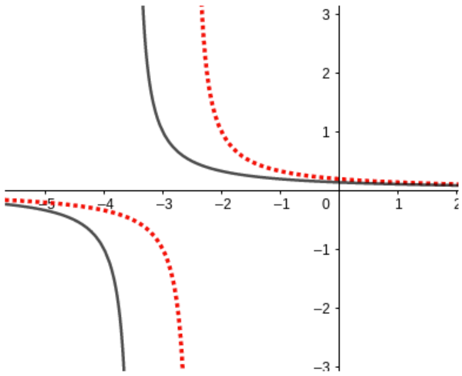
Rechne die Klammer aus und fasse zusammen

$$g(x) = \frac{1}{2x+2+5} = \frac{1}{2x+7}$$

Der Term des um 1 nach links verschobenen Graphen lautet

$$g(x) = \frac{1}{2x+7}$$

Der Graph Gf der Ausgangsfunktion f ist rot eingezeichnet und der verschobene Graph Gg der neuen Funktion g schwarz.



b)

$f(x) = \frac{1}{2x+5}$

Streckungsfaktor $a = 5$

$g(x) = a \cdot f(x)$

Setze $a = 5$ ein

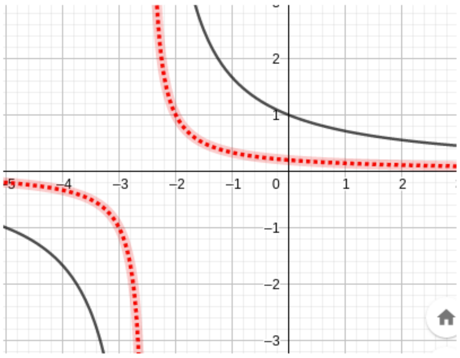
$g(x) = 5 \cdot f(x) = 5(\frac{1}{2x+5})$

Rechne die Klammer aus

$g(x) = \frac{5}{2x+5}$

Der Term lautet $g(x) = \frac{5}{2x+5}$

Im Folgenden ist der Graph Gf der Ausgangsfunktion f rot eingezeichnet und der gestreckte Graph Gg der neuen Funktion g schwarz.



c)

$f(x) = \dfrac{1}{2x+5}$

Verschiebung des Graphen um 2 nach oben.

$g(x) = f(x) + a$

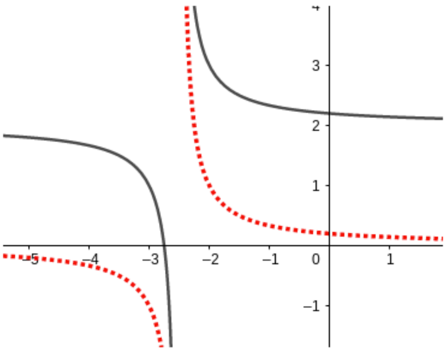
Setzte für $a = 2$ ein

$g(x) = f(x) + 2 = \frac{1}{2x+5} + 2$

Der Term des um 2 nach oben verschobenen Graphen lautet

$g(x) = \dfrac{1}{2x+5} + 2$

Der Graph Gf der Ausgangsfunktion f ist rot eingezeichnet und der verschobene Graph Gg der neuen Funktion g schwarz.



Verkettung von Funktionen

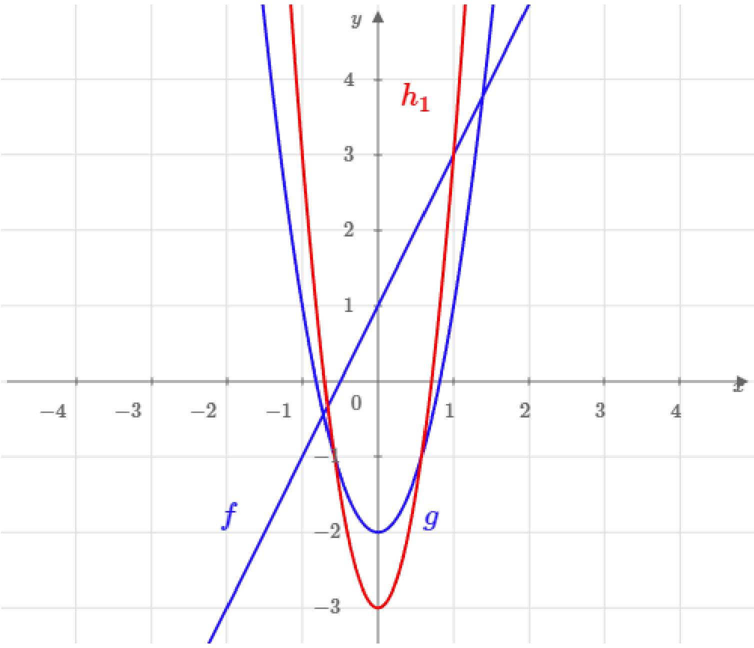
Aufgabe 353:

Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit
$f(x) = 2x + 1$ und
$g(x) = 3x^2 - 2$.

Berechne $h = f \circ g$.

Lösungen:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(3x^2 - 2) + 1 \\ &= 6x^2 - 4 + 1 \\ &= 6x^2 - 3 \end{aligned}$$



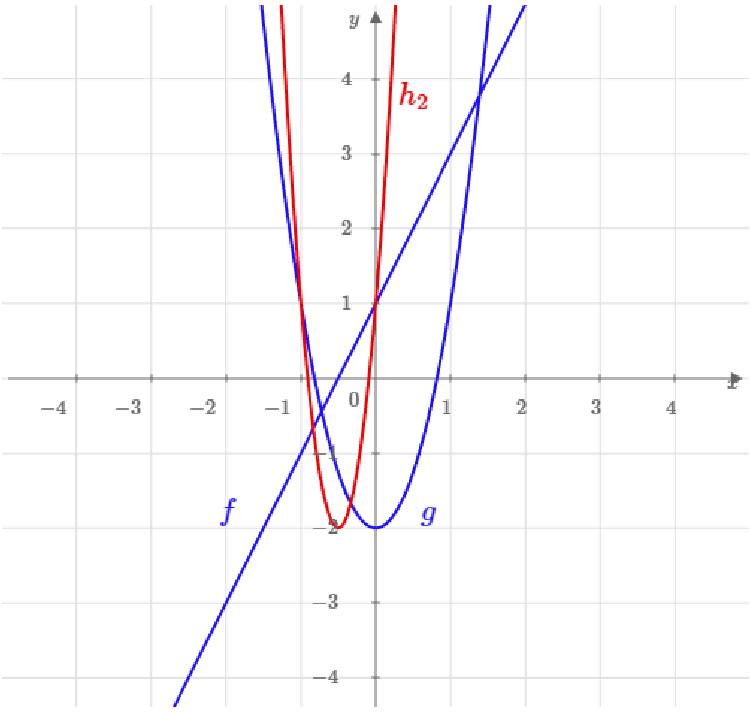
Aufgabe 354:

Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit
$f(x) = 2x + 1$ und
$g(x) = 3x^2 - 2$.

Berechne $h = g \circ f$.

Lösungen:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= g(f(x)) \\
&= 3(2x+1)^2 - 2 \\
&= 3(4x^2 + 4x + 1) - 2 \\
&= 12x^2 + 12x + 3 - 2 \\
&= 12x^2 + 12x + 1
\end{aligned}
$$



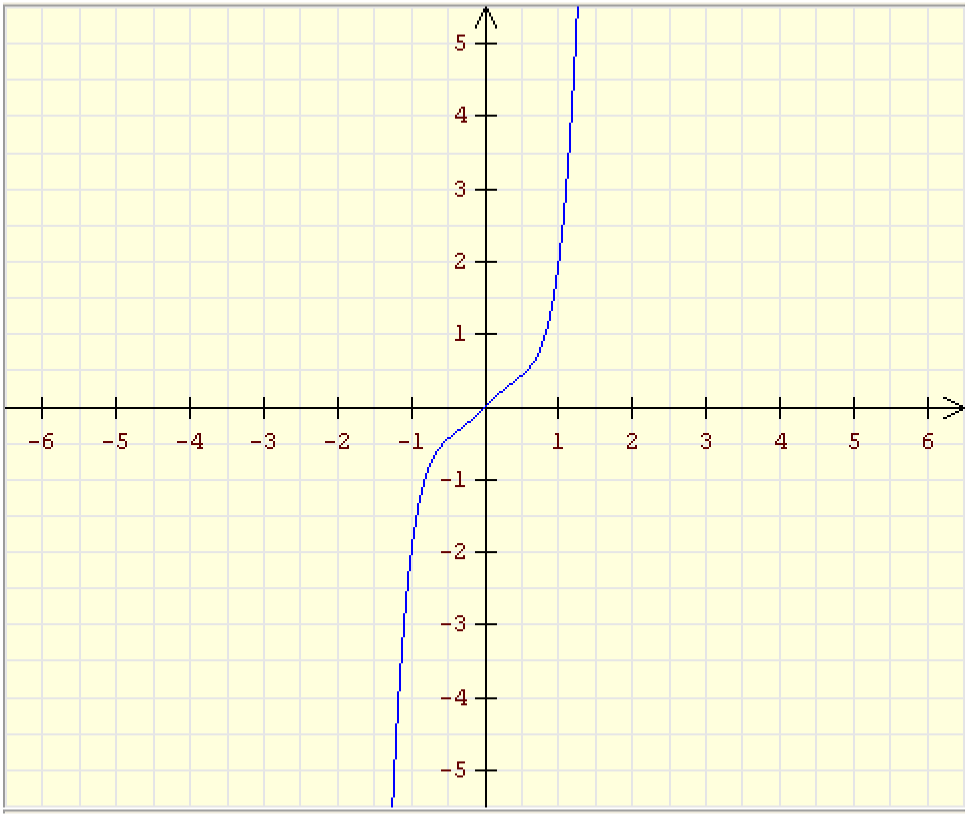
Skizieren von Funktionen

Aufgabe 355:

Skizieren Sie folgende Funktion

$f(x) = 2x^5 - x^3 + x$

Lösung:

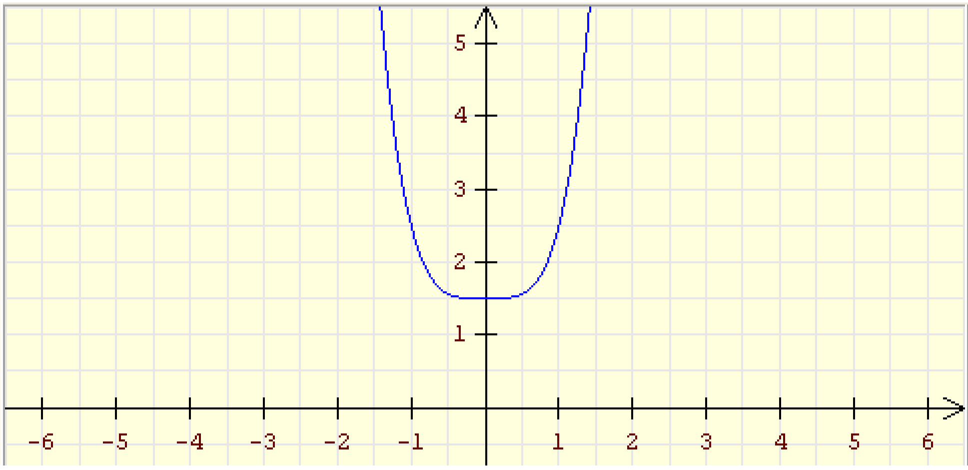


Aufgabe 356:

Skizieren Sie folgende Funktion

$f(x) = x^4 + 1{,}5$

Lösung:

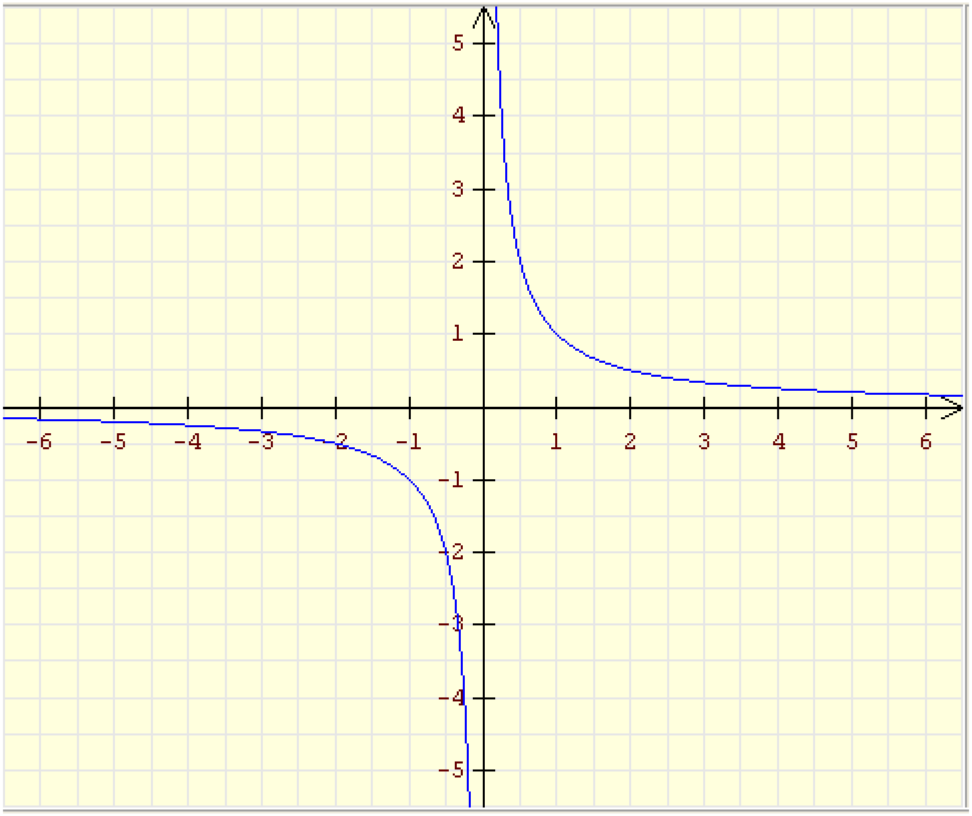


Aufgabe 357:

Skizieren Sie folgende Funktion

$f(x) = \frac{1}{x}$

Lösung:

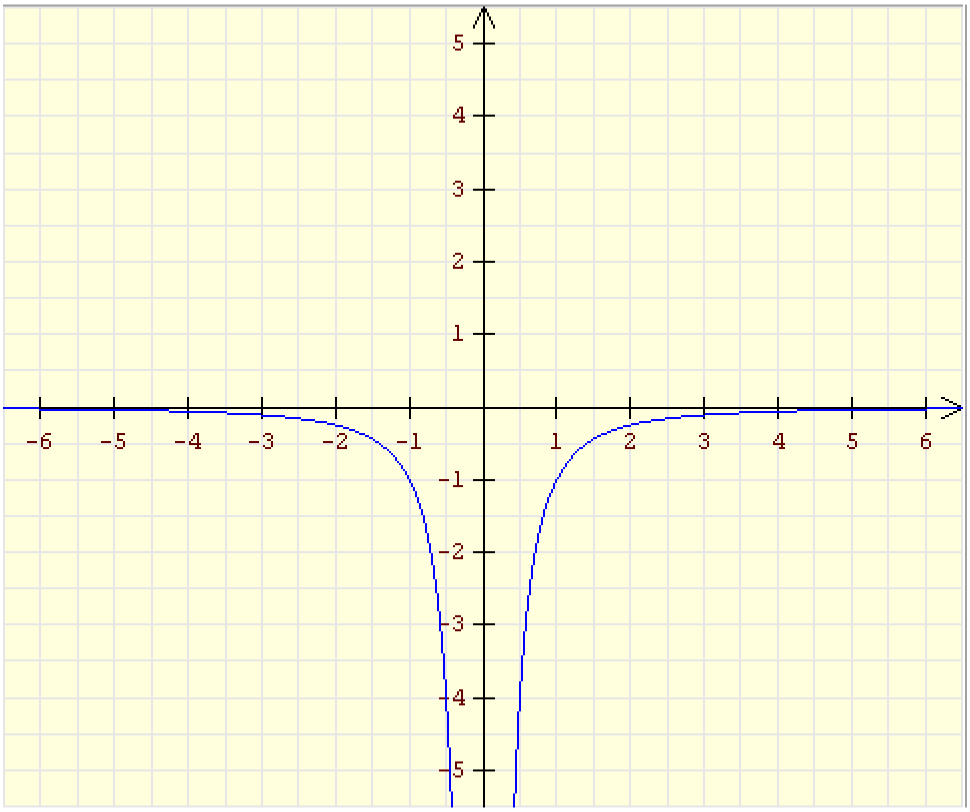


Aufgabe 358:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Lösung:

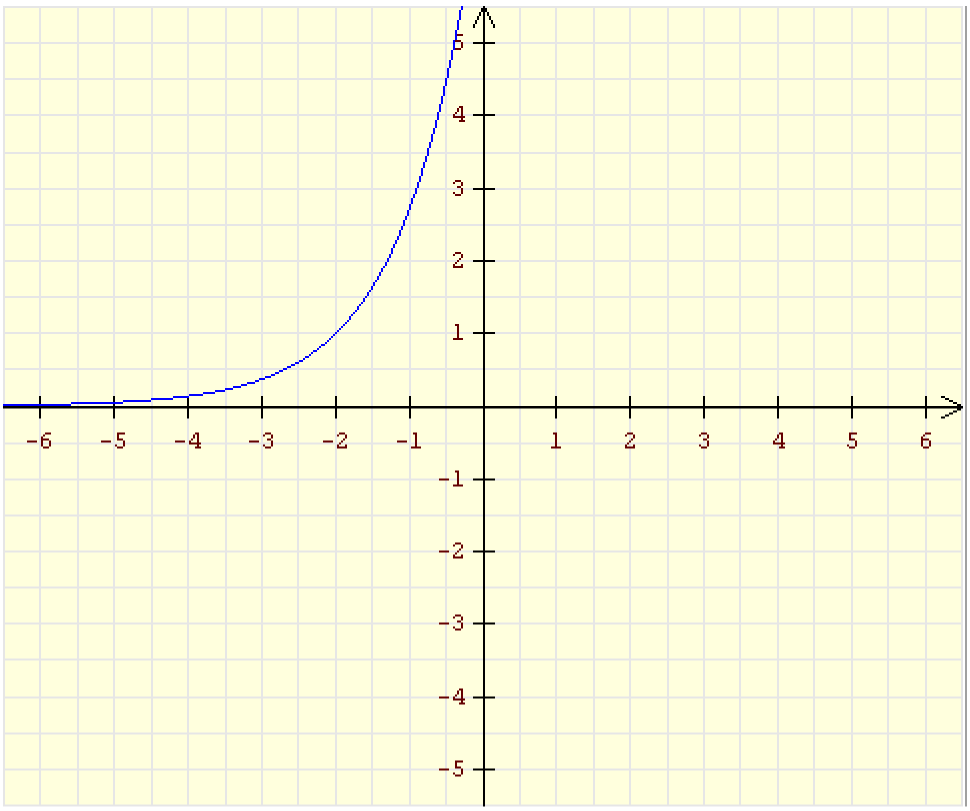


Aufgabe 359:

Skizieren Sie folgende Funktion

$f(x) = e^{x+2}$

Lösung:

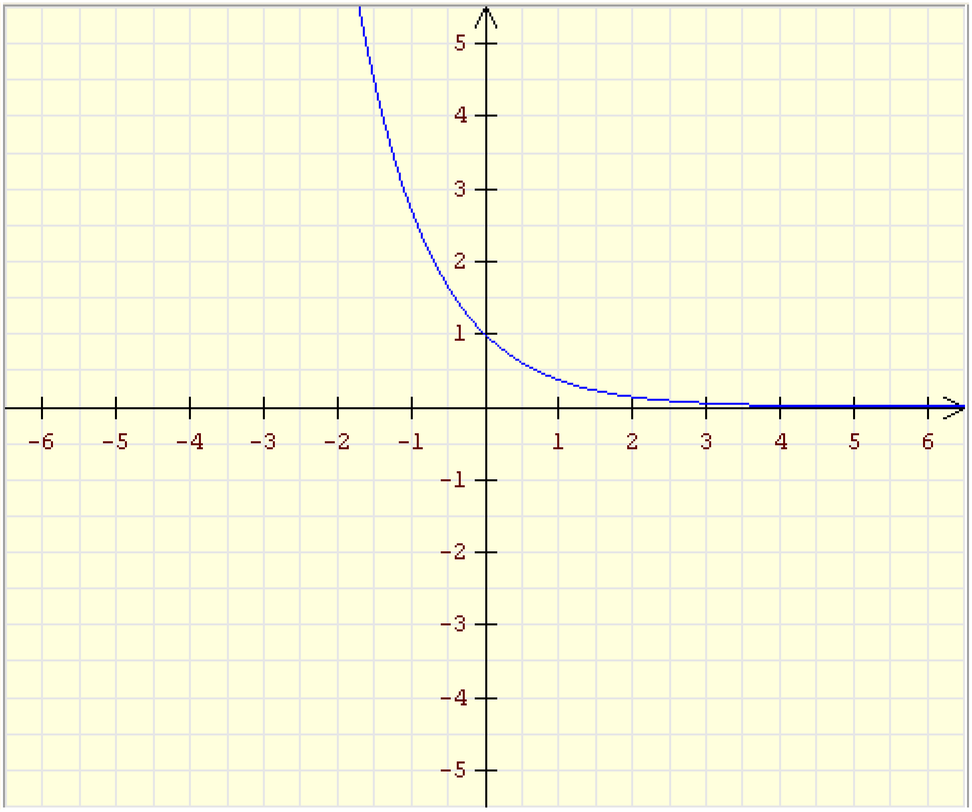


Aufgabe 360:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{e^x}$$

Lösung:

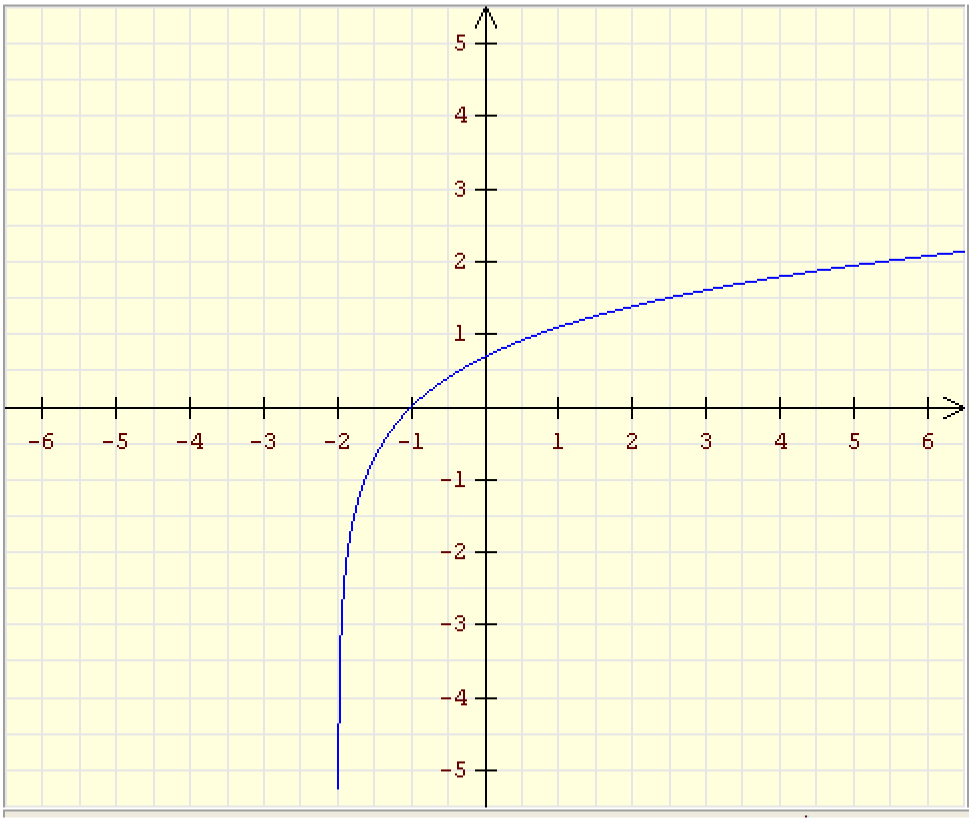


Aufgabe 361:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \ln(x + 2)$$

Lösung:

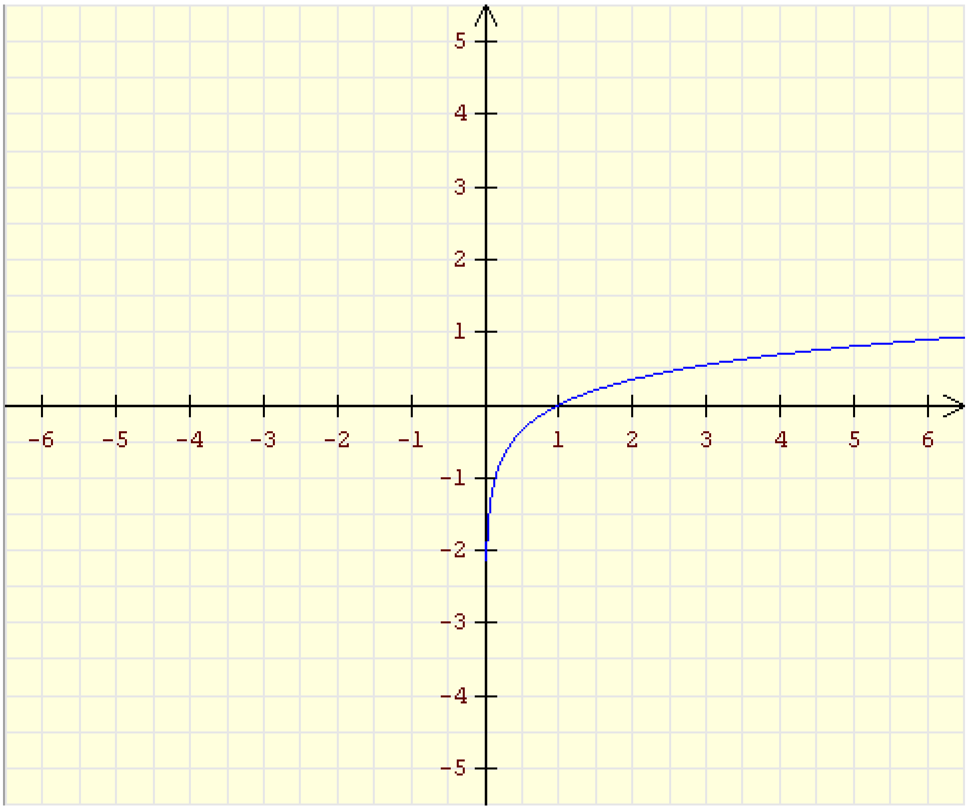


Aufgabe 362:

Skizieren Sie folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

Lösung:

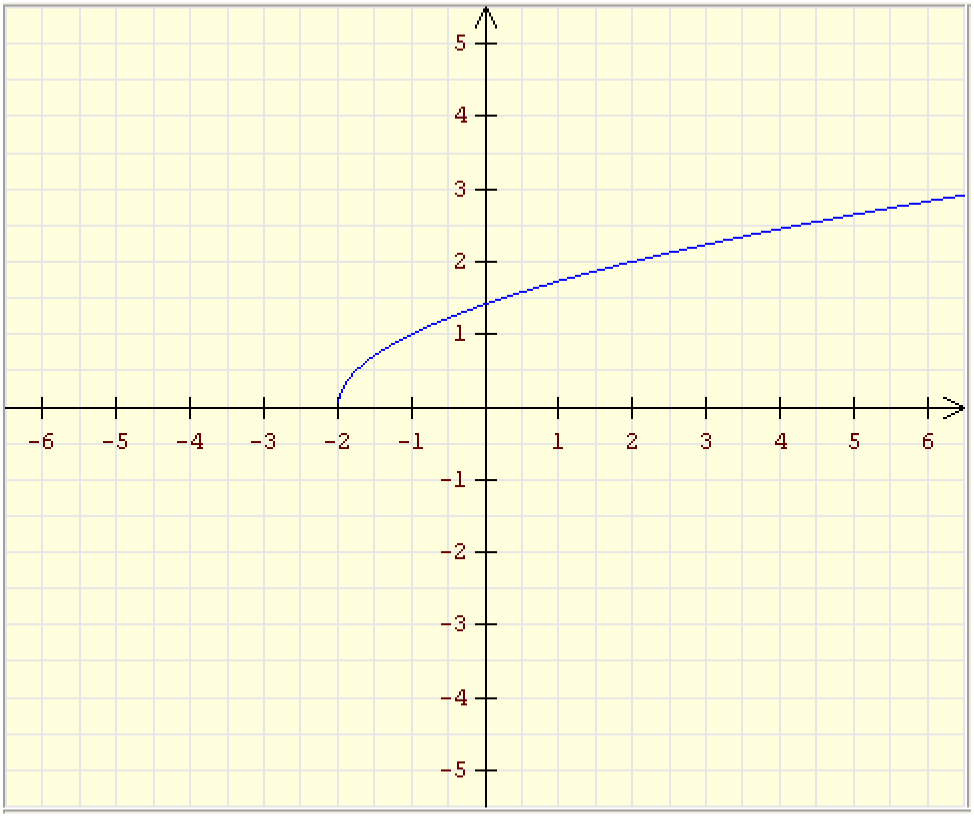


Aufgabe 363:

Skizieren Sie folgende Funktion

$f(x) = \sqrt{x + 2}$

Lösung:

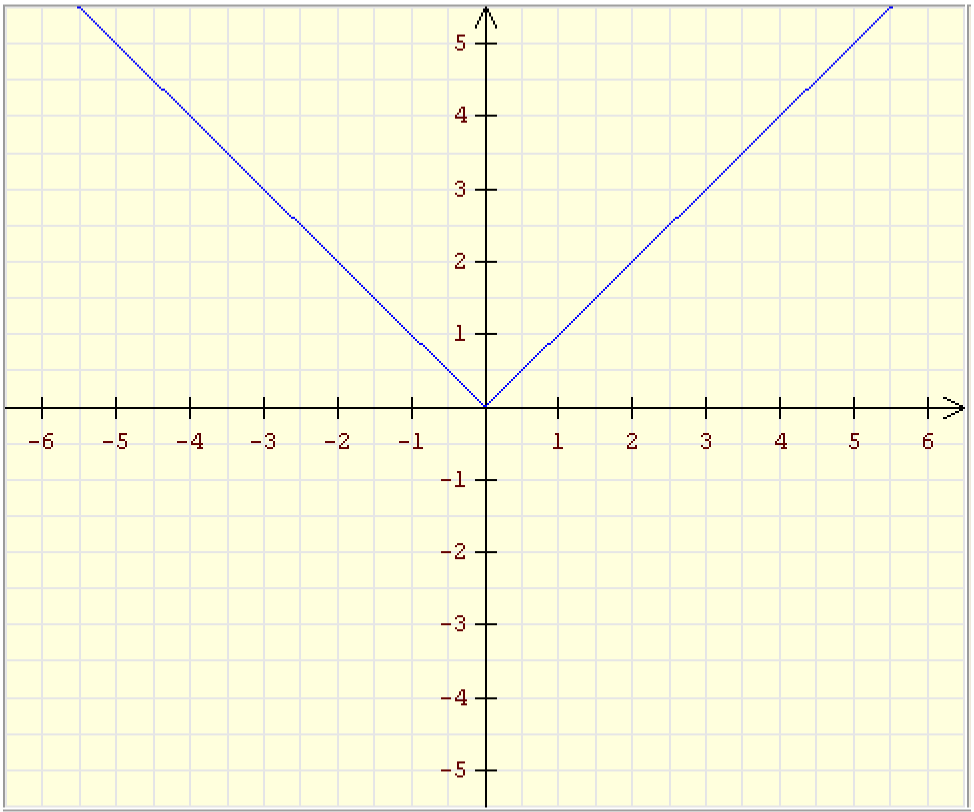


Aufgabe 364:

Skizieren Sie folgende Funktion

$f(x) = \sqrt{x^2}$

Lösung:



-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4
-5

Definitionsbereich und Wertebereich

Aufgabe 365:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = 3x + 1$

d) $f(x) = x^3 + 2$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x+2}$

g) $f(x) = \sqrt{x} + 2$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

i) $f(x) = \frac{1}{x}$

j) $f(x) = \frac{1}{x-5}$

k) $f(x) = \frac{2}{x+1}$

l) $f(x) = x^2 - 3$

m) $f(x) = \sin x$

n) $f(x) = \cos x$

o) $f(x) = \ln x$

p) $f(x) = e^x$

q) $f(x) = 3^x$

Lösung:

a) $f(x) = x^2$	$D = \mathbb{R} \quad W = \mathbb{R}_0^+$
b) $f(x) = x^2 + 3$	$D = \mathbb{R} \quad W = [3; \infty[$
c) $f(x) = 3x + 1$	$D = \mathbb{R} \quad W = \mathbb{R}$
d) $f(x) = x^3 + 2$	$D = \mathbb{R} \quad W = \mathbb{R}$
e) $f(x) = \sqrt{x}$	$D = \mathbb{R}_0^+ \quad W = \mathbb{R}_0^+$
f) $f(x) = \sqrt{x + 2}$	$D = [-2; \infty[\quad W = \mathbb{R}_0^+$
g) $f(x) = \sqrt{x} + 2$	$D = \mathbb{R}_0^+ \quad W = [2; \infty[$
h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$	$D = \mathbb{R} \quad W = \mathbb{R}$
i) $f(x) = \frac{1}{x}$	$D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad W = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
j) $f(x) = \frac{1}{x-5}$	$D = \mathbb{R}\backslash\{5\} \quad W = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
k) $f(x) = \frac{2}{x+1}$	$D = \mathbb{R}\backslash\{-1\} \quad W = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
l) $f(x) = x^2 - 3$	$D = \mathbb{R} \quad W = [-3; \infty[$
m) $f(x) = \sin x$	$D = \mathbb{R} \quad W = [-1; 1]$
n) $f(x) = \cos x$	$D = \mathbb{R} \quad W = [-1; 1]$
o) $f(x) = \ln x$	$D = \mathbb{R}^+ \quad W = \mathbb{R}$
p) $f(x) = e^x$	$D = \mathbb{R} \quad W = \mathbb{R}^+$
q) $f(x) = 3^x$	$D = \mathbb{R} \quad W = \mathbb{R}^+$

Symmetrieeigenschaften

Aufgabe 366:

Welche der nachfolgenden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung? Bestimmen Sie dies durch Rechnung.

a)	$f(x) = x^2$	b)	$f(x) = x^3 - 2x$	c)	$f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$
d)	$f(x) = -2x^6 + 3x^2$	e)	$f(x) = x(x^4 - 3)$	f)	$f(x) = 1{,}5x$
g)	$f(x) = (x-2)(x+2)$	h)	$f(x) = 5x^3 + 4$	i)	$f(x) = x^2(x-3)(x+3)$

Lösung:

a) $f(x) = x^2$
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

b) $f(x) = x^3 - 2x$
$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x \neq f(x)$
$-f(-x) = -(-x^3 + 2x) = x^3 - 2x = f(x)$ | Punktsymmetrie

c) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$
$f(-x) = 2(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = 2x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$ | Achsensymmetrie

d) $f(x) = -2x^6 + 3x^2$
$f(-x) = -2(-x)^6 + 3(-x)^2 = -2x^6 + 3x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

e) $f(x) = x(x^4 - 3) = x^5 - 3x$
$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x) = -x^5 + 3x \neq f(x)$
$-f(-x) = x^5 - 3x = f(x)$ | Punktsymmetrie

f) $f(x) = 1{,}5x$
$f(-x) = 1{,}5(-x) = -1{,}5x \neq f(x)$
$-f(-x) = 1{,}5x = f(x)$ | Punktsymmetrie

g) $f(x) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$
$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$ | Achsensymmetrie

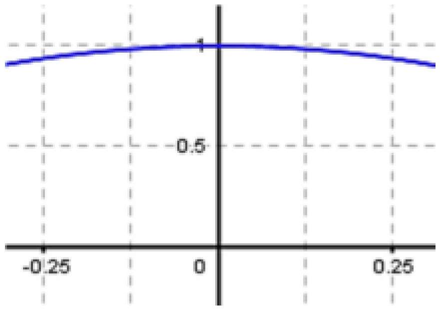
h) $f(x) = 5x^3 + 4$
$f(-x) = 5(-x)^3 + 4 = -5x^3 + 4 \neq f(x)$
$-f(-x) = 5x^3 - 4 \neq f(x)$ | Keine Symmetrie

i) $f(x) = x^2(x-3)(x+3) = x^4 - 9x^2$
$f(-x) = (-x)^4 - 9(-x)^2 = x^4 - 9x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

Aufgabe 367:

Zu welcher der angegebenen Funktionen könnte der abgebildete Graph gehören?

$f_1(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 1$ $\quad$ $f_2(x) = 0{,}1x^3 + x^2 + 1$
$f_3(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + x + 1$ $\quad$ $f_4(x) = (x+1)(x-1)$
$f_5(x) = 0{,}001x^4 - x^2 + 1$ $\quad$ $f_6(x) = 5x^3 - x^2 + 1$



Lösung:

Der abgebildete Graph gehört zur Funktionsgleichung f_5.

Monotonie

Aufgabe 368:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie.

a. $f(x) = (x-2)^2 + 6$
b. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 3$
c. $f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 288x + 72$
d. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$
e. $f(x) = 6x^7 - 35x^6 - 420x^5$
f. $f(x) = 3x^4 + 10$

Lösung:

---

a. $f'(x) = 2x - 4$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2$
$f'(0) = -4 \quad f'(4) = 4$
f ist streng monoton fallend für $x < 2$, f ist streng monoton steigend für $x > 2$

b. $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$
$f'(-2) = 36 \quad f'(0) = -4 \quad f'(5) = 18$
f ist streng monoton fallend für $-1 < x < 4$,
f ist streng monoton steigend für $x < -1$ und $x > 4$

c. $f'(x) = -12x^2 + 60x - 288$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ keine Lösung
$f'(0) = -288 < 0$
f ist immer streng monoton fallend

d. $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 72x$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = 6$
$f'(-1) = -112 \quad f'(2) = 32 \quad f'(4) = -32 \quad f'(7) = 112$
f ist streng monoton steigend für $x \in]0; 3[$ und $x > 6$
f ist streng monoton fallend für $x \in]3; 6[$ und $x < 0$

e. $f'(x) = 42x^6 - 210x^5 - 2100x^4$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (4fache Nullstelle)
$f'(-1) = -1848 \quad f'(2) = -37632$
f ist immer streng monoton fallend.

f. $f'(x) = 12x^3$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (3fache Nullstelle)
$f'(-1) = -12 \quad f'(1) = 12$
f ist streng monoton steigend für $x > 0$, fallend für $x < 0$

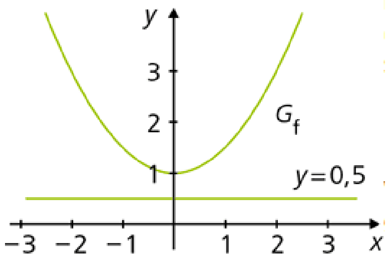
Beschränktheit

Aufgabe 369:

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ eine untere Schranke.

Lösung:

s=0,5


y
3
2
1
G_f
y=0,5
−3
−2
−1
1
2
3
x

Umkehrfunktion

Aufgabe 370:

Zeigen Sie, dass die Funktion f mit

$f(x) = 2 - e^{1-x}$

eine Umkehrfunktion besitzt.

Lösung:

Lösung: Ableitung: $f'(x) = -e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x} > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

Da der Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbf{R}$ zusammenhängend ist, folgt daraus, daß f streng monoton steigt und somit eine Umkehrfunktion besitzt.

Gleichung: $y = 2 - e^{1-x} \Leftrightarrow e^{1-x} = 2 - y \Leftrightarrow 1 - x = \ln(2-y)$

$x = 1 - \ln(2-y)$

Vertauschen von x und y: $y = g(x) = 1 - \ln(2-x)$

Aufgabe 371:

Bilden Sie die Funktionsgleichung der jeweiligen Umkehrfunktion

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3 + 1$

b) $f(x) = 3(x+2)^5 - 6$

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^{-1}$

d) $f(x) = 3(x-1)^{-3} + 2$

e) $f(x) = 2\sqrt[3]{x+3} - 1$

f) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x}{3}} - 2$

g) $f(x) = e^{2x} - 5$

h) $f(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$

i) $f(x) = e^{2x+3} - \frac{1}{2}$

j) $f(x) = 2\left(e^{\frac{x}{3}-4} - 4\right)^3 - 1$

Lösung:

a) $\bar{f}(x)=\sqrt[3]{2x-2}+2$

b) $\bar{f}(x)=\sqrt[5]{\frac{x}{3}+2}-2$

c) $\bar{f}(x)=\frac{1}{4x}-2$

d) $\bar{f}(x)=1+\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x-2}\right)}$

e) $\bar{f}(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^3-3$

f) $\bar{f}(x)=3(x+2)^5$

g) $\bar{f}(x)=\ln(x+5)/2$

h) $\bar{f}(x)=-\ln(3x)$

i) $\bar{f}(x)=\frac{\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-3}{2}$

j) $\bar{f}(x)=12+3\ln\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)$

Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 372:

Berechnen Sie für folgende Funktionen die Grenzwerte (Verhalten) im Unendlichen.

(a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ (b) $f(x)=\dfrac{2x-2}{x-1}$

(c) $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2}$ (d) $f(x)=\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{(x^2-x+2)\cdot(x+1)}$

(e) $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{(2x-1)\cdot(2x+1)}$ (f) $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2-x+2}$

(g) $f(x)=\dfrac{2x^3+3x-1}{3x^3+2x^2-7x-14}$ (h) $f(x)=\dfrac{7x^3+3x^2-12}{-3x^4+2x^2+17x-4}$

Lösung:

(a)	2	(b)	2	(c)	0	(d)	2
(e)	1	(f)	$\pm\infty$	(g)	2/3	(h)	0

Aufgabe 373:

Bestimmen Sie die linksseitigen und die rechtsseitigen Grenzwerte folgender Funktionen.

(a) $f(x)=\dfrac{7x-3}{x^2-2x+1}$, $x_0=1$ (b) $f(x)=\dfrac{7x-3}{2x^2+8x}$, $x_0=-4$

(c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x} & \text{für } 0<x\le 3\\ x-1 & \text{für } x>3\end{cases}$, $x_0=3$

(d) $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2+5 & \text{für } -\infty<x\le 2\\ 2x+1 & \text{für } x>2\end{cases}$, $x_0=2$

(e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{3x^2} & \text{für } -\infty<x<0\\ \dfrac{4x}{(x+1)^2} & \text{für } x\ge 0\end{cases}$, $x_0=0$

(f) $f(x)=\dfrac{7x+13}{2x^2+5x}$, $x_0=-2$ (g) $f(x)=\dfrac{-2x+6}{x^2-3x-3}$, $x_0=4$

Lösung:

(a)	von links: $+\infty$	von rechts: $+\infty$	(Polstelle gerader Ordnung)
(b)	von links: $-\infty$	von rechts: $+\infty$	(Polstelle ungerader Ordnung)
(c)	von links: 1	von rechts: 2	(Sprungstelle)
(d)	von links: 5	von rechts: 5	(stetig in x=2)
(e)	von links: $+\infty$	von rechts: 0	(Sprungstelle)
(f)	von links: ½	von rechts: ½	(stetig in x=-2)
(g)	von links: -2	von rechts: -2	(stetig in x=4)

Aufgabe 374:

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen an der Stelle X_0.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-1}$, $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-1}$, $x_0 = -1$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2(x-1)}$, $x_0 = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$, $x_0 = 2$

(e) $f(x) = \begin{cases} 7x-4 & \text{für} \quad x < 1 \\ (x+1)^2 - 1 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

(f) $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 & \text{für} \quad x \leq -2 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{für} \quad x > -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+5}{\cos x}$, $x_0 = 0$

(h) $f(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{1+x}$, $x_0 = -1$

Lösung:

(a) $+\infty$ (b) -1 (c) $+\infty$ (d) 4/9

(e) 3 (f) von links: -4 , von rechts: -2 (kein Grenzwert, Sprungstelle)

(g) 5 (h) -6

Stetigkeit

Aufgabe 375:

Bestimmen Sie, ob die gegeben Funktionen stetig sind.

(a) $f(x)=\begin{cases}-x-\pi & \text{für} \quad x<-\pi \\ \sin x & \text{für} \quad -\pi\le x\le\pi \\ -x+\pi & \text{für} \quad x>\pi\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{für} \quad x<-1 \\ (x-1)^3 & \text{für} \quad x\ge -1\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{für} \quad x<-1 \\ x-1 & \text{für} \quad x\ge -1\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}2+x & \text{für} \quad x<-1 \\ 1 & \text{für} \quad -1\le x\le 1 \\ x+1 & \text{für} \quad x>1\end{cases}$

(e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+4x}{x+2}+4 & : \quad x<-2 \\ (x+2)^2 & : \quad -2\le x\le 1 \\ \dfrac{4(x^3-x)}{x-1}+1 & : \quad x>1\end{cases}$

(f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2} & \text{für} \quad x<0 \\ x+12 & \text{für} \quad x\ge 0\end{cases}$

Lösung:

(a) stetig in $x_0=-\pi$ und in $x_0=+\pi$

(b) unstetig in $x_0=-1$ (Sprungstelle)

(c) unstetig in $x_0=-1$ (Sprungstelle)

(d) stetig in $x_0=-1$ und unstetig in $x_0=1$ (Sprungstelle)

(e) stetig in $x_0=1$ und unstetig in $x_0=-2$ (Sprungstelle)

(f) unstetig in $x_0=0$ (Sprungstelle)

Aufgabe 376:

Gegeben ist die Funktion f(x) mit der Gleichung

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2+2x-3}$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit.

Lösung:

Definitionsbereich

Da es sich um eine gebrochen-rationale Funktion handelt, untersuchen wir die Nennerfunktion auf Nullstellen. Das führt zu folgender Gleichung, die mit Hilfe des Taschenrechners gelöst werden kann.

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{01} = 1$

$x_{02} = -3$

Damit erhalten wir den Defitionsbereich.

$D_f : x \in R \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -3$

Stetigkeitsuntersuchung

Da der Definitionsbereich Lücken aufweißt, wird die Funktion nicht stetig sein. Um das zu zeigen, muss nun der Grenzwert an diesen Definitionslücken berechnet werden.

Grenzwert für x → 1

rechtsseitiger Grenzwert f(1+h)

$$\lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)+3}{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3} = \lim_{h \to 0} \frac{4+h}{1+2h+h^2+2+2h-3} = \lim_{h \to 0} \frac{4}{0} = n.d.$$

linksseitiger Grenzwert f(1-h)

$$\lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)+3}{(1-h)^2 + 2(1-h) - 3} = \lim_{h \to 0} \frac{4-h}{1-2h+h^2+2-2h-3} = \lim_{h \to 0} \frac{4}{0} = n.d.$$

Grenzwert für x → -3

rechtsseitiger Grenzwert f(-3+h)

$$\lim_{h \to 0} f(-3+h) = \lim_{h \to 0} \frac{(-3+h)+3}{(-3+h)^2 + 2(-3+h) - 3} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{9-6h+h^2-6+2h-3} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h^2-4h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-4} = -\frac{1}{4}$$

linksseitiger Grenzwert f(-3-h)

$$\lim_{h \to 0} f(-3-h) = \lim_{h \to 0} \frac{(-3-h)+3}{(-3-h)^2 + 2(-3-h) - 3} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{9+6h+h^2-6-2h-3} = \lim_{h \to 0} -\frac{h}{h^2+4h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{h+4} = -\frac{1}{4}$$

An der Stelle $x_{01}=1$ ist kein Grenzwert definitiert. ⇒ Die Funktion ist an dieser Stelle nicht stetig.

An der Stelle $x_{02}=-3$ existiert ein Grenzwert g. Der Funktionswert $f(x_{02})$ ist jedoch nicht definiert. ⇒ Die Funktion ist an dieser Stelle nicht stetig.

Asymptoten

Aufgabe 377:

Ermitteln Sie alle möglichen Asymptoten (senkrecht, waagrecht oder schief).

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x}$$

Senkrechte Asymptoten:

Definitionslücke bei: $x = 0$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{8}{x^2}}{\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{8}{x^2}}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{0} \quad \to \text{keine waagrechte Asymptote}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{8}{x^2}}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{0} \quad \to \text{keine waagrechte Asymptote}$$

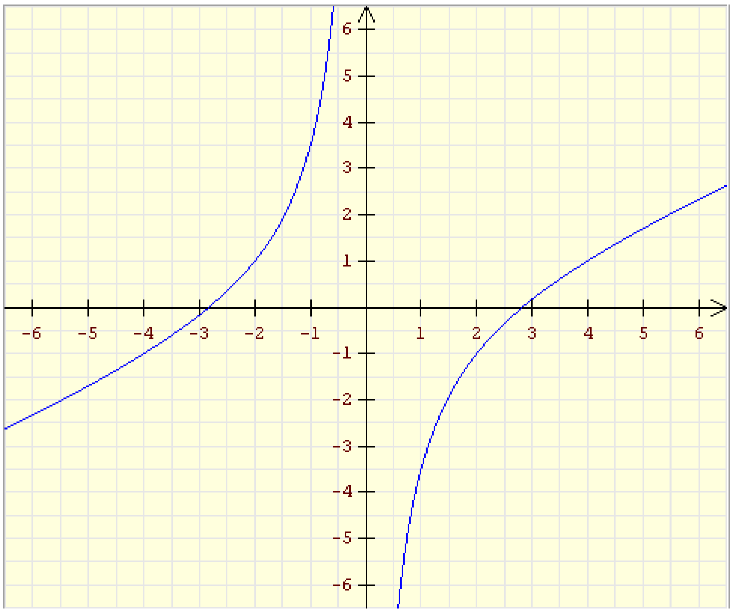
Es existieren keine waagrechten Asymptoten

Schiefe Asymptoten:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x^2}{2x} - \frac{8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$$

Schiefe Asymptote bei

$$y = \frac{1}{2}x$$



Aufgabe 378:

Ermitteln Sie alle möglichen Asymptoten (senkrecht, waagrecht oder schief).

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

Senkrechte Asymptoten:

Definitionslücke bei: $x = \pm 2$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

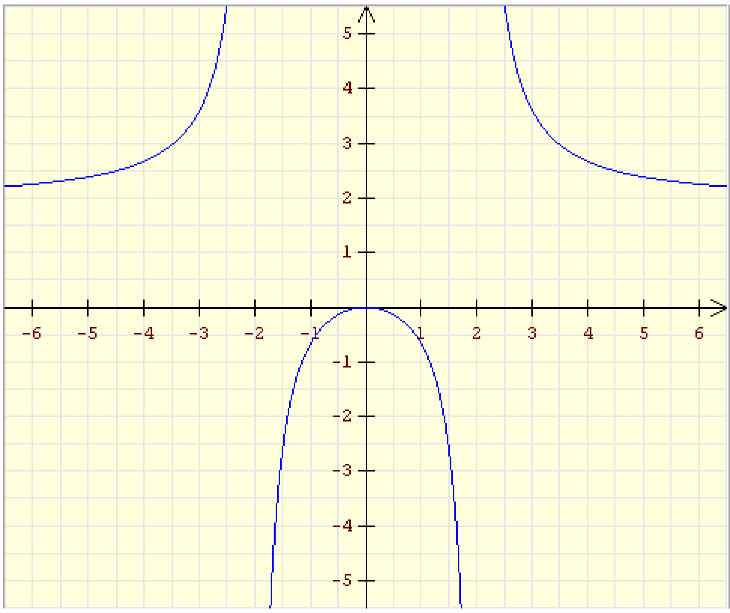
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Es existiert eine waagrechte Asymptote bei:

$y = 2$

Schiefe Asymptoten:

Keine schiefe Asymptoten, da Zähler- und Nennerpotenz gleich groß sind.



Aufgabe 379:

Bestimmen Sie alle senkrechten, waagrechten und schiefen Asymptoten der folgenden Funktion.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Senkrechte Asymptoten:

Definitionslücke bei: $x = \pm 2$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{}{1} = 1$$

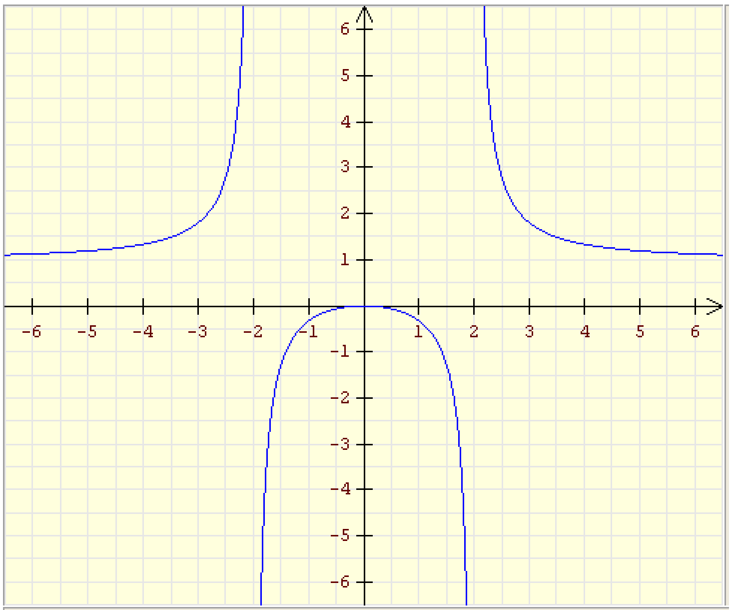
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Es existiert eine waagrechte Asymptote bei:

$y = 2$

Schiefe Asymptoten:

Keine schiefe Asymptoten, da Zähler- und Nennerpotenz gleich groß sind.



Aufgabe 380:

Bestimmen Sie alle senkrechten, waagrechten und schiefen Asymptoten der folgenden Funktion.

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4}$$

Senkrechte Asymptoten:

Definitionslücke bei: $x = 2$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

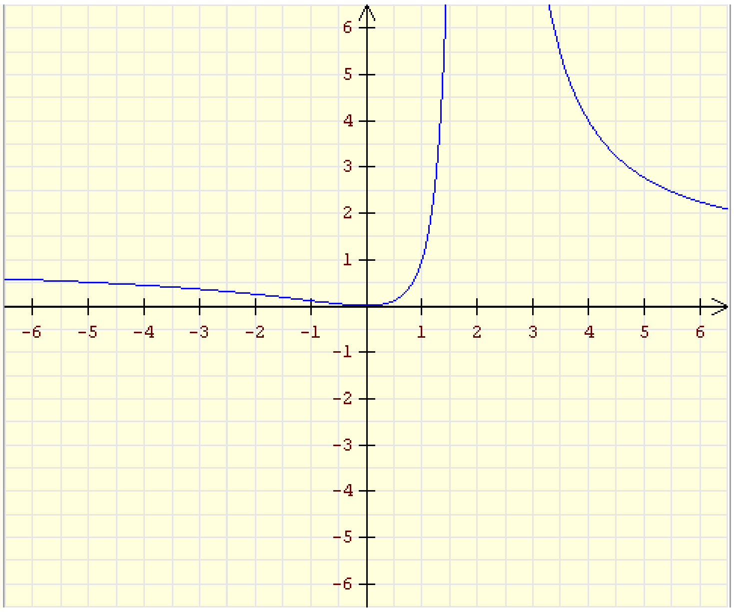
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Es existiert eine waagrechte Asymptote bei:

$y = 1$

Schiefe Asymptoten:

Keine schiefe Asymptoten, da Zähler- und Nennerpotenz gleich groß sind.



Aufgabe 381:

Bestimmen Sie von der folgenden Funktion f(x) die senkrechte und die waagrechte Asymptote.

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$$

Senkrechte Asymptoten:

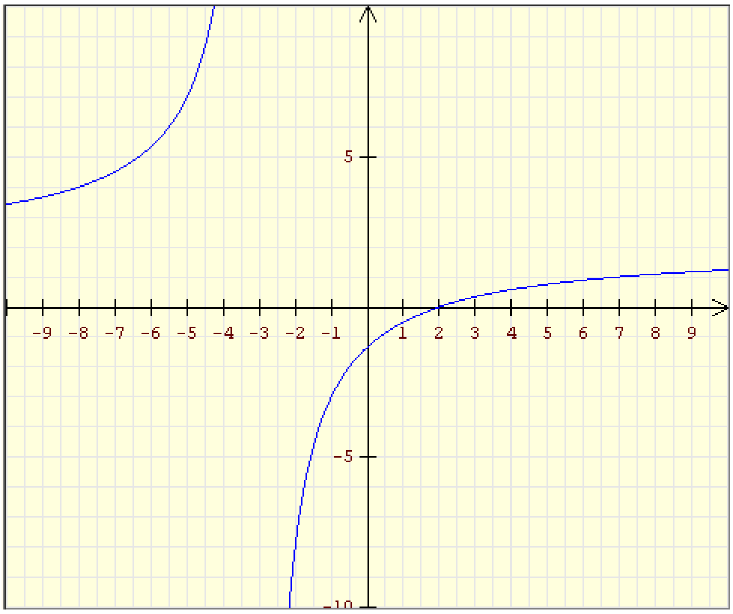
Definitionslücke bei: $x = -3$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 4}{x + 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Es existiert eine waagrechte Asymptote bei:

$y = 2$



Aufgabe 382:

Bestimmen Sie von der folgenden Funktion f(x) die senkrechte und die waagrechte Asymptote.

$$f(x) = \frac{4 - x}{x + 1}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{4 - x}{x + 1}$$

Senkrechte Asymptoten:

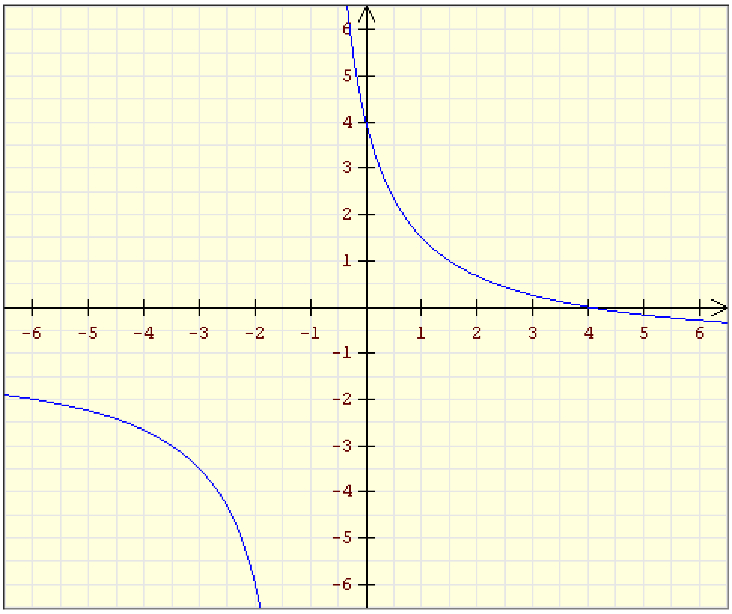
Definitionslücke bei: $x = -1$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 - x}{x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{1} = -1$$

Es existiert eine waagrechte Asymptote bei:

$y = -1$


-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6

Aufgabe 383:

Bestimmen Sie von der folgenden Funktion f(x) die senkrechte und die waagrechte Asymptote.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - 4x + 4}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$$

Senkrechte Asymptoten:

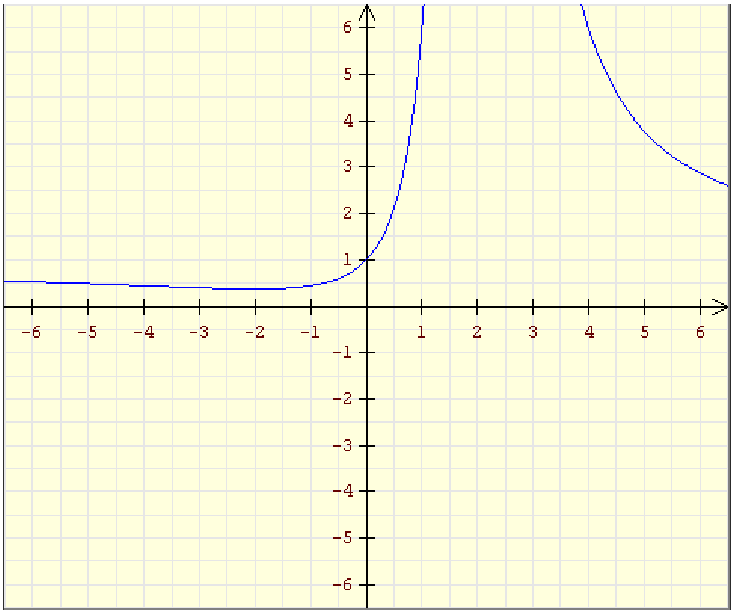
Definitionslücke bei: $x = 2$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Es existiert eine waagrechte Asymptote bei:

$y = 1$



Aufgabe 384:

Bestimmen Sie von der folgenden Funktion f(x) die senkrechte und die schiefe Asymptote.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

Senkrechte Asymptoten:

Definitionslücke bei: $x = -1$

Waagrechte Asymptoten:

Es existiert keine waagrechte Asymptote da der Zählergrad größer als der Nennergrad ist.

Schiefe Asymptoten:

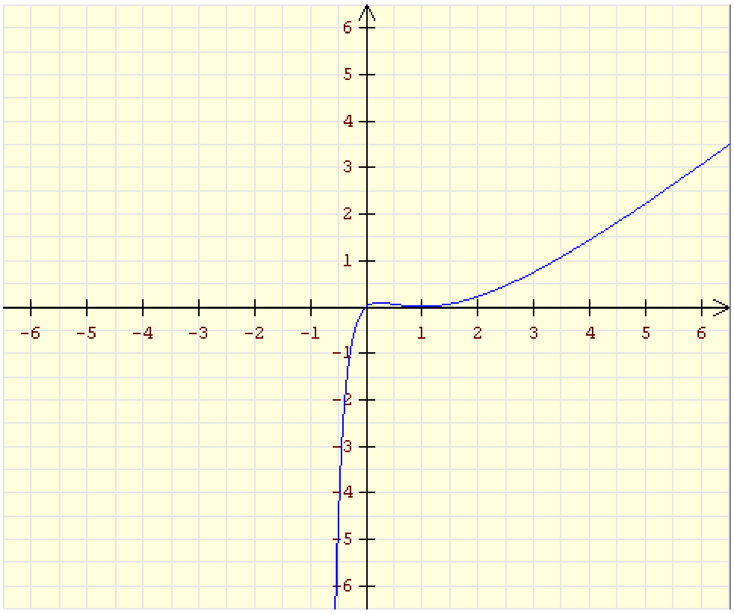
$$(x^3 - 2x^2 + x) : (x^2 + 2x + 1) = x - 4$$

$$-(x^3 + 2x^2 + x)$$

$$-4x^2$$

$$-(-4x^2)$$

Schiefe Asymptote bei $y = x - 4$



Aufgabe 385:

Bestimmen Sie alle senkrechten, waagrechten und schiefen Asymptoten der folgenden Funktion.

$$f(x) = \frac{1}{x+4} + 3$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{x+4} + 3$$

Senkrechte Asymptoten:

Definitionslücke bei: $x = -4$

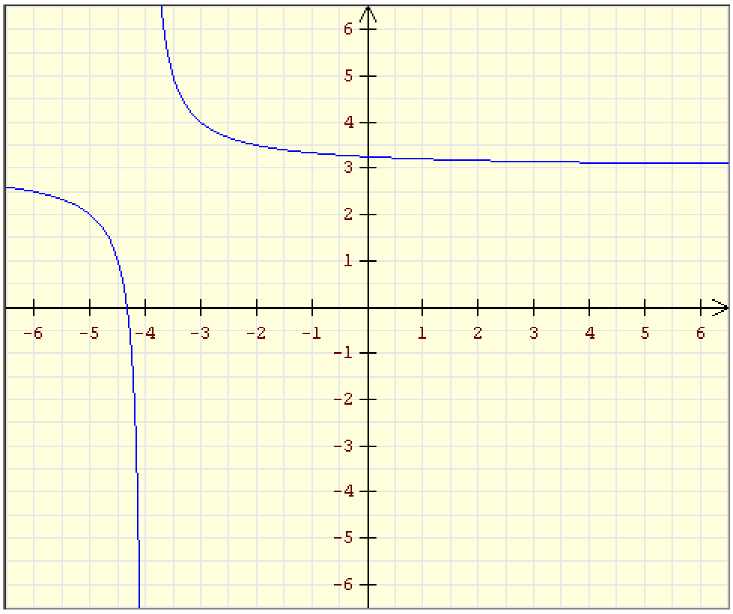
Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+4} + 3 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} + 3 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x}} + 3 = \frac{0}{1} + 3 = 3$$

Waagrechte Asymptote bei $y = 3$

Schiefe Asymptoten:

Keine schiefe Asymptote da Zählergrad kleiner als Nennergrad.



Aufgabe 386:

Bestimmen Sie alle senkrechten und waagrechten und Asymptoten der folgenden Funktion.

$$f(x) = 2^{-x}$$

Lösung:

Senkrechte Asymptoten:

Keine Definitionslücke, also auch keine senkrechte Asymptote

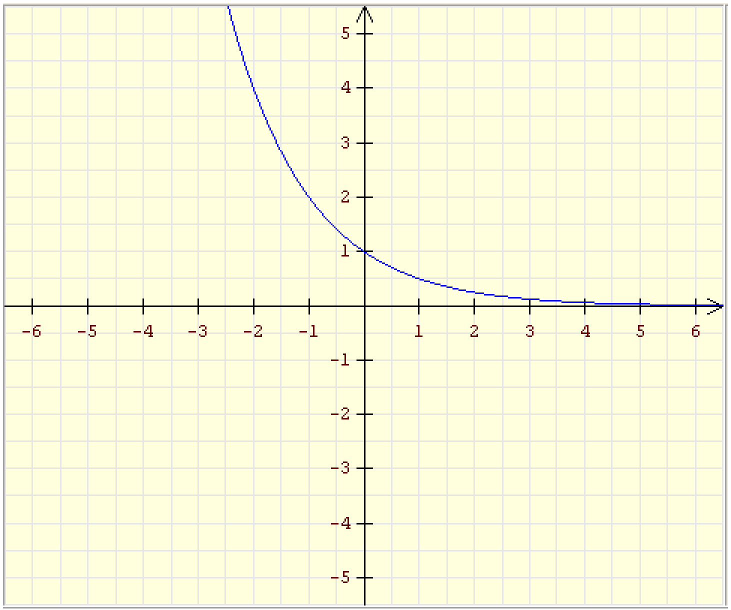
Waagrechte Asymptote:

$\lim_{x\to\pm\infty} 2^{-x} \rightarrow$ je größer x wird, desto kleiner wird der Ausdruck

$y = 0$

Schiefe Asymptote:

Keine



Aufgabe 387:

Bestimmen Sie alle senkrechten, waagrechten und schiefen Asymptoten der folgenden Funktion.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$$

Senkrechte Asymptoten:

Definitionslücke bei: $x = 1$

Waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{0} \quad \rightarrow \text{keine waagrechte Asymptote}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} \quad \rightarrow \text{keine waagrechte Asymptote}$$

Es existieren keine waagrechten Asymptoten

Schiefe Asymptoten:

Werden durch Polynomdivision ermittelt:

$$(x^2 + x - 6):(x - 1) = x + 2 - \frac{4}{x - 1}$$

$$-(x^2 - x)$$

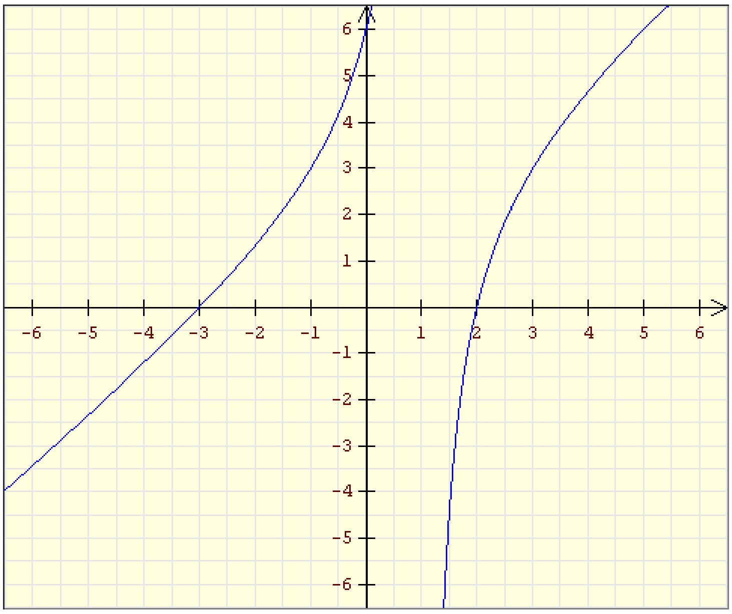
$$+2x - 6$$

$$-(2x - 2)$$

$$-4$$

Schiefe Asymptote bei

$$y = x + 2$$



Differentialrechnung

Ableitungen

Aufgabe 388:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

$$\text{(a)}\quad f(x)=\frac{3x-5}{2x}\qquad \text{(b)}\quad f(x)=\frac{x^2-8}{3x}\qquad \text{(c)}\quad f(x)=\frac{4x^2-9}{x^3}$$

$$\text{(d)}\quad f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{8x^2}\qquad \text{(e)}\quad f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^3}\qquad \text{(f)}\quad f(x)=\frac{4x+2}{10x^2}$$

Lösung:

$$\text{(a)}\quad f(x)=\frac{3x-5}{2x}=\frac{3x}{2x}-\frac{5}{2x}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x^{-1}$$

$$f'(x)=+\frac{5}{2}x^{-2}=\frac{5}{2x^2}\qquad f''(x)=-2\cdot\frac{5}{2}x^{-3}=-\frac{5}{x^3}$$

$$\text{(b)}\quad f(x)=\frac{x^2-8}{3x}=\frac{x^2}{3x}-\frac{8}{3x}=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}x^{-1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}x^{-2}=\frac{1}{3}+\frac{8}{3x^2}=\frac{x^2+8}{3x^2}\qquad f''(x)=-2\cdot\frac{8}{3}x^{-3}=-\frac{16}{3x^3}$$

$$\text{(c)}\quad f(x)=\frac{4x^2-9}{x^3}=\frac{4x^2}{x^3}-\frac{9}{x^3}=4x^{-1}-9x^{-3}$$

$$f'(x)=-4x^{-2}+27x^{-4}=-\frac{4}{x^2}+\frac{27}{x^4}=\frac{-4x^2+27}{x^4}$$

$$f''(x)=8x^{-3}-108x^{-5}=\frac{8}{x^3}-\frac{108}{x^5}=\frac{8x^2-108}{x^5}$$

$$\text{(d)}\quad f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{8x^2}=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^{-2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{2}x^{-3}=\frac{1}{8}-x^{-3}=\frac{1}{8}-\frac{1}{x^3}=\frac{x^3-8}{8x^3}\qquad f''(x)=3x^{-4}=\frac{3}{x^4}$$

(e) $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^3}=\frac{x^2+4x+4}{x^3}=x^{-1}+4x^{-2}+4x^{-3}$

$$f'(x)=-x^{-2}-8x^{-3}-12x^{-4}=-\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x^4}=-\frac{x^2+8x+12}{x^4}$$

$$f''(x)=2x^{-3}+24x^{-4}+48x^{-5}=\frac{2}{x^3}+\frac{24}{x^4}+\frac{48}{x^5}=\frac{2x^2+24x+48}{x^5}$$

(f) $f(x)=\frac{4x+2}{10x^2}=\frac{2}{5}x^{-1}+\frac{1}{5}x^{-2}$

$$f'(x)=-\frac{2}{5}x^{-2}-\frac{2}{5}x^{-3}=-\frac{2}{5}\left(x^{-2}+x^{-3}\right)=-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\frac{2}{5}\frac{x+1}{x^3}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{5}(-2x^{-3}-3x^{-4})=\frac{2}{5}\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2x+3}{x^4}$$

Aufgabe 389:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\frac{3}{4-x}$ (b) $f(x)=\frac{24}{x^2-4}$ (c) $f(x)=\frac{-8}{(x+3)^2}$ (d) $f(x)=\frac{-18}{(x^2-9x)^2}$

Lösung:

(a) $f(x)=\dfrac{3}{4-x}=3(4-x)^{-1}$

$$f'(x)=-3(4-x)^{-2}\cdot(-1)=\frac{3}{(4-x)^2}\qquad f''(x)=-6(4-x)^{-3}\cdot(-1)=\frac{6}{(4-x)^3}$$

(b) $f(x)=\dfrac{24}{x^2-4}=24(x^2-4)^{-1}$

$$f'(x)=-24(x^2-4)^{-2}\cdot 2x=-48\frac{x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=-48\frac{1\cdot(x^2-4)^2-2(x^2-4)2x\cdot x}{(x^2-4)^4}=-48\frac{(x^2-4)\left[(x^2-4)-4x^2\right]}{(x^2-4)^4}$$

(Rot: Ableitung des Nenners: $v'(x)$).

$$f''(x)=-48\frac{x^2-4-4x^2}{(x^2-4)^3}=-48\frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3}=48\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$$

(c) $f(x)=\dfrac{-8}{(x+3)^2}=-8(x+3)^{-2}$

$$f'(x)=16(x+3)^{-3}\cdot 1=\frac{16}{(x+3)^3}\qquad f''(x)=-48(x+3)^{-4}=\frac{-48}{(x+3)^4}$$

(d) $f(x)=\dfrac{-18}{(x^2-9x)^2}=-18(x^2-9x)^{-2}$

$$f'(x)=36(x^2-9x)^{-3}\cdot(2x-9)=36\frac{2x-9}{(x^2-9x)^3}$$

$$f''(x)=36\frac{2(x^2-9x)^3-3(x^2-9x)^2(2x-9)\cdot(2x-9)}{(x^2-9x)^6}$$

$$f''(x)=36\frac{(x^2-9x)^2\left[2(x^2-9x)-3(2x-9)\cdot(2x-9)\right]}{(x^2-9x)^6}$$

$$f''(x)=36\frac{2(x^2-9x)-3(2x-9)^2}{(x^2-9x)^4}=36\frac{2x^2-18x-3(4x^2-36x+81)}{(x^2-9x)^4}$$

$$f''(x)=36\frac{2x^2-18x-12x^2+108x-243}{(x^2-9x)^4}=36\frac{-10x^2+90x-243}{(x^2-9x)^4}$$

Aufgabe 390:

Berechnen Sie jeweils zwei Ableitungen.

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ (b) $f(x)=\dfrac{16x}{x^2+8}$ (c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$ (e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$ (f) $f(x)=\dfrac{4x+8}{x^2+t}$

(g) $f(x)=\dfrac{t^2-x^2}{x-2t}$ (h) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+t)^2}$ (i) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

(j) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$ (k) $f(x)=\dfrac{3x^3-3x}{x^2+4}$ (l) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{(x+1)^2}$

Lösung:

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ $\quad f'(x)=\dfrac{1\cdot(x+1)-1\cdot x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}=(x+1)^{-2}$

$$f''(x)=-2(x+1)^{-3}\cdot 1=-\frac{2}{(x+1)^3}$$

(b) $f(x)=\dfrac{16x}{x^2+8}=16\dfrac{x}{x^2+8}$

$$f'(x)=16\cdot\frac{x^2+8-2x\cdot x}{\left(x^2+8\right)^2}=16\frac{8-x^2}{\left(x^2+8\right)^2}$$

$$f''(x)=16\frac{-2x\left(x^2+8\right)^2-2\left(x^2+8\right)2x\cdot\left(8-x^2\right)}{\left(x^2+8\right)^4}$$

$$=16\frac{\left(x^2+8\right)\left[-2x\left(x^2+8\right)-2\cdot 2x\cdot\left(8-x^2\right)\right]}{\left(x^2+8\right)^4}=16\frac{-2x\left(x^2+8\right)-2\cdot 2x\cdot\left(8-x^2\right)}{\left(x^2+8\right)^3}$$

$$=16\frac{-2x^3-16x-32x+4x^3}{(x^2+8)^3}=16\frac{2x^3-48x}{(x^2+8)^3}$$

Wer üben will: $\quad f'''(x)=\ldots=32\dfrac{-3x^4+104x^2-128}{(x^2+8)^4}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-1\cdot(x^2-1)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-2(x+2)\cdot(x^2+4x+1)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2)-2\cdot(x^2+4x+1)\right]}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{(2x+4)(x+2)-2\cdot(x^2+4x+1)}{(x+2)^3}=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-2}{(x+2)^3}=\frac{6}{(x+2)^3}$$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+a^2)-2x(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+2a^2x-\cancel{2x^3}+2a^2x}{(x^2+a^2)^2}=4a^2\frac{x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$f''(x)=4a^2\frac{1\cdot(x^2+a^2)^2-2(x^2+a^2)2x\cdot x}{(x^2+a^2)^4}=4a^2\frac{(x^2+a^2)\left[(x^2+a^2)-4x^2\right]}{(x^2+a^2)^4}$$

$$=4a^2\frac{a^2-3x^2}{(x^2+a^2)^3}$$

(e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)^2-2(x+1)(2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[2(x+1)-2(2x+3)\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2(x+1)-2(2x+3)}{(x+1)^3}=\frac{-2x-4}{(x+1)^3}=-2\frac{x+2}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=-2\frac{1\cdot(x+1)^3-3(x+1)^2\cdot(x+2)}{(x+1)^6}=-2\frac{(x+1)^2\left[(x+1)-3(x+2)\right]}{(x+1)^6}$$

$$=-2\frac{(x+1)-3(x+2)}{(x+1)^4}=-2\frac{x+1-3x-6}{(x+1)^4}=-2\frac{-2x-5}{(x+1)^4}=2\frac{2x+5}{(x+1)^4}$$

(f) $f(x)=\frac{4x+8}{x^2+t}$

$$f'(x)=\frac{4(x^2+t)-2x(4x+8)}{(x^2+t)^2}=\frac{4x^2+4t-8x^2-16x}{(x^2+t)^2}=\frac{-4x^2-16x+4t}{(x^2+t)^2}$$

$$=-4\frac{x^2+4x-t}{(x^2+t)^2}$$

$$f''(x)=-4\frac{(2x+4)(x^2+t)^2-2(x^2+t)2x\cdot(x^2+4x-t)}{(x^2+t)^4}$$

$$=-4\frac{(x^2+t)\left[(2x+4)(x^2+t)-2\cdot 2x\cdot(x^2+4x-t)\right]}{(x^2+t)^4}$$

$$=-4\frac{(2x+4)(x^2+t)-2\cdot 2x\cdot(x^2+4x-t)}{(x^2+t)^3}$$

$$=-4\frac{2x^3+4x^2+2tx+4t-4x^3-16x^2+4tx}{(x^2+t)^2}=-4\frac{-2x^3-12x^2+6tx+4t}{(x^2+t)^3}$$

$$=8\frac{x^3+6x^2-3tx-2t}{(x^2+t)^3}$$

(g) $f(x)=\frac{t^2-x^2}{x-2t}$

$$f'(x)=\frac{-2x(x-2t)-1\cdot(t^2-x^2)}{(x-2t)^2}=\frac{-2x^2+4tx-t^2+x^2}{(x-2t)^2}=\frac{-x^2+4tx-t^2}{(x-2t)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x+4t)(x-2t)^2-2(x-2t)\cdot\left(-x^2+4tx-t^2\right)}{(x-2t)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x-2t)\left[(-2x+4t)(x-2t)-2\cdot\left(-x^2+4tx-t^2\right)\right]}{(x-2t)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-2x^2+4tx+4tx-8t^2+2x^2-8tx+2t^2}{(x-2t)^3}=\frac{-6t^2}{(x-2t)^3}$$

(h) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+t)^2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+t)^2-2(x+t)\cdot x^2}{(x+t)^4}=\frac{(x+t)\left[2x(x+t)-2x^2\right]}{(x+t)^4}=\frac{2x(x+t)-2x^2}{(x+t)^3}=2t\frac{x}{(x+t)^3}$$

$$f''(x)=2t\frac{1\cdot(x+t)^3-3(x+t)^2\cdot x}{(x+t)^6}=2t\frac{(x+t)^2\left[(x+t)-3x\right]}{(x+t)^6}=2t\frac{-2x+t}{(x+t)^4}$$

(i) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+2)-1\cdot x^3}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(6x^2+12x)(x+2)^2-2(x+2)(2x^3+6x^2)}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)\left[(6x^2+12x)(x+2)-2(2x^3+6x^2)\right]}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{(6x^2+12x)(x+2)-2(2x^3+6x^2)}{(x+2)^3}=\frac{6x^3+24x^2+24x-4x^3-12x^2}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{2x^3-12x^2+24x}{(x+2)^3}$$

(j) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+4)-2x\cdot x^3}{(x^2+4)^2}=\frac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+24x)(x^2+4)^2-2(x^2+4)\cdot 2x\cdot(x^4+12x^2)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+4)\left[(4x^3+24x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+12x^2)\right]}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+24x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+12x^2)}{(x^2+4)^3}=\frac{4x^5+24x^3+16x^3+96x-4x^5-48x^3}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-8x^3+96x}{(x^2+4)^3}=-8\frac{x^3-12x}{(x^2+4)^3}$$

(k) $f(x)=\dfrac{3x^3-3x}{x^2+4}=3\dfrac{x^3-x}{x^2+4}$

$$f'(x)=3\frac{(3x^2-1)(x^2+4)-2x(x^3-x)}{(x^2+4)^2}=3\frac{3x^4+11x^2-4-2x^4+2x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=3\frac{x^4+13x^2-4}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=3\frac{(4x^3+26x)(x^2+4)^2-2(x^2+4)\cdot 2x\cdot(x^4+13x^2-4)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=3\frac{(x^2+4)\left[(4x^3+26x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+13x^2-4)\right]}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x)=3\frac{(4x^3+26x)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^4+13x^2-4)}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=3\frac{4x^5+26x^3+16x^3+104x-4x^5-52x^3+16x}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=3\frac{-10x^3+120x}{(x^2+4)^3}=-30\frac{x^3-12x}{(x^2+4)^3}$$

(l) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)(x^3-8)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[3x^2(x+1)-2(x^3-8)\right]}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)-2(x^3-8)}{(x+1)^3}=\frac{3x^3+3x^2-2x^3+16}{(x+1)^3}=\frac{x^3+3x^2+16}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(x+1)^3-3(x+1)^2(x^3+3x^2+16)}{(x+1)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(x+1)^2\left[(3x^2+6x)(x+1)-3(x^3+3x^2+16)\right]}{(x+1)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(x+1)-3(x^3+3x^2+16)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{3x^3+9x^2+6x-3x^3-9x^2-48}{(x+1)^4}=\frac{6x-48}{(x+1)^4}=6\frac{x-8}{(x+1)^4}$$

Ableitungen von Wurzelfunktionen

Aufgabe 391:

Berechnen Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(1) $f(x)=\frac{3-x}{\sqrt{x}}$

(2) $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$

(3) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{2x}$

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x}$

(5) $f(x)=\frac{4-\sqrt{x}}{x^2}$

(6) $f(x)=\sqrt{4-3x^2}$

(7) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$

(8) $f(x)=x\sqrt{x^2+25}$

(9) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{2-x}}$

(10) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

(11) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}}$

(12) $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+8}}$

(13) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-4}}$

(14) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

Lösung:

(1) $$f(x)=\frac{3-x}{\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x}}=3x^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{x}$$

$$f'(x)=-\tfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{3+x}{2x\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\tfrac{9}{4}x^{-\frac{5}{2}}+\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{9}{4x^2\sqrt{x}}+\frac{1}{4x\sqrt{x}}=\frac{9+x}{4x^2\sqrt{x}}$$

(2) $$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{x\sqrt{x}}=\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\tfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}^5}=\frac{3x^2-12}{4x^2\sqrt{x}}=3\frac{x^2-4}{4x^2\sqrt{x}}$$

(3) $$f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=-\tfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

(4) $$f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x}=x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-2}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+4}{2x^2}$$

$$f''(x)=\tfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}-4x^{-3}=\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}-\frac{4}{x^3}=\frac{3\sqrt{x}-16}{4x^3}$$

(5) $$f(x)=\frac{4-\sqrt{x}}{x^2}=\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=4x^{-2}-x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x)=-8x^{-3}+\tfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{8}{x^3}+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-16+3\sqrt{x}}{2x^3}$$

$$f''(x)=24x^{-4}-\tfrac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}=\frac{24}{x^4}-\frac{15}{4x^3\sqrt{x}}=\frac{96-15\sqrt{x}}{4x^4}$$

(6) $$f(x)=\sqrt{4-3x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-6x}{2\sqrt{4-3x^2}}=-3\cdot\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}$$

$$f''(x)=-3\cdot\frac{1\cdot\sqrt{4-3x^2}-\frac{-\cancel{6}^{3}x}{\cancel{2}\sqrt{4-3x^2}}\cdot x}{4-3x^2}=$$ Mit $\sqrt{4-3x^2}$ erweitern:

$$f''(x)=-3\frac{(4-3x^2)-3x^2}{(4-3x^2)\sqrt{4-3x^2}}=-3\frac{4-6x^2}{\sqrt{4-3x^2}^3}$$

(7) $f(x)=\sqrt{x^2+4x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$

$$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+4x}-\dfrac{\overset{x+2}{\cancel{2x+4}}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4x}}\cdot(x+2)}{x^2+4x}=\frac{(x^2+4x)-(x+2)^2}{(x^2+4x)\cdot\sqrt{x^2+4x}}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+4x)-(x^2+4x+4)}{(x^2+4x)\cdot\sqrt{x^2+4x}}=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}^3}$$

(8) $f(x)=x\sqrt{x^2+25}$

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{x^2+25}+x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+25}}=\frac{(x^2+25)+x^2}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{2x^2+25}{\sqrt{x^2+25}}$$

$$f''(x)=\frac{4x\cdot\sqrt{x^2+25}-\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+25}}\cdot(2x^2+25)}{x^2+25}=\frac{4x(x^2+25)-x(2x^2+25)}{(x^2+25)\sqrt{x^2+25}}$$

$$f''(x)=\frac{2x^3+75x}{\sqrt{x^2+25}^3}$$

(9) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}=4(2-x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=-2(2-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x}^3}$

$$f''(x)=-3\cdot(2-x)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-1)=\frac{3}{\sqrt{2-x}^5}$$

(10) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x-2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(x+1)}{x-2}=\frac{2(x-2)-(x+1)}{2(x-2)\sqrt{x-2}}=\frac{x-5}{2\sqrt{x-2}^3}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2\sqrt{x-2}^3-3\cdot\sqrt{x-2}\cdot(x-5)}{4(x-2)^3}$$

denn die Ableitung des Nenner $2\sqrt{x-2}^3=2(x-2)^{\frac{3}{2}}$ ist $3\cdot(x-2)^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x-2}$.

Nun klammert man im Zähler $\sqrt{x-2}$ aus und kürzt diese Wurzel. Es folgt

$$f''(x)=\frac{2(x-2)-3(x-5)}{4(x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-x+11}{4\sqrt{x-2}^5}.$$

(11) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x+4}-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\cdot x}{x+4}=\frac{2(x+4)-x}{2\sqrt{x+4}\,(x+4)}=\frac{x+8}{2\sqrt{x+4}^3}$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2\sqrt{x+4}^3-3\sqrt{x+4}\cdot(x+8)}{4(x+4)^3}=\frac{\sqrt{x+4}\cdot\left(2(x+4)-3\cdot(x+8)\right)}{4(x+4)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2(x+4)-3\cdot(x+8)}{4(x+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-x-16}{4\sqrt{x+4}^3}$$

denn die Ableitung des Nenners von f' ist

$$\left(2\sqrt{x+4}^3\right)'=\left(2(x+4)^{\frac{3}{2}}\right)'=3\cdot(x+4)^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x+4}$$

(12) $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+8}}$

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x^2+8}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+8}}\cdot 4x}{(x^2+8)}=\frac{4(x^2+8)-4x^2}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}=\frac{32}{\sqrt{x^2+8}^3}$$

Für die 2. Ableitung schreiben wir $f'(x)=32\left(x^2+8\right)^{-\frac{3}{2}}$.

$$f''(x)=-48\cdot\left(x^2+8\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=-96\frac{x}{\sqrt{x^2+8}^5}$$

(13) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-4}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x}{x-4}}}\cdot\frac{1\cdot(x-4)-1\cdot x}{(x-4)^2}=\frac{\sqrt{x-4}\cdot(-4)}{2\sqrt{x}\cdot(x-4)^2}=\frac{-2}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4}^3}$$

Für die 2. Ableitung schreiben wir (weil im Zähler kein x steht:)

$$f'(x)=-2x^{-\frac{1}{2}}\cdot(x-4)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=x^{-\frac{3}{2}}\cdot(x-4)^{-\frac{3}{2}}+\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)(x-4)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}^3\cdot\sqrt{x-4}^3}+\frac{3}{\sqrt{x}\sqrt{x-4}^5}$$

$$f''(x)=\frac{(x-4)+3x}{\sqrt{x}^3\sqrt{x-4}^5}=\frac{4x-4}{\sqrt{x}^3\sqrt{x-4}^5}=4\frac{x-1}{\sqrt{x}^3\sqrt{x-4}^5}$$

(14) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-1\cdot\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-2x}{(x+1)^2\cdot2\sqrt{x}}=\frac{1-x}{(x+1)^2\cdot2\sqrt{x}}$

Hier muten wir keinem eine zweite Ableitung zu ….

Ableitungen von Exponentialfunktionen

Aufgabe 392:

Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

a) $f(x) = 4e^{2x}$

b) $f(x) = e^{x+3}$

c) $f(x) = e^{2-3x}$

d) $f(x) = 2e^{-x-1}$

e) $f(x) = x + e^{-\frac{1}{2}x}$

f) $f(x) = x^2 - e^{-x}$

Lösung:

a) $f(x) = 4e^{2x}$

$$f'(x) = 4 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 8e^{2x}$$

$$f''(x) = 8 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 16 \cdot e^{2x}$$

$$f'''(x) = 16 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 32 \cdot e^{2x}$$

b) $f(x) = e^{x+3}$

$$f'(x) = e^{x+3} = f''(x) = f'''(x) = \dots$$

c) $f(x) = e^{2-3x}$

$$f'(x) = -3 \cdot e^{2-3x}$$

$$f''(x) = 9 \cdot e^{2-3x}$$

$$f'''(x) = -27 \cdot e^{2-3x}$$

d) $f(x) = 2e^{-x-1}$

$$f'(x) = 2e^{-x-1} \cdot (-1) = -2e^{-x-1}$$

$$f''(x) = 2e^{-x-1} = f(x)$$

$$f'''(x) = f'(x)$$

e) $f(x) = x + e^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'''(x) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}$

f) $f(x) = x^2 - e^{-x}$ $\quad f'(x) = 2x + e^{-x}$

$f''(x) = 2 - e^{-x}$

$f'''(x) = e^{-x}$

Aufgabe 393:

Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

b) $f(x) = x \cdot e^{2-x}$

c) $f(x) = (x+2) \cdot e^{x}$

d) $f(x) = (1-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

e) $f(x) = \dfrac{e^{x} + x}{e^{2x}}$

f) $f_t(x) = tx \cdot e^{\frac{1}{2}x-1}$

g) $f_k(x) = \frac{1}{k}x \cdot e^{-kx}$

h) $f_t(x) = \left(x^2 - t^2\right) \cdot e^{-x}$

Lösung:

a) $f(x)=x\cdot e^{-x}$

$$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(1-x)$$
$$f''(x)=-e^{-x}\cdot(1-x)+e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}(2-x)$$
$$f'''(x)=e^{-x}(2-x)-e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(3-x)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot e^{-x}\cdot(n-x)=(-1)^{n}\cdot e^{-x}\cdot(x-n)$

Man kann dies durch vollständige Induktion beweisen !

b) $f(x)=x\cdot e^{2-x}$

$$f'(x)=1\cdot e^{2-x}+x\cdot e^{2-x}\cdot(-1)=e^{2-x}(1-x)=-e^{2-x}(x-1)$$
$$f''(x)=-e^{2-x}(1-x)\cdot e^{2-x}(-1)=-e^{2-x}(2-x)=e^{2-x}(x-2)$$
$$f'''(x)=-e^{2-x}(x-2)+e^{2-x}=e^{2-x}(-x+3)=-e^{2-x}(x-3)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n}e^{2-x}(x-n)$

c) $f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$

$$f'(x)=e^{x}+(x+2)e^{x}=e^{x}(x+3)$$
$$f''(x)=e^{x}+(x+3)e^{x}=e^{x}(x+4)$$
$$f''(x)=e^{x}+(x+4)e^{x}=e^{x}(x+5)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=e^{x}(x+n+2)$

d) $f(x)=(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$$f'(x)=-e^{-\frac{1}{2}x}+(1-x)e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(-1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=\tfrac{1}{2}(x-3)e^{-\frac{1}{2}x}=-\tfrac{1}{2}(3-x)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$f''(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left[1-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}x\right)=\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(5-x)$$
$$f'''(x)=\tfrac{1}{4}\left[e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)(5-x)+e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-1)\right]=\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\left[-\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}x-1\right]$$
$$=\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left[-\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2}x\right]=\tfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(x-7)=-\tfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(7-x)$$

Verdacht: $f^{(n)}(x)=\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n}e^{-\frac{1}{2}x}(2n+1-x)$

Die Koeffizienten sind Potenzen von $\left(-\tfrac{1}{2}\right)$ und zwar so, daß sie bei geradem Exponenten positiv sind, bei ungeradem negativ, also stimmt der Faktor $\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n}$

e) $$f(x)=\frac{e^x+x}{e^{2x}}=\left(e^x+x\right)\cdot e^{-2x}=e^{-x}+x\cdot e^{-2x} \quad !!!$$

$$f'(x)=-e^{-x}+e^{-2x}+x\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=-e^{-x}+e^{-2x}(1-2x)=\frac{-e^x+1-2x}{e^{2x}}$$

$$f''(x)=e^{-x}-2e^{-2x}(1-2x)+e^{-2x}(-2)=e^{-x}-2e^{-2x}(1-2x+1)$$

$$=e^{-x}-2e^{-2x}(2-2x)=\frac{e^x-2(2-2x)}{e^{2x}}=\frac{e^x-4+4x}{e^{2x}}$$

$$f'''(x)-e^{-x}+4e^{-2x}(2-2x)-2e^{-2x}(-2)=-e^{-x}+4e^{-2x}(2-2x+1)$$

$$=-e^{-x}+4e^{-2x}(3-2x)=\frac{-e^x+4(3-2x)}{e^{2x}}=\frac{-e^x+12-8x}{e^{2x}}$$

Will man hier eine Formel für die n-te Ableitung suchen, sollte man zuerst einmal den Faktor -1 herausziehen, der abwechseln vor e^x im Zähler steht. Damit erhält man folgende Formeln:

$$f(x)=\frac{e^x+x}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=-\frac{e^x-1+2x}{e^{2x}}$$

$$f''(x)=\frac{e^x-4+4x}{e^{2x}}$$

$$f'''(x)=-\frac{e^x-12+8x}{e^{2x}}$$

jetzt entdeckt man folgende Formel:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{e^x-a_n+2^n x}{e^{2x}}$$

Die Zahlenfolge a_n entsteht bei der Ableitung so (siehe oben):

$$a_2=2\cdot(1+1)=2\cdot 2=4$$
$$a_3=4\cdot(2+1)=4\cdot 3=12 \qquad \text{Entsprechend kann man zeigen}$$
$$a_4=8\cdot(3+1)=8\cdot 4=32$$
$$a_5=16\cdot(4+1)=16\cdot 5=80$$

Also kann man diese Formel vermuten: $a_n=2^{n-1}\cdot n$

Damit lautet die *Vermutung* für die n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{e^x-n\cdot 2^{n-1}+2^n x}{e^{2x}} \quad \text{bzw.} \quad f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{e^x+2^{n-1}(2x-n)}{e^{2x}}$$

f) $f_t(x) = tx \cdot e^{\frac{1}{2}x-1}$

$$f_t'(x) = t \cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + tx \cdot e^{\frac{1}{2}x-1} \cdot \tfrac{1}{2} = te^{\frac{1}{2}x-1}\left(1+\tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{2}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+2)$$
$$f_t''(x) = \tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+2) + \tfrac{1}{2}te^{\frac{1}{2}x-1} = \tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1}[x+2+2] = \tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+4)$$
$$f_t'''(x) = \tfrac{1}{8}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+4) + \tfrac{1}{4}te^{\frac{1}{2}x-1} \cdot 1 = \tfrac{1}{8}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+4+2) = \tfrac{1}{8}te^{\frac{1}{2}x-1}(x+6)$$

g) $f_k(x) = \frac{1}{k}x \cdot e^{-kx}$

Hier lasse ich den Faktor $\frac{1}{k}$ als konstanten Faktor unverändert stehen:

$$f'(x) = \tfrac{1}{k} \cdot \left[1 \cdot e^{-kx} + x \cdot e^{-kx} \cdot (-k)\right] = \tfrac{1}{k} \cdot e^{-kx}(1-kx)$$
$$f''(x) = \tfrac{1}{k} \cdot \left[-ke^{-kx}(1-kx) + e^{-kx} \cdot (-k)\right] = \tfrac{1}{k}(-k)e^{-kx}[1-kx+1] = -e^{-kx}(2-kx)$$
$$f'''(x) = ke^{-kx} \cdot (2-kx) - e^{-kx}(-k) = ke^{-kx} \cdot [2-kx+1] = ke^{-kx}(3-kx)$$

h) $f_t(x) = \left(x^2 - t^2\right) \cdot e^{-x}$

$$f_t'(x) = 2x \cdot e^{-x} + \left(x^2 - t^2\right)e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}\left(2x - x^2 + t^2\right) = e^{-x}\left(-x^2 + 2x - t^2\right)$$
$$= -e^{-x}\left(x^2 - 2x + t^2\right)$$
$$f_t''(x) = -e^{-x}\left(-x^2 + 2x - t^2\right) + e^{-x}(-2x+2) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2 + t^2\right)$$
$$f_t'''(x) = -e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2 + t^2\right) + e^{-x}(2x-4) = -e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2 + t^2 - 2x + 4\right)$$
$$= -e^{-x}\left(x^2 - 6x + 6 + t^2\right)$$

Aufgabe 394:

Leiten Sie folgende Funktionen zweimal ab.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{1-e^x}{2x}$

d) $f_t(x) = \dfrac{e^{-x}}{t-e^{-x}}$

e) $f(x) = 2 - \dfrac{4}{e^{2x}-1}$

f) $f_t(x) = \dfrac{e^x - t}{e^x + t}$

g) $f(x) = \dfrac{e^x}{2-e^x}$

h) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-4}{e^x}$

Lösung:

a) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ Mit der Quotientenregel folgt

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-1\cdot e^x}{x^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left[e^x(x+1)+e^x\cdot 1\right]\cdot x^{\cancel{2}}-2\cancel{x}\cdot e^x(x-1)}{x^{\cancel{4}\,3}}=\frac{e^x\left(x^2+x+x-2x+2\right)}{x^3}$$

$$=\frac{e^x\left(x^2+2\right)}{x^3}$$

b) $f(x)=\frac{e^{-x}}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)-e^{-x}}{(x+1)^2}=\frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^{-x}\left[(x+2)(x+1)-(x+1)+2(x+2)\right]}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{e^{-x}\left[x^2+3x+2-x-1+2x+4\right]}{(x+1)^3}=\frac{e^{-x}\left(x^2+4x+5\right)}{(x+1)^3}$$

c) $f(x)=\frac{1-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^x}{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-e^x\cdot x-\left(1-e^x\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-e^x\cdot x-1+e^x}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x(1-x)-1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[e^x(1-x)+e^x(-1)\right]\cdot x^{\cancel{2}}-2\cancel{x}\cdot\left[e^x(1-x)-1\right]}{x^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\left[(1-x)x-x-2(1-x)\right]-2}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\left[x-x^2-x-2+2x\right]-2}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\left[-x^2+2x-2\right]-2}{x^3}$$

d) $$f_t(x)=\frac{e^{-x}}{t-e^{-x}}=\frac{1}{te^x-1}=\left(te^x-1\right)^{-1}$$

Durch diese Erweiterung mit e^x wird die Aufgabe deutlich einfacher !

$$f_t'(x)=-\left(te^x-1\right)^{-2}\cdot\left(te^x\right)=-t\frac{e^x}{\left(te^x-1\right)^2}$$

$$f_t''(x)=-t\cdot\frac{e^x\left(te^x-1\right)^{\cancel{2}}-2\left(te^x-1\right)\left(te^x\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}=-t\cdot\frac{e^x\left(te^x-1\right)^{\cancel{2}}-2\left(te^x-1\right)\left(te^x\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=-t\cdot\frac{te^{2x}-e^x-2t^2e^{2x}+2te^x}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}=-t\cdot\frac{te^{2x}\left(t-2t^2\right)+e^x\left(2t-2t^2\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=-t\cdot\frac{t^2e^{2x}\left(1-2t\right)+2te^x\left(1-t\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}=-t^2\cdot\frac{te^{2x}\left(1-2t\right)+2e^x\left(1-t\right)}{\left(te^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

e) $$f(x)=2-\frac{4}{e^{2x}-1}=2-4\left(e^{2x}-1\right)^{-1}$$

$$f'(x)=4\left(e^{2x}-1\right)^{-2}\cdot 2e^{2x}=8\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$f''(x)=8\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{2}}-2\cancel{\left(e^{2x}-1\right)}\cdot 2e^{2x}\cdot e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{4}\,3}}=8\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)-4e^{2x}\cdot e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=8\frac{2e^{4x}-2e^{2x}-4e^{4x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{\cancel{4}\,3}}=8\frac{-2e^{4x}-2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^3}=-16\frac{e^{4x}+e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^3}$$

f) $$f_t(x)=\frac{e^x-t}{e^x+t}$$

$$f_t'(x)=\frac{e^x\left(e^x+t\right)-e^x\left(e^x-t\right)}{\left(e^x+t\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+t-e^x+t\right)}{\left(e^x+t\right)^2}=\frac{e^x\cdot 2t}{\left(e^x+t\right)^2}=2t\frac{e^x}{\left(e^x+t\right)^2}$$

$$f_t''(x)=2t\cdot\frac{e^x\cdot\left(e^x+t\right)^{\cancel{2}}-2\cancel{\left(e^x+t\right)}\cdot e^x\cdot e^x}{\left(e^x+t\right)^{\cancel{4}\,3}}=2t\cdot\frac{e^x\cdot\left(e^x+t\right)-2e^{2x}}{\left(e^x+t\right)^3}$$

$$=2t\cdot\frac{e^{2x}+te^x-2e^{2x}}{\left(e^x+t\right)^3}=2t\cdot\frac{te^x-e^{2x}}{\left(e^x+t\right)^3}=2t\cdot\frac{e^x\left(t-e^x\right)}{\left(e^x+t\right)^3}$$

g) $$f(x)=\frac{e^x}{2-e^x}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(2-e^x)-(-e^x)\cdot e^x}{(2-e^x)^2}=\frac{2e^x-e^{2x}+e^{2x}}{(2-e^x)^2}=-\frac{e^{2x}}{(2-e^x)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2e^{2x}(2-e^x)^{\cancel{2}}-2\cancel{(2-e^x)}\cdot(-e^x)\cdot e^{2x}}{(2-e^x)^{\cancel{4}\,3}}=-\frac{2e^{2x}(2-e^x)+2e^{3x}}{(2-e^x)^{\cancel{4}\,3}}$$

h) $$f(x)=\frac{e^{2x}-4}{e^x}$$

Da der Nenner keine Summe enthält zerlegt man in zwei Brüche:

$$f(x)=e^x-4e^{-x}$$

$$f'(x)=e^x+4e^{-x}=e^x+\frac{4}{e^x}=\frac{e^{2x}+4}{e^x}$$

$$f''(x)=e^x-4e^{-x}=f(x)$$

Ableitungen von Logarithmusfunktionen

Aufgabe 395:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a)	$f(x)=\ln(x-2)$	b)	$f(x)=\ln(2-x)$
c)	$f(x)=x+\ln x$	d)	$f(x)=\ln(4x)$
e)	$f(x)=\ln\frac{x}{2}$	f)	$f(x)=4\cdot\ln(\frac{1}{4}x)$
g)	$f(x)=\ln(2x)-\frac{1}{2}x$	h)	$f(x)=x^2-\ln(1-4x)$

Lösung:

a) $f(x)=\ln(x-2)$

$$f'(x)=\frac{1}{x-2}=(x-2)^{-1}$$

$$f''(x)-(x-1)^{-2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

b) $f(x)=\ln(2-x)$

$$f'(x)=\frac{-1}{2-x}=-(2-x)^{-1}$$

$$f''(x)=(2-x)^{-2}\cdot(-1)=\frac{-1}{(2-x)^2}$$

c) $f(x)=x+\ln x$

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

d) $f(x)=\ln(4x)$

$$f'(x)=\frac{1}{4x}\cdot 4=\frac{1}{x}; \qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

e) $f(x)=\ln\frac{x}{2}$

$$f'(x)=\frac{2}{x}\cdot\tfrac{1}{2}=\frac{1}{x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

f) $f(x)=4\cdot\ln(\tfrac{1}{4}x)$

$$f'(x)=4\cdot\frac{1}{\tfrac{1}{4}x}\cdot\tfrac{1}{4}=\frac{4}{x} \qquad f''(x)=-\frac{4}{x^2}$$

g) $f(x)=\ln(2x)-\tfrac{1}{2}x$

$$f'(x)=\frac{1}{2x}\cdot 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Für die zweite Ableitung !

h) $f(x)=x^2-\ln(1-4x)$

$$f'(x)=2x-\frac{-4}{1-4x}=2x+\frac{4}{1-4x}=\frac{2x-8x^2+4}{1-4x} \quad \left[=2x+4(1-4x)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=2-4(1-4x)^{-2}\cdot(-4)=2+\frac{16}{(1-4x)^2}$$

Aufgabe 396:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x)=\ln(6x-x^2)$ b) $f(x)=\ln(x^2-16)$

c) $f(x)=\ln x(x-a)$ d) $f(x)=\ln\frac{x}{t}(4-x)$

Lösung:

a) $f(x)=\ln(6x-x^2)$

$$f'(x)=\frac{6-2x}{6x-x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(6x-x^2)-(6-2x)^2}{(6x-x^2)^2}=\frac{-12x+2x^2-36+24x-4x^2}{(6x-x^2)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+12x-36}{(6x-x^2)^2}$$

b) $f(x)=\ln(x^2-16)$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-16}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2-16)-2x\cdot 2x}{(x^2-16)^2}=\frac{-2x^2-32}{(x^2-16)^2}$$

c) $f(x) = \ln x(x-a) = \ln(x^2 - ax)$

$$f'(x) = \frac{2x-a}{(x^2-ax)}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2-ax)-(2x-a)^2}{(x^2-ax)^2} = \frac{2x^2-2ax-4x^2+4ax-a^2}{(x^2-ax)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-2ax-a^2}{(x^2-ax)^2} = -\frac{2x^2+2ax+a^2}{(x^2-ax)^2}$$

d) $f(x) = \ln\tfrac{x}{t}(4-x) = \ln\tfrac{1}{t} + \ln(4x-x^2)$

$$f'(x) = \frac{4-2x}{(4x-x^2)}$$

$$f''(x) = \frac{-2(4x-x^2)-(4-2x)^2}{(4x-x^2)^2} = \frac{-8x+2x^2-16+16x-4x^2}{(4x-x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+8x-16}{(4x-x^2)^2}$$

oder so: $f(x) = \ln\left(\tfrac{4}{t}x - \tfrac{1}{t}x^2\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\tfrac{4}{t} - \tfrac{2}{t}x}{\tfrac{4}{t}x - \tfrac{1}{t}x^2} = \dfrac{4-2x}{4x-x^2}$

Aufgabe 397:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \ln\dfrac{2-x}{x+4}$

c) $f(x) = \ln\dfrac{4x-1}{x}$ d) $f(x) = \ln\dfrac{x^2-4}{x^2}$

Lösung:

a) $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{-2}{(x^2-1)}\quad\left[=-2\left(x^2-1\right)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=2\left(x^2-1\right)^{-2}\cdot 2x=4\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

b) $f(x)=\ln\frac{2-x}{x+4}$

$$f'(x)=\frac{\cancel{x+4}}{2-x}\cdot\frac{-(x+4)-(2-x)}{(x+4)^{\cancel{2}}}=\frac{-6}{(2-x)(x+4)}=\frac{-6}{-x^2-2x+8}$$

$$=\frac{6}{x^2+2x-8}\quad\left[=6\left(x^2+2x-8\right)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=-6\left(x^2+2x-8\right)^{-2}\cdot(2x+2)=-12\frac{x+1}{\left(x^2+2x-8\right)^2}$$

c) $f(x)=\ln\frac{4x-1}{x}\quad\left[=\ln\left(4-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(4-x^{-1}\right)\right]$ (für die 1. Ableitung!)

$$f'(x)=\frac{x}{4x-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x(4x-1)}=\frac{1}{4x^2-x}\quad\left[=\left(4x^2-x\right)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=-\left(4x^2-x\right)^{-2}\cdot(8x-1)=-\frac{8x-1}{\left(4x^2-x\right)^2}$$

d) $f(x)=\ln\frac{x^2-4}{x^2}\quad\left[=\ln\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=\ln\left(1-4x^{-2}\right)\right]$ (für die 1. Ableitung!)

$$f'(x)=\frac{x^2}{x^2-4}\cdot 8x^{-3}=\frac{8}{\left(x^2-4\right)x}=\frac{8}{x^3-4x}\quad\left[=8\left(x^3-4x\right)^{-1}\right]$$

$$f''(x)=-8\left(x^3-4x\right)^{-2}\cdot\left(3x^2-4\right)=-8\frac{3x^2-4}{\left(x^3-4x\right)^2}$$

Aufgabe 398:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x) = x \cdot \ln(x-4)$ b) $f(x) = (x-2) \cdot \ln x$

c) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ d) $f(x) = \frac{x}{t} \cdot \ln(tx)$

Lösung:

a) $f(x) = x \cdot \ln(x-4)$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x-4) + x \cdot \frac{1}{x-4} = \ln(x-4) + \frac{x}{x-4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{(x-4)-x}{(x-4)^2} = \frac{1}{x-4} + \frac{-4}{(x-4)^2} = \frac{x-4-4}{(x-4)^2} = \frac{x-8}{(x-4)^2}$$

b) $f(x) = (x-2) \cdot \ln x$

$$f'(x) = \ln x + (x-2) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}$$

c) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

$$f''(x) = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3$$

d) $f(x) = \frac{x}{t} \cdot \ln(tx)$

$$f'(x) = \frac{1}{t} \cdot \ln(tx) + \frac{x}{t} \cdot \frac{t}{tx} = \frac{1}{t} \cdot \ln(tx) + \frac{1}{t}$$

$$f''(x) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{tx}$$

Aufgabe 399:

Berechnen Sie von folgenden Funktionen zwei Ableitungen.

a) $f(x) = \frac{2 - \ln x}{x}$ b) $f(x) = \frac{a + \ln x}{2x}$

c) $f(x) = (\ln x)^2$ d) $f(x) = [\ln(x+2)]^2$

e) $f(x) = (\ln x - 1)^2$ f) $f(x) = 4\sqrt{a - \ln x}$

Lösung:

a) $f(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot(2-\ln x)}{x^2}=\frac{-1-2+\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-3}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot(\ln x-3)}{x^4}=\frac{x-2x\cdot\ln x+6x}{x^4}=\frac{7x-2x\cdot\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{7-2\ln x}{x^3}$$

b) $f(x)=\dfrac{a+\ln x}{2x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot 2x-2\cdot(a+\ln x)}{4x^2}=\frac{2-2a-2\ln x}{4x^2}=\frac{1-a-\ln x}{2x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x^2-4x\cdot(1-a-\ln x)}{4x^4}=\frac{-2x-4x+4ax+4x\cdot\ln x}{4x^4}$$

$$=\frac{-6x+4ax+4x\cdot\ln x}{4x^4}=\frac{-6+4a+4\ln x}{4x^3}$$

c) $f(x)=(\ln x)^2$

$$f'(x)=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}=2\frac{\ln x}{x}$$

$$f''(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=2\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

d) $f(x)=[\ln(x+2)]^2$

$$f'(x)=2\cdot\ln(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}=2\cdot\frac{\ln(x+2)}{x+2}$$

$$f''(x)=2\frac{\frac{1}{x+2}(x+2)-\ln(x+2)}{(x+2)^2}=2\frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}$$

e) $f(x)=(\ln x-1)^2$

$$f'(x)=2\cdot(\ln x-1)\cdot\frac{1}{x}=2\cdot\frac{\ln x-1}{x}$$

$$f''(x)=2\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)}{x^2}=2\frac{1-\ln x+1}{x^2}=2\frac{2-\ln x}{x^2}$$

f) $f(x) = 4\sqrt{a - \ln x}$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}} = -2 \cdot \frac{1}{x\sqrt{a-\ln x}}$$

1. Möglichkeit: $f'(x) = -2\left(x\sqrt{a-\ln x}\right)^{-1}$

$$f''(x) = 2\left(x\sqrt{a-\ln x}\right)^{-2} \cdot \left[1 \cdot \sqrt{a-\ln x} + x \cdot \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}\right]$$

$$= 2\frac{\sqrt{a-\ln x} - \frac{1}{2\sqrt{a-\ln x}}}{\left(x \cdot \sqrt{a-\ln x}\right)^2} = 2\frac{2(a-\ln x)-1}{x^2(a-\ln x)2\sqrt{a-\ln x}}$$

$$= \frac{2(a-\ln x)-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3} = \frac{2a-2\ln x-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

2. Möglichkeit: mit der Quotientenregel:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{0 - \left[1 \cdot \sqrt{a-\ln x} + x \cdot \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{a-\ln x}}\right]}{x^2(x-\ln x)}$$

$$= -2 \cdot \frac{-\left[2 \cdot \left(\sqrt{a-\ln x}\right)^2 - 1\right]}{x^2(x-\ln x)2\sqrt{a-\ln x}} = \frac{\left[2 \cdot (a-\ln x)-1\right]}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

$$= \frac{2a-2\ln x-1}{x^2\sqrt{a-\ln x}^3}$$

Kurvendiskussion

Aufgabe 400:

Ermitteln Sie zu folgende Aufgaben jeweils die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten.

$$f(x)=\frac{4}{x-2}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$$

$$f(x)=\frac{8}{x^2-4}$$

$$f(x)=\frac{5}{(x-2)^2}$$

Lösung:

Der Zähler ist konstant und hat daher keine Nullstellen.
Nullstelle des Nenners: $x = 2$ daher Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
f hat also bei x = 2 eine Polstelle mit Zeichenwechsel,

Asymptoten:
senkrecht: $x = 2$.

waagerecht: $y = 0$, denn $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x-2} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{2}{x}} = \frac{0}{1-0} = 0$

Ableitungen: $f(x)=\frac{4}{x-2}=4(x-2)^{-1}$

$$f'(x) = -4(x-2)^{-2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

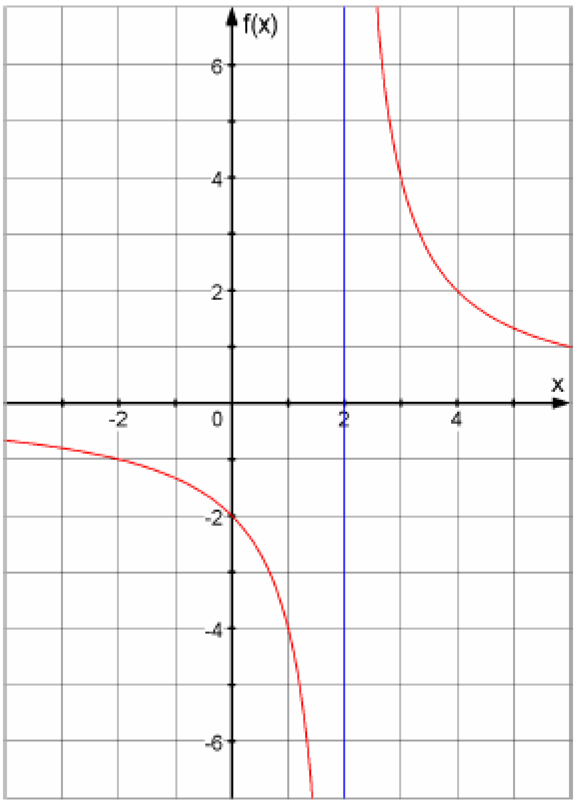
$$f''(x) = 8(x-2)^{-3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Da f' und f" keine Nullstellen Besitzen (konstanter Zähler), hat das Schaubild K von f **keine Extrempunkte und keine Wendepunkte**.

Wertmenge:
$\mathbf{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Symmetrie:
K ist punktsymmetrisch zu Z (2 I 0).

Zum Beweis rechnet man nach, daß folgendes gilt:
$f(2+h)+f(2-h)=0$
(Siehe Gebrochen rationale Funktionen Eigenschaften 'Teil 2)



Zähler = 0: $x = 0$; Nenner = 0: $x = \pm 2$. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Das Schaubild schneidet folglich die x-Achse in der Nullstelle (0 I 0)
und f hat die Polstellen $x = 2$ und $x = -2$ jeweils mit Zeichenwechsel.

Asymptoten: senkrecht: $x = 2$ und $x = -2$.
waagerecht: $y = 0$, denn

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{2(x^2-4)-2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} = -2\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$

$$f''(x) = -2\frac{2x(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^4} = -2\frac{(x^2-4)\left[2x(x^2-4)-4x(x^2+4)\right]}{(x^2-4)^4}$$

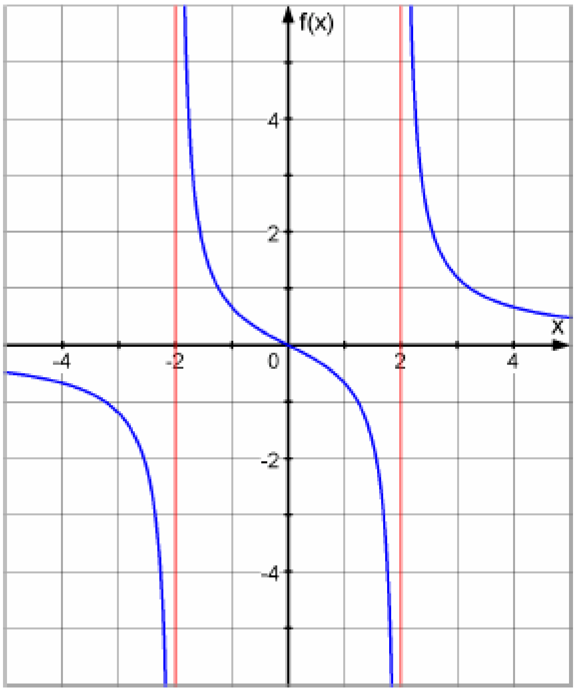
$$= -2\frac{2x(x^2-4)-4x(x^2+4)}{(x^2-4)^3} = -2\frac{2x^3-8x-4x^3-16x}{(x^2-4)^3} = -2\frac{-2x^3-24x}{(x^2-4)^3} = 4\frac{x^3+12x}{(x^2-4)^3}$$

Extrempunkte:
f' hat keine Nullstellen, da $x^2 + 4$ nie Null werden kann Also besitzt das Schaubild K von f keine Extrempunkte.

Wendepunkte:
$f''(x_W) = 0$ bedeutet
$x_W^3 - 4x_W = 0$ d.h.
$x_W(x_W^2 + 12) = 0$
ergibt $x_W = 0$. Die Klammer liefert keine weitere Nullstelle von f''.
y-Koordinate: $f(0) = 0$.

Kontrolle:
Zur Kontrolle muß **entweder** $f'''(0) \neq 0$ nachgewiesen werden, **oder** man stellt fest:
f'' hat bei 0 eine einfache Nullstelle, d.h. f'' hat bei 0 Vorzeichenwechsel, d.h. K hat in W (0 I 0) Krümmungswechsel.
Ergebnis: W ist Wendepunkt.

Da $f(-x) = -f(x)$ ist K **symmetrisch** zu = O.



Der Zähler hat keine Nullstelle, daher auch nicht die Funktion.

Nullstellen des Nenners: $x = \pm 2$

Da f die beiden Polstellen x = 2 und x = - 2 (jeweils mit Zeichenwechsel) hat, besitzt K die senkrechten **Asymptoten** x = 2 und x = - 2.
Ferner hat K die waagerechte Asymptote y = 0, denn

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{8}{x^2-4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{|x|\to\infty} \frac{8}{x^2}}{1-\lim_{|x|\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Ableitungen: $f(x) = \frac{8}{x^2-4} = 8(x^2-4)^{-2}$

$$f'(x) = -16(x^2-4)^{-3} \cdot 2x = -32\frac{x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = -32\frac{1\cdot(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x \cdot x}{(x^2-4)^4} = -32\frac{(x^2-4)\left[(x^2-4)-4x^2\right]}{(x^2-4)^4} = -32\frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3}$$

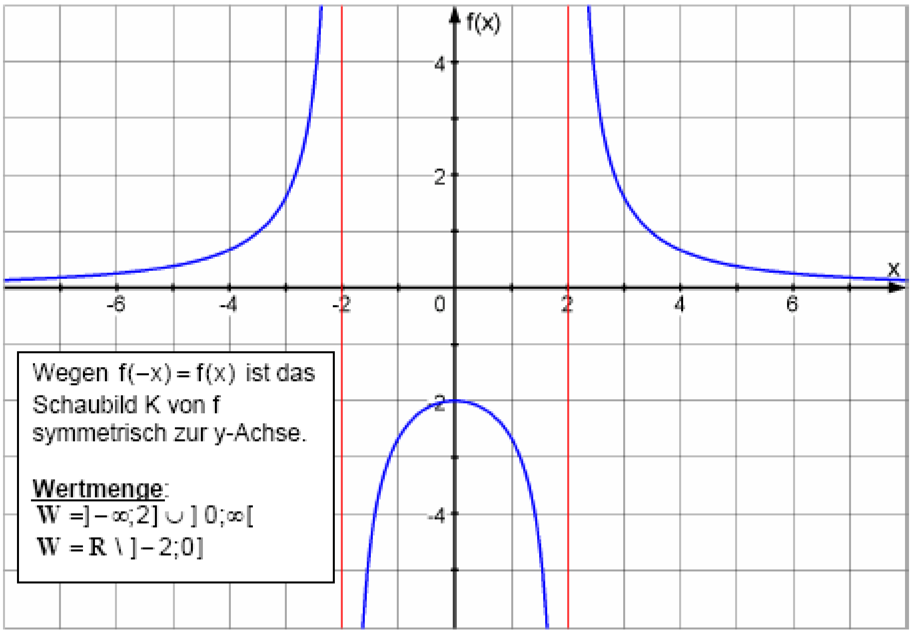
Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = 0$.

Kontrolle: $f''(0) = -32\frac{-4}{(-4)^3} < 0$ d.h. f hat bei 0 ein relatives Minimum

mit $f(0) = -2$. Ergebnis: K hat den Tiefpunkt T (0 I - 2).

Wendepunkte: Bed.: $f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow -3x_W^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x_W^2 = -4$

Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, also besitzt K keinen Wendepunkt.



Wegen $f(-x) = f(x)$ ist das Schaubild K von f symmetrisch zur y-Achse.

Wertmenge:
$\mathbb{W} =]-\infty;2] \cup]0;\infty[$
$\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus]-2;0]$

Der Zähler besitzt keine Nullstellen, der Nenner jedoch die doppelte Nullstelle x = 2.
Daher gibt es keine Schnittpunkte von K mit der x-Achse.

x = 2 ist Polstelle von f **ohne** Zeichenwechsel, also gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

<u>Asymptoten</u>: senktecht: x = 2 (Polstelle von f)
waagerecht : y = 0, denn

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{5}{(x-2)^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{5}{x^2-4x+4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{5}{x^2}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x}+\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1-0-0} = 0$$

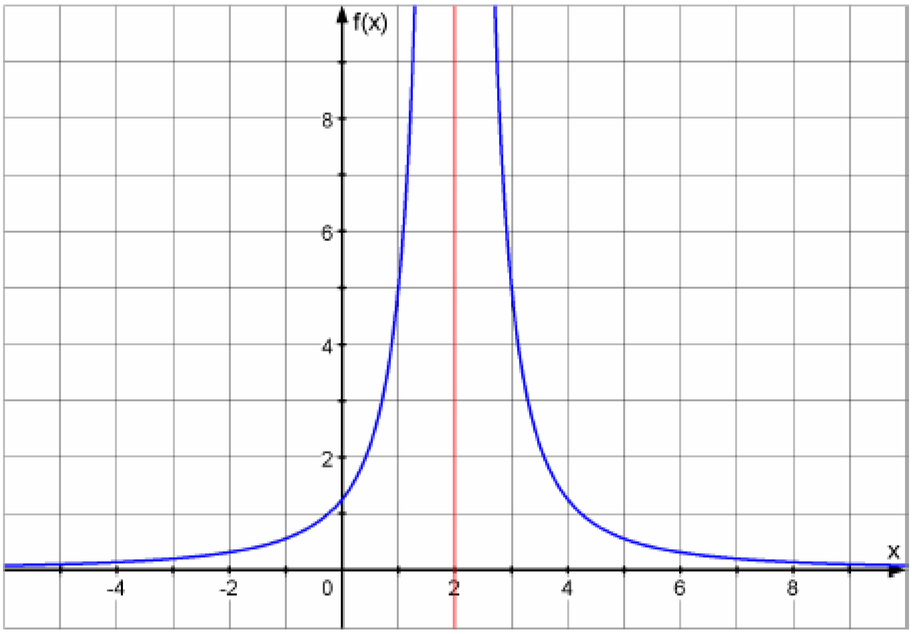
<u>Ableitungen</u>: $f(x) = \frac{5}{(x-2)^2} = 5(x-2)^{-2}$

$$f'(x) = -10(x-2)^{-3} = \frac{-10}{(x-2)^3} \qquad f''(x) = 30(x-2)^{-4} = \frac{-30}{(x-2)^4}$$

<u>Extrempunkte</u>: keine, denn f' hat keine Nullstelle.
<u>Wendepunkte</u>: keine, denn f" hat keine Nullstelle.

<u>Symmetrie</u>: K ist symmetrisch zur Geraden x = 2.
Beweis: Es gilt f(2 - h) = f(2 + h) (hier ohne Beweis)
Siehe Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

<u>Wertmenge</u>: $W = \mathbb{R}^+$



Aufgabe 401:

Ermitteln Sie zu folgende Aufgaben jeweils die Definitionsmenge, Symmetrieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten.

(7) $f(x) = 3 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$ (8) $f(x) = \frac{4x+2}{2-x}$

(9) $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$ (10) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

(11) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4x}$ (12) $f(x) = \frac{16-4x^2}{x^2+16}$

Lösung:

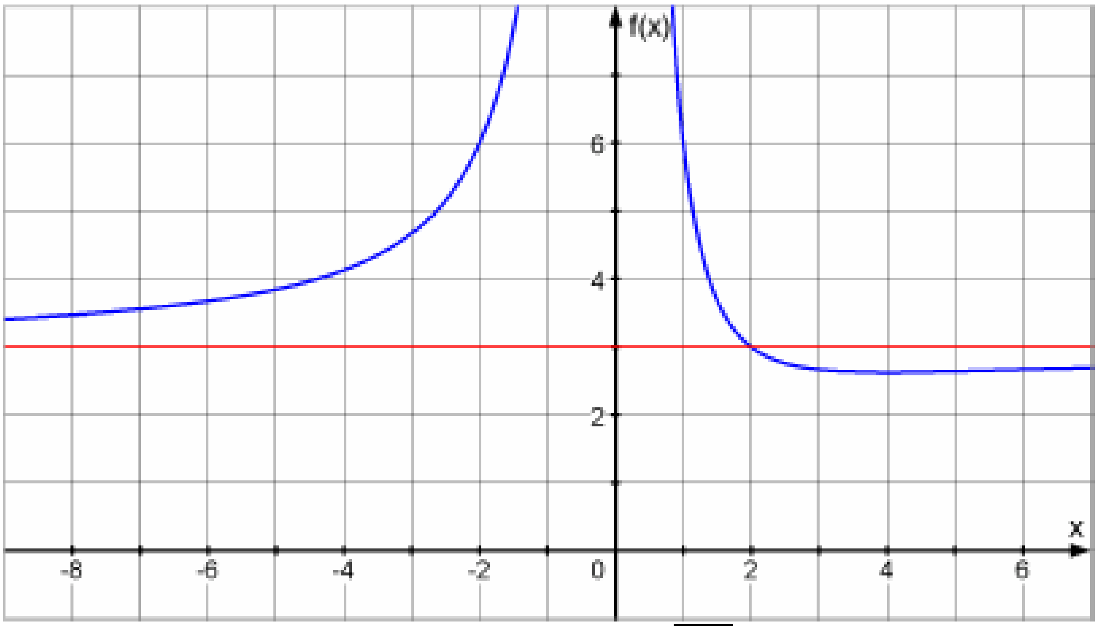
(7)

$$f(x)=3-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}=3-3x^{-1}+6x^{-2}=3\frac{x^2-x+2}{x^2}$$

$$f'(x)=3x^{-2}-12x^{-3}=\frac{3}{x^2}-\frac{12}{x^3}=\frac{3x-12}{x^3}=3\frac{x-4}{x^3}$$

$$f''(x)=-6x^{-3}+36x^{-4}=-\frac{6}{x^3}+\frac{36}{x^4}=6\frac{-x+6}{x^4}$$

$$f'''(x)=18x^{-4}-144x^{-5}=\frac{18}{x^4}-\frac{144}{x^5}=8\frac{x-8}{x^5}$$



Zähler = 0: $x^2-x+2=0$ d.h. $x_N=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}\notin \mathbb{R}$

Nenner = 0 $x=0$ doppelte Lösung d.h. $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: keine

Polstellen: $x_P = 0$ ohne Zeichenwechsel.

Asymptoten: Waagerecht: $y = 3$, denn $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

<u>Extrempunkte</u>: Bed.: $f'(x_E)=0$ d.h. $x_E = 4$ mit $f(0) = \frac{21}{8}$

Kontrolle: $f''(4)=6\frac{-4+6}{4^4}>0$

d.h. f hat bei 4 ein relatives Minimum und K den Tiefpunkt (4 I $\frac{21}{8}$).

<u>Wendepunkte</u>: Bed.: $f''(x_W)=0$ d.h. $x_W = 6$ mit $f(6) = \frac{8}{3}$

Kontrolle: Da f''' dort einfache Nullstellen hat, hat f'' Zeichenwechsel,

d.h. K hat Krümmungswechsel: $W_{1,2}\left(6\,\middle|\,\frac{8}{3}\right)$

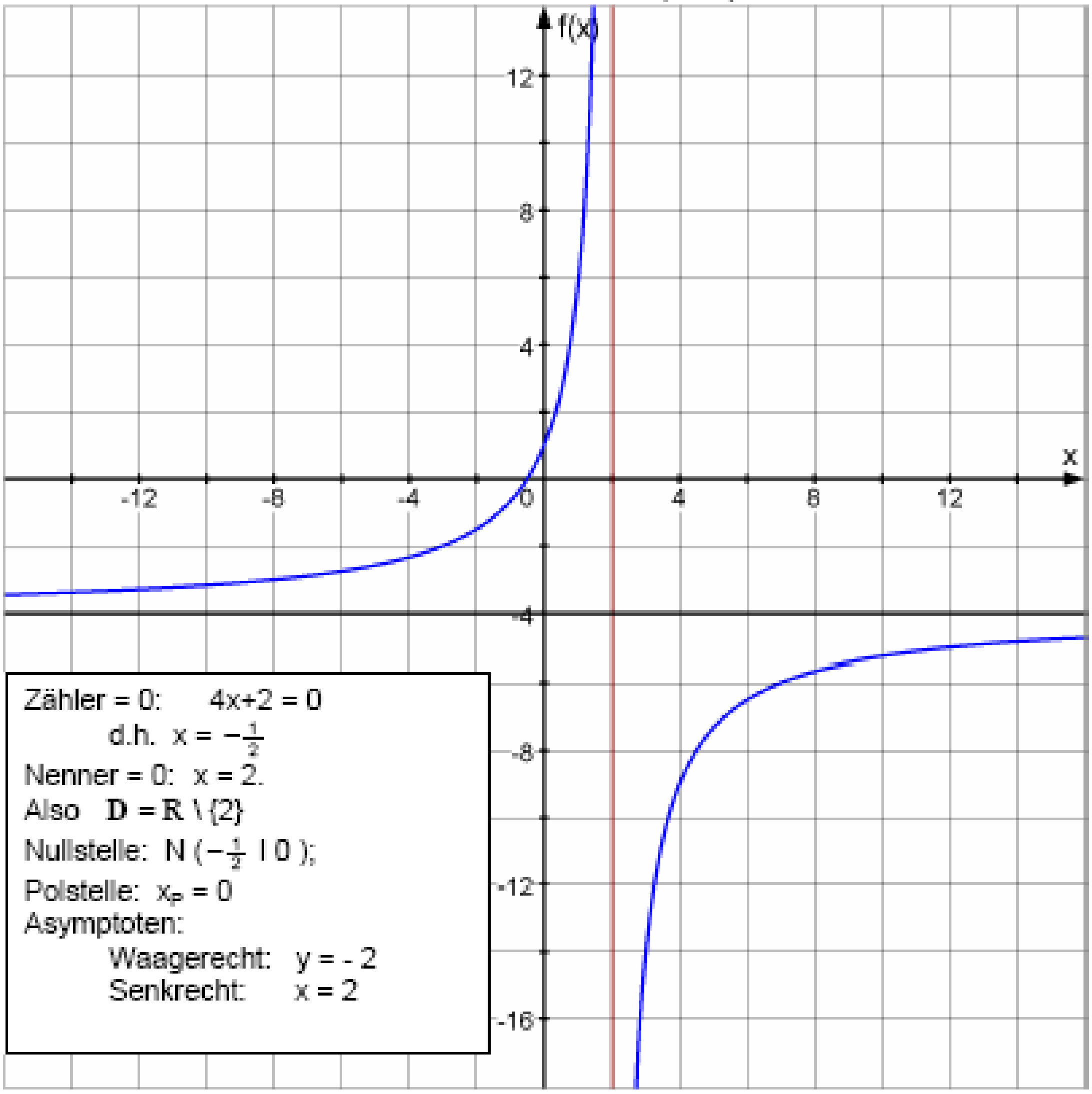
Wertmenge: $\mathbb{W} = [\ \frac{8}{3};\infty\ [$.

(8) $f(x)=\dfrac{4x+2}{2-x}$

$$f'(x)=\frac{4(2-x)-(-1)(4x+2)}{(2-x)^2}=\frac{8-4x+4x+2}{(2-x)^2}=\frac{10}{(2-x)^2}=10(2-x)^{-2}$$

Da f' im Zähler kein x enthält wird nach der Kettenregel abgeleitet:

$$f''(x)=-20(2-x)^{-3}(-1)=20(2-x)^{-3}=\frac{20}{(2-x)^3}$$



Begründung für die waagerechte Asymptote: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{4x+2}{2-x}=\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{4+\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\dfrac{4}{-1}=-4$

Denn $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Da f' keine Nullstellen hat, besitzt K keine Extrempunkte, und da f'' keine Nullstellen hat, gibt es auch keine Wendepunkte.

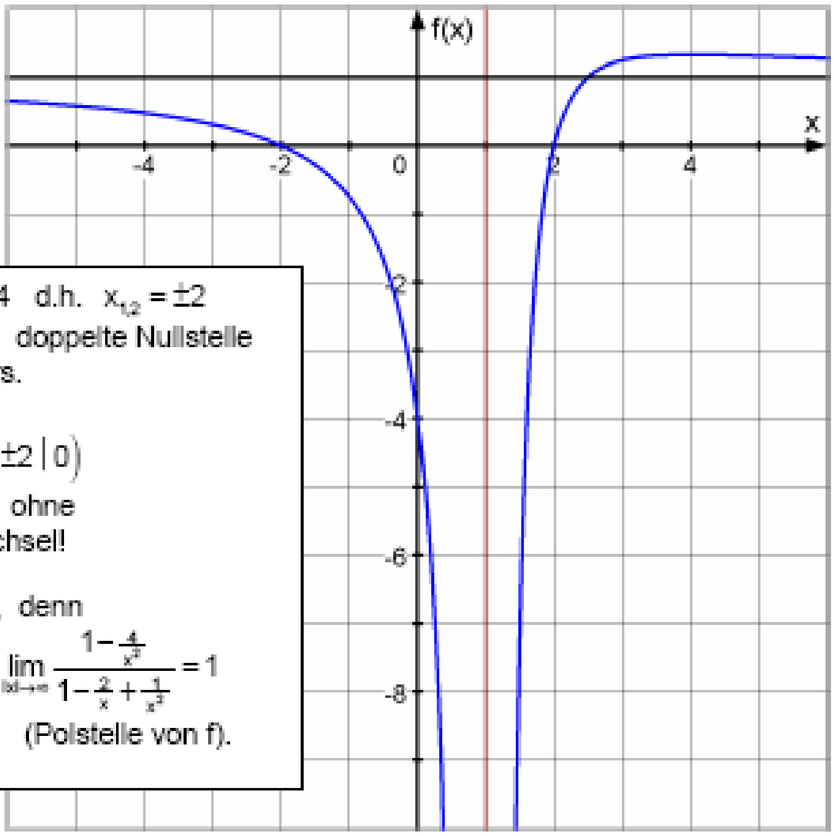
Wertmenge: $\mathbb{W}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

(9) $$f(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2-4)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\cdot\left[2x(x-1)-2(x^2-4)\right]}{(x-1)^4}=\frac{2x^2-2x-2x^2+8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=-2\frac{x-4}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=-2\frac{(x-1)^3-3(x-1)^2(x-4)}{(x-1)^6}=-2\frac{(x-1)^2\left[x-1-3(x-4)\right]}{(x-1)^6}=-2\frac{-2x+11}{(x-1)^4}$$



Zähler = 0: $x^2 = 4$ d.h. $x_{1,2} = \pm 2$
Nenner = 0: $x = 1$ doppelte Nullstelle des Nenners.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Nullstellen $N_{1,2}\left(\pm 2 \mid 0\right)$

Polstelle: $x_P = 1$ ohne Zeichenwechsel!

Asymptoten:
waagerecht: $y = 1$, denn

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{(x^2-4)}{(x^2-2x+1)}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

senkrecht: $x = 1$ (Polstelle von f).

Extrempunkte: Bed.: $f'(x_E) = 0$ d.h. $x_E = 4$ mit $f(4)=\frac{16-4}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

Kontrolle: $f''(4)=-2\frac{-8+11}{3^4}<0$ d.h. f hat bei 4 ein rel. Max.

Ergebnis: .: Hochpunkt $H\left(4 \mid \frac{4}{3}\right)$

Wendepunkt: Bed.: $f''(x_W) = 0$ d.h. $x = 5{,}5$ mit $f(5{,}5) \approx 1{,}30$
Da 5,5 eine einfache Nullstelle von f'' ist, hat f'' dort Vorzeichenwechsel, d.h. K einen Wendepunkt.

Wertmenge: $\mathbb{W} =]-\infty; \frac{4}{3}]$

(10) $$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

Die Ableitungen sollte man, wie dieses Beispiel zeigt, besser nach der Voruntersuchung auf Nullstellen und Polstellen berechnen!

Zähler = 0: $x^2 + x - 6 = 0$ d.h. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix}$

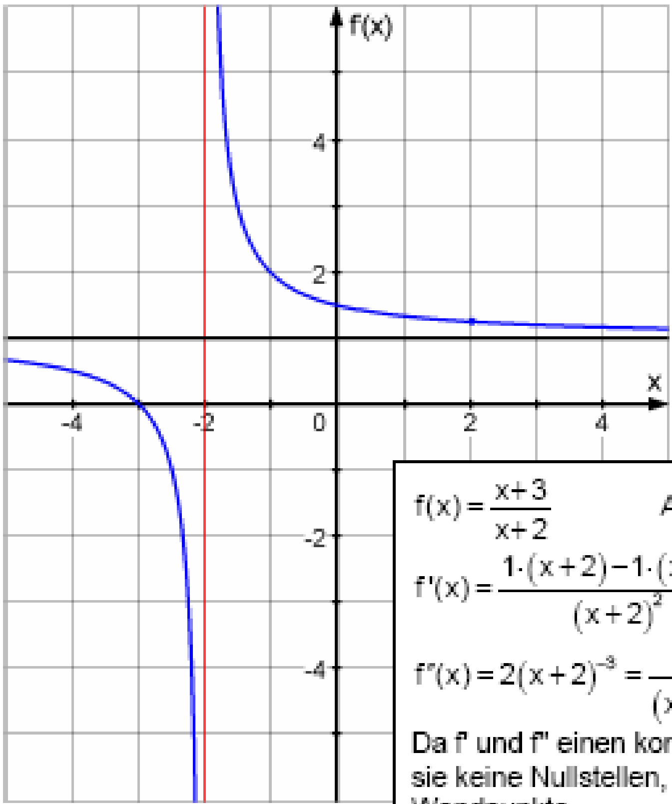
Nenner = 0: $x^2 = 4$ d.h. $x = \pm 2$ d.h. Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: (Bed: Zähler = 0 aber Nenner $\neq 0$): $x_N = -3$
Polstellen: (Bed.: Nenner = 0 aber Zähler $\neq 0$): $x_P = -2$
Weitere Lücke: **(Zähler = 0 und Nenner = 0)** $x_L = 2$

Wenn eine solche Lücke vorhanden ist, kann man in Zähler und Nenner den Linearfaktor (x - 2) ausklammern und dann wegkürzen.
Zerlegung des Funktionsterms:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

Diese gekürzte Funktion muß denselben Definitionsbereich bekommen, wie dies ursprünglich der Fall war, also: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.
Man erkennt jetzt, daß man dennoch für Zahl - 2 jetzt einen "Pseudo-Funktionswert" berechnen kann: $f^*(2) = \frac{5}{4} = 1{,}25$. An dieser Stelle darf die Funktion jedoch keinen Funktionswert haben, da - 2 nicht zum Definitionsbereich gehört. Der Kurvenpunkt L (2 I 1,25) muß also aus dem Schaubild herausgenommen werden. Dort hat die Kurve **ein Loch**. Diese Stelle ist im Schaubild markiert.



Jetzt haben wir einen zum Ableiten wesentlich einfacheren Funktionsterm:

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2} \qquad \text{Ableitungen:}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (x+3)}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2} = -(x+2)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(x+2)^{-3} = \frac{2}{(x+2)^3}$$

Da f' und f'' einen konstanten Zähler haben, besitzen sie keine Nullstellen, also gibt es keine Extrem- und Wendpunkte.

(11) $$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4x}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-4x)-(2x-4)(x^2+4)}{(x^2-4x)^2}=\frac{2x^3-8x^2-2x^3+4x^2-8x+16}{(x^2-4x)^2}=\frac{-4x^2-8x+16}{(x^2-4x)^2}$$

$$f'(x)=-4\frac{x^2+2x-4}{(x^2-4x)^2}$$

$$f''(x)=-4\frac{(2x+2)(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)(2x-4)(x^2+2x-4)}{(x^2-4x)^4}$$

$$f''(x)=-4\frac{(x^2-4x)\left[(2x+2)(x^2-4x)-2(2x-4)(x^2+2x-4)\right]}{(x^2-4x)^4}$$

$$f''(x)=-4\frac{(2x+2)(x^2-4x)-2(2x-4)(x^2+2x-4)}{(x^2-4x)^3}$$

$$f''(x)=-4\frac{2x^3+2x^2-8x^2-8x-4x^3+8x^2-8x^2+16x+16x-32}{(x^2-4x)^3}$$

$$f''(x)=-4\frac{-2x^3-6x^2+24x-32}{(x^2-4x)^3}=8\frac{x^3+3x^2-12x+16}{(x^2-4x)^3}$$

Zähler = 0: $x^2=-4$ hat keine reelle Lösung.
Nenner = 0: $x(x-4)=0$ d.h. $x_1=0$, $x_2=4$.
Es gibt also keine Schnittpunkte mit der x-Achse aber zwei Polstellen: $x_P=0$ bzw. $x_P=4$.
Asymptoten:

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4x}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

Daher ist $y=1$ die waagerechte Asymptote.
K hat zwei senkrechte Asymptoten: $x=0$ und $x=4$ (Polstellen von f).

<u>Extrempunkte</u>: Bed: $f'(x_E)=0$ d.h. $x^2+2x-4=0$ ergibt

$$x_E=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$$

Näherungswerte: $x_1=1{,}236$ und $x_2=-3{,}236$
Funktionswerte: $f(1{,}236)=-1{,}618$ und $f(-3{,}236)=0{,}618$
Kontrolle: $f''(1{,}236)<0$ d.h. f hat dort ein relatives Maximum.
$f''(-3{,}236)>0$ d.h. f hat dort ein relatives Minimum.

Ergebnis: H (1,236 I - 1,618) und T (- 3,236 I 0,618).

<u>Wendepunkte</u>: Bed.: $f''(x_W)=0$ d.h. $x^3+3x^2-12x+16=0$.
Diese Gleichung ist nur mit dem Newtonschen Iterationsverfahren zu lösen.

Hilfsfunktion: $h(x) = x^3 + 3x^2 - 12x + 16$

$h'(x) = 3x^2 + 6x - 12$

Nullstellen Intervall: h(-6) = - 20

h(-5) = 26 > 0.

Die Nullstelle von h, also die Wendestelle liegt somit im Intervall] - 6 ; - 5 [.

Newtonsches Iterationsverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 - 12x_n + 16}{3x_n^2 + 6x_n - 12} = \frac{3x_n^3 + 6x_n^2 - 12x_n - x_n^3 - 3x_n^2 + 12x_n - 16}{3x_n^2 + 6x_n - 12}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 3x_n^2 - 16}{3x_n^2 + 6x_n - 12}$$

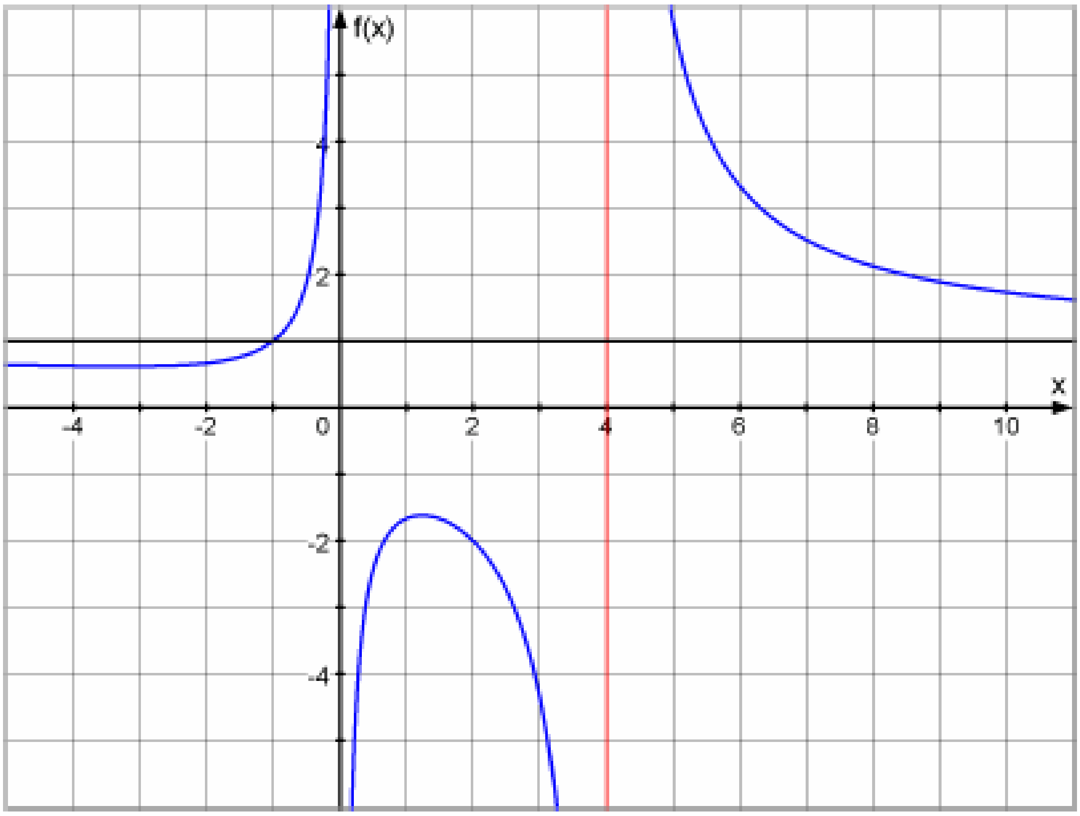
Startwert: x_0 = - 5,5

x_1 = - 5,639 344 ...

x_2 = - 5,634 001 ...

x_3 = - 5,635 454 ...

usw.

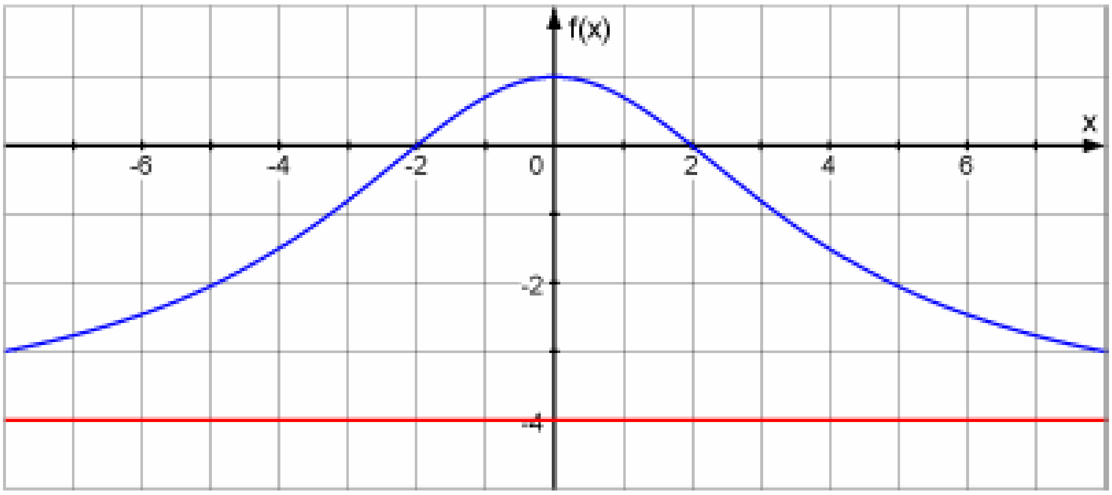


(12) $$f(x)=\frac{16-4x^2}{x^2+16}$$

$$f'(x)=\frac{-8x\left(x^2+16\right)-2x\left(16-4x^2\right)}{\left(x^2+16\right)^2}=\frac{-8x^3-128x-32x+8x^3}{\left(x^2+16\right)^2}=-160\frac{x}{\left(x^2+16\right)^2}$$

$$f''(x)=-160\frac{\left(x^2+16\right)^2-2\left(x^2+16\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2+16\right)^4}=-160\frac{\left(x^2+16\right)\left[\left(x^2+16\right)-4x^2\right]}{\left(x^2+16\right)^4}$$

$$f''(x)=-160\frac{-3x^2+16}{\left(x^2+16\right)^3}=160\frac{3x^2-16}{\left(x^2+16\right)^3}$$



Symmetrie: Da für alle x gilt $f(-x)=f(x)$, ist das Schaubild K von f symmetrisch zur y-Achse.

Zähler = 0: $x=\pm 2$

Der Nenner ist stets ungleich Null, also gibt es keine Polstellen und $\mathbb{D}=\mathbb{R}$.

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2}\left(\pm 2 \mid 0\right)$

<u>Extrempunkte</u>: Bed.: $f'(x_E)=0$ d.h. $x_E=0$ mit $f(0)=1$.

Kontrolle: $f''(0)=160\frac{-16}{16^3}<0$ d.h. f hat bei 0 ein relatives Maximum

Und K hat den Hochpunkt H (0 I 1).

<u>Wendepunkte</u>: Bed.: $f''(x_W)=0$ d.h. $x_W{}^2=\frac{16}{3} \Leftrightarrow x_W=\pm\sqrt{\frac{16}{3}}=\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\approx\pm 2{,}31.$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{16}{3}}\right)=\frac{16-4\cdot\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}+16}=\frac{48-64}{16+48}=-\frac{16}{64}=-\frac{1}{4}$$

Kontrolle: Da beide Stelle einfache Nullstellen von f'' sind, liegen Wendepunkte vor, Ergebnis: $W_{1,2}$ ($\left(\pm\sqrt{\frac{16}{3}} \mid -\frac{1}{4}\right)\approx\left(\pm 2{,}31 \mid -0{,}25\right)$

Aufgabe 402:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten. Berechnen Sie zwei Ableitungen und stelle fest, ob eine senkrechte Tangente vorliegt.

a) $f(x) = \sqrt{8 - x}$

b) $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{5 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{-x - 3}$

Lösung:

a)

<u>**Definitionsbereich**</u>: $8-x\ge 0 \Leftrightarrow 8\ge x \Leftrightarrow x\le 8$ $\quad \mathbf{D}=]-\infty;8]$

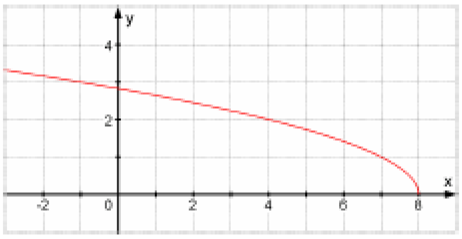
<u>**Nullstellen**</u>: Rad = 0: $x_N = 8$ $\quad$ N (8 I 0)

<u>**Ableitungen**</u>: $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{8-x}}=-\dfrac{1}{2}(8-x)^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x)=\frac{1}{4}(8-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)=-\frac{1}{4(8-x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4\sqrt{8-x}^{3}}$$

Wie man sieht, haben f' und f'' keine Nullstellen, also besitzt das Schaubild von f weder *Extrempunkte mit waagerechter Tangente* noch Wendepunkte.

Einen Extrempunkt gibt es aber dennoch, nämlich den rechten Randpunkt R (8 I 0). Da für alle $x\in\mathbf{D}$ gilt $f(x)\ge 0$ ist R der tiefste Punkt, also ein **Randtiefpunkt** und zwar <u>**mit senkrechter Tangente**</u>, weil f' bei 8 eine Polstelle hat. Das Schaubild ist eine Halbparabel:



b)

<u>**Definitionsbereich**</u>: $\frac{1}{2}x+1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\ge -1 \Leftrightarrow x\ge -2 \Leftrightarrow \mathbf{D}=[-2;\infty[$

<u>**Nullstellen**</u>: Bed.: $f(x_N)=0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{\frac{1}{2}x+1}=0$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}x+1}=2 \Rightarrow \tfrac{1}{2}x+1=4$$

$$\tfrac{1}{2}x=3 \text{ d.h. } x_N=6$$

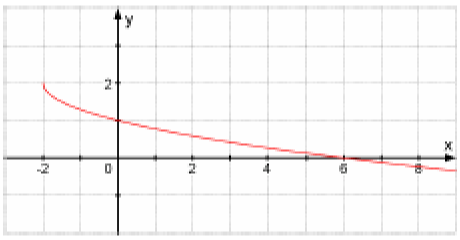
Da die Funktion aus einer Summe mit einer Wurzel besteht, muß man die Probe machen: $f(6)=2-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 6+1}=2-\sqrt{4}=2-2=0$.

Ergebnis: N (6 I 0)

<u>**Ableitungen**</u>: $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x+1}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x+1}}=\dfrac{-1}{\sqrt{8x+16}}=-(8x+16)^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x)=\frac{1}{2}(8x+16)^{-\frac{3}{2}}\cdot 8=\frac{4}{(8x+16)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{2^3\sqrt{2x+4}^{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2x+4}^{3}}$$

Man sieht, daß f'(x) stets negativ ist, also fällt die Funktion streng monoton. Es gibt also keine Extrempunkte mit waagerechter Tangente. Und wir haben am linken Randpunkt L (- 2 I 2) einen Randhochpunkt, der außerdem eine senkrechte Tangente besitzt, da f' dort eine Polstelle hat. Das Schaubild ist eine Halbparabel



c)

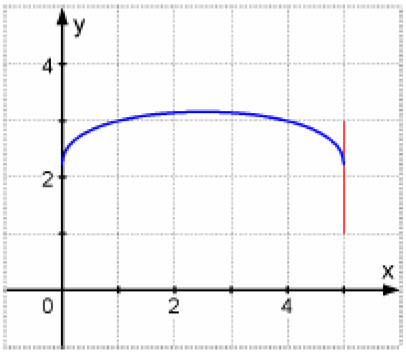
<u>Definitionsbereich</u>: 1. Bedingung: $x \geq 0$, 2. Bed.: $5 - x \geq 0$ d.h. $x \leq 5$
Daraus folgt: $\mathbf{D} = [0;5]$

<u>Nullstellen</u>: $\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\sqrt{5-x}$
quadriert: $x = 5 - x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x_N = \frac{5}{2}$
Da diese Funktion die Summe mit einer Wurzel enthält, muß man die Probe machen:
$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} \neq 0$. Diese Funktion besitzt keine Nullstellen.

<u>Ableitung</u>: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$

<u>Punkte mit waagerechter Tangente</u>: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{x}$
quadriert: $5 - x = x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$
Die Probe stimmt jetzt. Das Schaubild K von f hat also im Punkt $E\left(\frac{5}{2} \mid 2\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
eine waagerechte Tangente. Übrigens ist $2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{5}{2}} = \sqrt{10}$!!!

<u>Punkte mit senkrechter Tangente</u>:
Die Funktion f' hat bei 0 und 5 je eine Polstelle, d.h. das Schaubild hat in den Randpunkten $L\left(0 \mid \sqrt{5}\right)$ und $R\left(5 \mid \sqrt{5}\right)$ senkrechte Tangenten.



d)

Definitionsbereich: 1. Bedingung: $x \geq 0$, 2. Bed.: $5 - x \geq 0$ d.h. $x \leq 5$
Daraus folgt: $\mathbf{D} = [0;5]$

Nullstellen: Bedingung $f(x_N) = 0$

$$\sqrt{x} - \sqrt{5-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5-x}$$

quadriert: $x = 5 - x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x_N = \frac{5}{2}$

Da diese Funktion die Summe mit einer Wurzel enthält, muß man die Probe machen:

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} = 0.$$

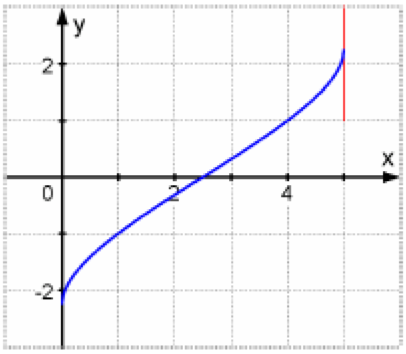
Ergebnis: $N\left(\frac{5}{2} \mid 0\right)$

Ableitung: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \dfrac{\sqrt{5-x} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$

Auswertung: Weil eine Wurzel nie negativ werden kann, nimmt der Zähler nur dann den Wert 0 an, wenn beide Wurzeln zugleich 0 werden. Dies ist aber nicht der Fall, denn der erste tut dies für x = 5, die zweite für x = 0.,

Also gibt es keine Punkte mit waagerechter Tangente. (Man könnte auch den Zähler Null setzen und die Wurzelgleichung durch Isolieren der Wurzeln und Quadrieren lösen. Jedoch stimmt die Probe dann nicht.

Senkrechte Tangenten in den Randpunkten $L\left(0 \mid -\sqrt{5}\right)$, $R\left(5 \mid \sqrt{5}\right)$, weil dort der Nenner von f' Null wird, d.h. die Ableitungsfunktion einen je einen Pol besitzt.



e)

Definitionsbereich:

1. Bedingung: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
2. Bedingung: $-x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3$

Da x in beide Radikanden eingesetzt werden muß, geht dies nur für Zahlen, die in beiden Teildefinitionsbereichen liegen. Da es aber keine Zahlen gibt, die sowohl mindestens 2, aber höchstens - 3 sind, ist der Definitionsbereich leer: $\mathbf{D} = \{\ \}$.

Also gibt es zur Funktion kein Schaubild.

Aufgabe 403:

Es ist folgende Funktion gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + e^{-x}$

K sei das Schaubild von f. K hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Einer davon läßt sich berechnen. Begründe, warum es einen zweiten geben muss.

Welchen Extrempunkt hat K ? Zeige daß seine y-Koordinate $y_E = \ln\sqrt{\frac{2}{e}}$ ist

Welche Asymptote hat die Kurve K ?

Warum hat K keine Wendepunkte ?

Zeichne das Schaubild K für $-3 \le x \le 10$.

Lösung:

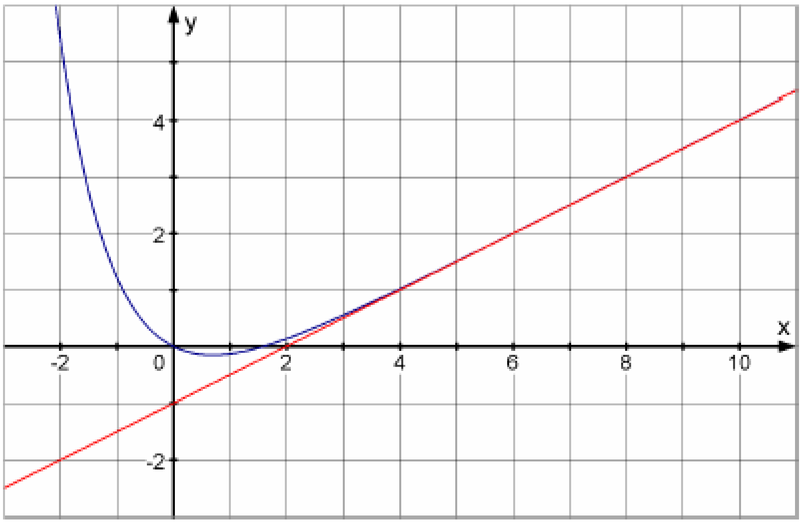
a) K sei das Schaubild von f. K hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Einer davon läßt sich berechnen.

Welchen Extrempunkt hat K ? Zeige daß seine y-Koordinate $y_E = \ln\sqrt{\frac{2}{e}}$ ist

Welche Asymptote hat die Kurve K ?

Warum hat K keine Wendepunkte ?

Zeichne das Schaubild K für $-3 \le x \le 10$.



Der Nullpunkt ist der erste Schnittpunkt von K mit der x-Achse, denn es gilt:

$$f(0) = \tfrac{1}{2} \cdot 0 - 1 + e^{-0} = -1 + 1 = 0.$$

Ableitungen: $f'(x) = \tfrac{1}{2} - e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$

Extrempunkt-Bedingung: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x} = 2 \Leftrightarrow x_E = \ln 2$

Funktionswert:

$$f(\ln 2) = \tfrac{1}{2} \cdot \ln 2 - 1 + e^{-\ln 2} = \tfrac{1}{2} \cdot \ln 2 - 1 + e^{\ln \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \ln 2 - 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot \ln 2 - \tfrac{1}{2} \approx -0{,}15$$

Angegeben war

$$y_E = \ln\sqrt{\frac{2}{e}} = \ln\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{2}{e} = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2 - \ln e) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Kontrolle: $f''(\ln 2) = e^{\ln 2} > 0$

Also liegt ein Tiefpunkt vor: $T(\ln 2 \mid \tfrac{1}{2}\ln 2 + 1)$

Aufgabe 404:

Untersuche die folgenden Funktionen bzw. ihre Schaubilder auf

Definitionsbereich,
Randwerte,
senkrechte Asymptoten,
Nullstellen,
2 Ableitungen,
Extrem- und Wendepunkte.

a)

$$f(x) = \ln(4 - \tfrac{1}{2}x)$$

b)

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{t}x - t\right) \qquad \text{für } t > 0$$

Lösung:

a)

Definitionsbereich: Bed.: Arg > 0 d.h. $4 - \tfrac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}x < 4 \Leftrightarrow x < 8$: $\mathbf{D} =]-\infty; 8[$

Randwerte: $x \to 8 \Rightarrow \text{Arg} \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow \text{Arg} \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

Senkrechte Asymptote: $x = 8$

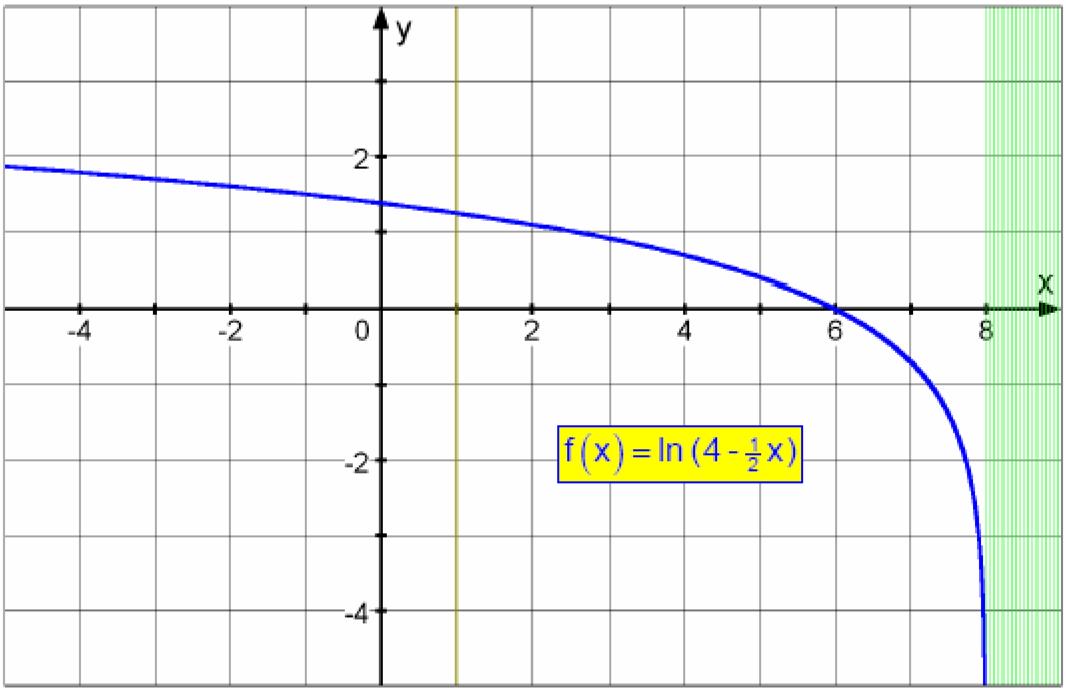
Wertmenge: $\mathbf{W} = \mathbf{R}$

Nullstelle: Bed.: Arg = 1 d.h. $4 - \tfrac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x_N = 6$: $N(6|0)$

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{-\tfrac{1}{2}}{4 - \tfrac{1}{2}x} = \dfrac{1}{x-8} = (x-8)^{-1}$

$f''(x) = -(x-8)^{-2} = -\dfrac{1}{(x-8)^2}$

Da f' und f'' keine Nullstellen haben, besitzt das Schaubild K von f weder Extrem- noch Wendepunkte.



b)

Definitionsbereich: Bed.: $\text{Arg} > 0$ d.h. $\frac{1}{t}x - t > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t}x > t \Leftrightarrow x > t^2$ $\mathbf{D} =]t^2; \infty[$

Randwerte: $x \to t^2 \Rightarrow \text{Arg} \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$x \to \infty \Rightarrow \text{Arg} \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

Senkrechte Asymptote: $x = t^2$

Wertmenge: $\mathbf{W} = \mathbf{R}$

Nullstelle: Bed.: $\text{Arg} = 1$ d.h $\frac{1}{t}x - t = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t}x = t + 1 \Leftrightarrow x = t^2 + t$

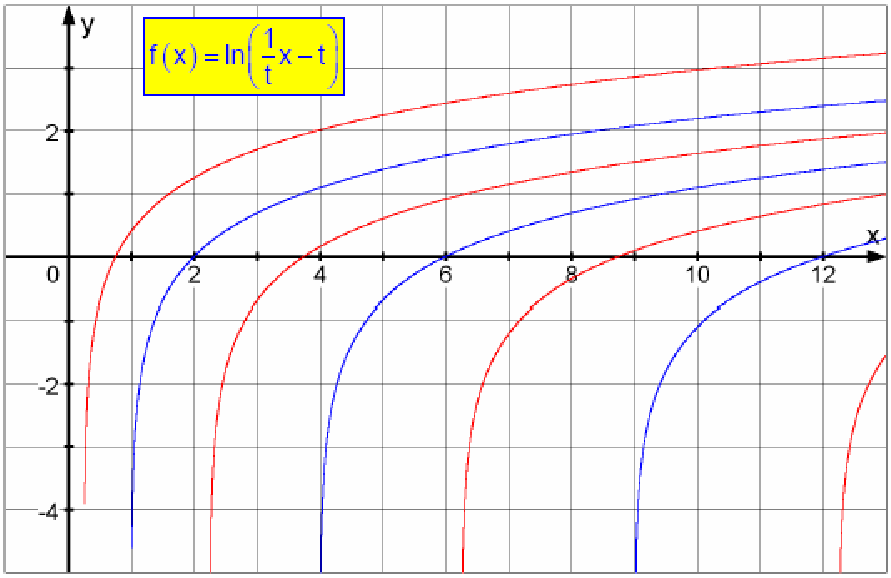
$N(t^2 + t \mid 0)$

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}x - t} = \dfrac{1}{x - t^2} = (x - t^2)^{-1}$

$f''(x) = -(x - t^2)^{-2} = -\dfrac{1}{(x - t^2)^2}$

Da f‘ und f‘‘ keine Nullstellen haben, besitzt das Schaubild K von f weder Extrem- noch Wendepunkte.

Das Schaubild zeigt alle Scharkurven für $t = 0{,}5$; 1 ; 1,5 ; bis 4.

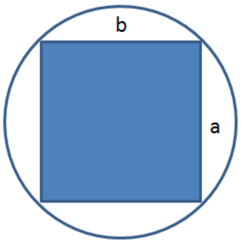


$f(x) = \ln\left(\frac{1}{t}x - t\right)$
y
x
0
2
4
6
8
10
12
2
-2
-4

Extremwertaufgaben

Aufgabe 405:

Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite (b) und zum Quadrat der Balkendicke (a). In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinanderstehen?



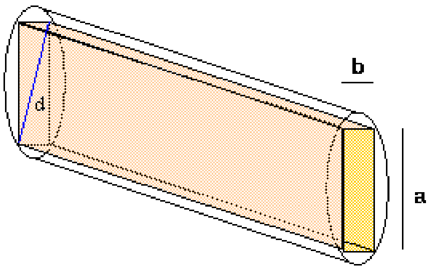
Lösung:

Da ist ein Baumstamm in Form eines Zylinders mit Durchmesser d.

Wenn man daraus einen rechteckigen Balken sägt, dann hat dieser die Dicke a und die Breite b.

Zeichnet man sich den Querschnitt des Balkens in den kreisförmigen Querschnitt des Zylinders, dann sieht man, dass $a^2 + b^2 = d^2$ zu sein hat.

Das ist die Nebenbedingung.



Anmerkung: Es wäre natürlich auch möglich kleinere rechteckige Querschnitte auszusägen, also nur $a^2+b^2 \le d^2$ zu verlangen. Da aber die Tragfähigkeit zu maximieren ist, und diese mit größerem a und größerem b wächst, kommt das nicht in Betracht. Man tut am besten, wenn man den Zylinderquerschnitt voll ausnutzt.

1. Nun soll die Zielfunktion bestimmt werden. Die Aufgabe sagt, dass die Tragfähigkeit proportional zur Breite b und proportional zum Quadrat der Dicke a ist. Ohne den physikalischen Sinn dieser Aussage zu verstehen oder diskutieren zu wollen, stellt man daraus die Zielfunktion für die Optimierung auf, nämlich a^2*b = maximal.
2. Ich fasse zusammen:

Zielfunktion: a^2*b = maximal

Nebenbedingung: $a^2 + b^2 = d^2$

Mit der Nebenbedingung ersetzt man eine der Unbekannten in der Zielfunktion.

Ich nehme die Ersetzung von a^2 vor, weil ich damit Wurzeln vermeiden kann. Das ergibt die Funktion t der Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Breite b:

$t(b) = (d^2 - b^2) * b$

Die Ableitungen von t(b) lauten:

$t'(b) = -3b^2 + d^2$

$t''(b) = -6b$

Man setzt die Ableitung gleich 0:

$t'(b) = -3b^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = d^2 / 3$

Die zweite Ableitung ist für alle in Frage kommenden positiven Breiten negativ. Das zeigt, dass an der Nullstelle der ersten Ableitung tatsächlich ein (lokales) Maximum vorliegt.

3. Aus der Nebenbedingung errechnen wir den dazu gehörenden Wert für a (bzw. a^2).

$a^2 = d^2 - d^2 / 3 = 2/3\ d^2$

4. In der Aufgabe ist für d kein konkreter Wert gegeben. Es wird nach dem Verhältnis von a und b gefragt, also nach a/b. Aus $a^2/b^2 = (2/3\ d^2) / (1/3\ d^2) = 2$ folgt, dass a/b = Ö2.
5. Was ist dazu noch zu sagen:
6. Das optimale Verhältnis ist unabhängig vom Durchmesser.
7. Die Formel a/b= Ö2 sagt, dass der Balken 1.41-mal so dick wie breit sein soll. Die Dicke ist damit größer als die Breite. Man muss sich den Balken mit der schmalen Seite als Breite vorstellen.

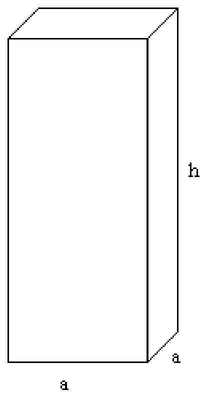
Aufgabe 406:

Aus einem Stück Draht, das 36 cm lang ist, soll eine "Säule" mit quadratischem Grundriss geformt werden. Welches ist das maximal mögliche Volumen der Säule?

Lösung:

In dieser Aufgabe ist eine Länge gegeben (des Drahtes).

Wenn die Säule aus Draht geformt werden soll, ist wohl gemeint, dass mit dem Draht die Kanten der Säule gebildet werden sollen. Der Draht muss ausreichen, um daraus die Gesamtlänge aller Kanten zu bilden.



Die Nebenbedingung lautet

$8a + 4h = 36$

Die "quadratische" Säule hat eine quadratische Grundfläche a*a und eine Höhe h. Das Volumen soll maximiert werden. Wie lautet die Zielfunktion?

Das Volumen einer Säule ist Grundfläche mal Höhe. Die Grundfläche ist a^2, die Hühe h. Als Zielfunktion haben wir:

$V = a^2 * h$

Hinweis (weil die Frage schon mal kam): Hier eine Nebenbedingung mit der Oberfläche zu setzen, entspricht nicht der Aufgabe.

- Indem die Nebenbedingung $8a+4h=36$ nach (z.B.) h aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt wird, erhält man die Funktion des Volumens in Abhängigkeit von a:

  $F(a) = a^2 * (9-2a)$

  Die Lösung lautet schließlich: a=h=3.

  Das Volumen der Säule ist maximal, wenn sie ein Würfel (Kubus) ist.

- Eine ähnliche Aufgabe gibt es auch mit der Quaderoberfläche als Nebenbedingung.

Aus $36cm^2$ Pappe soll eine quadratische Säule maximalen Volumens gebildet werden.

Hier ist die Nebenbedingung die Oberfläche

$F = 36 = 4ah+2a^2=36$ oder $ah = (36-2a^2)/4$.

Das eingesetzt in V ergibt:

$V = a^2h = a * ah = a*(36-2a^2)/4 = 9a-a^3/2$

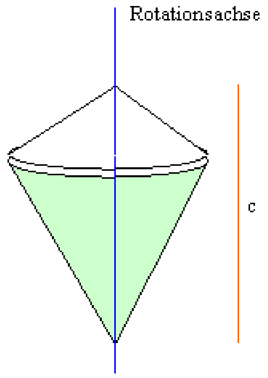
Ableitung:

$V'(a) = 9-3/2*a^2 = 0 \Rightarrow a=w(6)$ und $h = w(6)$

Die Ergebnisse haben eins gemeinsam: in beiden Fällen ist a=h. Die quadratische Säule hat maximales Volumen, wenn sie ein Kubus ist.

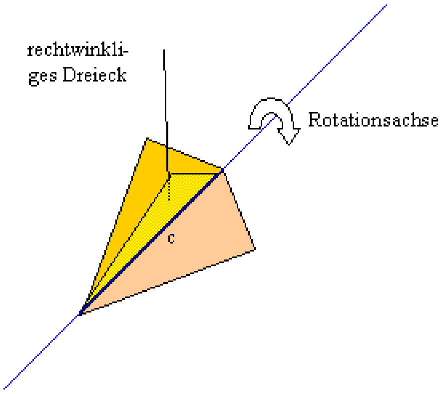
Aufgabe 407:

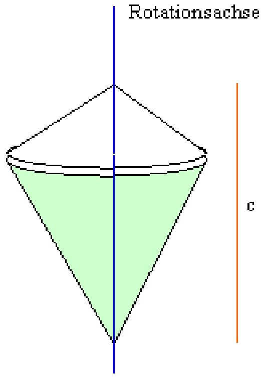
Welches rechtwinkelige Dreieck mit der Hypotenuse c=6 cm erzeugt einen Doppelkegel größten Volumens, wenn man es um die Hypotenuse dreht?



Lösung:

Antwort: Das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck!

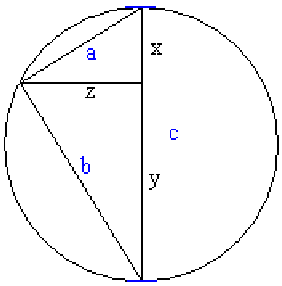




Wo ist nun der "Doppelkegel", dazu noch ein Bild:

Die folgende Skizze zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c (blau) und den Hilfsgrößen x, y, z (schwarz).

Jedes rechtwinklige Dreieck passt in einen Halbkreis. Durch die Aufteilung der gegebenen Hypotenuse c=6 in die Abschnitte x und y ist im Halbkreis genau ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt. Dieses hat die Höhe z.



Der durch Rotation des Dreiecks um die Hypotenuse entstehende Körper besteht aus zwei Kreiskegeln.

Die allgemeine Formel für das Volumen eines Kreiszylinders lautet V = 1/3 * G * h.

Wenn das Dreieck mit den Seiten a, z, x um x rotiert, entsteht ein Kreiskegel mit der Höhe x und der Grundfläche pi * z^2.

Wenn das Dreieck mit den Seiten b, y, z um y rotiert, entsteht ein Kreiskegel mit der Höhe y und der gleichen Grundfläche, nämlich pi * z^2.

Die Summe der Volumina der beiden Kreiskegel beträgt

V = 1/3 pi * z^2 * x + 1/3 pi * z^2 * y

$= 1/3 \pi * z^2 * (x + y)$

$= 1/3 \pi z^2 * 6$

$= 2 \pi z^2$

Das ist eine Formel für das Volumen, die nicht von a, b oder c abhängt, sondern von einer Hilfsgröße z. Man könnte nun versuchen z durch a, b auszudrücken (Pythagoras), aber das ist hier nicht nötig - zum Glück, denn dadurch würde es vermutlich komplizierter.

Wir gehen für den Moment dazu über, das optimale z zu bestimmen.

Beginnen wir mit dem normalen Vorgehen:

Es ist $V(z) = 3\pi*z^2$, $V'(z) = 6\pi*z$ und $V''(z) = 6\pi$.

Daraus folgt aber nur, dass bei z=0 ein (lokales) Minimum vorliegt, denn $V'(z) = 6\pi*z = 0$ gilt nur für $z = 0$.

Gibt es denn kein Maximum? Doch, natürlich gibt es eines. Das Volumen wird umso größer, je größer z ist. Kann denn z beliebig groß werden? Nein, z kann maximal gleich dem Radius des Halbkreises werden, in dem das Dreieck mit der Hypotenuse c=6 einbeschrieben ist. Der Radius dieses Kreises ist gleich c/2. Mit c=6 folgt, dass z maximal 3 sein kann.

Das maximale Volumen wird somit am Rand des Definitionsbereichs von z, nämlich bei z = 3 angenommen.

In diesem Fall ist das rechtwinklige Dreieck a, b, c ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck.

Aufgabe 408:

Die Funktion

$f(x) = -a * x^2 + b$

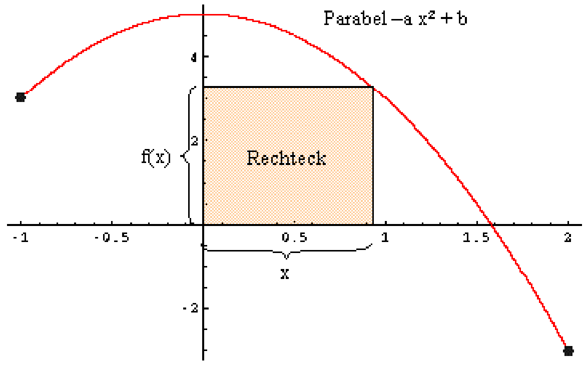
schließt im ersten Quadranten ein Rechteck mit der x und y Achse ein.

Für welches x wird der Flächeninhalt maximal?

Lösung:

Es ist ein Rechteck gesucht, dessen linke untere Ecke im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt, und dessen rechte obere Ecke auf dem Graphen der gegebenen Funktion liegt.
Die rechte obere Ecke soll so gewählt werden, dass die Fläche des Rechtecks maximal wird.

Diese Ecke hat die Koordinaten (x/y) mit $y=-ax^2+b$



Weil die Funktion f(x) bei w(b/a) eine Nullstelle hat (das ist ein Schnittpunkt mit der x-Achse), ist ein x e [0,w(b/a)] gesucht (Definitionsbereich).

Die Fläche in Abhängigkeit von x ist

$F(x) = x * y = x * (-ax^2+b) = -ax^3+bx$

Diese Funktion der Fläche ist zu differenzieren.

$F'(x) = -3ax^2 + b$

Man findet im Definitionsbereich die positive Nullstelle:

x = w(b/(3a))

[die negative Nullstelle liegt nicht im ersten Quadraten].

Dieses x ist im zu betrachtenden Intervall (das ist gut), und es ist

$F''(x) = -6ax$

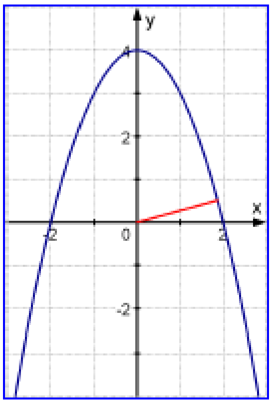
Daher ist F''(w(b/(3a))) negativ, also ist bei x = w(b/(3a)) ein lokales Maximum.

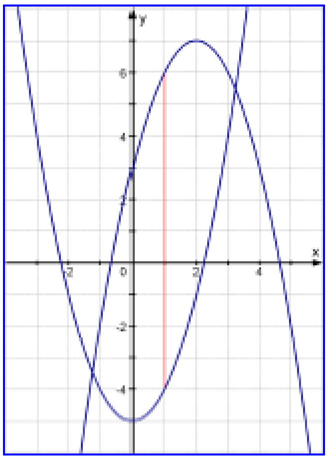
An den Rändern des Intervalls, in dem x nur liegen kann, sind die Flächenwerte 0, darum ist x=w(b/(3a)) in [0,w(b/a)] sogar ein absolutes Maximum.

Aufgabe 409:

Aufgabe 1

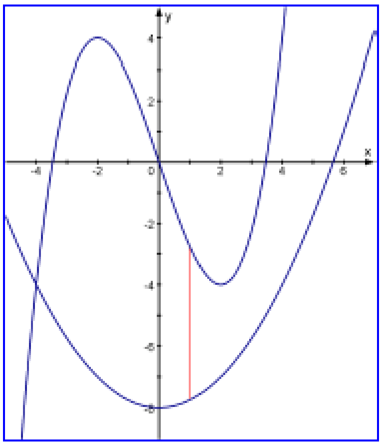
Gegeben ist die Parabel als Schaubild der Funktion $f(x) = 4 - x^2$.
Welcher Punkt P dieser Parabel hat vom Ursprung die kürzeste Entfernung ?





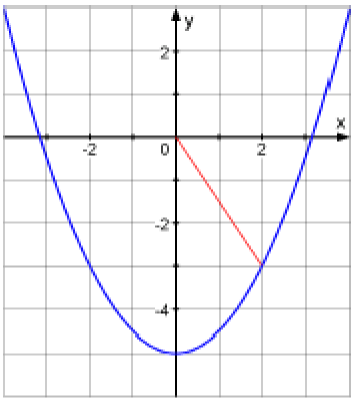
Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch:
$f(x) = x^2 - 5$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 3$
Die Gerade h: x = u schneidet die von den beiden Parabeln begrenzte Fläche.
Für welches u ist die Sehne am längsten ?



Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8$
Die Gerade mit der Gleichung x = u mit $u > -4$ schneidet die beiden Schaubilder in P und Q.
Für welches u nimmt die Länge der Strecke PQ einen Extremwert an ?

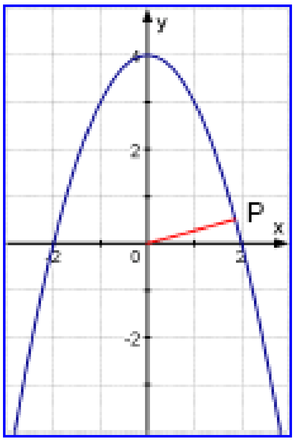


Aufgabe 4

Bestimme die Punkte P (u I v) der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$, deren Abstand zum Ursprung einen Extremwert annimmt.

Lösung:

Lösungen



Aufgabe 1:

Gegeben ist die Parabel als Schaubild der Funktion $f(x) = 4 - x^2$.

Welcher Punkt P dieser Parabel hat vom Ursprung die kürzeste Entfernung ?

Lösung:

Der Punkt habe die Koordinaten P (u I 4 - u^2).
Abstand

$$d(u) = \overline{OP} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{u^2 + (4-u^2)^2} = \sqrt{u^2 - 16 - 8u^2 + u^4} = \sqrt{u^4 - 7u^2 - 16}$$

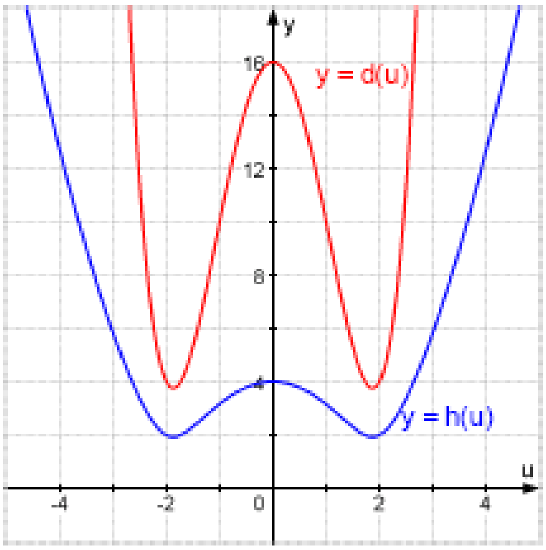
Hilfsfunktion: $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16$.

Hinweise:

Wir sehen uns nun einmal die Schaubilder der beiden Funktionen y = d(u) und y = h(u) genau an.
Man erkennt, daß ihre Extremwerte an denselben Stellen liegen. Dies hat seinen einfachen Grund darin, daß $d(u) = \sqrt{h(u)}$

Gilt und daß die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$
Streng monoton wächst. Damit ist garantiert, daß bei Zunahme des Radikanden auch die Wurzel daraus zunimmt. Wenn somit h(u) zunimmt, dann auch d(u).

Daher besitzen h(u) und d(u) dieselben Extremstellen.



Berechnung von Extremwerten von Abständen:

Da die Abstandsfunktion $y = d(u) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ihre Extremstellen genau dort hat, wo dies auch die Hilfsfunktion

$y = h(u) = [d(u)]^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ hat,

kann man extreme Abstände stets mit dieser Hilfsfunktion berechnen und benötigt somit keine Wurzelfunktion.

Für unsere Aufgabe berechnen wir somit die Extremwerte der Funktion $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16$ mit dem Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

Ableitungen für $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16$

$h'(u) = 4u^3 - 14u$ und $h''(u) = 12u^2 - 14$

<u>Extremwertbedingung</u>: $h'(u_E) = 0 \Leftrightarrow 4u^3 - 14u = 0 \Leftrightarrow 2u(2u^2 - 7) = 0$

$$u_1 = 0\,,\quad u_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$$

Kontrollrechnungen: $h''(0) = -14 < 0$

$h''\left(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{14}\right) = 12\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 14 - 14 > 0$

Also haben die Funktionen h und d bei 0 ein relatives Maximum und bei $\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{14}$ relative Minima.

Randwerte: Für $u \to \pm\infty$ geht $h(u) = u^4 - 7u^2 - 16 \to \infty$.

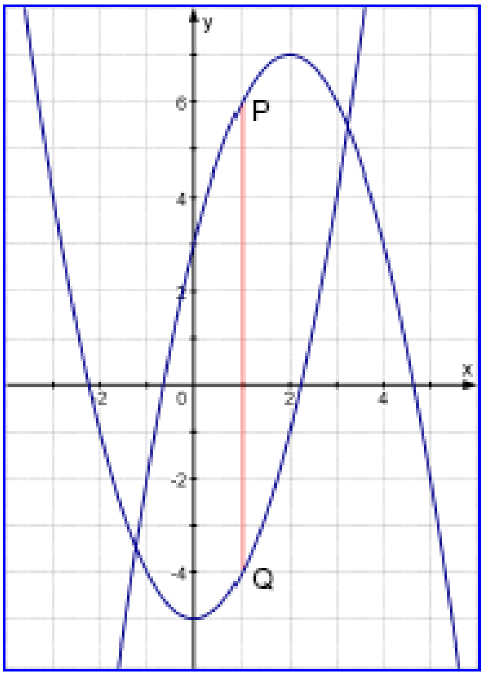
Ergebnis: Für u = 0 liegt ein relatives Maximum für den Abstand vor,
Für $u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{14}$ jedoch absolute Minima.

Es gibt also zwei Punkte, die dem Ursprung am nächsten liegen:

$f\left(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{14}\right) = 4 - \tfrac{1}{4}\cdot 14 = 4 - \tfrac{7}{2} = \tfrac{1}{2}$; Es sind $P_{1,2}\left(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{14} \mid \tfrac{1}{2}\right)$.

<u>**Berechnung des kürzesten Abstandes:**</u>

$$d_{min} = \sqrt{\left(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{14}\right)^4 - 7\cdot\left(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{14}\right) + 16} = \sqrt{\left(\tfrac{7}{4}\right)^2 - 7\cdot\tfrac{7}{4} + 16} = \sqrt{\tfrac{15}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{15}\,.$$



Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch:
$f(x) = x^2 - 5$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 3$
Die Gerade h: x = u schneidet die von den beiden Parabeln begrenzte Fläche.
Für welches u ist die Sehne am längsten ?

Lösung:

Es sei $P\left(u \,|\, -u^2 + 4x + 3\right)$ und $Q\left(u \,|\, u^2 - 5\right)$

Zur Festlegung des Definitionsbereiches müssen die Schnittstellen dieser Parabeln berechnet werden.

$$x^2 - 5 = -x^2 + 4x + 3$$
$$2x^2 - 4x - 8 = 0 \quad |:4$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Berechnung der Streckenlänge:

$$d(u) = y_P - y_Q = \left(-u^2 + 4u + 3\right) - \left(u^2 - 5\right) = -2u^2 + 4u + 8$$

mit dem Definitionsbereich:
(Die Ränder - 2 und 4 schließt man aus, weil dann keine Strecke mehr vorliegt).

Ableitungen: $d'(u) = -4u + 4$ und $f''(u) = -4$

Extremwertbedingung: $d'(u_E) = 0$ d.h. $u_E = 1$

Kontrolle: $d''(1) < 0$

Also hat die Strecke für u = 1 ein relatives Maximum.

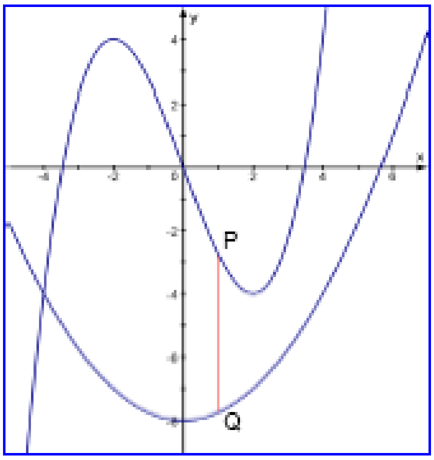
Randwerte: $\lim\limits_{u \to -2} d(u) = 0$ und $\lim\limits_{u \to 4} d(u) = 0$

Also liegt für u = 1 ein absolutes Maximum vor.

Größe dieser maximalen Streckenlänge:
$d_{max} = d(1) = 10$

Genau diese Strecke ist oben eingezeichnet.

Aufgabe 3



Gegeben sind die Funktionen
$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ und $g(x)=\frac{1}{4}x^2-8$
Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > -4$ schneidet die beiden Schaubilder in P und Q.
Für welches u nimmt die Länge der Strecke PQ einen Extremwert an ?

Lösung:

Es sei $P\left(u \mid \frac{1}{4}u^3-3u\right)$ und $Q\left(u \mid \frac{1}{4}x^2-8\right)$

Zur Festlegung des Definitionsbereiches müssen die Schnittstellen dieser Kurven berechnet werden.

$$\frac{1}{4}x^3-3x=\frac{1}{4}x^2-8 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-3x+8=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-12x+32=0 \quad (1)$$

Aus der Zeichnung kann man die vermutliche Lösung x = - 4 entnehmen.
Beweis und Ausklammern des Linearfaktors (x+4) mittels Horner-Schema:

	1	-1	-12	32
	0	-4	20	-32
x = - 4	1	-5	8	$\boxed{0}$

Mittels Polynomdivision hätte man diese Rechnung durchführen müssen:

$$
\begin{aligned}
&(x^3-x^2-12x-32):(x+4)=x^2-5x+8\\
&-(x^3+4x^2)\\
&\quad -5x^2-12x\\
&\quad -(-5x^2-20x)\\
&\qquad 8x-32\\
&\qquad -(8x-32)\\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

Aus beiden Rechnungen folgt für (1):
$(x+4)(x^2-5x+8)=0$
Weitere Schnittstellen:
$x_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-32}}{2}\notin \mathbb{R}$
Es gibt nur einen Schnittpunkt.

Berechnung der Streckenlänge:

$d(u)=y_P-y_Q=\left(\frac{1}{4}u^3-3u\right)-\left(\frac{1}{4}u^2-8\right)=\frac{1}{4}u^3-3u-\frac{1}{4}u^2+8$ mit $\mathbb{D}=]-4;\infty[$

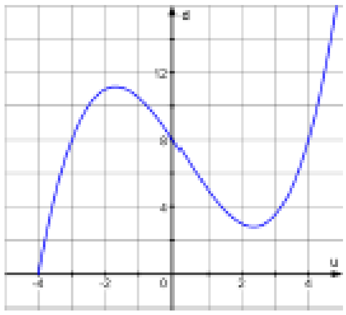
Ableitungen: $d'(u)=\frac{3}{4}u^2-\frac{1}{2}u-3$ und $d''(u)=\frac{3}{2}u-\frac{1}{2}$

Extremwertbedingung: $d'(u_E)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}u^2-\frac{1}{2}u-3=0 \quad |\cdot 2$

$\frac{3}{2}u^2-u-6=0$ ergibt $u_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+36}}{3}=\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{37}\approx\begin{cases}2{,}36\\-1{,}7\end{cases}$

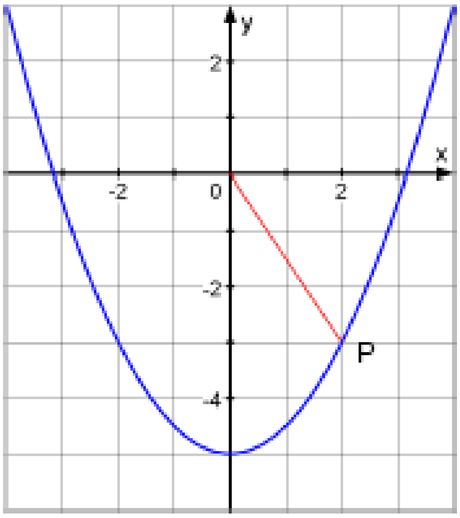
Kontrollrechnungen: $d''(2{,}36)=1{,}35>0$ d.h. relatives Minimum

$d''(-1{,}7)=-1{,}7<0$ d.h. relatives Maximum.



Randwerte: $\lim\limits_{u\to -4} d(u)=0$ und für $u\to\infty$

folgt $A(u)\to\infty$, d.h.
es gibt nur relative Extremwerte:
$d_{min}=d(2{,}36)\approx 2{,}81$ und $d_{max}=d(-1{,}7)\approx 11{,}15$



Aufgabe 4

Bestimme die Punkte P (u I v) der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$, deren Abstand zum Ursprung einen Extremwert annimm

Lösung.

Es sei $P\left(u \,\middle|\, \frac{1}{2}u^2 - 5\right)$.

Abstand zum Ursprung:

$d(u) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{u^2 + \left(\frac{1}{2}u^2 - 5\right)^2}$

Durch Quadrieren entsteht die Hilfsfunktion h mit denselben Extremstellen:

$h(u) = u^2 + \left(\frac{1}{2}u^2 - 5\right)^2 = u^2 + \frac{1}{4}u^4 - 5u^2 + 25 = \frac{1}{4}u^4 - 4u^2 + 25$

Definitionsbereich dazu: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Ableitungen: $h'(u) = u^3 - 8u$ und $h''(u) = 3u^2 - 8$

Extremwertbedingung: $h'(u_E) = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 8) = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{8}$.

Kontrollrechnung: $h''(0) = -8 < 0$ d.h. relatives Maximum.

$h''(\pm\sqrt{8}) = 3 \cdot 8 - 8 > 0$ relatives Minimum.

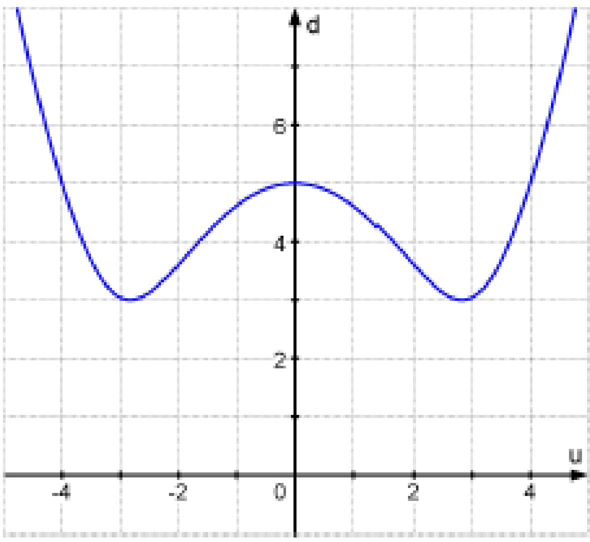
Randwerte: Für $u \to \pm\infty$ folgt $h(u) \to \infty$.

Also haben h und damit auch d bei $x_{2,3} = \pm\sqrt{8}$ ihr absolutes Minimum und bei 0 ein relatives Maximum.

$d_{min} = d(\pm\sqrt{8}) = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 64 - 32 + 25} = \sqrt{9} = 3$

$d_{max} = d(0) = 5$

Die rechte Abbildung zeigt das Schaubild der Distanzfunktion d. Man erkennt deutlich die 3 Extremstellen bzw. Extremwerte.



Newtonsches Iterationsverfahren

Aufgabe 410:

Berechnen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens alle Nullstellen.

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 2$

Lösung:

Wertetabelle

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 2$$

Erstelle eine Wertetabelle um die Lage der Nullstellen einschränken zu können.

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f(x)	-58	-18	0	2	-6	-18	-28	-30	-18	14

Bestimmen der Intervalle

Eine Nullstelle kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden:

$\tilde{x}_1 = -1$

Man sieht außerdem, dass die Funktion $f(x)$ in den Intervallen $]0;1[$ und $]5;6[$ ihr Vorzeichen ändert.

Daraus folgt für die Nullstellen $\tilde{x}_{2,3}$:

$\Rightarrow \tilde{x}_2 \in]0;1[$ und $\tilde{x}_3 \in]5;6[$

Um die Intervalle weiter zu verkleinern und so einen besseren Anfangswert für das Newton-Verfahren zu bekommen, berechnet man den Funktionswert der Mittelwerte der ausgewählten Intervalle:

x	0	0,5	1	5	5,5	6
f(x)	2	-1,125	-6	-18	-4,875	14

Man sieht nun, dass die Funktion $f(x)$ in den Intervallen $]0;0,5[$ und $]5,5;6[$ ihr Vorzeichen ändert.

Daraus folgt für die Nullstellen $\tilde{x}_{2,3}$:

$\Rightarrow \tilde{x}_2 \in]0;0,5[$ und $\tilde{x}_3 \in]5,5;6[$

Anwenden des Newton-Verfahrens

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 10x - 4$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n^2 - 4x_n + 2}{3x_n^2 - 10x_n - 4}$$

Bestimmen der Nullstellen

Man wählt einen beliebigen Wert x_0 aus dem Intervall $]0; 0,5[$, z.B. $x_0 = 0,25$.

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 5x_0^2 - 4x_0 + 2}{3x_0^2 - 10x_0 - 4}$$

Man berechnet jetzt x_1 mit der oben angegebenen Rekursionsformel.

$$= 0,25 - \frac{(0,25)^3 - 5 \cdot (0,25)^2 - 4 \cdot (0,25) + 2}{3 \cdot (0,25)^2 - 10 \cdot (0,25) - 4}$$

$$= \frac{73}{202} \approx 0,36139$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 5x_1^2 - 4x_1 + 2}{3x_1^2 - 10x_1 - 4}$$

Dann berechnet man x_2 mit dem gerade berechneten x_1 und der oben angegebenen Rekursionsformel.

$$= \frac{73}{202} - \frac{(\frac{73}{202})^3 - 5 \cdot (\frac{73}{202})^2 - 4 \cdot (\frac{73}{202}) + 2}{3 \cdot (\frac{73}{202})^2 - 10 \cdot (\frac{73}{202}) - 4}$$

$$= 0,354276361 \approx 0,35428$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 5x_2^2 - 4x_2 + 2}{3x_2^2 - 10x_2 - 4}$$

Dann berechnet man x_3 mit dem gerade berechneten x_2 und der oben angegebenen Rekursionsformel.

$$= 0,354276361 - \frac{(0,354276361)^3 - 5 \cdot (0,354276361)^2 - 4 \cdot (0,354276361) + 2}{3 \cdot (0,354276361)^2 - 10 \cdot (0,354276361) - 4}$$

$$= 0,3542486894 \approx 0,35425$$

Man erkennt jetzt, dass sich die Genauigkeit der Lösung im letzten Schritt nurnoch in der fünften Nachkommastelle verbessert.

Da nur eine Angabe bis auf zwei Nachkommastellen gefordert war, ist man in diesem Schritt fertig und das Ergebnis lautet:

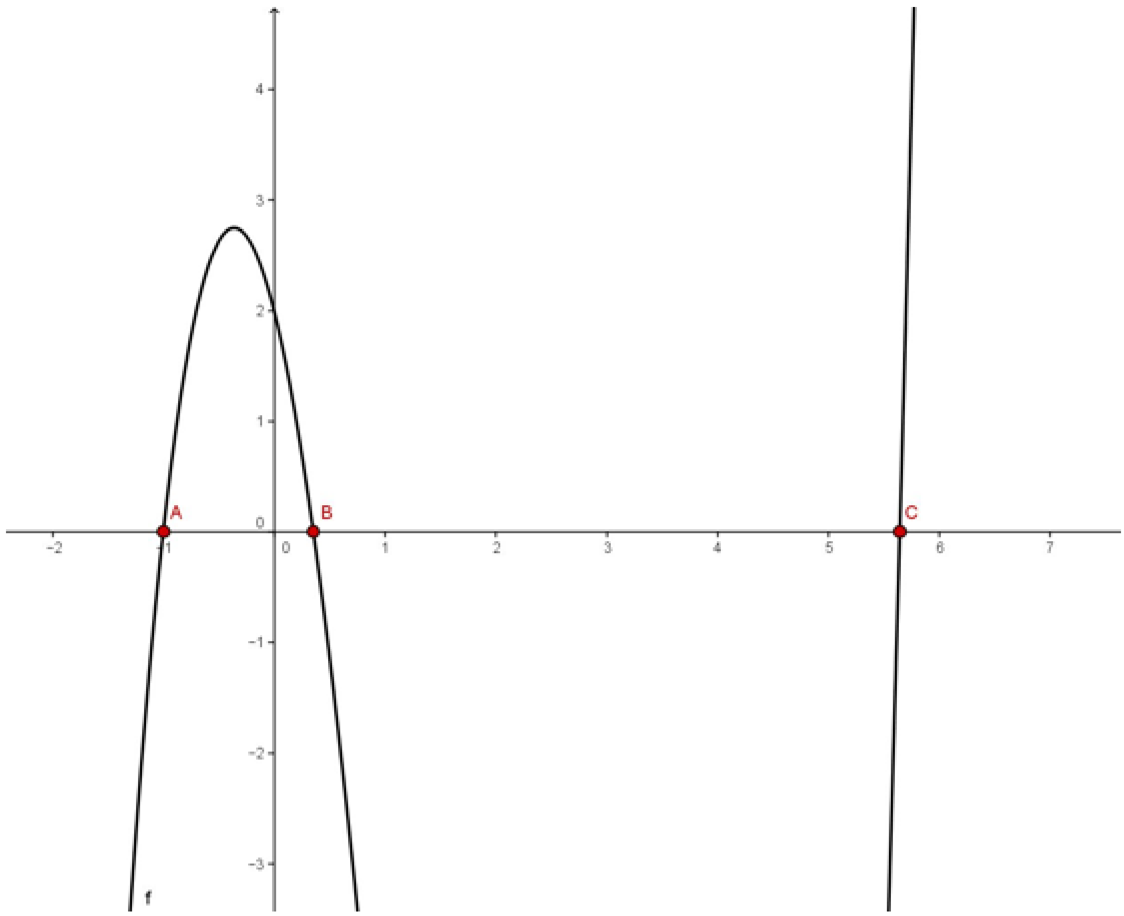
$$\tilde{x}_2 = 0,35$$

Um $\tilde{x}_3$ zu bestimmen verfährt man analog und erhält für den Startwert $x_0 = 5,75$ folgende Werte:

i	0	1	2	3
x_i	$5,75$	$5,649253731$	$5,645755468$	$5,645751311$

Und somit erhält man:

$$\tilde{x}_3 = 5,65$$



Aufgabe 411:

Berechnen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens alle Nullstellen.

$f(x) = \ln\left(x^4 + 5x^3 - 5\right)$

Lösung:

$f(x) = \ln(x^4 + 5x^3 - 5)$

Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ ist nur auf den positiven, reellen Zahlen definiert.

Um die Nullstellen der Funktion $f(x)$ zu bestimmen macht man zuvor eine kurze Vorüberlegung.

Man betrachtet die Nullstellen des natürlichen Logarithmus und stellt folgendes fest:

Sei $g(x) = \ln(x)$:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \qquad |e$

$e^{\ln(x)} = e^0 \qquad$ Umformen.

$\Rightarrow x = 1$

Man sieht, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle von $\ln(x)$ ist.

Um die Nullstellen von $f(x)$ zu approximieren, kann man also die "Einsstellen" der Funktion $h(x) = x^4 + 5x^3 - 5$ approximieren, d.h. man sucht die Lösung für die Gleichung $h(x) = x^4 + 5x^3 - 5 = 1$.

Da das Newtonverfahren Nullstellen approximiert macht man eine kleine Umformung und erhält:

$h(x) = x^4 + 5x^3 - 5 = 1 \qquad |-1$

$x^4 + 5x^3 - 6 = 0$

Wir approximieren also die Nullstellen der Funktion $\tilde{h}(x) = x^4 + 5x^3 - 6$ um die Nullstellen von $f(x)$ zu finden.

Wertetabelle

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$\tilde{h}(x)$	210	-6	-70	-60	-30	-10	-6	0	50

Bestimmen der Intervalle

Eine Nullstelle kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden:

$\tilde{x}_1 = 1$

Man sieht außerdem, dass die Funktion $\tilde{h}(x)$ im Intervallen $]-6;-5[$ ihr Vorzeichen ändert.

Daraus folgt für die Nullstellen $\tilde{x}_2$:

$\Rightarrow \tilde{x}_2 \in]-6;-5[$

Um das Intervall weiter zu verkleinern und so einen besseren Anfangswert für das Newton-Verfahren zu bekommen, berechnet man den Funktionswert der Mittelwerte der ausgewählten Intervalle:

x	**-6**	**-5,5**	**-5**
f(x)	210	77,1875	-6

Man sieht nun, dass die Funktion $\tilde{h}(x)$ in den Intervallen $]-5,5;-5[$ ihr Vorzeichen ändert.

Daraus folgt für die Nullstellen $\tilde{x}_2$:

$\Rightarrow \tilde{x}_2 \in]-5,5;-5[$

Anwenden des Newton-Verfahrens

$\tilde{h}(x) = x^4 + 5x^3 - 6$

$\tilde{h}'(x) = 4x^3 + 15x^2$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + 5x_n^3 - 6}{4x_n^3 + 15x_n^2}$$

Bestimmen der Nullstellen

Man wählt einen beliebigen Wert x_0 aus dem Intervall $]-5,5;-5[$, z.B. $x_0 = -5,25$.

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^4 + 5x_0^3 - 6}{4x_0^3 + 15x_0^2}$$

Man berechnet jetzt x_1 mit der oben angegebenen Rekursionsformel.

$$= (-5,25) - \frac{(-5,25)^4 + 5(-5,25)^3 - 6}{4(-5,25)^3 + 15(-5,25)^2}$$

$$= -5,067531179 \approx -5,06753$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^4 + 5x_1^3 - 6}{4x_1^3 + 15x_1^2}$$

Dann berechnet man x_2 mit dem gerade berechneten x_1 und der oben angegebenen Rekursionsformel.

$$= (-5,067531179) - \frac{(-5,067531179)^4 + 5(-5,067531179)^3 - 6}{4(-5,067531179)^3 + 15(-5,067531179)^2}$$

$$= -5,046930085 \approx -5,04693$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^4 + 5x_2^3 - 6}{4x_2^3 + 15x_2^2}$$

Dann berechnet man x_3 mit dem gerade berechneten x_2 und der oben angegebenen Rekursionsformel.

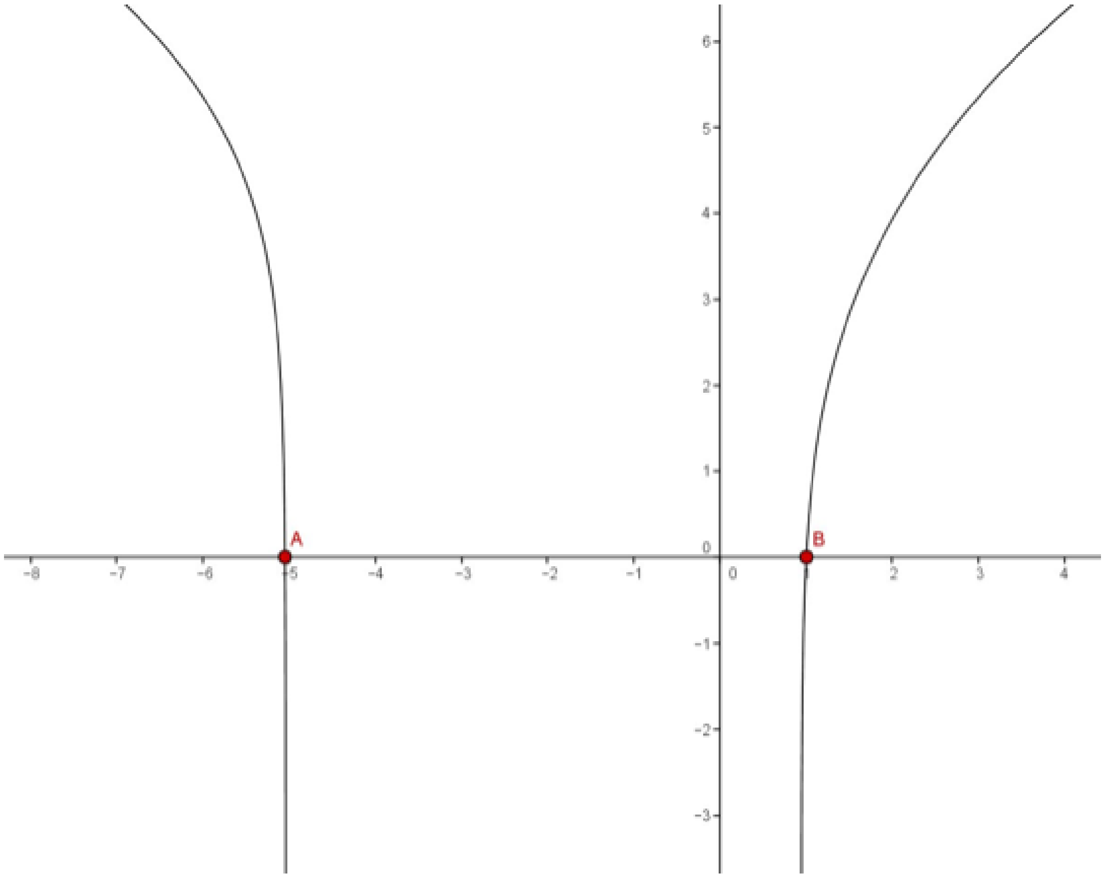
$$= (-5,046930085) - \frac{(-5,046930085)^4 + 5(-5,046930085)^3 - 6}{4(-5,046930085)^3 + 15(-5,046930085)^2}$$

$$= -5,046680361 \approx -5,04668$$

Man erkennt jetzt, dass sich die Genauigkeit der Lösung im letzten Schritt nur noch in der vierten Nachkommastelle verbessert.

Da nur eine Angabe bis auf zwei Nachkommastellen gefordert war, ist man in diesem Schritt fertig und das Ergebnis lautet:

$$\tilde{x}_2 = -5,05$$



Aufgabe 412:

Bestimme π mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf vier Dezimalstellen genau.

Lösung:

Du sollst das Newton-Verfahren verwenden, um π zu bestimmen. Das Newton-Verfahren dient dazu, Nullstellen von Funktionen zu bestimmen. Zunächst benötigst du also eine Funktion $f(x)$, die π als Nullstelle hat, also $f(\pi)=0$ erfüllt.

Erinnere dich, dass $\sin(\pi)=0$. Ein guter Kandidat ist also $f(x)=\sin(x)$. (Es gibt unendlich viele weitere Mögllichkeiten, dies ist nur die einfachste.)

Im Newton-Verfahren wendest du Iterationen der Rekursionsformel

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

an. **Berechne dafür die Ableitung von f**, sie lautet $f'(x)=\cos(x)$. Die Rekursionsformel des Newton-Verfahren für diese Aufgabe lautet also

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)}$$

.

Alternative: Du kannst dir die folgenden Rechnungen einfacher machen, wenn du dich an folgenden Zusammenhang aus der Trigonometrie erinnerst:

$$\frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)}=\tan(x_n)\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\tan(x_n)$$

Die Lösung wird allerdings den ausführlichen Weg präsentieren.

Erstelle nun eine Wertetabelle, um den Startwert für das Verfahren in die Nähe der Nullstelle zu bringen. Erinnere dich, dass $\pi \approx 3$.

x	**2**	**3**	**4**
$\sin(x)$	0,909	0,141	-0.757

In der Tat liegt die Nullstelle π zwischen 3 und 4, denn dort wechselt der Sinus sein Vorzeichen.

Wähle einen Startwert. Jeder Startwert im Intervall $]3;4[$ ist sinnvoll, z.B. $x_0 = 3$. **Setze diesen in die Rekursionsformel ein**:

$$x_1 = x_0 - \frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)} = 3 - \frac{\sin(3)}{\cos(3)} = 3,1425465\ldots \approx 3,142547$$

Setze den Wert wiederholt in die Rekursionsformel ein, bis du die gewünschte Genauigkeit erhältst:

$$x_2 = x_1 - \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)} = 3 - \frac{\sin(3,142547)}{\cos(3,142547)} = 3,1415926\ldots \approx 3,141593$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\sin(x_2)}{\cos(x_2)} = 3,141593 - \frac{\sin(3,141593)}{\cos(3,141593)} = 3,1415926\ldots$$

Du siehst, dass sich in den letzten beiden Iterationen die ersten *sieben* Nachkommastellen nicht geändert haben. Du hast daher sogar eine (mindestens) sechs Nachkommastellen genaue Lösung gefunden, genauer als verlangt.

Somit erhältst du, dass $\sin(3,141593) \approx 0$, und damit auch $\pi \approx 3,141593$.

Aufgabe 413:

Berechnen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens alle Nullstellen.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 3;\quad I = [3;4]$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x - 7;\quad I = [3;4]$

c) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 5;\quad I = [-2;-1,5]$

d) $f(x) = x^5 + x^3 - 4;\quad I = [1;2]$

Lösung:

a) $f(3) = -9 < 0$ und $f(4) = 9 > 0 \;\Rightarrow$
Im Intervall $I = [3;4]$ existiert mindestens eine Nullstelle.
$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 \approx 2{,}1 \notin I$ und $x_2 \approx -0{,}8 \notin I \;\Rightarrow$
Im Intervall $I = [3;4]$ ist f streng monoton, besitzt also nur eine Nullstelle x_0.
Bestimmung des günstigeren Startwertes:
$|f'(3)| = 10$ und $|f'(4)| = 27 > |f'(3)| \Rightarrow$ Startwert $z_1 = 4$.

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = 4 - \frac{9}{27} = 3{,}67$$

$$z_3 = z_2 - \frac{f(z_2)}{f'(z_2)} = 3{,}67 - \frac{1{,}14}{20{,}7} = 3{,}615$$

$$z_4 = z_3 - \frac{f(z_3)}{f'(z_3)} = 3{,}615 - \frac{0{,}03}{19{,}7} = 3{,}613$$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Nullstelle lautet: $x_0 = 3{,}61$.

---

b) $f(3) = -13 < 0$ und $f(4) = 9 > 0 \;\Rightarrow$
Im Intervall $I = [3;4]$ existiert mindestens eine Nullstelle.
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2 \notin I$ und $x_2 = -\frac{4}{3} \notin I \;\Rightarrow$
Im Intervall $I = [3;4]$ ist f streng monoton, besitzt also nur eine Nullstelle x_0.
Bestimmung des günstigeren Startwertes:
$|f'(3)| = 13$ und $|f'(4)| = 32 > |f'(3)| \Rightarrow$ Startwert $z_1 = 4$.

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = 4 - \frac{9}{32} = 3{,}72$$

$$z_3 = z_2 - \frac{f(z_2)}{f'(z_2)} = 3{,}72 - \frac{0{,}88}{26{,}1} = 3{,}686$$

$$z_4 = z_3 - \frac{f(z_3)}{f'(z_3)} = 3{,}686 - \frac{0{,}006}{25{,}4} = 3{,}686$$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Nullstelle lautet: $x_0 = 3{,}69$.

$f(-2) = -3 < 0$ und $f(-1{,}5) = 7{,}5 > 0 \Rightarrow$
Im Intervall $I = [-2;-1{,}5]$ existiert mindestens eine Nullstelle.
$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \notin I$, $x_{3/4} \approx \pm 1{,}34 \notin I \Rightarrow$
Im Intervall $I = [-2;-1{,}5]$ ist f streng monoton, besitzt also nur eine Nullstelle x_0.
Bestimmung des günstigeren Startwertes:
$|f'(-2)| = 44$ und $|f'(-1{,}5)| = 5{,}1 < |f'(-2)| \Rightarrow$ Startwert $z_1 = -2$.

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = -2 - \frac{-3}{44} = -1{,}93$$

$$z_3 = z_2 - \frac{f(z_2)}{f'(z_2)} = -1{,}93 - \frac{-0{,}21}{35{,}85} = -1{,}924$$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Nullstelle lautet: $x_0 = -1{,}92$.

$f(1) = -2 < 0$ und $f(2) = 36 > 0 \Rightarrow$
Im Intervall $I = [1;2]$ existiert mindestens eine Nullstelle.
$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \notin I \Rightarrow$
Im Intervall $I = [1;2]$ ist f streng monoton, besitzt also nur eine Nullstelle x_0.
Bestimmung des günstigeren Startwertes:
$|f'(1)| = 8$ und $|f'(2)| = 92 > |f'(1)| \Rightarrow$ Startwert $z_1 = 2$.

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = 2 - \frac{36}{92} = 1{,}61$$

$$z_3 = z_2 - \frac{f(z_2)}{f'(z_2)} = 1{,}61 - \frac{10{,}99}{41{,}37} = 1{,}344$$

$$z_4 = z_3 - \frac{f(z_3)}{f'(z_3)} = 1{,}344 - \frac{2{,}813}{21{,}73} = 1{,}215$$

$$z_5 = z_4 - \frac{f(z_4)}{f'(z_4)} = 1{,}215 - \frac{0{,}441}{15{,}32} = 1{,}186$$

$$z_6 = z_5 - \frac{f(z_5)}{f'(z_5)} = 1{,}186 - \frac{0{,}015}{14{,}11} = 1{,}185$$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Nullstelle lautet: $x_0 = 1{,}18$.

Integralrechnung

Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Aufgabe 414:

(1) $\int(3x+1)\,dx$

(2) $\int(x^2-2x-5)\,dx$

(3) $\int\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$

(4) $\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\right)dx$

(5) $\int\left(2x^4-x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx$

(6) $\int\left(-\frac{1}{8}x^4+4x^3-5x^2+3x-7\right)dx$

Bestimme C so, dass das Schaubild der Stammfunktion F zu f durch den Punkt P geht:

(7) $f(x)=x^2-1$ $\quad P(3\,|\,-1)$

(8) $f(x)=x^3-2x$ $\quad P(1\,|\,0)$

(9) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x-4$ $\quad P(0\,|\,8)$

Lösung:

(1) $\int(3x+1)dx = 3\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C = \frac{3}{2}x^2+x+C$

(2) $\int(x^2-2x-5)dx = \frac{1}{3}x^3-x^2-5x+C$

(3) $\int\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+C = \frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C$

(4) $\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\right)dx = \frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x+C$

(5) $\int\left(2x^4-x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx = \frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+5x+C$

(6) $\int\left(-\frac{1}{8}x^4+4x^3-5x^2+3x-7\right)dx = -\frac{1}{40}x^5+x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-7x+C$

Bestimme C so, dass das Schaubild der Stammfunktion F zu f durch den Punkt P geht:

(7) $f(x)=x^2-1$ $\quad P(3\,|\,-1)$ $\quad F(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

Bed.: $F(3)=-1 \Leftrightarrow 9-3+C=-1 \Leftrightarrow C=-7$

Erg.: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x-7$

(8) $f(x)=x^3-2x$ $\quad P(1\,|\,0)$ $\quad F(x)=\int(x^3-2x)dx=\frac{1}{4}x^4-x^2+C$

Bed.: $F(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}-1+C=0 \Leftrightarrow C=\frac{3}{4}$

Erg.: $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{3}{4}$

(9) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x-4$ $\quad P(0\,|\,8)$

$F(x)=\int\left(-\frac{1}{4}x^4+2x-4\right)dx=-\frac{1}{20}x^5+x^2-4x+C$

Bed.: $F(0)=8 \Leftrightarrow C=8$

Erg.: $F(x)=-\frac{1}{20}x^5+x^2-4x+8$

Aufgabe 415:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int\frac{3}{x^2}dx$ (2) $\int\frac{4}{x}dx$ (3) $\int\frac{1}{2x^3}dx$

(4) $\int\frac{2x^2-1}{x^2}dx$ (5) $\int\frac{x-2}{x^2}dx$ (6) $\int\frac{x^2-9}{x}dx$

(7) $\int\frac{(x-2)^2}{4x}dx$ (8) $\int\frac{x^3-8}{2x^2}dx$ (9) $\int\frac{x^3-8}{4x}dx$

(10) $\int\frac{x^2+3x-2}{4x}dx$ (11) $\int\frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}dx$ (12) $\int\frac{x^2-3}{x^3}dx$

(13) $\int\frac{x^4+x^2-2}{4x^3}dx$ (14) $\int\frac{(x^2+1)^2}{2x^3}dx$ (15) $\int\frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2}dx$

Lösung:

(1) $\int \frac{3}{x^2}dx = 3\int x^{-2}dx = 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{3}{x} + C$

(2) $\int \frac{4}{x}dx = 4 \cdot \ln x + C$

(3) $\int \frac{1}{2x^3}dx = \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = \frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4x^2} + C$

(4) $\int \frac{2x^2-1}{x^2}dx = \int\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)dx = 2x + \frac{1}{x} + C$

(5) $\int \frac{x-2}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \ln x + \frac{2}{x} + C$

(6) $\int \frac{x^2-9}{x}dx = \int\left(x - \frac{9}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 9 \cdot \ln x + C$

(7) $\int \frac{(x-2)^2}{4x}dx = \int \frac{x^2-4x+4}{4x}dx = \int\left(\frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{8}x^2 - x + \ln x + C$

(8) $\int \frac{x^3-8}{2x^2}dx = \int\left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x^2}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{x} + C$

(9) $\int \frac{x^3-8}{4x}dx = \int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{12}x^3 - 2 \cdot \ln x + C$

(10) $\int \frac{x^2+3x-2}{4x}dx = \int\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\ln x + C$

(11) $\int \frac{x^4-8x^2+6}{12x^2}dx = \int\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{36}x^3 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2x} + C$

Aufgabe 416:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(22) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$ (23) $\int \frac{x^2}{(4-x)^2}dx$ (24) $\int \frac{x^2+x-1}{(2x+4)^2}dx$

(25) $\int \frac{x}{x-1}dx$ (26) $\int \frac{2-x}{4x+1}dx$ (27) $\int \frac{(x+2)^2}{2-x}dx$

Lösung:

(22) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$ Substitution: $u = x + 1$, also $du = dx$ und $x = u - 1$

$$= 2\int \frac{u-1}{u^2}du = 2\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du = 2\cdot\left[\ln u+\frac{1}{u}\right]+C = 2\cdot\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}+C$$

(23) $\int \frac{x^2}{(4-x)^2}dx$ Substitution: $u = 4 - x$, $du = -dx$, $dx = -du$, $x = 4 - u$

$$= -\int \frac{(4-u)^2}{u^2}du = -\int \frac{16-8u+u^2}{u^2}du = -\int\left(16\cdot\frac{1}{u^2}-8\cdot\frac{1}{u}+1\right)du =$$

$$= -\left[-\frac{16}{u}-8\cdot\ln u+u\right]+C = \frac{16}{4-x}+8\cdot\ln(4-x)-4+x+C$$

(24) $\int \frac{x^2+x-1}{(2x+4)^2}dx$ Substitution: $u = 2x + 4$, $du = 2\,dx$, $dx = \frac{1}{2}du$, $x = \frac{1}{2}(u-4)$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}(u-4)^2+\frac{1}{2}(u-4)-1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}u^2-2u+4+\frac{1}{2}u-2-1}{u^2}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}u^2-\frac{3}{2}u+1}{u^2}du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{4}u-\frac{3}{2}\ln u-\frac{1}{u}+C\right]$$

$$= \frac{1}{8}(2x+4)-\frac{3}{4}\ln(2x+4)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+4}+C = \frac{1}{4}(x+2)-\frac{3}{4}\ln(2x+4)-\frac{1}{4x+8}+C$$

(25) $\int \frac{x}{x-1}dx$ Substitution: $u = x - 1$, $du = dx$, $dx = du$, $x = u + 1$

$$= \int \frac{u+1}{u}du = \int\left(1+\frac{1}{u}\right)du = u+\ln u+C = x-1+\ln(x-1)+C$$

(26) $\int \frac{2-x}{4x+1}dx$ Substitution: $u = 4x + 1$, $du = 4\,dx$, $dx = \frac{1}{4}du$, $x = \frac{1}{4}(u-1)$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2-\frac{1}{4}(u-1)}{u}du = \frac{1}{4}\int \frac{-\frac{1}{4}u+\frac{9}{4}}{u}du = \frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{u}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}u+\frac{9}{4}\ln u\right]+C = -\frac{1}{16}(4x+1)+\frac{9}{16}\ln(4x+1)+C$$

(27) $\int \frac{(x+2)^2}{2-x}dx$ Substitution: $u = 2 - x$, $du = -dx$, $dx = -du$, $x = 2 - u$

$$= -\int \frac{(2-u+2)^2}{u}du = -\int \frac{(4-u)^2}{u}du = -\int \frac{16-8u+u^2}{u}du = -\int\left(16\cdot\frac{1}{u}-8+u\right)du$$

$$= -\left[16\cdot\ln u-8u+\tfrac{1}{2}u^2\right]+C = -\tfrac{1}{2}(2-x)^2+8(2-x)-16\cdot\ln(2-x)+C$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(4-4x+x^2\right)+16-8x-16\cdot\ln(2-x)+C = -\tfrac{1}{2}x^2-6x+14-16\cdot\ln(2-x)+C$$

Aufgabe 417:

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{16x}{x^2+12}dx \qquad (29)\quad \int \frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}dx \qquad (30)\quad \int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$$

Lösung:

(28) $\int \frac{16x}{x^2+12}dx$ Substitution: $u = x^2 + 12$, $du = 2x\,dx$, $16x\,dx = 8\,du$

$$= \int \frac{8}{u}du = 8\cdot \ln u + C = 8\cdot \ln\left(x^2+12\right)+C$$

(29) $\int \frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}dx$ Substitution: $u = x^2 - 4$, $du = 2x\,dx$, $2x\,dx = du$

$$= \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}+C = -\frac{1}{x^2-4}+C$$

(30) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$ Substitution: $u = x^2 + 2x$, $du = (2x + 2)\,dx$, $(x+1)dx = \tfrac{1}{2}du$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\ln u + C = \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)+C$$

Aufgabe 418:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_1^{25} \frac{3}{x\sqrt{x}}dx$ (2) $\int_1^{4} \frac{4-x}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\int_1^{9} \frac{2x-\sqrt{x}}{x}dx$ (4) $\int_1^{4} \left(\sqrt{x}-2\right)^2 dx$

(5) $\int_{-6}^{0} \sqrt{4-2x}\,dx$ (6) $\int_0^{2} \frac{8}{\sqrt{4x+1}}dx$

(7) $\int_{-3}^{0} \left(2-\sqrt{1-x}\right)dx$ (8) $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)dx$

(9) $\int_0^{4t} x\sqrt{\frac{x}{t}}\,dx$ (10) $\int_4^{10} \sqrt{\frac{x-2}{2}}dx$

Lösung:

(1) $$\int_1^{25}\frac{3}{x\sqrt{x}}dx=3\int_1^{25}x^{-\frac{3}{2}}dx=3\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^{25}=-6\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^{25}=-6\left[\frac{1}{5}-1\right]=-6\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{5}$$

(2) $$\int_1^4\frac{4-x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)dx=\int_1^4(4x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})dx=\left[4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\left[8\sqrt{x}-\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=$$

$$\left[16-\tfrac{2}{3}\cdot 8\right]-\left[8-\tfrac{2}{3}\right]=16-8+\tfrac{2}{3}-\tfrac{16}{3}=8-\tfrac{14}{3}=\tfrac{10}{3}$$

(3) $$\int_1^9\frac{2x-\sqrt{x}}{x}dx=\int_1^9\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^9\left(2-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left[2x-2\sqrt{x}\right]_1^9=$$

$$=[18-6]-[2-2]=12$$

(4) $$\int_1^4\left(\sqrt{x}-2\right)^2dx=\int_1^4\left(x-4\sqrt{x}+4\right)dx=\left[\tfrac{1}{2}x^2-4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+4x\right]_1^4=\left[\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{8}{3}x\sqrt{x}+4x\right]_1^4=$$

$$=\left[8-\tfrac{64}{3}+16\right]-\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{8}{3}+4\right]=20-\tfrac{64}{3}+\tfrac{8}{3}-\tfrac{1}{2}=20-\tfrac{56}{3}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{120-112-3}{6}=\tfrac{5}{6}$$

(5) $$\int_{-6}^{0}\sqrt{4-2x}\,dx$$

Substitution: $u = 4 - 2x$, $du = -2\,dx$, $dx=-\frac{1}{2}du$

$$=-\tfrac{1}{2}\int_{16}^{4}\sqrt{u}\,du=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_4^{16}=\tfrac{1}{3}(64-8)=\tfrac{56}{3}$$

Ab jetzt rechnen wir verkürzt: $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]$

und $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]=\left[2\sqrt{x}\right]=\ldots$

(6) $$\int_0^2\frac{8}{\sqrt{4x+1}}dx$$

Substitution: $u = 4x + 1$, $du = 4\,dx$, $dx=\frac{1}{4}du$

$$=\tfrac{1}{4}\int_1^9\frac{8}{\sqrt{u}}du=2\int_1^9u^{-\frac{1}{2}}du=2\left[2\sqrt{u}\right]_1^9=4(3-1)=8$$

(7) $\int_{-3}^{0}\left(2-\sqrt{1-x}\right)dx$

Substitution: $u = 1 - x,\;\; du = -\,dx,\;\; dx = -du$

$$= [2x]_{-3}^{0} + \int_{4}^{1}\sqrt{u}\,du = 6 + \left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_{4}^{1} = 6 + \tfrac{2}{3} - \tfrac{16}{3} = \tfrac{4}{3}$$

(8) $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)dx = \int_{-1}^{2}\sqrt{x+1}\,dx + \int_{-1}^{2}\sqrt{1-x}\,dx$

Substitutionen: $v = x + 1$ also $dv = dx$
und $u = 1 - x,\;\; du = -\,dx,\;\; dx = -du$

$$= \int_{0}^{2}\sqrt{v}\,dv - \int_{2}^{0}\sqrt{u}\,du = \left[\tfrac{2}{3}v\sqrt{v}\right]_{0}^{2} + \left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_{0}^{2} = 2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}$$

(9) $$\int_{0}^{4t} x\sqrt{\frac{x}{t}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{0}^{4t} x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{0}^{4t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{2}{5}\left[x^2\sqrt{x}\right]_{0}^{4t} = \frac{2}{5\sqrt{t}}\cdot 16t^2\cdot 2\sqrt{t} = \frac{64}{5}t^2$$

(10) $\int_{4}^{10}\sqrt{\frac{x-2}{2}}dx$

Substitution: $u = \dfrac{x-2}{2} \;\Rightarrow\; du = \tfrac{1}{2}dx \;\Rightarrow\; dx = 2du$

$$= 2\int_{1}^{4}\sqrt{u}\,du = 2\left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_{1}^{4} = \tfrac{4}{3}(8-1) = \tfrac{28}{3}$$

Aufgabe 419:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(11) $\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$

(12) $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(13) $\int_{1}^{4} \frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}\,dx$

(14) $\int_{0}^{4} 2x\cdot\sqrt{4-x}\,dx$

(15) $\int_{0}^{r} 2x\sqrt{x^2+5}\,dx$

(16) $\int_{0}^{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

(17) $\int_{3}^{5} x\sqrt{x^2-4}\,dx$

(18) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

Lösung:

(11) $\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$

Bei diesem Integraltyp gibt es 2 verschiedene Lösungswege. Ich substituiere die ganze Wurzel: $u=\sqrt{x+1} \Rightarrow u^2=x+1 \Rightarrow x=u^2-1 \Rightarrow dx=2u\,du$

$$\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx=\int_{0}^{2}(u^2-1)\cdot u\cdot 2u\,du=2\int_{0}^{2}(u^4-u^2)\,du=2\left[\tfrac{1}{5}u^5-\tfrac{1}{3}u^3\right]_0^2$$
$$=2\left(\tfrac{32}{5}-\tfrac{8}{3}\right)=16\left(\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{3}\right)=16\cdot\left(\tfrac{12-5}{15}\right)=\tfrac{16\cdot 7}{15}=\tfrac{112}{15}$$

(12) $$\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int_{1}^{2}\frac{u^2-1}{u}\cdot 2u\,du=2\int_{1}^{2}(u^2-1)\,du=2\left[\tfrac{1}{3}u^3-u\right]_1^2$$
$$=2\left[\tfrac{8}{3}-2\right]-2\left[\tfrac{1}{3}-1\right]=2\left(\tfrac{8}{3}-\tfrac{6}{3}-\tfrac{1}{3}+1\right)=2\left(\tfrac{4}{3}\right)=\tfrac{8}{3}$$

(13) $\int_{1}^{4}\frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}\,dx$

S.: $u=\sqrt{5-x} \Rightarrow u^2=5-x \Rightarrow x=5-u^2 \Rightarrow dx=-2u\,du$

$$=\int_{2}^{1}\frac{2(5-u^2)+1}{u}(-2u\cdot du)=-2\int_{2}^{1}(11-2u^2)\,du=2\left[11u-\tfrac{2}{3}u^3\right]_1^2$$
$$=2\left[22-\tfrac{16}{3}\right]-2\left[11-\tfrac{2}{3}\right]=2\left(22-11-\tfrac{16}{3}+\tfrac{2}{3}\right)=2\left(11-\tfrac{14}{3}\right)=2\cdot\tfrac{19}{3}=\tfrac{38}{3}$$

(14) $\int_0^4 2x\cdot\sqrt{4-x}\,dx$ $\quad\boxed{\text{S.: } u=\sqrt{4-x}\ \Rightarrow\ u^2=4-x\ \Rightarrow\ x=4-u^2\ \Rightarrow\ dx=-2u\,du}$

$$=\int_2^0 (4-u^2)\cdot u\cdot(-2u\,du)=-2\int_2^0 (4u^2-u^4)\,du=2\left[\tfrac{4}{3}u^3-\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^2=$$
$$=2\left[\tfrac{32}{3}-\tfrac{32}{5}\right]-2\cdot 0=64\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)=64\cdot\tfrac{2}{15}=\tfrac{128}{15}$$

(15) $\int_0^r 2x\sqrt{x^2+5}\,dx$ $\quad\boxed{\text{Substitution: } u=x^2+5 \quad u'=2x\,dx\text{, also } 2x\,dx=du}$

$$=\int_5^{r^2+5}\sqrt{u}\cdot du=\left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_5^{r^2+5}=\tfrac{2}{3}(r^2+5)\sqrt{r^2+5}-\tfrac{2}{3}\cdot 5\sqrt{5}$$

(16) $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx$ $\quad\boxed{\text{Substitution: } u=x^2+5 \quad u'=2x\,dx\text{, also } 2x\,dx=du}$

$$=\int_5^9\frac{du}{\sqrt{u}}=\left[2\sqrt{u}\right]_5^9=6-2\sqrt{5}$$

(17) $\int_3^5 x\sqrt{x^2-4}\,dx$ $\quad\boxed{\text{Substitution: } u=x^2-4 \quad u'=2x\,dx\text{, also } x\,dx=\tfrac{1}{2}du}$

$$=\tfrac{1}{2}\int_5^{21}\sqrt{u}\,du=\left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_5^{21}=\tfrac{42}{3}\sqrt{21}-\tfrac{10}{3}\sqrt{5}$$

(18) $$\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int_1^4\frac{\tfrac{1}{2}du}{\sqrt{u}}=\tfrac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^4=\sqrt{4}-\sqrt{1}=2-1=1$$

Aufgabe 420:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,dx$ (2) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos\tfrac{x}{3}\,dx$ (3) $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}3\sin\left(x-\tfrac{1}{3}\pi\right)dx$

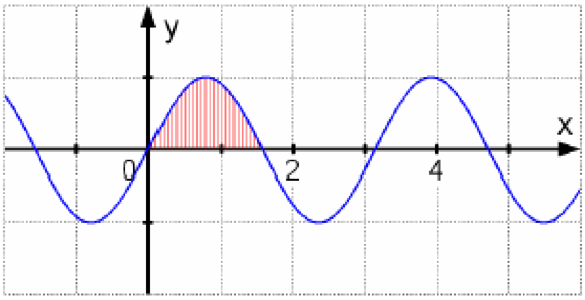
(4) $\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2}2\cos(2-x)\,dx$ (5) $\int_0^{\frac{3}{8}\pi}\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)dx$ (6) $\int_0^{2\pi-2}\left(1+\cos\left(\tfrac{x}{2}+1\right)\right)dx$

(7) $\int_0^2\left(x+\sin(1-x)\right)dx$ (8) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi}\left(2-2\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$

Lösung:

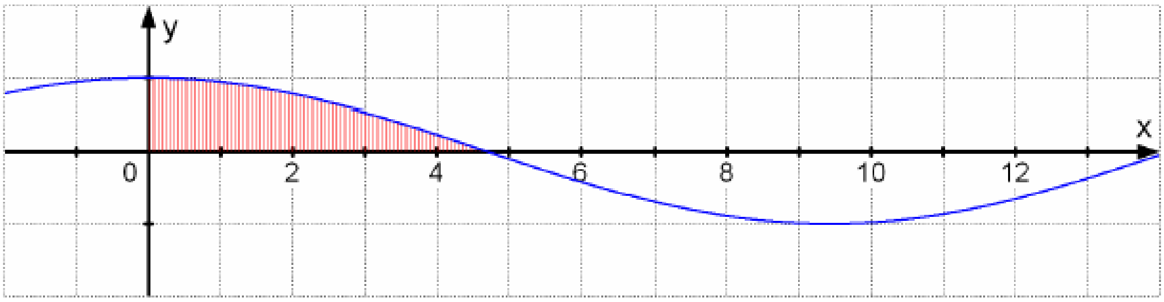
(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$ Substitution: $u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u \, du = -\tfrac{1}{2}[\cos u]_0^{\pi} = -\tfrac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\tfrac{1}{2}(-1-1) = +1$$



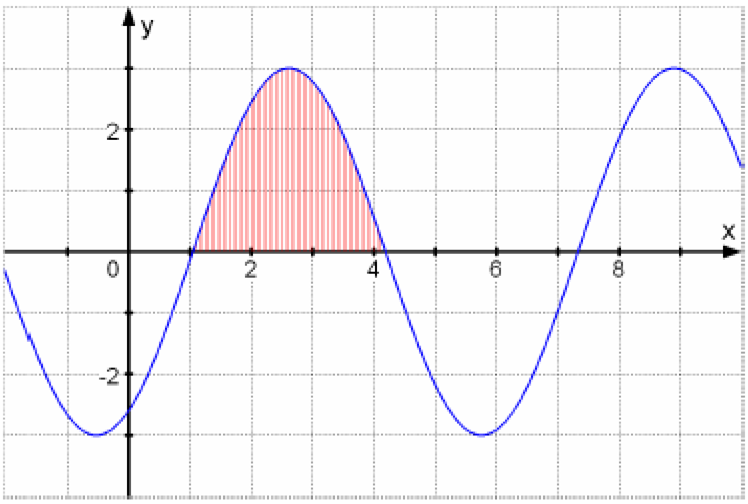
(2) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos\frac{x}{3}dx$ Substitution: $u = \frac{x}{3} \Rightarrow du = \frac{1}{3}\cdot dx \Rightarrow dx = 3du$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 3[\sin x]_0^{\pi/2} = 3(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0) = 3\cdot(1-0) = 3$$



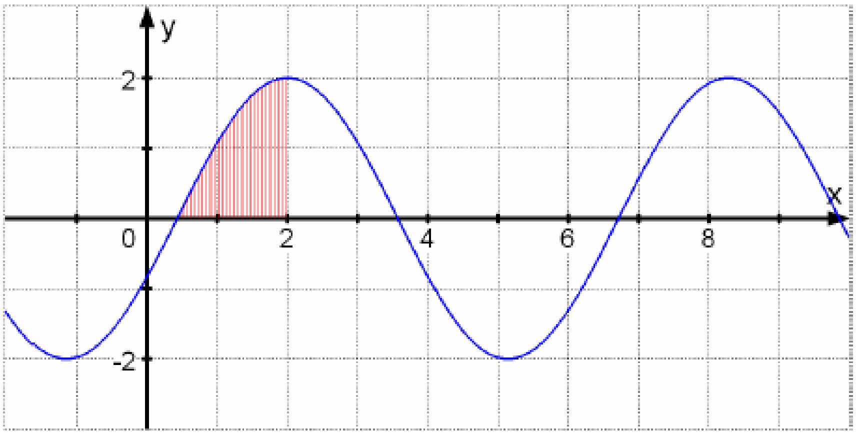
(3) $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} 3\sin(x - \tfrac{1}{3}\pi)dx$ Substitution: $u = x - \frac{1}{3}\pi \Rightarrow du = dx \Rightarrow dx = du$

$$= 3\int_0^{\pi} \sin u \, du = -3[\cos u]_0^{\pi} = -3(\cos\pi - \cos 0) = -3(-1-1) = 6$$



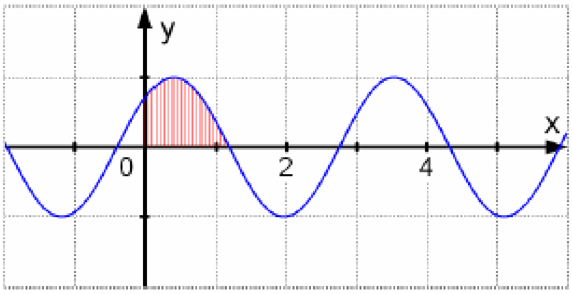
(4) $\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} 2\cos(2-x)\,dx$ Substitution: $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$

$$= -2\int_{\pi/2}^{0} \cos u\,du = -2[\sin u]_{\pi/2}^{0} = -2(\sin 0 - \sin\tfrac{1}{2}\pi) = -2(0-1) = 2$$



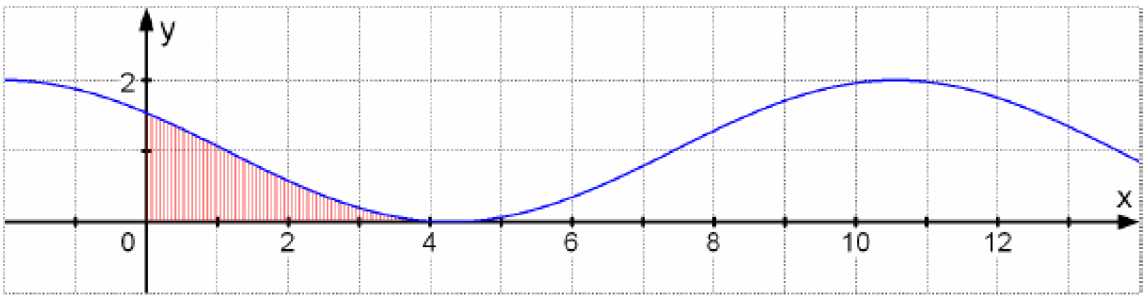
(5) $\int_{0}^{\frac{3}{8}\pi} \sin(2x + \frac{\pi}{4})\,dx$ Substitution: $u = 2x + \frac{1}{4}\pi \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi} \sin u\,du = -\tfrac{1}{2}[\cos u]_{\pi/4}^{\pi} = -\tfrac{1}{2}[\cos\pi - \cos\tfrac{1}{4}\pi] = -\tfrac{1}{2}\left(-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$$



(6) $\int_{0}^{2\pi-2} \left(1+\cos(\frac{x}{2}+1)\right)dx$ Substitution: $u = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2du$

$$= 2\int_{1}^{\pi} (1+\cos u)\,du = 2[u + \sin u]_{1}^{\pi} = 2\cdot\left(\pi + \underbrace{\sin\pi}_{=0} - 1 - \underbrace{\sin 1}_{0{,}841}\right) \approx 2{,}6$$

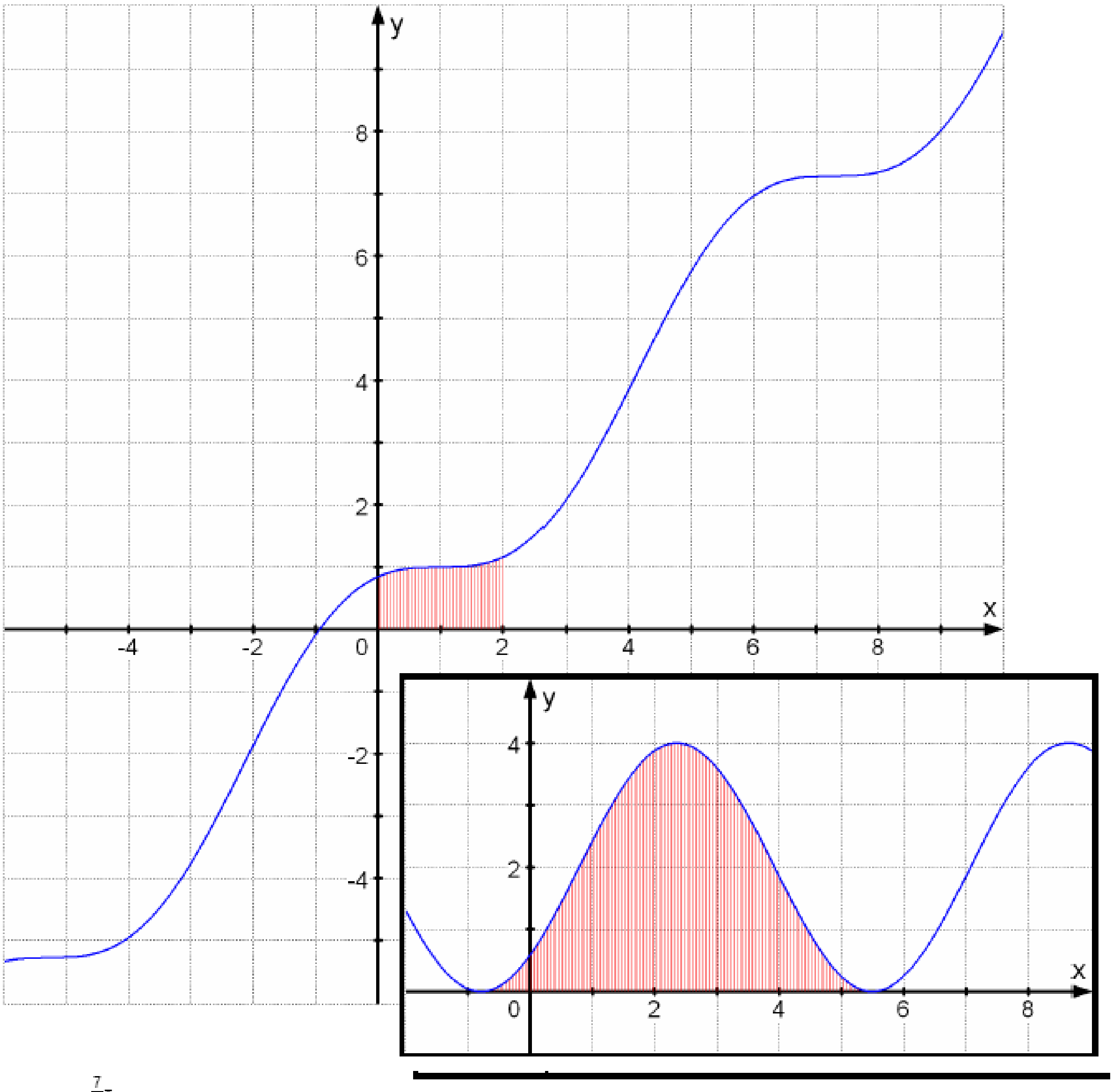


(7) $\int_0^2 (x+\sin(1-x))\,dx$ Substitution: $u=1-x \Rightarrow du=-dx \Rightarrow dx=-du$

$=-\int_1^{-1}(1-u+\sin u)\,du=\left[u-\frac{1}{2}u^2-\cos u\right]_{-1}^{1}=\left[1-\frac{1}{2}-\cos 1\right]-\left[-1-\frac{1}{2}-\cos(-1)\right]$

$=\frac{1}{2}-\cos 1+\frac{3}{2}+\cos(-1)=2$

denn da die Kosinuskurve symmetrisch zur y-Achse ist, folgt cos (-1) = cos 1.



(8) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi}\left(2-2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$ Substitution: $u=\frac{\pi}{4}-x \Rightarrow du=-dx \Rightarrow dx=-du$

$=-\int_{\pi/2}^{-3\pi/2}(2-2\cdot\sin u)\,du=\left[2u+2\cos u\right]_{-3\pi/2}^{\pi/2}=\left[\pi+2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\right]-\left[-3\pi+2\cdot\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right]$

$=4\pi$

Aufgabe 421:

Berechne die Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse.

(1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2+9$

(2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$

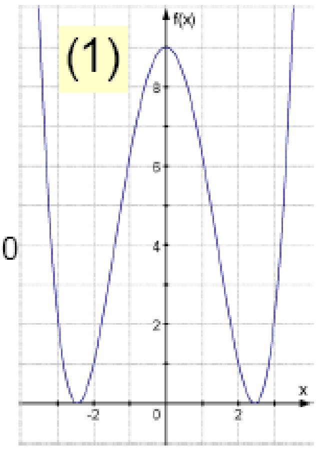
(3) $f(x)=-x^3+x^2+5x+3$

(4) $f_t(x)=\frac{1}{4}x^3-2tx^2+4t^2x$

Lösung:

2.5 Lösungen

Lösung Nr. 1:



Berechne die Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse.

(1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2+9$.

Nullstellenbedingung: $f(x_N)=0$ d.h. $\frac{1}{4}x^4-3x^2+9=0$

Hier liegt eine biquadratische Gleichung vor.

Die allgemeine Gleichung $ax^4+bx^2+c=0$

hat die Lösung $x^2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ d.h. hier

$x^2=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 9}}{\frac{1}{2}}=2\cdot 3\pm 0=6$ d.h. es gibt zwei doppelte Nullstellen $x_N=\pm\sqrt{6}$.

Flächenberechnung: $A=\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx=$ Dieser Ansatz ist umständlich.

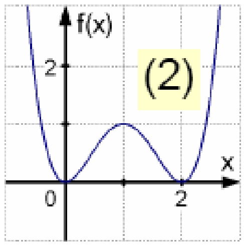
Da die Funktion nur gerade Hochzahlen aufweist, ist das Schaubild K symmetrisch zur y-Achse, die folglich auch die zu berechnende Fläche halbiert. Also berechnen wir nur die Fläche von 0 bis $\sqrt{6}$ und verdoppelt das Ergebnis:

$$A=2\int\limits_0^{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx=2\left[\frac{1}{20}x^5-x^3+9x\right]_0^{\sqrt{6}}=2\left[\frac{1}{20}36\sqrt{6}-6\sqrt{6}+9\sqrt{6}\right]-2[0]$$

$$A=2\sqrt{6}\cdot\left[\frac{9}{5}-6+9\right]=2\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{24}{5}=\frac{48}{5}\sqrt{6}\ \text{(FE.)}$$

Nebenrechnung: $\sqrt{6}^5=\sqrt{6}^2\cdot\sqrt{6}^2\cdot\sqrt{6}=6\cdot 6\cdot\sqrt{6}=36\sqrt{6}$ usw.

Die „künstliche" Maßeinheit FE = Flächeneinheiten bleiben in Zukunft hier weg.



Lösung Nr. 2: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Nullstellenbedingung: $f(x_N) = 0$

d.h. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0$ (1)

1. (sogar doppelte= Lösung: $x_1 = 0$, weitere Lösungen:

$$(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

d.h. auch die 2. Nullstelle ist doppelt: $x = 2$.

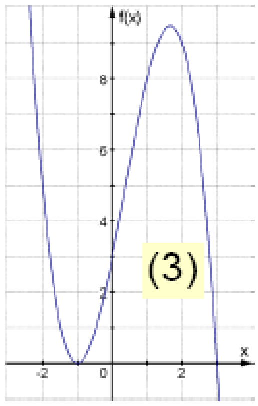
Bemerkung. Den Term $x^2 + 4x + 4$ kann man auch so schreiben kann: $(x+2)^2$,
Dann folgt aus (1) $x^2 \cdot (x-2)^2 = 0$ und man hat sofort die beiden Lösungen.

Flächenberechnung:

$$A = \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5 - x^4 + \tfrac{4}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{1}{5} \cdot 2^5 - 2^4 + \tfrac{4}{3} \cdot 2^3 = 2^4\left(\tfrac{2}{5} - 1 + \tfrac{2}{3}\right)$$

$$A = 16 \cdot \tfrac{6-15+10}{15} = 16 \cdot \tfrac{1}{15} = \tfrac{16}{15}$$

Hinweis: In vielen Aufgaben lohnt es sich, die Potenzen zuerst aufzuschreiben und dann anschließend zur Vereinfachung auszuklammern.



Lösung Nr. 3: $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$

Nullstellenbedingung: $f(x_N) = 0$ d.h.

$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0$. Probierlösung: etwa $x_1 = 3$,
denn $f(3) = -27 + 9 + 15 + 3 = 0$ (oder statt 3 auch - 1).
Dann muß man mittels Horner-Schema oder
Polynomdivision den Faktor $(x - 3)$ Ausklammern:

Polynomdivision:

$$\begin{aligned}
&(-x^3 + x^2 + 5x + 3) : (x-3) = -x^2 - 2x - 1\\
&-(-x^3 - 3x^2)\\
&\qquad -2x^2 + 5x\\
&\quad -(-2x^2 + 6x)\\
&\qquad\qquad -x + 3\\
&\qquad\quad -(-x + 3)\\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

Horner-Schema:

Kooeffizientenschema von f :

	-1	1	5	3
	0	-3	-6	-3
x = 3				
	-1	-2	-1	$\boxed{0}$

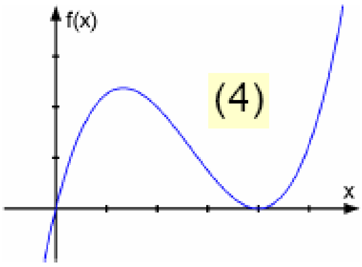
Beide Methoden führen zum Zwischenergebnis $(x - 3)(-x^2 - 2x - 1) = 0$
Die erste Klammer enthält die schon bekannte Lösung $x_1 = 3$. Die weiteren Lösungen folgen aus $-x^2 - 2x - 1 = 0$ d.h.

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Flächenberechnung:

$$A = \int_{-1}^{3} (-x^3 + x^2 + 5x + 3)dx = \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$A = \left[-\tfrac{81}{4} + 9 + \tfrac{45}{2} + 9\right] - \left[-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{2} - 3\right] = -\tfrac{80}{4} + 21 + \tfrac{40}{2} + \tfrac{1}{3} = -20 + 21 + 20 + \tfrac{1}{3} = 21 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{64}{3}$$



Lösung Nr. 4: $f_t(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x$

Nullstellenbedingung: $f(x_N) = 0$ d.h.

$\frac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4}x^2 - 2tx + 4t^2\right) = 0$

$x_1 = 0$ oder $x_{2,3} = \dfrac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} 4t^2}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2t = 4t$

Flächenberechnung:

$$A = \int_0^{4t} \left(\tfrac{1}{4}x^3 - 2tx^2 + 4t^2x\right)dx = \left[\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{2}{3}tx^3 + 2t^2x^2\right]_0^{4t} = \tfrac{1}{16} \cdot 256t^4 - \tfrac{2}{3}t \cdot 64t^3 + 2t^2 \cdot 16t^2$$

$$A = 16t^4 - \tfrac{128}{3}t^4 + 32t^4 = 48t^4 - \tfrac{128}{3}t^4 = \tfrac{144-128}{3}t^4 = \tfrac{16}{3}t^4$$

Aufgabe 422:

Berechne Sie folgende Flächen:

(5) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ Fläche $A(r)$ zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = r. Berechne auch $\lim\limits_{r \to \infty} A(r)$.

(6) $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

(7) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 5 sowie zwischen K, der x-Achse und x = - 6

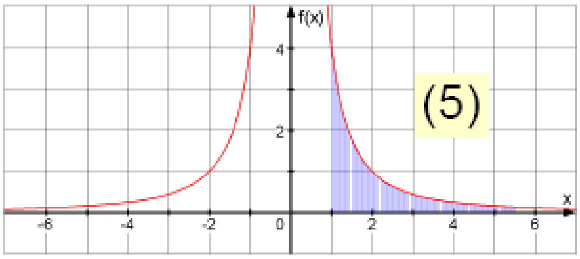
(8) $f(x) = \dfrac{16x}{x^2 + 4}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

Lösung:

Lösung Nr. 5:

$f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

Fläche $A(r)$ zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = r.



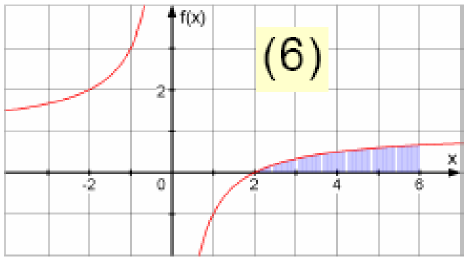
Flächenberechnung:

$$A = \int_1^r 2x^{-2}dx = \left[2\cdot\frac{x^{-1}}{-2}\right]_1^r = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^r = \left[-\frac{2}{r}\right] - [-2] = 2 - \frac{2}{r}$$

$\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = 2$, denn $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{2}{r} = 0$.

Lösung Nr. 6: $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$

Nullstelle: (Zähler = 0 und Nenner $\neq 0$): x = 2.



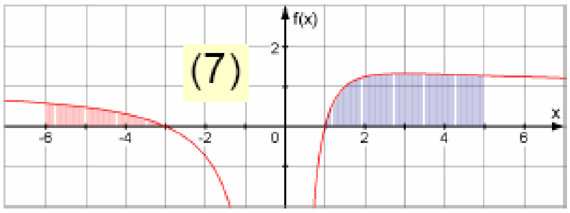
Flächenberechnung:

Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6:

$$A = \int_2^6 \frac{x-2}{x}dx = \int_2^6\left(1 - \frac{2}{x}\right) = [x - 2\cdot\ln x]_2^6 = [6 - 2\cdot\ln 6] - [2 - 2\cdot\ln 2]$$

$$A = 4 - 2\cdot\ln 6 + 2\cdot\ln 2 = 4 - 2\cdot(\ln 6 - \ln 2) = 4 - 2\cdot\ln\frac{6}{2} = 4 - 2\cdot\ln 3 = 4 - \ln 9$$

Lösung Nr. 7: $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$



Nullstellenbedingung: $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases}1\\-3\end{cases}$$

Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 5:

$$A = \int_1^5 \frac{x^2+2x-3}{x^2}dx = \int_1^5\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)dx = \left[x - 2\cdot\ln x + \frac{3}{x}\right]_1^5 =$$

$$A = \left[5 - 2\cdot\ln 5 + \tfrac{3}{5}\right] - [1 - 2\cdot\ln 1 + 3] = \tfrac{8}{5} - 2\cdot\ln 5$$ denn ln 1 = 0.

Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = -6:

$$A = \int_{-6}^{-3} \frac{x^2+2x-3}{x^2}dx = \int_{-6}^{-3}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)dx = \left[x - 2\cdot\ln|x| + \frac{3}{x}\right]_{-6}^{-3} =$$

$$A = [-3 - 2\cdot\ln 3 - 1] - \left[-6 - 2\cdot\ln 6 - \tfrac{1}{2}\right] = -4 - 2\cdot\ln 3 + 6 + 2\cdot\ln 6 + \tfrac{1}{2}$$

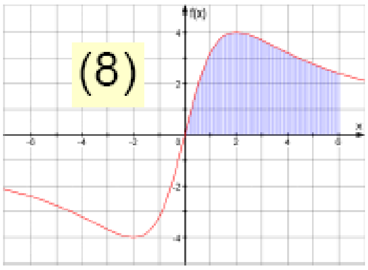
$$A = \tfrac{5}{2} + 2\cdot(\ln 6 - \ln 3) = \tfrac{5}{2} + 2\cdot\ln\frac{6}{3} = \tfrac{5}{2} + 2\cdot\ln 2 = \tfrac{5}{2}\cdot\ln 2^2 = \tfrac{5}{2}\cdot\ln 4$$

Achtung: Man sollte nie vergessen: Nur bei positiven Grenzen a und b kann man den Betrag weglassen!

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{x}dx = \Big[\ \ln|x|\ \Big]_a^b}$$

$f(x)=\sqrt{4-x}$ Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen.

Lösung Nr. 8: $f(x)=\dfrac{16x}{x^2+4}$



Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = 6

$$A=\int_0^6 \frac{16x}{x^2+4}dx$$

Substitution: $u=x^2+4$, also
$du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad 16x\cdot dx=8\cdot du$

$$A=\int_4^{40}\frac{8\cdot du}{u}=8\cdot[\ln u]_4^{40}=8\cdot(\ln 40-\ln 4)=8\cdot\ln\frac{40}{4}=8\cdot\ln 10$$

Aufgabe 423:

Berechnen Sie folgende Flächen:

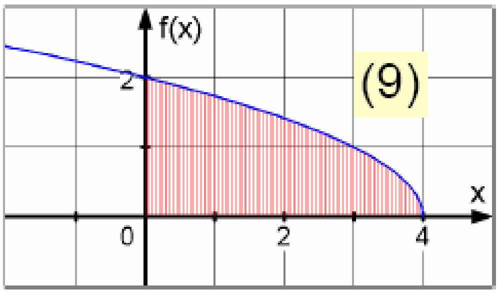
(9) $f(x)=\sqrt{4-x}$ Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen.

(10) $f(x)=x\sqrt{6-x}$ Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

(11) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 5.

(12) $f(x)=(9-x^2)\cdot\sqrt{x}$ Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse

Lösung:



Lösung Nr. 9: $f(x)=\sqrt{4-x}$

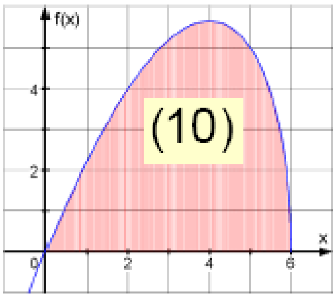
Nullstelle: $x_N = 4$

Fläche zwischen der Kurve und den Koordinatenachsen:

$$A=\int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx$$

Substitution: $u=4-x \Rightarrow du=-dx \Rightarrow dx=-du$

$$A=-\int_4^0 \sqrt{u}du=\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du=\left[\tfrac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\tfrac{2}{3}\left[u\sqrt{u}\right]_0^4=\tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{2}=\tfrac{8}{3}\sqrt{2}$$



Lösung Nr. 10: $f(x)=x\sqrt{6-x}$

Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$

Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

$$A=\int_0^6 x\sqrt{6-x}\,dx$$

Hier muß man gelernt haben, daß es zwei Möglichkeiten zur Substitution gibt: 1. Man setzt u = Radikand = 6 – x oder 2. Man setzt $u=\sqrt{6-x}$, was der bessere Weg ist. Beide Wege hier:

(1) Substitution: $u = 6 - x$ folgt $du = - dx$ und $dx = - du$ sowie $x = 6 - u$.

$$A=-\int_6^0 (6-u)\cdot\sqrt{u}\,du=\int_0^6\left(6u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}}\right)du=\left[6\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_0^6=\left[4u\sqrt{u}-\tfrac{2}{5}u^2\sqrt{u}\right]_0^6$$

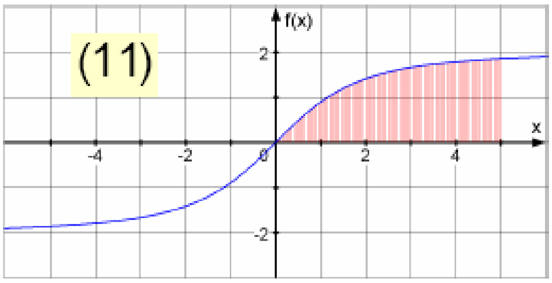
$$A=24\sqrt{6}-\tfrac{2}{5}\cdot 36\sqrt{6}=(24-\tfrac{72}{5})\sqrt{6}=\tfrac{48}{5}\sqrt{6}$$

(2) Substitution: $u=\sqrt{6-x} \Rightarrow u^2=6-x \Rightarrow x=6-u^2 \Rightarrow dx=-2u\cdot du$

$$A=\int_{\sqrt{6}}^0 (6-u^2)\cdot u\cdot(-2u\cdot du)=-2\int_{\sqrt{6}}^0 (6u^2-u^4)du=2\left[2u^3-\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^{\sqrt{6}}$$

$$=2\cdot\left(2\cdot 6\sqrt{6}-\tfrac{1}{5}\cdot 36\cdot\sqrt{6}\right)=2\cdot(12-\tfrac{36}{5})\sqrt{6}=2\cdot\tfrac{24}{5}\sqrt{6}=\tfrac{48}{5}\sqrt{6}\,.$$

Lösung Nr. 11: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$



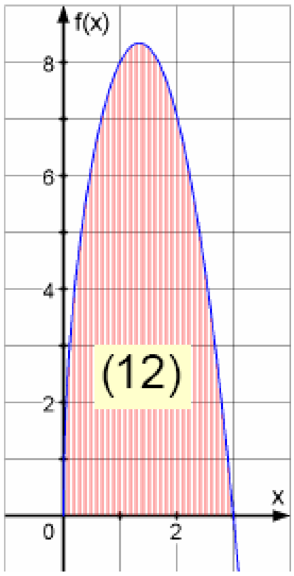
Fläche zwischen K, der x-Achse und $x = 5$.

$$A=\int_0^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \qquad \text{Substitution:}$$

$$u=x^2+4 \Rightarrow du=2x\cdot dx \Rightarrow 2x\cdot dx=du$$

$$A=\int_4^{29}\frac{du}{\sqrt{u}}=\int_4^{29}u^{-\frac{1}{2}}du=\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_4^{29}=\left[2\sqrt{u}\right]_4^{29}=2\sqrt{29}-4$$

Lösung Nr. 12: $f(x)=\left(9-x^2\right)\cdot\sqrt{x}$



Nullstellen: $x_1= 0$ und $x_2 = \pm 3$

Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse

$$A=\int_0^3\left(x^2-9\right)\cdot\sqrt{x}\,dx=\int_0^3\left(x^2\sqrt{x}-9\sqrt{x}\right)dx=\int_0^3\left(x^{\frac{5}{2}}-9x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$A=\left[9\cdot\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^3=\left[6x\sqrt{x}-\tfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}\right]_0^3$$

$$A=6\cdot 3\cdot\sqrt{3}-\tfrac{2}{7}\cdot 27\cdot\sqrt{3}=\left(18-\tfrac{54}{7}\right)\cdot\sqrt{3}=\tfrac{72}{7}\sqrt{3}\approx 17{,}8$$

Aufgabe 424:

(17) $f(x)=\ln(6-x)$ Fläche zwischen K und den Achsen.

(18) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2-\ln(x+1)$ Fläche zwischen K, den Achsen und $x = 3$

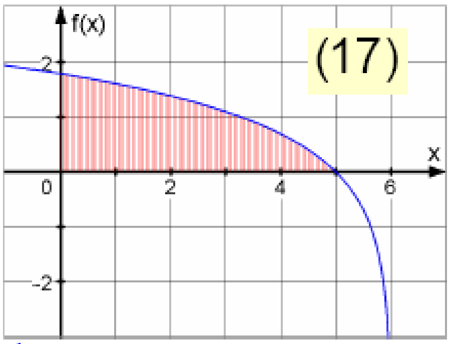
(19) $f(x)=\ln\left(x^2\right)$ Fläche zwischen K, der x-Achse und $x = 3$

(20) $f(x)=\frac{2+4\cdot\ln x}{x}$ Fläche zwischen K, der x-Achse und $x = e^2$

Lösung:

Lösung Nr. 17: $f(x)=\ln(6-x)$

Nullstelle: Bed: Argument = 1: 6 - x = 1
Also $x_n = 5$



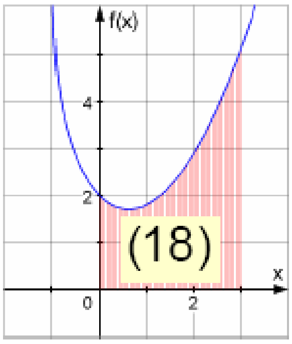
Fläche zwischen K und den Achsen.

$$A=\int_0^5 \ln(6-x)dx$$

Substitution: $u=6-x \Rightarrow du=-dx \Rightarrow dx=-du$

$$A=\int_0^5 \ln(6-x)dx=-\int_6^1 \ln u\,du=[u\cdot\ln u-u]_1^6=6\cdot\ln 6-6-1\cdot\ln 1+1=6\cdot\ln 6-5$$

Lösung Nr. 18: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2-\ln(x+1)$



Fläche zwischen K, den Achsen und x = 3

$$A=\int_0^3\left(\tfrac{1}{2}x^2+2-\ln(x+1)\right)dx=\int_0^3\left(\tfrac{1}{2}x^2+2\right)dx-\int_0^3\ln(x+1)du=$$

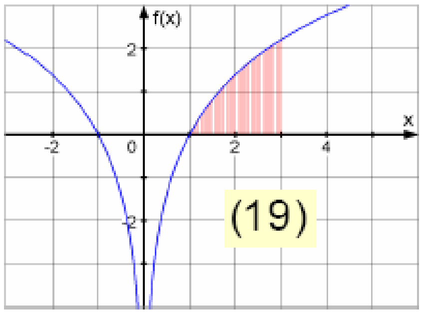
Substitution des 2. Teilintegrals: $u=x+1 \Rightarrow du=dx$

$$A=\left[\tfrac{1}{6}x^3+2x\right]_0^3-\int_1^4 \ln u\,du=\left[\tfrac{1}{6}x^3+2x\right]_0^3-[u\cdot\ln u-u]_1^4=$$

$$A=\tfrac{1}{6}\cdot 27+6-[4\cdot\ln 4-4]+[1\cdot\ln 1-1]=\tfrac{9}{2}+6-\ln 64+4-1=\tfrac{27}{2}-\ln 64\approx 9{,}34$$

Lösung Nr. 19: $f(x)=\ln(x^2)$

Nullstellen: $x^2 = 1$ d.h. $x_N=\pm 1$

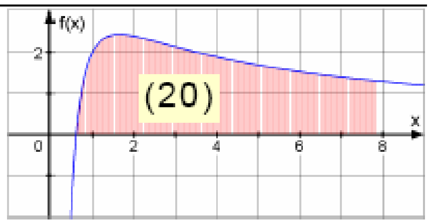


Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 3

$$A=\int_1^3\ln(x^2)dx=\int_1^3 2\cdot\ln x\,dx=2[x\cdot\ln x-x]_1^3$$

$$A=2[3\cdot\ln 3-3]-2\left[1\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0}-1\right]=6\cdot\ln 3-6+2=6\cdot\ln 3-4$$

Lösung Nr. 20: $f(x)=\dfrac{2+4\cdot\ln x}{x}$



Nullstelle: $4\cdot\ln x=-2 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_N=e^{-\frac{1}{2}}$

Fläche zwischen K, der x-Achse und $x = e^2$

$$A=\int_{e^{-\frac{1}{2}}}^{e^2}\frac{2+4\cdot\ln x}{x}dx \quad \text{Subst.: } u=2+4\cdot\ln x \Rightarrow du=\frac{4}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}du$$

$$A=\tfrac{1}{4}\int_0^{10}u\cdot du=\tfrac{1}{8}\left[u^2\right]_0^{10}=\tfrac{1}{8}100=12{,}5$$

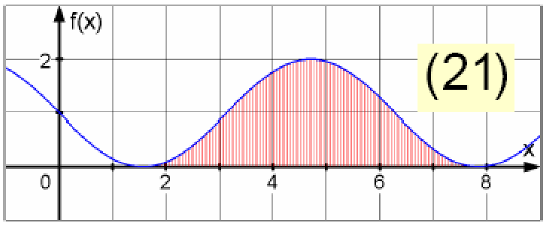
Aufgabe 425:

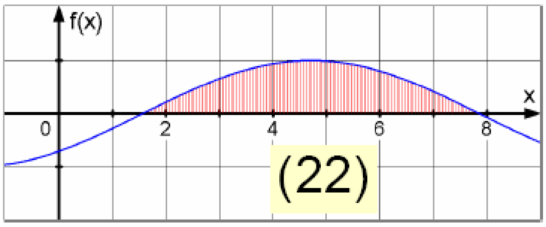
(21) $f(x) = 1 - \sin x$ Fläche siehe Abbildung.

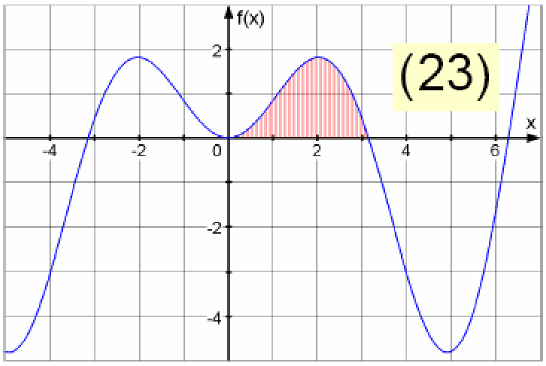
(22) $f(x) = -\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ Fläche siehe Abbildung.

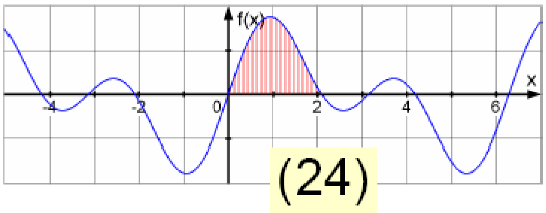
(23) $f(x) = x \cdot \sin x$ Fläche siehe Abbildung.

(24) $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ Fläche siehe Abbildung.



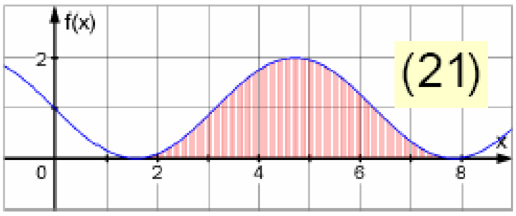






Lösung:

Lösung Nr. 21: $f(x) = 1 - \sin x$

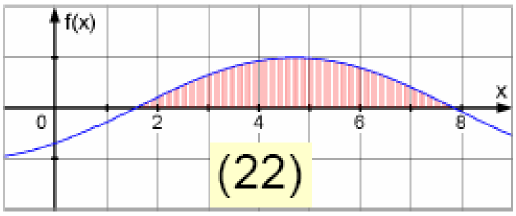


Nullstellen: $\sin x = 1$ d.h. $x_1 = \frac{1}{2}\pi$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$

Fläche siehe Abbildung.

$$A = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} [1 - \sin x]\, dx = [x + \cos x]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{3}{2}\pi + \underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{=0} - \frac{1}{2}\pi - \underbrace{\cos\frac{1}{2}\pi}_{=0} = \pi$$

Lösung Nr. 22: $f(x) = -\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$



Die Nullstellen der Kosinus-Funktion liegen bei $\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$

d.h. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\pi$

und $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}\pi \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}\pi$

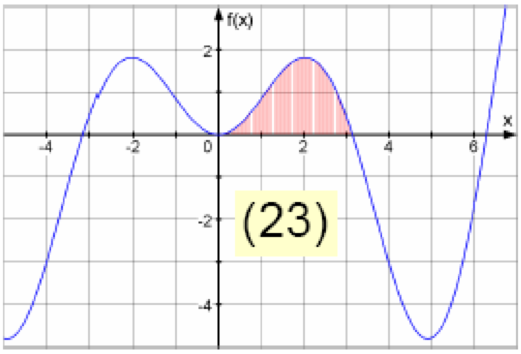
Fläche siehe Abbildung.

$$A = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos(\tfrac{x}{2} + \tfrac{\pi}{4})dx$$

Substitution: $u = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2 \cdot du$

$$A = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos u\, du = [\sin u]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \sin\tfrac{1}{2}\pi - \sin\tfrac{3}{2}\pi = 1 - (-1) = 2$$

Lösung Nr. 23: $f(x) = x \cdot \sin x$



Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ usw.

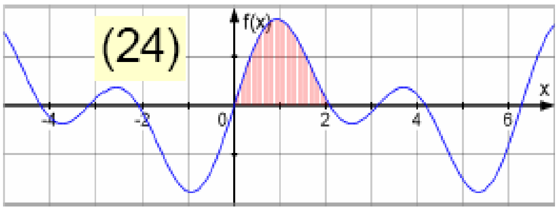
Fläche siehe Abbildung.

$$A = \int_0^\pi x \cdot \sin x\, dx$$

Partielle Integration: $u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$$A = \int_0^\pi x \cdot \sin x\, dx = [-x \cdot \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = [-x \cdot \cos x + \sin x]_0^\pi = \left[-\pi \cdot \cos\pi + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\right] = \pi$$



Lösung Nr. 24: $f(x) = \sin x + \sin(2x)$

Da $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$ folgt:

$f(x) = \sin x + 2\sin x \cdot \cos x$

Nullstellen: $\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$

$\sin x \cdot (1 + 2\cos x) = 0$ d.h. $\sin x = 0$ oder $\cos x = -\frac{1}{2}$

Daraus folgen die für diese Fläche relevanten Nullstellen:

$x_1 = 0$ und $x_1 = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

Fläche siehe Abbildung.

$$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x + \sin(2x))dx = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin x\, dx + \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin(2x)dx$$

Substitution des 2. Integrals: $u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$A = -[\cos x]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin u\, du = -[\cos x]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \frac{1}{2}[\cos u]_0^{2\pi}$$

$$A = -\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + cos0) - \frac{1}{2}cos\left(2 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2}\cos(0) = +\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

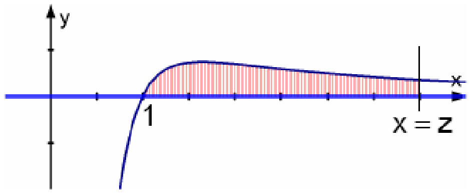
Aufgabe 426:

(11) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$,

Zeige, daß das Schaubild K zusammen mit der x-Achse im 1. Feld eine bis ins Unendliche reichende Fläche mit endlichem Inhalt begrenzt.

Lösung:

(11) $f(x)=\frac{\ln x^2}{x^2}$,



Zeige, daß das Schaubild K zusammen mit der x-Achse im 1. Feld eine bis ins Unendliche reichende Fläche mit endlichem Inhalt begrenzt.

Lösung: Wir stellen die Flächeninhaltsfunktion auf:

$$A(z)=\int_1^z \frac{\ln x^2}{x^2}dx=\int_1^z \frac{2}{x^2}\cdot \ln x\, dx$$

Partielle Integration: $u'=2x^{-2} \Rightarrow u=2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{2}{x}$

$v=\ln x \Rightarrow v'(x)=\frac{1}{x}$

$$A(z)=[u\cdot v]_1^z-\int_1^z u\cdot v'dx=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]_1^z-\int_1^z -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}dx=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]+2\int_1^z x^{-2}\,dx$$

$$A(z)=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]_1^z+2\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^z=\left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x-\frac{2}{x}\right]_1^z=\left[-\frac{2}{x}\cdot(\ln x+1)\right]_1^z$$

$$A(z)=\left[-\frac{2}{z}(\ln z+1)\right]-\left[-2\cdot\left(\underbrace{\ln 1}_{0}+1\right)\right]=-\frac{2}{z}\cdot(\ln z+1)+2$$

$$\lim_{x\to\infty}A(z)=2-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln z}{z}=2-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{z}}{1}=2-2\cdot 0=2$$

wobei die Regel von de L'Hospital zur Anwendung gekommen ist.

Aufgabe 427:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x\cdot\cos x\, dx$$

Lösung:

Partielle Integration.

$$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$$

$$v = \cos x \quad \Rightarrow \quad v' = -\sin x$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

Nächste partielle Integration:

$$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$$

$$v = \sin x \quad \Rightarrow \quad v' = \cos x$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

Zusammengesetzt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

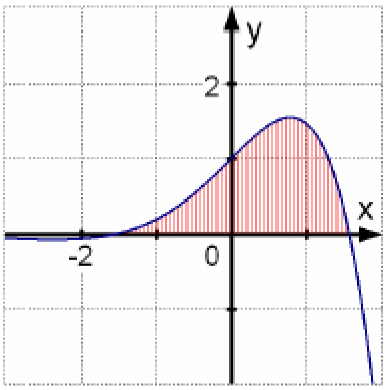
$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

Also folgt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}\left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{\pi/2}\left(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}\right) - e^{-\pi/2}\left(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) \approx 2{,}51$$



Aufgabe 428:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx$$

Lösung:

Partielle Integration:

$u' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = -e^{-x}$

$v = \sin(2x) \quad \Rightarrow \quad v' = 2 \cdot \cos(2x)$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \cos(2x)dx$$

Nächste partielle Integration:

$u' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u = -e^{-x}$

$v = \cos(2x) \quad \Rightarrow \quad v' = -2 \cdot \sin(2x)$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \cos(2x)dx = \left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - 2\int e^{-x} \cdot \sin(2x)dx$$

Zusammengesetzt:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2\left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin(2x)dx$$

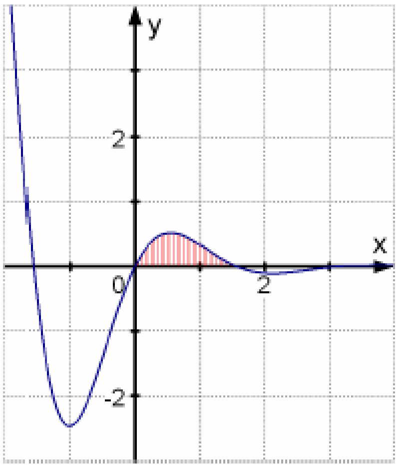
$$5\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + 2\left[-e^{-x} \cdot \cos(2x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \tfrac{1}{5}\left[-e^{-x} \cdot \sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cdot \sin 2x \, dx = \tfrac{1}{5}\left[-e^{-x} \cdot \left(\sin(2x) + 2\cos(2x)\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{1}{5}\left[-e^{-\pi/2} \cdot \left(\underbrace{\sin\pi}_{0} + 2 \cdot \underbrace{\cos\pi}_{-1}\right)\right] - \tfrac{1}{5}\left[-e^{0} \cdot \left(\underbrace{\sin 0}_{0} + 2 \cdot \underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{5}\left[2e^{-\pi/2}\right] - \tfrac{1}{5}\left[-1 \cdot (0+2)\right] = \tfrac{2}{5} \cdot e^{-\pi/2} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{5} \cdot \left(1 + e^{-\pi/2}\right) \approx 0{,}48$$



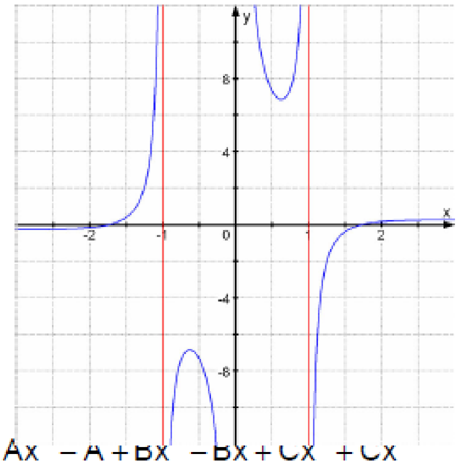
Aufgabe 429:

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2 - 3}{x^3 - x} dx$$

Lösung

(3) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}\,dx$



Nullstellen des Nenners: 0, 1 und – 1 , denn
$x^3 - x = x\left(x^2-1\right) = x\left(x+1\right)\left(x-1\right)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Hauptnennerform der rechten Seite:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A\left(x^2-1\right)+Bx\left(x-1\right)+Cx\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + Cx}{x^3-x}$$

Also folgt: $\frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-B+C)x - A}{x^3-x}$

Koeffizientenvergleich der Zähler:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \qquad (1)\\ -B+C &= 0 \qquad (2)\\ -A &= -3 \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt: A = 3 . Setzt man dies in (1) ein, folgt

$$B + C = -2 \qquad (4)$$

Addition von (2) und (4) liefert $2C = -2 \Rightarrow C = -1$

Aus (2) folgt schließlich $B = C = -1$

Ergebnis: $f\left(x\right) = \frac{x^2-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

Berechnung des Integrals: $A = \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{x^2-3}{x^3-x}dx = 3\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x}dx - \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x-1}dx - \int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x+1}dx$

Substitution für das 2. Integral: $u = x-1 \Rightarrow du = dx$
Substitution für das 3. Integral: $v = x+1 \Rightarrow dv = dx$

$$A = 3\int\limits_{\sqrt{3}}^{5} \frac{1}{x}dx - \int\limits_{\sqrt{3}-1}^{4} \frac{1}{u}du - \int\limits_{\sqrt{3}+1}^{6} \frac{1}{v}dv = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln u\right]_{\sqrt{3}-1}^{4} - \left[\ln v\right]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3\ln 5 - 3\ln\sqrt{3} - \ln 4 + \ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln 6 + \ln\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Wegen $\ln\left(\sqrt{3}-1\right) + \ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln\left(3-1\right) = \ln 2$ folgt

$$A = 3\cdot\ln 5 - 3\cdot\ln\sqrt{3} - \ln 24 + \ln 2 = 3\cdot\ln\frac{5}{\sqrt{3}} - \ln 12 \approx 0{,}7$$

Hinweis: Wenn man das Verfahren der Rücksubstitution anwendet, dann verläuft die Rechnung so:

$$A = 3\int_{\sqrt{3}}^{5}\frac{1}{x}dx - \int_{\sqrt{3}-1}^{4}\frac{1}{u}du - \int_{\sqrt{3}+1}^{6}\frac{1}{v}dv = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln u\right]_{\sqrt{3}-1}^{4} - \left[\ln v\right]_{\sqrt{3}+1}^{6}$$

$$A = 3\left[\ln x\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln(x-1)\right]_{\sqrt{3}}^{5} - \left[\ln(x+1)\right]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}\right]_{\sqrt{3}}^{5} = \left[\ln\frac{x^3}{x^2-1}\right]_{\sqrt{3}}^{5}$$

$$A = \ln\frac{125}{24} - \ln\frac{3\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{125}{24}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} = \ln\frac{125}{36\sqrt{3}} \approx 0{,}7$$

Dieses Verfahren ist dann anzuwenden, wenn nur die Stammfunktion, also das unbestimmte Integral gesucht ist, bei dem man ja ohne Grenzen arbeitet.

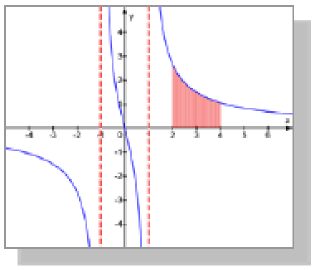
Aufgabe 430:

Berechnen Sie folgende Integrale.

(1) $\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{4x}{x^2-1}dx$ (2) $\displaystyle\int_{2}^{0}\frac{4}{x^2-2x-8}dx$ (3) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\frac{2-x}{x^2+4x}dx$

Lösung:

(1) $f(x) = \frac{4x}{x^2-1} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$



Gesucht: $A = \displaystyle\int_{2}^{4}\frac{4x}{x^2-1}dx$

Partialbruchzerlegung:

Ansatz: $\frac{4x}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \quad | \cdot (x-1)(x+1)$

$4x = a\cdot(x+1) + b\cdot(x-1)$

$x=1$ eingesetzt: $4\cdot\boxed{1} = a\cdot(\boxed{1}+1) + b\cdot(\boxed{1}-1) \Leftrightarrow 4 = 2a \Leftrightarrow a = 2$

$x=-1$ eingesetzt: $4\cdot\boxed{-1} = a\cdot(\boxed{-1}+1) + b\cdot(-\boxed{1}-1) \Leftrightarrow -4 = -2b \Leftrightarrow b = 2$

Ergebnis: $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$

Fortsetzung der Flächenberechnung:

$$A = \int_{2}^{4}\frac{4x}{x^2-1}dx = \int_{2}^{4}\frac{2}{x-1}dx + \int_{2}^{4}\frac{2}{x+1}dx$$

1. Schnellberechnung:

$$A = 2\cdot\left[\ln|x-1|\right]_{2}^{4} + 2\cdot\left[\ln|x+1|\right]_{2}^{4} = 2\cdot(\ln 3 - \ln 1) + 2\cdot(\ln 5 - \ln 3) = 2\cdot\ln 3 + 2\cdot\ln 5 - 2\cdot\ln 3 = 2\cdot\ln 5$$

2. <u>Ausführliche Berechnung mittels Substitutionen:</u>

$\int_2^4 \frac{2}{x-1}dx$ Substitution: $u = x-1 \Rightarrow du = dx$

Grenzen umrechnen: $x=2 \Rightarrow u=1$ und $x=4 \Rightarrow u=3$

$$\int_2^4 \frac{2}{x-1}dx = 2\int_1^3 \frac{1}{u}du = 2\cdot\left[\ln|u|\right]_1^3 = 2\cdot(\ln 3 - \ln 1) = 2\cdot\ln 3$$

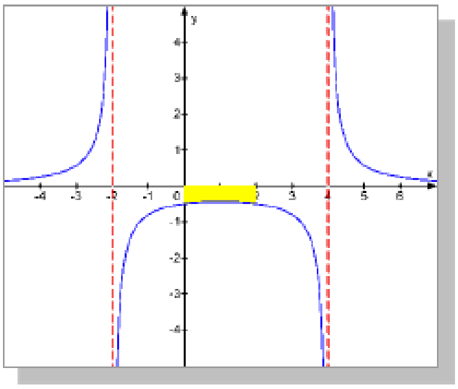
$\int_2^4 \frac{2}{x+1}dx$ Substitution: $v = x+1 \Rightarrow dv = dx$

Grenzen umrechnen: $x=2 \Rightarrow v=3$ und $x=4 \Rightarrow v=5$

$$\int_2^4 \frac{2}{x+1}dx = 2\int_3^5 \frac{1}{v}dv = 2\cdot\left[\ln|v|\right]_3^5 = 2\cdot(\ln 5 - \ln 3) = 2\cdot\ln 5 - 2\cdot\ln 3$$

Zusammenfassen: $A = 2\cdot\ln 3 + 2\cdot\ln 5 - 2\cdot\ln 3 = 2\cdot\ln 5 \approx 3{,}22$

(2) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 2x - 8}$



Nullstellen des Nenners:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Zerlegung des Nenners: $(x+2)(x-4)$

Flächenberechnung:

$$\boxed{A = -\int_0^2 \frac{4}{x^2 - 2x - 8}\,dx = \int_2^0 \frac{4}{(x+2)(x-4)}\,dx}$$

Partialbruchzerlegung:

Ansatz: $\dfrac{4}{(x+2)(x-4)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-4} \quad | \cdot (x-4)(x+2)$

$$4 = a \cdot (x-4) + b \cdot (x+2)$$

$x = -2$ eingesetzt: $4 = a \cdot (\boxed{-2} - 4) + b \cdot (\boxed{-2} + 2) \quad \Leftrightarrow \quad 4 = -6a \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{2}{3}$

$x = 4$ eingesetzt: $4 = a \cdot (\boxed{4} - 4) + b \cdot (4+2) \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 6b \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{2}{3}$

Ergebnis: $f(x) = \dfrac{4}{(x+2)(x-4)} = -\dfrac{\frac{2}{3}}{x+2} + \dfrac{\frac{2}{3}}{x-4}$

Fortsetzung der Flächenberechnung:

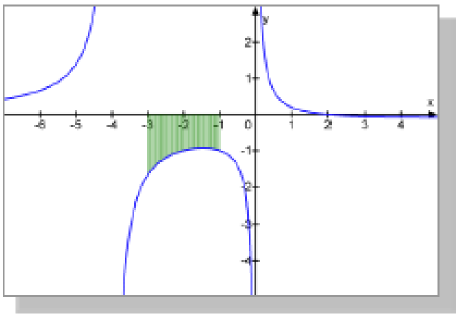
$$A = \int_2^0 \frac{4}{(x+2)(x-4)}\,dx = \int_2^0 \left(-\frac{\frac{2}{3}}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-4} \right) dx = -\frac{2}{3}\int_2^0 \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{2}{3}\int_2^0 \frac{1}{x-4}\,dx$$

Schnellberechnung ohne Substitution:

$$A = -\tfrac{2}{3} \cdot \left[\ln|x+2|\right]_2^0 + \tfrac{2}{3}\left[\ln|x-4|\right]_2^0 = -\tfrac{2}{3} \cdot (\ln 2 - \ln 4) + \tfrac{2}{3}(\ln 4 - \ln 2) = \tfrac{2}{3}(-\ln 2 + \ln 4 + \ln 4 - \ln 2)$$

$$A = \tfrac{2}{3}(2 \cdot \ln 4 - 2 \cdot \ln 2) = \tfrac{2}{3}(\ln 16 - \ln 4) = \tfrac{2}{3} \cdot \ln \tfrac{16}{4} = \tfrac{2}{3} \cdot \ln 4 \approx 0{,}924$$

(3) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+4x}$



Gesucht: $\boxed{A=-\int_{-3}^{-1}\dfrac{2-x}{x(x+4)}dx}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{2-x}{x(x+4)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+4}$ (1)

(1) mit $x\cdot x+4$ multiplizieren:

$$2-x=a\cdot(x+4)+b\cdot x$$

$x=0$ eingesetzt: $2-\boxed{0}=a\cdot(\boxed{0}+4)+b\cdot\boxed{0} \Leftrightarrow 2=4a \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

$x=-4$ eingesetzt: $2-\boxed{-4}=a\cdot(\boxed{-4}+4)+b\cdot\boxed{-4} \Leftrightarrow 6=-4b \Leftrightarrow b=-\frac{3}{2}$

Ergebnis: $f(x)=\dfrac{2}{x(x+4)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}-\dfrac{\frac{3}{2}}{x+4}$

Berechnung des Integrals:

$$A=-\int_{-3}^{-1}\frac{2-x}{x(x+4)}dx=\int_{-1}^{-3}\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}-\frac{\frac{3}{2}}{x+4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{-3}\left(\frac{1}{x}\right)dx-\frac{3}{2}\cdot\int_{-1}^{-3}\frac{1}{x+4}dx$$

<u>Schnellberechnung ohne Substitution:</u>

$$A=\tfrac{1}{2}\cdot\left[\ln|x|\right]_{-1}^{-3}-\tfrac{3}{2}\cdot\left[\ln|x+4|\right]_{-1}^{-3}$$

$$A=\tfrac{1}{2}\cdot(\ln 3-\ln 1)-\tfrac{3}{2}\cdot(\ln 1-\ln 3)=\tfrac{1}{2}\cdot\ln 3+\tfrac{3}{2}\cdot\ln 3=2\cdot\ln 3$$

Denn ln 1 = 0.

Aufgabe 431:

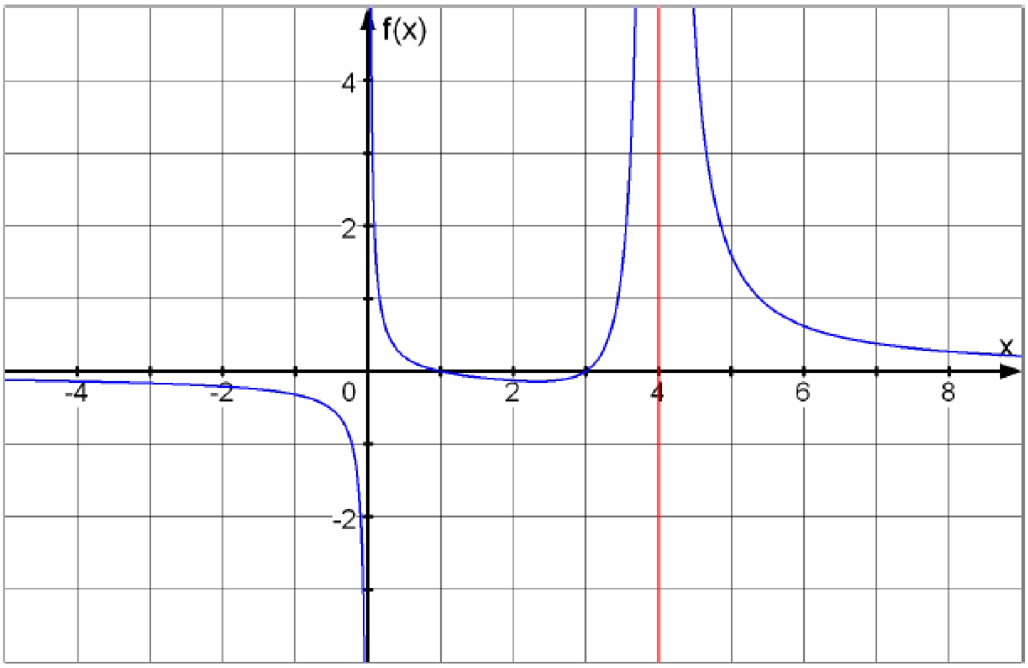
Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}$$

Lösung:

(6) $$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+16x}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2-8x+16)}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-4)^2}$$

Gesucht ist die Fläche, die K und die x-Achse zwischen 1 und 3 begrenzen.



Lösung: $$A=-\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^1\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}dx$$

Die jetzt erforderliche Partialbruchzerlegung klappt nur mit diesem Ansatz:

$$\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

Warum ? Sagen wir doch einfach – das Ergebnis rechtfertigt dieses Mittel.
(Da der linke Zähler 3 Summanden hat, benötigen wir rechts 3 Brüche mit den Zählern A, B und C; sonst ist ein Koeffizientenvergleich nicht möglich!)
Man sollte in einem solchen Fall immer einen vergleichbaren Ansatz machen !
Nun bringen wir die rechte Seite auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}=\frac{A(x-4)^2+Bx(x-4)+Cx}{x\cdot(x-4)^2}=\frac{A(x^2-8x+16)+B(x^2-4x)+Cx}{x\cdot(x-4)^2}$$

Daraus folgt $$\frac{x^2-4x+3}{x(x-4)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-8A-4B+C)x+16A}{x(x-4)^2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$A + B = 1 \qquad (1)$$
$$-8A - 4B + C = -4 \qquad (2)$$
$$16A = 3 \;\Rightarrow\; A = \tfrac{3}{16}$$
$$A \text{ in } (1): \quad B = 1 - \tfrac{3}{16} = \tfrac{13}{16}$$
$$A, B \text{ in } (2): \quad -8 \cdot \tfrac{3}{16} - 4 \cdot \tfrac{13}{16} + C = -4$$
$$-\tfrac{3}{2} - \tfrac{13}{4} + C = -4 \;\Rightarrow\; C = -4 + \tfrac{19}{4} = \tfrac{3}{4}$$

Ergebnis:
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-4)^2} = \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{13}{16}}{x-4} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2}$$

<u>**Berechnung des Flächeninhaltes**</u>:

$$A = -\int_1^3 f(x)\,dx = \int_3^1 \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-4)^2}\,dx = \int_3^1 \left(\frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{13}{16}}{x-4} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-4)^2} \right) dx =$$
$$A = \tfrac{3}{16}\int_3^1 \frac{1}{x}\,dx + \tfrac{13}{16}\int_3^1 \frac{1}{x-4}\,dx + \tfrac{3}{4}\int_3^1 \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$$

Substitution: $u = x - 4 \;\Rightarrow\; du = dx$

$$A = \tfrac{3}{16}\int_3^1 \frac{1}{x}\,dx + \tfrac{13}{16}\int_{-1}^{-3} \frac{1}{u}\,du + \tfrac{3}{4}\int_{-1}^{-3} \frac{1}{u^2}\,du = \tfrac{3}{16}\left[\ln|x|\right]_3^1 + \tfrac{13}{16}\left[\ln|u|\right]_{-1}^{-3} + \tfrac{3}{4}\cdot\left[-\tfrac{1}{u}\right]_{-1}^{-3}$$
$$A = \tfrac{3}{16}(0 - \ln 3) + \tfrac{13}{16}(\ln 3 - 0) + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = -\tfrac{3}{16}\ln 3 + \tfrac{13}{16}\ln 3 + \tfrac{3}{4}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)$$
$$A = \tfrac{10}{16}\ln 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8}\cdot\ln 3 - \tfrac{1}{2} \approx 0{,}19$$

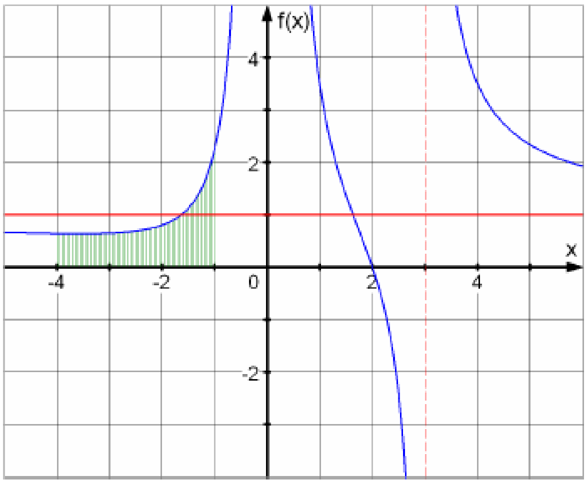
Aufgabe 432:

Berechnen Sie die Stammfunktion F(x) von f(x).

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2}$$

Lösung:

(8) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\dfrac{x^3-8}{x^2(x-3)}$



Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und den Geraden x=-1 und x = - 4:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx$$

Zuerst müssen wir den Funktionsterm so zerlegen, daß der ganzrationale Anteil herausgezogen wird und ein echter Bruch (mit Grad Z < Grad N) übrig bleibt. Dies geht entweder trickreich so:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2}{x^3-3x^2}+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

oder man erreicht dasselbe Ergebnis via Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^3+0x^2-8):(x^3-3x^2)=1\\ \underline{-(x^3-3x^2)}\\ \qquad 3x^2-8\end{array} \qquad \Rightarrow f(x)=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

Nun muß man für den Restbruch die **besondere Partialbruchzerlegung** an, die dann eingesetzt wird, wenn wie hier eine doppelte und eine einfache Polstelle auftauchen.

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B)-3B}{x^2(x-3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dieses Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A+C&=3 \quad &(1)\\ -3A+B&=0 \quad &(2)\\ -3B&=-8 \Rightarrow B=\tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{B in (2) ergibt } 3A=B=\tfrac{8}{3} \Rightarrow A=\tfrac{8}{9}$$

$$\text{A in (1): } C=3-A=3-\tfrac{8}{9}=\tfrac{19}{9}$$

Ergebnis: $$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

Somit haben wir jetzt $$f(x)=1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$$

<u>Berechnung der Fläche</u>:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx=\int_{-4}^{-1}\left(1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}\right)dx=\left[x+\tfrac{8}{9}\ln|x|-\tfrac{8}{3x}+\tfrac{19}{9}\ln|x-3|\right]_{-4}^{-1}$$

(Der letzte Term wurde mit Substitution u = x -3 und folgender Rücksubstitution integriert).

$$A=-1+4+\tfrac{8}{9}\underbrace{\ln 1}_{=0}-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{8}{3}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{19}{9}\ln 4-\tfrac{19}{9}\ln 7=5-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{19}{9}\ln\tfrac{4}{7}\approx 2{,}59$$

Aufgabe 433:

Berechnen Sie folgende Integrale:

(1) $\int\limits_2^5 \frac{x^2-4}{(x+1)^2}dx$ (2) $\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx$

(3) $\int\limits_0^4 2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ (4) $\int\limits_{-1}^0 4x^2\cdot\ln(x+2)dx$

Lösung:

(1) $\int\limits_2^5 \frac{x^2-4}{(x+1)^2}dx$ Substitution: $u=x+1 \Rightarrow du=dx$ und $x = u - 1$

$$= \int\limits_3^6 \frac{(u-1)^2-4}{u^2}du = \int\limits_3^6 \frac{u^2-2u-3}{u^2}du = \int\limits_3^6 \left(1-\frac{2}{u}-\frac{3}{u^2}\right)du = \left[u-2\ln u+\frac{3}{u}\right]_3^6$$

$$= \left[6-2\ln 6+\tfrac{1}{2}\right]-\left[3-2\ln 3+1\right] = \tfrac{5}{2}-2(\ln 6-\ln 3) = \tfrac{5}{2}-2\ln\tfrac{6}{3} = \tfrac{5}{2}-\ln 4$$

---

(2) $$\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx = \int\limits_{\sqrt{6}}^1 \frac{6-u^2}{u}(-2u)\,du = -2\int\limits_{\sqrt{6}}^1 (6-u^2)du = 2\left[6u-\tfrac{1}{3}u^3\right]_1^{\sqrt{6}}$$

$$= 2\left(6\sqrt{6}-\tfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{6}\right)-2\left(6-\tfrac{1}{3}\right) = 8\sqrt{6}-12+\tfrac{2}{3} \approx 8.26$$

Substitution: $u=\sqrt{6-x} \Rightarrow u^2=6-x \Rightarrow x=6-u^2 \Rightarrow dx=-2u\,du$

---

2. Möglichkeit: $u=6-x \Rightarrow x=6-u \Rightarrow dx=-dx$ Dann erhält man

$$\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx = -\int\limits_6^1 \frac{6-u}{\sqrt{u}}du = \int\limits_1^6 \left(\frac{6}{\sqrt{u}}-\frac{u}{\sqrt{u}}\right)du = \int\limits_1^6 \left(6u^{-\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \left[6\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^6 = \left[12\sqrt{u}-\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^6 = 12\sqrt{6}-4\sqrt{6}-12+\tfrac{2}{3} = 8\sqrt{6}-\tfrac{34}{3}$$

(3) $\int_0^4 2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -2\int_0^{-8} e^u du = 2\left[e^u\right]_{-8}^0 = 2-2e^{-8} \approx 2$

Substitution: $u = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow du = -x\,dx \Rightarrow xdx = -du$ (Schlupf-Integral)

---

(4) $\int_{-1}^0 4x^2\cdot\ln(x+2)dx$

1. Möglichkeit : Zuerst partielle Integration:

Partielle Integration:

$u' = 4x^2 \Rightarrow u = \frac{4}{3}x^3$

$v = \ln(x+2) \Rightarrow v' = \frac{1}{x+2}$

$= \left[\frac{4}{3}x^3\ln(x+2)\right]_{-1}^0 - \frac{4}{3}\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x+2}dx = 0 - \frac{4}{3}\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x+2}dx$ Dann

Substitution: $w = x+2 \Rightarrow dw = dx \Rightarrow x = w-2$

$= -\frac{4}{3}\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x+2}dx = -\frac{4}{3}\int_1^2 \frac{(w-2)^3}{w}dw = \frac{4}{3}\int_2^1 \frac{w^3-6w^2+12w-8}{w}dw$

$= \frac{4}{3}\int_2^1\left(w^2-6w+12-\frac{8}{w}\right)dw = \frac{4}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}w^3-3w^2+12w-8\ln w\right]_2^1$

$= \frac{4}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}-3+12\right]-\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{8}{3}-12+24-8\ln 2\right] = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{16}{3}+8\ln 2\right) = \frac{32}{3}\cdot\ln 2-\frac{64}{9} \approx 0{,}28$

Zweite Möglichkeit: Zuerst Substitution: $w = x + 2$, $dw = dx$

$\int_{-1}^0 4x^2\cdot\ln(x+2)dx = 4\int_1^2 (w-2)^2\cdot\ln w\cdot dw$

Jetzt erst partielle Integration:

$u' = (w-2)^2 = w^2-4w+4 \Rightarrow u = \frac{1}{3}w^3-2w^2+4w$

$v = \ln w \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{w}$

ergibt:

$= 4\left[\ln w\cdot\left(\frac{1}{3}w^3-2w^2+4w\right)\right]_1^2 - 4\int_1^2\left(\frac{1}{3}w^2-2w+4\right)dw$

$= 4\left[\ln w\cdot\left(\frac{1}{3}w^3-2w^2+4w\right)\right]_1^2 - 4\left[\frac{1}{9}w^3-w^2+4w\right]_1^2$

$= 4\left[\ln 2\cdot\left(\frac{8}{3}-8+8\right)\right]-4\cdot 0-4\cdot\left[\frac{8}{9}-4+8\right]+4\cdot\left[\frac{1}{9}-1+4\right]$

$= 4\left[\frac{8}{3}\cdot\ln 2-\frac{7}{9}-1\right] = 4\cdot\left[\frac{8}{3}\cdot\ln 2-\frac{16}{9}\right] = \frac{32}{3}\cdot\ln 2-\frac{64}{9} \approx 0{,}28$

Aufgabe 434:

Für k>0 ist die Funktion f_k gegeben durch $f_k(x)=k(-x^3+3x+4)$.

Bestimme k so, dass der Graph von f_k mit der Tangente im Hochpunkt eine Fläche mit dem Inhalt von 45 einschließt.

Lösung:

Hier benötigt man Kenntnisse aus der Differentialrechnung, im Bereich „Funktions-untersuchung“. Auch bei solchen Aufgaben kann man Schritt für Schritt vorgehen:

1. Bestimmung des Hochpunktes

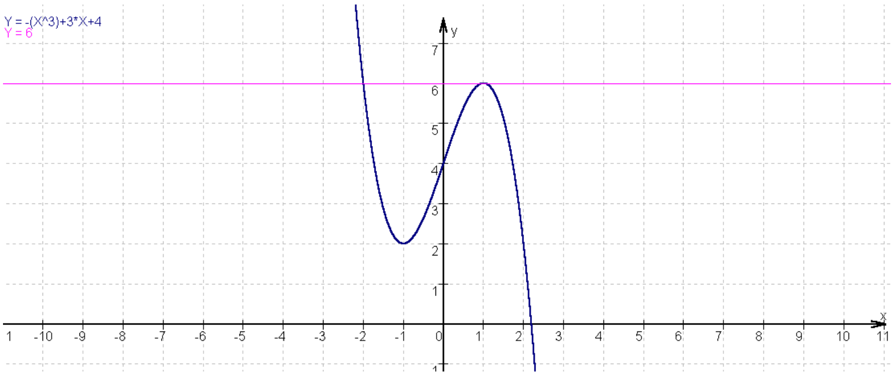
$$f(x)=k(-x^3+3x+4);\ f'(x)=k(-3x^2+3);\ f''(x)=-6kx$$
$$Notwendige Bedingung: f'(x)=0$$
$$0=k(-3x^2+3)\,|:k$$
$$0=-3x^2+3$$
$$x=+-1$$
$$Hinreichende Bedingung: f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0:$$
$$f''(1)=-6k<0: Hochpunkt$$
$$f''(-1)=6k>0: Tiefpunkt$$

An der Stelle x=1 liegt ein Hochpunkt vor.

H(1; 6k)

2. Bestimmung der Tangente im Hochpunkt

Dazu kann man sich erst mal für ein bestimmtes k eine Skizze anfertigen:



Wie man leicht sieht, verläuft die Tangente parallel zur x-Achse durch den Hoch-punkt. Also ist die Tangentengleichung t(x)=6k.

3. Bestimmung von k

Nun geht man ganz normal vor, wie ihr es in meinem ersten Artikel unter Abschnitt 5 gelernt habt.

3.1 Gleichsetzen der beiden Gleichungen, um die Schnittpunkte zu bestimmen:

$$6k = k(-x^3 + 3x + 4)$$
$$6k = -x^3k + 3kx + 4k \mid -6k$$
$$0 = -x^3k + 3kx - 2k$$

Nun bestimmt man mit Hilfe der Polynomdivision die Nullstellen dieser Gleichung bzw. die Lösungsmenge dieser Gleichung.

So erhält man $x_1=1$ und $x_2=-2$

3.2 Aufstellen des Integrals

$$\int_{-2}^{1} t(x) - f(x)dx = 45$$
$$\int_{-2}^{1} (6k + kx^3 - 3kx - 4k)dx = 45$$
$$\int_{-2}^{1} (kx^3 - 3kx + 2k)dx = 45$$
$$k(\frac{1}{4} + \frac{2^4}{4}) - 3k(\frac{1}{2} - \frac{2^2}{2}) + 2k(1-(-2)) = 45$$
$$6,75k = 45$$
$$k = 6\frac{2}{3}$$

Für $k = 6\frac{2}{3}$ schließt die Tangente im Hochpunkt von f(x) eine Fläche mit dem Flächeninhalt 45 ein.

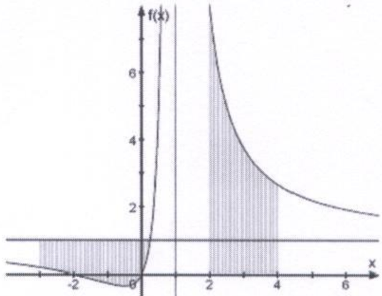
Aufgabe 435:

Gegeben ist folgende Funktion: $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$

a) (10) Die Kurve und die x-Achse und die Geraden x=2 und x=4 begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt A_1.

b) (5) Die Kurve und die x-Achse und die Geraden x=0 und x=-2 begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt A_2.

Lösung:



(2) $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$

a) $A_1=\int_2^4 \frac{x^2+2x}{(x-1)^2}dx=$

Substitution:

$u=x-1 \Rightarrow x=u+1 \Rightarrow dx=du$

$$A_1=\int_1^3 \frac{(u+1)^2+2(u+1)}{u^2}du=\int_1^3 \frac{u^2+4u+3}{u^2}du=\int_1^3\left(1+\frac{4}{u}+\frac{3}{u^2}\right)dx=$$

$$A_1=\left[u+4\cdot \ln u-\frac{3}{u}\right]_1^3=(3+4\cdot\ln 3-1)-(1-3)=4+4\cdot\ln 3 \quad = 8{,}39$$

b) Nullstellen sind bei 0 und -2. Die Fläche liegt unter der x-Achse:

$$A_2=\int_0^{-2} f(x)dx=\left[u+4\cdot\ln|u|-\frac{3}{u}\right]_{-1}^{-3}=[-3+4\cdot\ln 3+1]-[-1+3]=4\cdot\ln 3-4 \quad 0{,}394$$

c) Polynomdivisdion:

$$\begin{array}{l} (x^2+2x)(x^2-2x+1)=1 \\ \underline{-(x^2-2x+1)} \\ \quad 4x-1 \end{array} \quad \Rightarrow f(x)=1+\frac{4x-1}{(x-1)^2}$$

$$A_3=\int_{-3}^{1/4}\left[1-\left(1+\frac{4x-1}{(x-1)^2}\right)\right]dx=-\int_{-3}^{1/4}\frac{4x-1}{(x-1)^2}dx= \quad \text{Substitution siehe oben.}$$

$$A_3=-\int_{-4}^{-3/4}\frac{4(u+1)-1}{u^2}du=-\int_{-4}^{-3/4}\frac{4u+3}{u^2}du=\int_{-3/4}^{-4}\left[\frac{4}{u}+\frac{3}{u^2}\right]dx=\left[4\cdot\ln|u|-\frac{3}{u}\right]_{-\frac{3}{4}}^{-4}=$$

$$A_3=\left[4\cdot\ln 4+\frac{3}{4}\right]-\left[4\cdot\ln\frac{3}{4}+4\right]=4\cdot\ln\frac{4}{\frac{3}{4}}-\frac{13}{4}=4\cdot\ln\frac{16}{3}-\frac{13}{4}$$

Für A_3 ist auch dieser Ansatz möglich:

$$A_3=\int_{-4}^{1/4}\left(1-\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}\right)dx=\int_{-4}^{1/4}\frac{(x-1)^2-(x^2+2x)}{(x-1)^2}dx=\int_{-4}^{1/4}\frac{-4x+1}{(x-1)^2}dx \quad \text{usw.}$$

Aufgabe 436:

Lösen Sie folgendes Integral auf rechnerischen Weg (ohne Tafelwerk):

$$\int_{-1}^{0} 4x^2\cdot\ln(x+2)\,dx$$

Lösung:

$$\int_{-1}^{0} 4x^2 \cdot \ln(x+2)\,dx$$

1. Möglichkeit : Zuerst partielle Integration:

Partielle Integration:

$$u' = 4x^2 \;\Rightarrow\; u = \tfrac{4}{3}x^3$$

$$v = \ln(x+2) \;\Rightarrow\; v' = \frac{1}{x+2}$$

$$= \left[\tfrac{4}{3}x^3 \ln(x+2)\right]_{-1}^{0} - \tfrac{4}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x+2}dx = 0 - \tfrac{4}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x+2}dx \quad \text{Dann}$$

Substitution: $w = x+2 \;\Rightarrow\; dw = dx \;\Rightarrow\; x = w-2$

$$= -\tfrac{4}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x+2}dx = -\tfrac{4}{3}\int_{1}^{2} \frac{(w-2)^3}{w}dw = \tfrac{4}{3}\int_{2}^{1} \frac{w^3 - 6w^2 + 12w - 8}{w}dw$$

$$= \tfrac{4}{3}\int_{2}^{1}\left(w^2 - 6w + 12 - \frac{8}{w}\right)dw = \tfrac{4}{3}\cdot\left[\tfrac{1}{3}w^3 - 3w^2 + 12w - 8\ln w\right]_2^1$$

$$= \tfrac{4}{3}\cdot\left[\tfrac{1}{3} - 3 + 12\right] - \tfrac{4}{3}\cdot\left[\tfrac{8}{3} - 12 + 24 - 8\ln 2\right] = \tfrac{4}{3}\cdot\left(-\tfrac{16}{3} + 8\ln 2\right) = \tfrac{32}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{64}{9} \approx 0{,}28$$

Zweite Möglichkeit: Zuerst Substitution: $w = x + 2,\; dw = dx$

$$\int_{-1}^{0} 4x^2 \cdot \ln(x+2)\,dx = 4\int_{1}^{2} (w-2)^2 \cdot \ln w \cdot dw$$

Jetzt erst partielle Integration:

$$u' = (w-2)^2 = w^2 - 4w + 4 \;\Rightarrow\; u = \tfrac{1}{3}w^3 - 2w^2 + 4w$$

$$v = \ln w \;\Rightarrow\; v' = \frac{1}{w}$$

ergibt:

$$= 4\left[\ln w \cdot \left(\tfrac{1}{3}w^3 - 2w^2 + 4w\right)\right]_1^2 - 4\int_1^2\left(\tfrac{1}{3}w^2 - 2w + 4\right)dw$$

$$= 4\left[\ln w \cdot \left(\tfrac{1}{3}w^3 - 2w^2 + 4w\right)\right]_1^2 - 4\left[\tfrac{1}{9}w^3 - w^2 + 4w\right]_1^2$$

$$= 4\left[\ln 2 \cdot \left(\tfrac{8}{3} - 8 + 8\right)\right] - 4\cdot 0 - 4\cdot\left[\tfrac{8}{9} - 4 + 8\right] + 4\cdot\left[\tfrac{1}{9} - 1 + 4\right]$$

$$= 4\left[\tfrac{8}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{7}{9} - 1\right] = 4\cdot\left[\tfrac{8}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{16}{9}\right] = \tfrac{32}{3}\cdot\ln 2 - \tfrac{64}{9} \approx 0{,}28$$

Aufgabe 437:

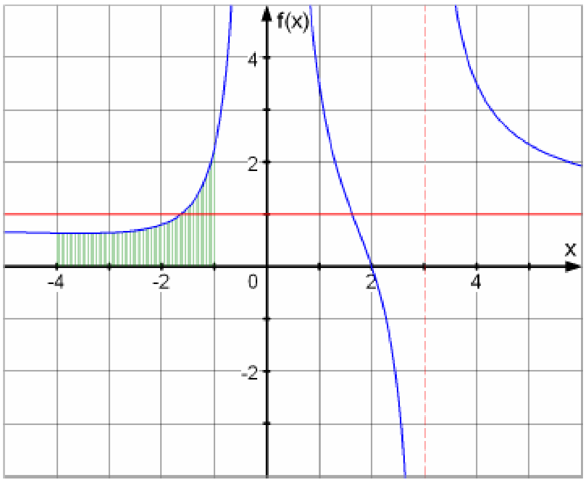
Das folgende Integral soll berechnet werden. (Nicht aus der Formelsammlung ablesen).

$$A = \int_{-4}^{-1} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2}dx$$

Lösung:

Nenner mit einfachen und doppelten Nullstellen, Grad Z = Grad N

(8) $f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-8}{x^2(x-3)}$



Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und den Geraden x=-1 und x = - 4:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx$$

Zuerst müssen wir den Funktionsterm so zerlegen, daß der ganzrationale Anteil herausgezogen wird und ein echter Bruch (mit Grad Z < Grad N) übrig bleibt. Dies geht entweder trickreich so:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{x^3-3x^2}{x^3-3x^2}+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

oder man erreicht dasselbe Ergebnis via Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}(x^3+0x^2-8):(x^3-3x^2)=1\\ \underline{-(x^3-3x^2)}\\ \qquad 3x^2-8\end{array}\qquad \Rightarrow\ f(x)=1+\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}$$

Nun muß man für den Restbruch die **besondere Partialbruchzerlegung** an, die dann eingesetzt wird, wenn wie hier eine doppelte und eine einfache Polstelle auftauchen.

$$\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}=\frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B)-3B}{x^2(x-3)}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dieses Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}A+C=3 & (1)\\ -3A+B=0 & (2)\\ -3B=-8\ \Rightarrow\ B=\frac{8}{3}\end{array}$$

$$\text{B in (2) ergibt}\quad 3A=B=\tfrac{8}{3}\ \Rightarrow\ A=\tfrac{8}{9}$$

$$\text{A in (1)}:\quad C=3-A=3-\tfrac{8}{9}=\tfrac{19}{9}$$

Ergebnis: $\frac{3x^2-8}{x^3-3x^2}=\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$

Somit haben wir jetzt $f(x)=1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}$

Berechnung der Fläche:

$$A=\int_{-4}^{-1}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2}dx=\int_{-4}^{-1}\left(1+\frac{\frac{8}{9}}{x}+\frac{\frac{8}{3}}{x^2}+\frac{\frac{19}{9}}{x-3}\right)dx=\left[x+\tfrac{8}{9}\ln|x|-\tfrac{8}{3x}+\tfrac{19}{9}\ln|x-3|\right]_{-4}^{-1}$$

(Der letzte Term wurde mit Substitution u = x -3 und folgender Rücksubstitution integriert).

$$A=-1+4+\tfrac{8}{9}\underbrace{\ln 1}_{=0}-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{8}{3}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{19}{9}\ln 4-\tfrac{19}{9}\ln 7=5-\tfrac{8}{9}\ln 4+\tfrac{19}{9}\ln\tfrac{4}{7}\approx 2{,}59$$

Aufgabe 438:

Berechnen Sie folgendes Integral. (Der Rechenweg muss erkennbar sein)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

Lösung:

$$(17) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x\,dx$$

Partielle Integration.

$$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$$

$$v = \cos x \quad \Rightarrow \quad v' = -\sin x$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x\,dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x\,dx$$

Nächste partielle Integration:

$$u' = e^x \quad \Rightarrow \quad u = e^x$$

$$v = \sin x \quad \Rightarrow \quad v' = \cos x$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x\,dx = \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x\,dx$$

Zusammengesetzt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx$$

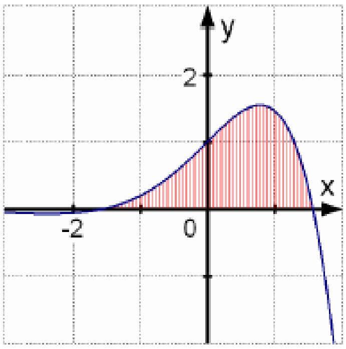
$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[e^x \cdot \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

Also folgt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}\left[e^x \cdot (\cos x + \sin x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{\pi/2}\left(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}\right) - e^{-\pi/2}\left(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) \approx 2{,}51$$

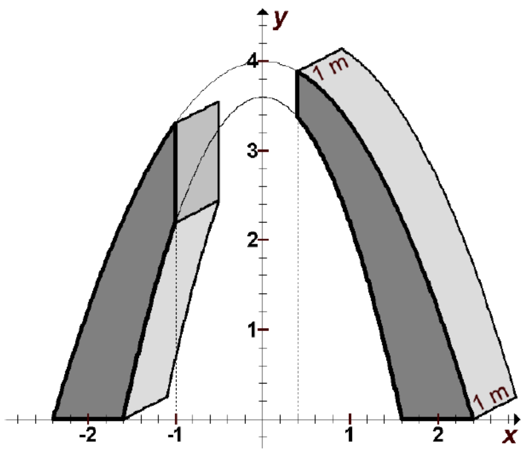


Aufgabe 439:

Das neue Eingangs-Logo der Fußballweltmeisterschaft in Brasilien soll als Skulptur aus zwei Bogen auf einer Wiese vor dem Haupteingang errichtet werden. Um eine bessere Berechnung zu ermöglichen sind die gekrümmten Linien y-achsensymmetrische Parabeln zweiter Ordnung. Die Längeneinheit des Koordinatensystems, in dem die Vorflächen liegen, beträgt 1m.

a) (5) Ermitteln Sie anhand der Abbildung die Gleichungen der Parabeln.

b) (5) Berechnen Sie die dunkelgrau dargestellte Vorfläche der beiden Bögen. Die Skulptur soll aus Beton gefertigt werden und 1m breit sein. Berechnen Sie die Masse der beiden Bögen (1 dm^3 Beton wiegt 2,4 kg)



Lösung:

Aufgabe 2:

a) $f(x) = ax^2 + c \quad f(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 4 \quad f(2,4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5,76a + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{25}{36}$

$g(x) = bx^2 + d \quad g(0) = 3,6 \quad \Longrightarrow \quad d = 3,6 \quad g(1,6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2,56b + 3,6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{45}{32}$

Also gilt $f(x) = -\frac{25}{36}x^2 + 4$ (äußere Parabel) und $g(x) = -\frac{45}{32}x^2 + \frac{18}{5}$ (innere Parabel).

b) Linker Bogen: $A = \int\limits_{-2,4}^{-1,6} f(x)\,dx + \int\limits_{-1,6}^{-1} (f(x) - g(x))\,dx \overset{\text{GTR}}{\approx} 0,948 + 0,975 = 1,923$

Die Vorderfläche des linken Bogens hat einen Flächeninhalt von $1,923 \text{ m}^2$.

$V = A \cdot h = 1,923 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ m} = 1,923 \text{ m}^3 = 1923 \text{ dm}^3 \qquad m = 1923 \text{ dm}^3 \cdot 2,4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 4614,6 \text{ kg}.$

Der linke Bogen wiegt also ca. 4,615 t.

Rechter Bogen: $A = \int\limits_{0,4}^{1,6} (f(x) - g(x))\,dx + \int\limits_{1,6}^{2,4} f(x)\,dx \overset{\text{GTR}}{\approx} 1,437 + 0,948 = 2,385$

Die Vorderfläche des rechten Bogens hat einen Flächeninhalt von $2,385 \text{ m}^2$.

$V = A \cdot h = 2,385 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ m} = 2,385 \text{ m}^3 = 2385 \text{ dm}^3 \qquad m = 2385 \text{ dm}^3 \cdot 2,4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 5723,6 \text{ kg}.$

Der rechte Bogen wiegt also ca. 5,724 t.

Rotationsvolumen

Aufgabe 440:

Die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ rotiert in den Grenzen x=1 und x=2 um die x-Achse. Berechnen Sie das entstehende Volumen.

Lösung:

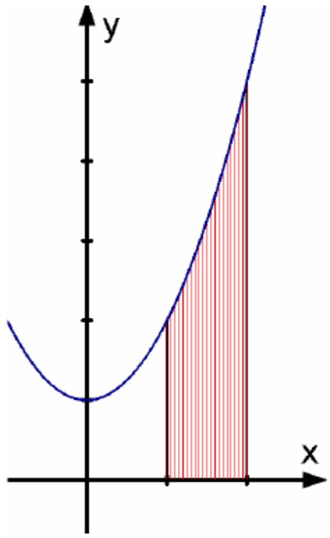
Randfunktion: $f(x) = x^2 + 1$

Krummliniges Trapez von x = 1 bis x = 2.
Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx =$$

$$V = \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \pi\left[\tfrac{32}{5} + \tfrac{16}{3} + 2\right] - \pi\left[\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3} + 1\right]$$

$$V = \pi \cdot \left(\tfrac{31}{5} + \tfrac{14}{3} + 1\right) = \pi \cdot \tfrac{93+70+15}{15} = \tfrac{178}{15}\pi$$



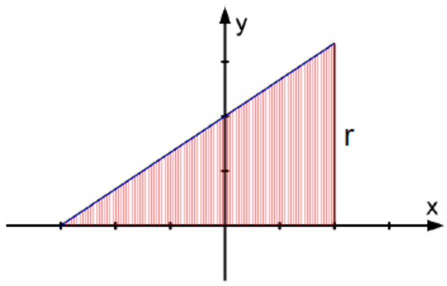
Aufgabe 441:

Die Gerade $y = \frac{2}{3}x + 2$ rotiert in den Grenzen x=-3 bis x=2 um die x-Achse. Berechnen Sie das entstehende Volumen.

Lösung:

(2) Gerade $y = \tfrac{2}{3}x + 2$ für x= - 3 bis x = 2 begrenzt zusammen mit der x-Achse und der Geraden x = 2 ein Dreieck, das bei Drehung um die x-Achse zu einem Kegel wird.

Berechne dessen Volumen.



1. Lösung: $V = \pi \int_{-3}^{2} \left(\tfrac{2}{3}x + 2\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{2} \left(\tfrac{4}{9}x^2 + \tfrac{8}{3}x + 4\right) dx = \pi\left[\tfrac{4}{27}x^3 + \tfrac{4}{3}x^2 + 4x\right]_{-3}^{2}$

$$V = \pi\left[\tfrac{32}{27} + \tfrac{16}{3} + 8\right] - \pi\left[-\tfrac{4}{27}\cdot 27 + \underbrace{\tfrac{4}{3}\cdot 9 - 12}_{=0}\right] = \pi \cdot \frac{32+144+324}{27} = \pi \cdot \frac{500}{27} \approx 58{,}2$$

2. Lösung: Die Formel für das Kegelvolumen lautet: $V = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

wobei der Radius $r = f(2) = \tfrac{4}{3} + 2 = \tfrac{10}{3}$ ist und $h = 2 - (-3) = 5$

Es folgt: $V = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \tfrac{100}{9} \cdot 5 = \tfrac{500}{27}\pi$.

Aufgabe 442:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{9-x}$

Lösung:

(7) $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{9-x}$

Das Schaubild und die x-Achse begrenzen eine Fläche, diese dreht man um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

$$V = \pi\int_0^9 \left(\tfrac{1}{3}x\cdot\sqrt{9-x}\right)^2 dx = \tfrac{1}{9}\pi\int_0^9 x^2(9-x)\,dx = \tfrac{1}{9}\pi\int_0^9 \left(9x^2 - x^3\right)dx = \tfrac{1}{9}\pi\left[3x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^9$$

$$= \tfrac{1}{9}\pi\left[3\cdot 9^3 - \tfrac{1}{4}\cdot 9^4\right] = \tfrac{1}{9}\pi\cdot 9^3\cdot\left(3-\tfrac{9}{4}\right) = 81\pi\cdot\tfrac{3}{4} = \tfrac{243}{4}\pi \approx 191 \quad \text{(VE)}.$$

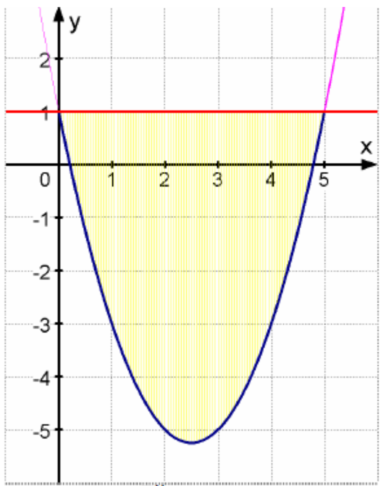
Aufgabe 443:

Die Parabel $f(x) = x^2 - 5x + 1$ und die Gerade y=1 begrenzen ein Parabelsegment. Dreht man dieses um die Gerade g: y=1, entsteht ein Drehkörper. Berechne Sie dessen Volumen.

Lösung:

(8) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

Die Parabel und die Gerade $y = 1$ begrenzen ein Parabelsegment. Dreht man dieses um die Gerade g: $y = 1$, entsteht ein Drehkörper. Berechne dessen Volumen.



Da wir nur um die x-Achse drehen können, verschieben wir dieses Segment um 1 nach unten. Damit erhält die Parabel diese Gleichung:

$$g(x) = x^2 - 5x.$$

Nun drehen wir um die x-Achse:

$$V = \pi\int_0^5 \left(x^2 - 5x\right)^2 dx = \pi\int_0^5 \left(x^4 - 10x^3 + 25x^2\right)dx = \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{5}{2}x^4 + \tfrac{25}{3}x^3\right]_0^5$$

$$V = \pi\left(5^4 - \tfrac{1}{2}\cdot 5^4 + \tfrac{25}{3}\cdot 5^3\right) = \pi\cdot 5^4\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{3}\right) = 625\pi\cdot\tfrac{6-3+10}{6} = 625\cdot\pi\cdot\tfrac{13}{6} = \tfrac{8125}{6}\pi \approx 4254$$

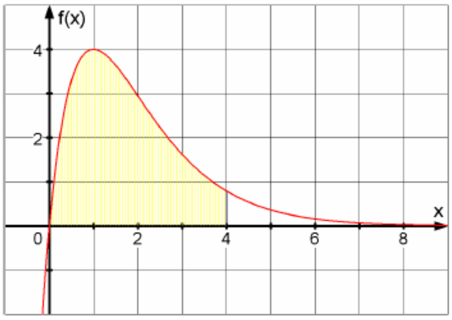
Aufgabe 444:

Die Fläche zwischen K, der x-Achse und x=4 rotiere um die x-Achse. $f(x) = x\cdot e^{1-x}$

Lösung:

(9) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Die Fläche zwischen K, der x-Achse und x = 4 rotiere um die x-Achse.



$$V = \pi \int_0^4 \left(x \cdot e^{1-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x^2 \cdot e^{2-2x} dx$$

1. Partielle Integration: $u' = e^{2-2x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{2-2x}$; $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}x^2 e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi \int_0^4 x \cdot e^{2-2x} dx$$

2. Partielle Integration: $u' = e^{2-2x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{2-2x}$; $w = x \Rightarrow w' = 1$

$$\int_0^4 x \cdot e^{2-2x} dx = \left[-\tfrac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \tfrac{1}{2}\int e^{2-2x} dx = \left[-\tfrac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \tfrac{1}{2}\cdot\left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2x}\right]_0^4$$

Zusammengesetzt:

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}x^2 e^{2-2x}\right]_0^4 + \pi\left[-\tfrac{1}{2}x \cdot e^{2-2x}\right]_0^4 + \tfrac{1}{2}\pi \cdot \left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2x}\right]_0^4$$

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{2-2x}\left(x^2 + x + \tfrac{1}{2}\right)\right]_0^4$$

$$V = \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{-6}\left(16 + 4 + \tfrac{1}{2}\right)\right] - \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] = \left(\tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{41}{4}e^{-6}\right)\cdot \pi$$

Vektoralgebra

Aufgabe 445:

Berechnen Sie die Länge des Vektors.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$$

Aufgabe 446:

Berechnen Sie den Richtungswinkel des folgenden Vektors zu der x-Achse.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = 56{,}31°$$

Aufgabe 447:

Berechnen Sie den Richtungswinkel des folgenden Vektors zu der y-Achse.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

90°-56,31°=33,69°

Lösung siehe vorherige

Aufgabe 448:

Führen Sie folgende Vektoraddition durch.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 - 1 + 4 \\ 7 + 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 449:

Führen Sie folgende Vektorsubtraktion durch.

$$\left(\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}\right)$$

Lösung:

$$\left(\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}7-4\\1-(-5)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2-(-5)\\2-(-4)\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}3-3\\6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 450:

Führen Sie folgende Skalare Multiplikation durch.

$$2\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$2\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot5\\2\cdot(-3)\\2\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-6\\14\end{pmatrix}$$

Aufgabe 451:

Gegeben sind folgende Vektoren.

$\vec{a}=(4|1|-1)$, $\vec{b}=(1|0|2)$, $\vec{c}=(-2|2|3)$ und $\vec{d}=(-1|1|0)$

Berechnen Sie folgende Linearkombinationen.

$\vec{x}_1=5\vec{a}-3\vec{c}$, $\quad\vec{x}_2=\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$, $\quad\vec{x}_3=10\vec{a}-5\vec{b}-7\vec{c}+3\vec{d}$

$\vec{x}_4=\frac{3}{4}\vec{c}$, $\quad\vec{x}_5=4\vec{d}-2\vec{a}+3\vec{b}$ $\quad\vec{x}_6=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}-4\vec{d}$.

Lösung:

$\vec{a}=(4|1|-1)$, $\vec{b}=(1|0|2)$, $\vec{c}=(-2|2|3)$ und $\vec{d}=(-1|1|0)$

$\vec{x}_1=5\vec{a}-3\vec{c}=(26|-1|-14)$

$\vec{x}_2=\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}=(-7|11|12)$

$\vec{x}_3=10\vec{a}-5\vec{b}-7\vec{c}+3\vec{d}=(46|-1|-41)$

$\vec{x}_4=\frac{3}{4}\vec{c}=\frac{3}{4}(-2|2|3)=(-\frac{3}{2}|\frac{3}{2}|\frac{9}{4})$

$\vec{x}_5=4\vec{d}-2\vec{a}+3\vec{b}=(-9|2|8)$

$\vec{x}_6=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}-4\vec{d}=(4|3|12)$

Aufgabe 452:

Stelle den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

(a) $\vec{x}=(5|5|-8),\ \vec{a}=(4|1|-1),\ \vec{b}=(3|2|4),\ \vec{c}=(1|0|-3)$

(b) $\vec{x}=(7|5|-3),\ \vec{a}=(1|1|0),\ \vec{b}=(0|1|1),\ \vec{c}=(1|0|1)$

(c) $\vec{x}=(7|6|-2),\ \vec{a}=(8|4|-2),\ \vec{b}=(6|-9|12),\ \vec{c}=(5|1|3)$

(d) $\vec{x}=(4|-2|0),\ \vec{a}=(1|-2|-3),\ \vec{b}=(1|1|2),\ \vec{c}=(1|-1|-1)$

(e) $\vec{x}=(4|0|3),\ \vec{a}=(1|-2|-3),\ \vec{b}=(2|1|2),\ \vec{c}=(1|3|4)$

Lösung:

(a) $\vec{x}=(5|5|-8),\ \vec{a}=(4|1|-1),\ \vec{b}=(3|2|4),\ \vec{c}=(1|0|-3)$

Ansatz: $\vec{x}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

d.h. $(5|5|-8)=r(4|1|-1)+s(3|2|4)+t(1|0|-3)$

d.h. $(5|5|-8)=(4r+3s+t\,|\,r+2s\,|\,-r+4s-3t)$

d.h. $\begin{Bmatrix} 4r+3s+t=5 & (1)\\ r+2s=5 & (2)\\ -r+4s-3t=-8 & (3)\end{Bmatrix}$

Lösung mit dem Determinantenverfahren (Cramersche Regel und Sarrus):

Nennerdeterminante: $D=\begin{vmatrix}4&3&1\\1&2&0\\-1&4&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}4&3\\1&2\\-1&4\end{matrix}=-24+4+2+9=-9$

Zählerdeterminanten: $D_1=\begin{vmatrix}5&3&1\\5&2&0\\-8&4&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}5&3\\5&2\\-8&4\end{matrix}=-30+20+16+45=51$

$D_2=\begin{vmatrix}4&5&1\\1&5&0\\-1&-8&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}4&5\\1&5\\-1&-8\end{matrix}=-60-8+5+15=-48$

$D_3=\begin{vmatrix}4&3&5\\1&2&5\\-1&4&-8\end{vmatrix}\begin{matrix}4&3\\1&2\\-1&4\end{matrix}=-64-15+20+10-80+24=-105$

Daraus: $r=\frac{D_1}{D}=\frac{51}{-9}=-\frac{17}{3}$; $s=\frac{D_2}{D}=\frac{-48}{-9}=\frac{16}{3}$; $t=\frac{D_3}{D}=\frac{-105}{-9}=\frac{35}{3}$

Ergebnis: $\vec{x}=-\frac{17}{3}\vec{a}+\frac{16}{3}\vec{b}+\frac{35}{3}\vec{c}$

(b) $\vec{x}=(7|5|-3),\ \vec{a}=(1|1|0),\ \vec{b}=(0|1|1),\ \vec{c}=(1|0|1)$

Ansatz: $\vec{x}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

d.h. $(7|5|-3)=r(1|1|0)+s(0|1|1)+t(1|0|1)$

d.h. $(7|5|-3)=(r+t\,|\,r+s\,|\,s+t)$

d.h. $\begin{Bmatrix} r+t=7 & (1)\\ r+s=5 & (2)\\ s+t=-3 & (3)\end{Bmatrix}$

Lösung durch Elimination:

$(1)-(2)$: $-s+t=2$ (4)

$s+t=-3$ (3)

(3) + (4): $2t=-1 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$

in (1): $r=7-t=\frac{15}{2}$

in (3): $s=-3-t=-\frac{5}{2}$

Ergebnis: $\vec{x}=\frac{15}{2}\vec{a}-\frac{5}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

(c) $\vec{x}=(7|6|-2),\ \vec{a}=(8|4|-2),\ \vec{b}=(6|-9|12),\ \vec{c}=(5|1|3)$

Ansatz: $\vec{x}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

d.h. $(7\,|\,6\,|-2)=r(8\,|\,4\,|-2)+s(6\,|-9\,|\,12)+t(5\,|\,1\,|\,3)$

d.h. $(7\,|\,6\,|-2)=(8r+6s+5t\,|\,4r-9s+t\,|-2r+12s+3t)$

d.h. $\left\{\begin{matrix} 8r+6s+5t=7 & (1)\\ 4r-9s+t=6 & (2)\\ -2r+12s+3t=-2 & (3)\end{matrix}\right\}$

Nennerdeterminante: D = - 246

Zählerdeterminanten: D_1 = -123, D_2 = 82 , D_3 = -246

Es folgt $r=\frac{D_1}{D}=\frac{-123}{-246}=\frac{1}{2};\ s=-\frac{1}{3};\ t=1$

Ergebnis: $\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$

(d) $\vec{x}=(4|-2|0),\ \vec{a}=(1|-2|-3),\ \vec{b}=(1|1|2),\ \vec{c}=(1|-1|-1)$

Ansatz: $\vec{x}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

d.h. $(4\,|-2\,|\,0)=r(1\,|-2\,|-3)+s(1\,|\,1\,|\,2)+t(1\,|-1\,|-1)$

d.h. $(4\,|-2\,|\,0)=(r+s+t\,|-2r+s-t\,|-3r+2s-t)$

d.h. $\left\{\begin{matrix} r+s+t=4 & (1)\\ -2r+s-t=-2 & (2)\\ -3r+2s-t=0 & (3)\end{matrix}\right\}$

Nennerdeterminante: D = 1
Zählerdeterminanten: D_1 = -2 , D_2 = 0 und D_3 = 6

Ergebnis: $\vec{x}=-2\vec{a}+6\vec{c}$

(e) $\vec{x}=(4|0|3),\ \vec{a}=(1|-2|-3),\ \vec{b}=(2|1|2),\ \vec{c}=(1|3|4)$

Ansatz: $\vec{x}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

d.h. $(4\,|\,0\,|\,3)=r(1\,|-2\,|-3)+s(2\,|\,1\,|\,2)+t(1\,|\,3\,|\,4)$

d.h. $(4\,|\,0\,|\,3)=(r+2s+t\,|-2r+s+3t\,|-3r+2s+4t)$

d.h. $\left\{\begin{matrix} r+2s+t=4 & (1)\\ -2r+s+3t=0 & (2)\\ -3r+2s+4t=3 & (3)\end{matrix}\right\}$

Nennerdeterminante: D = -5
Zählerdeterminanten: D_1 = 7 , D_2 = -19 und D_3 = 11

Es folgt $r=\frac{D_1}{D}=-\frac{7}{5};\ s=\frac{D_2}{D}=\frac{19}{5};\ t=\frac{D_3}{D}=-\frac{11}{5}$

Ergebnis: $\vec{x}=-\frac{7}{5}\vec{a}+\frac{19}{5}\vec{b}-\frac{11}{5}\vec{c}$

Aufgabe 453:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=(-2|1|4),\ \vec{b}=(3|2|-2)$.

Lassen sich die folgenden Vektoren als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

$\vec{x}_1=(6|1|4),\ \vec{x}_2=(3|-1{,}5|-6)$ und $\vec{x}_3=(-17|-2|22)$

Lösung:

a) Ansatz:

$$\vec{x}_1 = r\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow (6|1|4) = r(-2|1|4) + s(3|2|-2) = (-2r+3s|r+2s|4r-2s)$$

bzw.

$$\begin{aligned} 6 &= -2r + 3s \quad (1) \\ 1 &= r + 2s \quad (2) \\ 4 &= 4r - 2s \quad (3) \end{aligned}$$

Dieses System ist überbestimmt. Man errechnet r und s aus (2) und (3) und macht dann die Probe in (1):

(2) + (3): $5 = 5r \Rightarrow r = 1$ In (2): $1 = 1 + 2s \Rightarrow s = 0$

Die Probe in (1) liefert eine falsche Aussage: $6 = -2 + 0$

Also läßt sich $\vec{x}_1$ nicht als Linearkombination aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen!

b) Kürzerer Ansatz: $\vec{x}_2 = r\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 3 &= -2r + 3s \quad (1) \\ -1{,}5 &= r + 2s \quad (2) \\ -6 &= 4r - 2s \quad (3) \end{aligned}$$

(2) + (3) liefert $-7{,}5 = 5r \Rightarrow r = -\frac{7{,}5}{5} = -\frac{3}{2}$. In (2) folgt ebenfalls wieder s= 0.

Nun aber stimmt die Probe in (1): 3 = 3.

Also lautet das Ergebnis: $\vec{x}_2 = -\frac{3}{2}\vec{a}$

c) Ansatz: $\vec{x}_3 = r\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} -17 &= -2r + 3s \quad (1) \\ -2 &= r + 2s \quad (2) \\ 22 &= 4r - 2s \quad (3) \end{aligned}$$

(2) + (3) liefert 5r = 20 also r = 4. Aus (2) folgt damit s = - 3.

Probe in (1): -17 = -8 – 9

Dies ist eine wahre Aussage, also haben wir eine Lösung gefunden:

$$\vec{x}_3 = 4\vec{a} - 3\vec{b}$$

Aufgabe 454:

$\vec{a} = (1|4|3|1)$, $\vec{b} = (2|1|3|-2)$, $\vec{c} = (-1|4|2|0)$, $\vec{d} = (0|7|3|4)$, $\vec{e} = (1|13|8|-1)$

a) Zeige, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

b) Zeige, daß man $\vec{d}$ als Linearkombination aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen kann. Wie ?

c) Zeige, daß man $\vec{e}$ nicht als Linearkombination aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen kann.

Lösung:

a) Die Lineare Unabhängigkeit von 3 Vektoren des $\mathbf{R}^4$ kann nur über den in der Definition vorgegebenen Ansatz ermittelt werden:

Man prüft nach, wie man den Nullvektor durch sie darstellen kann:

$$\vec{o} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x + 2y - z && (1) \\ 0 &= 4x + y + 4z && (2) \\ 0 &= 3x + 3y + 2z && (3) \\ 0 &= x - 2y && (4) \end{aligned}$$

Aus (1), (3) und (4) berechne ich x, y und z nach der Determinantenmethode:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right| = 4 + 6 + 3 + 4 = 17$$

Da ein homogenes System vorliegt, sind $D_x = D_y = D_z = 0$ also $x = y = z = 0$.
Damit stimmt auch die Probe in der noch nicht verwendeten Gleichung (2) !

Ergebnis: Der Nullvektor läßt sich **NUR** auf die triviale Weise als Linearkombination durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen: $\vec{o} = 0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c}$. Damit sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

b) Ansatz: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ d.h.
$$\begin{aligned} 0 &= x + 2y - z && (1) \\ 7 &= 4x + y + 4z && (2) \\ 3 &= 3x + 3y + 2z && (3) \\ 4 &= x - 2y && (4) \end{aligned}$$

Gegenüber (a) haben sich nur die Absolutglieder geändert. Lassen wir die Gleichung (2) vorläufig weg, so berechnen wir x, y und z aus dem System

$$\begin{aligned} 0 &= x + 2y - z && (1) \\ 3 &= 3x + 3y + 2z && (3) \\ 4 &= x - 2y && (4) \end{aligned}$$

. Das Ergebnis ist $x = 2$, $y = -1$ und $z = 0$.

Die Probe in (2) stimmt auch d.h. $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$

c) Ansatz: $\vec{e} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ d.h.
$$\begin{aligned} 1 &= x + 2y - z && (1) \\ 13 &= 4x + y + 4z && (2) \\ 8 &= 3x + 3y + 2z && (3) \\ -1 &= x - 2y && (4) \end{aligned}$$

Die Berechnung aus (1), (3) und (4) ergibt $x = \frac{13}{17}$, $y = \frac{15}{17}$, $z = \frac{26}{17}$

Da die Probe in (2) nicht stimmt, läßt sich $\vec{e}$ nicht als Linearkombination aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen.

Aufgabe 455:

$\vec{a} = (-2|1|0)$, $\vec{b} = (1|2|1)$, $\vec{c} = (0|5|2)$, $\vec{d} = (-3|-1|-1)$

a) Zeige, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

b) Stelle $\vec{d}$ auf beliebige viele Arten durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Lösung:

a) $$D = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -8+10-2 = 0.$$

Also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.

***Wissen**: Also erzeugen sie nur einen Untervektorraum des $\mathbf{R}^3$, d.h. es gibt Vektoren, die sich nicht aus ihnen erzeugen lassen, und andere, bei denen dies geht, dann aber auf beliebig viele Arten !*

b) Ansatz: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ d.h.
$$\begin{aligned} -3 &= -2x + y && (1) \\ -1 &= x + 2y + 5z && (2) \\ -1 &= y + 2z && (3) \end{aligned}$$

$(1)+2\cdot(2)$: $\quad -5 = 5y + 10z \quad (4)$

Dividieren durch 5: $\quad -1 = y + 2z \quad (5)$

Man erkennt, daß (5) entbehrlich ist, d.h. wir haben eine freie Wahl.

Wähle z.B. $z = r,\ r \in \mathbf{R} \Rightarrow y = -1 - 2z = -1 - 2r$

Aus (1) folgt: $\quad 2x = y + 3 = -1 - 2r + 3 = -2r + 2 \Rightarrow x = -r + 1$

Eingesetzt in die Ansatzgleichung:
$$\vec{d} = (1-r)\vec{a} + (-1-2r)\vec{b} + r\vec{c}$$

z.B. r = 1: $\vec{d} = -3\vec{b} + \vec{c}$, r = - 1: $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ usw.

Aufgabe 456:

Berechnen Sie folgende Skalarprodukte:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$ b) $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = ?$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ?$ e) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ?$ f) $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = ?$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 + 4 + 0 = 16$ b) $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 24 - 12 - 12 = 0$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 16 + 4 + 1 = 21$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 3y + 5z$

e) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -3x_1 + x_2 + 2x_3$ f) $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = t^2 + t + 2 - 6t = t^2 - 5t + 2$

Aufgabe 457:

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\t\\2t\end{pmatrix}=16$ b) $\begin{pmatrix}k\\2k\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k+1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$ c) $\begin{pmatrix}3k\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\2k\\-1\end{pmatrix}=0$

d) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right]=0$ e) $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right]^2=16$ (nur umformen)

Lösung:

a) $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\t\\2t\end{pmatrix}=16 \Leftrightarrow 6+3t+2t=16 \Leftrightarrow 5t=10 \Leftrightarrow t=2$

b) $\begin{pmatrix}k\\2k\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k+1\\1\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow k^2+k+2k-4=0 \Leftrightarrow k^2+3k-4=0$

Die allgemeine Lösungsformel für die quadratische Gleichung

$ax^2+bx+c=0$ lautet $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Sie liefert hier:

$k_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{-3\pm5}{2}=\begin{cases}1\\-4\end{cases}$

c) $\begin{pmatrix}3k\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\2k\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 3k^2+4k-3=0$

$k_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+36}}{6}=\dfrac{-4\pm\sqrt{52}}{6}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4\cdot13}}{6}=\dfrac{-4\pm2\sqrt{13}}{6}=-\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{13}$

d) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right]=0 \Leftrightarrow (2+2+6)+r(5+0+2)=0 \Leftrightarrow 7r=-10 \Leftrightarrow r=-\dfrac{10}{7}$

e) $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right]^2=16 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}^2=16$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1-8x_2+6x_3=16-29=-13$

Aufgabe 458:

Welche Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ das Produkt 0 ?

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Welche Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ **und** mit $\vec{v}$ das Produkt 0 ?

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_1 + n_2 + 2n_3 = 0$

Wähle z.B. $n_2 = r,\ r \in \mathbb{R}$ und $n_3 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = -r - 2s$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -r-2s \\ r \\ s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erg.: Alle Vektoren, die eine Linearkombination aus $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 2n_1 - 5n_2 + 3n_3 = 0$

Wähle z.B. $n_2 = r,\ r \in \mathbb{R},\ n_3 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow 2n_1 = 5r - 3s \Rightarrow n_1 = \frac{5}{2}r - \frac{3}{2}s$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}r - \frac{3}{2}s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}r\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}s\begin{pmatrix} -3s \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d.h. alle Linearkombinationen aus $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 5n_2 - n_3 = 0$

Wähle z.B. $n_1 = r,\ r \in \mathbf{R},\ \ n_2 = s,\ s \in \mathbf{R} \ \Rightarrow\ n_3 = 5s$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 5s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d.h. alle Linearkombinationen aus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Welche Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ haben mit $\vec{u}$ **und** mit $\vec{v}$ das Produkt 0 ?

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bed.: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2n_1 + 5n_2 + n_3 = 0 \quad (1)$
und $\vec{v} \cdot \vec{n} = n_1 - n_2 + n_3 = 0 \quad (2)$

(1) – (2) liefert: $n_1 + 6n_2 = 0$
Wähle $n_2 = r,\ r \in \mathbf{R} \ \Rightarrow\ n_1 = -6r$
Aus (2) folgt $n_3 = -n_1 + n_2 = 6r + r = 7r$

Ergebnis: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6r \\ r \\ 7r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

e) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bed.: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3n_1 + n_2 = 0 \quad (1)$
und $\vec{v} \cdot \vec{n} = 2n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \quad (2)$

Achtung: Da (1) bereits nur noch 2 Unbekannte enthält, wird nicht mehr eliminiert!

Wähle $n_1 = r,\ r \in \mathbf{R} \ \Rightarrow\ n_2 = -3n_1 = -3r$
Aus (2) folgt damit $3n_3 = -2n_1 + 2n_2 = -2r - 6r = -8r \ \Rightarrow\ n_3 = -\frac{8}{3}r$

Ergebnis: $\vec{n} = \begin{pmatrix} r \\ -3r \\ -\frac{8}{3}r \end{pmatrix} = \frac{1}{3}r \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$ d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 459:

Berechnen Sie den Winkel zwischen zwei Vektoren.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$\downarrow$ Setz die Werte ein.

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}$$

$\downarrow$ Berechne das Skalarprodukt und die Beträge der Vektoren.

$$= \frac{2 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 7^2 + 2^2}}$$

$\downarrow$ Vereinfache.

$$= \frac{15}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{89}}$$

$\downarrow$ Verwende den Gegenkosinus, um den Winkel zu ermitteln.

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{89}}\right) \approx 73{,}1^\circ$$

Aufgabe 460:

Bestimmen Sie die Projektion des Vektors $\vec{u}$ in Richtung des Vektors $\vec{s}$.

$a)$ $\vec{u} = (2,\ 2,\ -1)$

1) $\vec{s} = (-1,\ 1,\ -1)$, 2) $\vec{s} = (1,\ 1,\ -1)$, 3) $\vec{s} = (1,\ 1,\ 1)$

$b)$ $\vec{u} = (2,\ -2,\ 1)$

1) $\vec{s} = (1,\ 0,\ 2)$, 2) $\vec{s} = (0,\ 2,\ 1)$, 3) $\vec{s} = (1,\ -2,\ 0)$

Lösung:

1) $\vec{u} = (2,\ 2,\ -1)$, $\quad \vec{s} = (-1,\ 1,\ -1)$, $\quad \vec{s}\cdot\vec{u} = 1$, $\quad |\vec{s}|^2 = 3$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}|^2}\cdot\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\vec{s} = \frac{1}{3}(-1,\ 1,\ -1) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

2) $\vec{u} = (2,\ 2,\ -1)$, $\quad \vec{s} = (1,\ 1,\ -1)$, $\quad \vec{s}\cdot\vec{u} = 5$, $\quad |\vec{s}|^2 = 3$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}|^2}\cdot\vec{s} = \frac{5}{3}\cdot\vec{s} = \frac{5}{3}(1,\ 1,-1) = \left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$$

3) $\vec{u} = (2,\ 2,\ -1)$, $\quad \vec{s} = (1,\ 1,\ 1)$, $\quad \vec{s}\cdot\vec{u} = 3$, $\quad |\vec{s}|^2 = 3$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}|^2}\cdot\vec{s} = \vec{s} = (1,\ 1,\ 1)$$

1) $\vec{u} = (2,\ -2,\ 1)$, $\quad \vec{s} = (1,\ 0,\ 2)$, $\quad \vec{s}\cdot\vec{u} = 4$, $\quad |\vec{s}|^2 = 5$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}|^2}\cdot\vec{s} = \frac{4}{5}\cdot\vec{s} = \left(\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{8}{5}\right) = (0.8,\ 0,\ 1.6)$$

2) $\vec{u} = (2,\ -2,\ 1)$, $\quad \vec{s} = (0,\ 2,\ 1)$, $\quad \vec{s}\cdot\vec{u} = -3$, $\quad |\vec{s}|^2 = 5$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}|^2}\cdot\vec{s} = -\frac{3}{5}\cdot\vec{s} = \left(0,-\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5}\right) = (0,\ -1.2,\ -0.6)$$

3) $\vec{u} = (2,\ -2,\ 1)$, $\quad \vec{s} = (1,\ -2,\ 0)$, $\quad \vec{s}\cdot\vec{u} = 6$, $\quad |\vec{s}|^2 = 5$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}|^2}\cdot\vec{s} = \frac{6}{5}\cdot\vec{s} = \left(\frac{6}{5},-\frac{12}{5},\ 0\right) = (1.2,\ -2.4,\ 0)$$

Aufgabe 461:

Wie groß ist der Winkel β zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und der y-Achse.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 462:

Berechnen Sie sowohl das Vektorprodukt, wie auch das Skalarprodukt folgender Vektoren:

(a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-5\end{pmatrix},$ (b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}$

(c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\\-5\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ (d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-1\\\frac{5}{6}\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}8\\-12\\10\end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\vec{b}=3\cdot(-2)+3\cdot(-2)+(-1)\cdot(-5)=-6-6+5=-7$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & 2 & -2\\ \vec{e}_2 & 3 & -2\\ \vec{e}_3 & -1 & -5\end{vmatrix}=\vec{e}_1\cdot(-15-2)-\vec{e}_2\cdot(-10-2)+\vec{e}_3(-4+6)=\begin{pmatrix}-17\\12\\2\end{pmatrix}$$

(b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\vec{b}=3\cdot 0+(-1)\cdot 5+0\cdot(-2)=-5$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & 3 & 0\\ \vec{e}_2 & -1 & 5\\ \vec{e}_3 & 0 & -2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\15\end{pmatrix}$$

(c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\\-5\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\vec{b}=10,\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & 4 & 0\\ \vec{e}_2 & 3 & 0\\ \vec{e}_3 & -5 & -2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix}$

(d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-1\\\frac{5}{6}\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}8\\-12\\10\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\vec{b}=\frac{16}{3}+12+\frac{50}{6}=\frac{41}{3}+12=\frac{77}{3}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \frac{2}{3} & 8\\ \vec{e}_2 & -1 & -12\\ \vec{e}_3 & \frac{5}{6} & 10\end{vmatrix}=\vec{e}_1\underbrace{\left(-10+\tfrac{5}{6}\cdot 12\right)}_{0}-\vec{e}_2\underbrace{\left(\tfrac{2}{3}\cdot 10-\tfrac{5}{6}\cdot 8\right)}_{0}+\vec{e}_3\underbrace{\left(-\tfrac{2}{3}\cdot 12+8\right)}_{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 463:

Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms welches durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\+5\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\+2\end{pmatrix}$

Lösung:

Kreuzprodukt:

$$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 * b_2 \\ a_3 * b_1 - a_1 * b_3 \\ a_1 * b_2 - a_2 * b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ +5 \\ -3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ +2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 * 2 - (-3) * (-2) \\ (-1) * 2 - (-3) * (-4) \\ (-1) * (-2) - 5 * (-4) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 - 6 \\ -2 - 12 \\ +2 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 \\ -14 \\ +22 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Flächeninhalts = $|\vec{a} \times \vec{b}|$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{n}|$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} +4 \\ -14 \\ +22 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Betrags des Vektors $\vec{n}$

$|\vec{n}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

$|\vec{n}| = \sqrt{(4^2 + (-14)^2 + 22^2)}$

$|\vec{n}| = \sqrt{696} = 26{,}381.....$

Aufgabe 464:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, welches durch die Punkte A, B und C festgelegt ist.

$A(3 \mid 1 \mid 1)$, $B(4 \mid -1 \mid -1)$, $C(3 \mid -1 \mid 0)$

Lösung:

Berechne zuerst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Setze in die Formel für die Fläche eines Dreiecks im Dreidimensionalen ein: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Berechne das Kreuzprodukt und dann den Betrag des Vektors.

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 + 1 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Aufgabe 465:

Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spats.

Lösung:

$$V = \left| \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = |0 \cdot 1 + (-8) \cdot 1 + 16 \cdot 3| = |40| = 40\, VE.$$

Aufgabe 466:

Gegeben sind zwei Punkte A(4|3|7) und B(6|4|5). Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, auf der die Punkte A und B liegen.

Lösung:

Wir benötigen einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor.

Aufpunkt: Hier nehmen wir A (Man könnt auch B nehmen).

Richtungsvektor:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 467:

Gegeben sind zwei Punkte A(2|3|45) und B(5|6|7). Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, auf der die Punkte A und B liegen.

Lösung:

Wir benötigen einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor.

Aufpunkt: Hier nehmen wir A (Man könnt auch B nehmen).

Richtungsvektor:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -38 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 45 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -38 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 468:

Wie lautet der Punkt für s=2 der auf der Geraden liegt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt lautet:

$P(4|7|-3)$

Aufgabe 469:

Stellen sie aus den Punkten A(3|6|6), B(1|6|6) und C(7|1|2) eine Gleichung der Ebene E in Parameterform auf:

Lösung:

Für eine Ebene in Parameterform brauchen wir einen Aufpunkt und zwei Richtungsvektoren. Die beiden Richtungsvektoren erhalten wir aus jeweils zwei Punkten.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Ebene:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 470:

Stellen sie aus den Punkten A(1|8|-5), B(1|-4|-6) und dem Richtungsvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Gleichung der Ebene E in Parameterform auf:

Lösung:

Für eine Ebene in Parameterform brauchen wir einen Aufpunkt und zwei Richtungsvektoren. Den fehlenden Richtungsvektor erhält man aus den zwei gegebenen Punkten.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 471:

Gegeben ist eine Ebene E durch ihre Gleichung. Liegt ein gegebener Punkt P in der Ebene?

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P(-1|2|0)$$

Lösung:

P liegt genau dann in E, wenn die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ komplanar sind:

$$D = \left|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AP}\right| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$D = -8 - 10 + 4 + 2 + 20 - 8 = 0$$

Also sind diese Vektoren linear abhängig,
d.h. P liegt in E.

Aufgabe 472:

Wandeln Sie die Ebene E von der Parameterform in die Koordinatenform um.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 - 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In die Koordinatengleichung den Aufpunkt einsetzen.

$$x_1 + x_2 - x_3 = d$$

$$1 + 2 - 4 = -1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$$

Aufgabe 473:

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

$$E: \quad 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 36, \quad P(-2|4|-3)$$

Lösung:

BEISPIEL a: E: $4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 36$, $P(-2|4|-3)$

Division durch den Betrag von $\vec{n}$ erzeugt die HNF:

$$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

HNF: $$\frac{4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 36}{9} = 0$$

Achtung: Dies ist immer noch die Normalengleichung einer Ebene. Und wenn man einen Punkt der Ebene E einsetzt, dann ergibt sich eine wahre Aussage, also 0 auf der rechten wie linken Seite. Nun setzen wir links P ein und erhalten

$$d(P,E) = \left|\frac{-8-16-21-36}{9}\right| = \left|\frac{-81}{9}\right| = 9$$

Ich mußte zusätzlich Betragsstriche verwenden, weil sich sonst ein negativer Abstand ergeben hätte.

Aufgabe 474:

Gegeben ist die Ebene E durch ihre Koordinatengleichung. Bestimmen Sie eine Parameterform sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

$$E: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

Lösung:

$E: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

Parametergleichung:

Auflösen nach x_3: $x_3 = 12 - 2x_1 - 2x_2$

Wähle daher $x_1 = r,\ r \in \mathbf{R}$ und $x_2 = s,\ s \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow x_3 = 12 - 2r - 2s$.

Allgemeiner Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 12-2r-2s \end{pmatrix} \Rightarrow E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

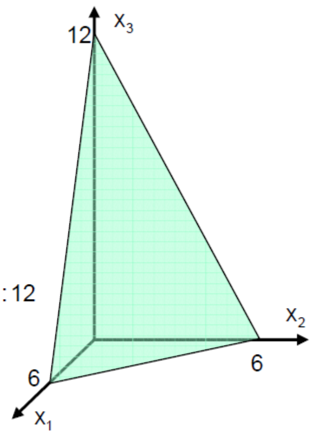
Achsenabschnittsform: $E: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \quad |:12$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{12} = 1$$

Schnittpunkt mit der x_1 - Achse: $S_1(6|0|0)$,

Schnittpunkt mit der x_2 - Achse: $S_2(0|6|0)$,

Schnittpunkt mit der x_3 - Achse: $S_3(0|0|12)$.



Aufgabe 475:

Berechnen Sie den Abstand der folgenden Punkte.

$A(2 \mid -2 \mid 1),\ B(4 \mid -4 \mid 2)$

Lösung:

Setze die beiden Punkte in die Formel $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ein.

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-4-(-2))^2 + (2-1)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Aufgabe 476:

Berechne den Abstand des Punktes $P(3|2|1)$ von der Geraden $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Man setzt die Werte in die Formel ein:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}}$$

↓ Berechne die Vektordifferenz und die Summe unter der Wurzel.

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{6}}$$

↓ Berechne das Vektorprodukt.

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -2-4 \\ -2-6 \\ 12-2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{6}}$$

↓ Berechne den Betrag des Vektors.

$$= \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2 + 10^2}}{\sqrt{6}}$$

↓ Vereinfache den Zähler.

$$= \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{6}}$$

↓ Vereinfache.

$$= \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 477:

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

$$E: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \quad P\,(1 \mid -3 \mid 1)$$

Lösung:

Berechne zuerst den Normalenvektor der Ebene E.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

Setze die Werte in die Formeln ein.

$$d = \left| \frac{\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]}{\left|\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}\right|} \right|$$

↓ Berechne das Skalarprodukt und den Betrag des Vektors.

$$= \left| \frac{(-5)\cdot(-3-1)}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} \right|$$

↓ Fasse zusammen.

$$= \left| \frac{20}{\sqrt{4+25+1}} \right|$$

$$= \left| \frac{20}{\sqrt{30}} \right|$$

$$= \frac{20}{\sqrt{30}}$$

Aufgabe 478:

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

$$P\,(4 \mid 3 \mid 1), \quad E: 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$

Lösung:

Bestimme zunächst die Einträge des Normalenvektors der Ebene E.
Diese stimmen mit den jeweiligen Koeffizienten von x_1, x_2 und x_3 überein.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechne den Betrag des Normalenvektors.

$$\left|\vec{n}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

Stelle nun die Gleichung der Ebene E in Hessenormalform auf.

$$\text{HNF}\,(E):\ \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5) = 0$$

Setze nun den Ortsvektor des Punktes P in die Hessenormalform der Ebene E ein,
um den Abstand zu bestimmen.

$$\begin{aligned} d\,(0; E) &= \left|\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (3 \cdot 4 + 3 - 2 \cdot 1 - 5)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 8\right| \\ &= \frac{8}{\sqrt{14}} \\ &\approx 2{,}138 \end{aligned}$$

Aufgabe 479:

Berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen.

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\quad F:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eine Ebene in die Koordinatenform umwandeln und anschließend Abstand Punkt Ebene berechnen.

$$\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ E:\ \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Wandle die Ebene in Koordinatenform um.

$$E:\ -2x_1 - 7x_2 - x_3 + 14 = 0$$

Abstandsberechnung mittels der Hesse'schen Form.

$$h = \frac{-2 \cdot 3 - 7 \cdot (-1) - (-2) + 14}{\sqrt{54}} = \frac{17}{\sqrt{54}}$$

Aufgabe 480:

Berechnen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Umwandlung in die Koordinatenform

$$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wandle die Hilfsebene in Koordinatenform um.

$$H: \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$H: -9x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 5 = 0$$

Abstandsberechnung mittels der Hesse'schen Form.

$$h = \frac{-9 \cdot 14 - 6 \cdot 4 - 7 \cdot 3 + 5}{\sqrt{54}} = \frac{166}{\sqrt{166}} = \sqrt{166}$$

Aufgabe 481:

Welche Lage haben die beiden Geraden zueinander?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der beiden Geraden ist gleich (linear abhängig).

Deshalb sind die beiden Geraden entweder identisch oder parallel.

Überprüfung durch Einsetzen des Aufpunktes der einen Gerade in die andere Gerade:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich drei Gleichungen:

$$1 = 4 + 3s$$

$$s = -1$$

In die beiden anderen Gleichungen einsetzen:

$$-1 = -1 - 4s$$

$$-1 = -1 - 4 \cdot (-1)$$

$$-1 = -3$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Die beiden Geraden sind deshalb parallel.

Aufgabe 482:

Welche Lage haben die beiden Geraden zueinander?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der beiden Geraden ist linear unabhängig.

Deshalb sind die beiden Geraden entweder windschief oder sie schneiden sich in einem Punkt.

Die beiden Geraden gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich drei Gleichungen:

$8 + s = 7 + 5t$

$4 + 3s = 7 + t$

$2 + 7s = 8 + 4t$

$s - 5t = -1$

$3s - t = 3$

$7s - 4t = 6$

Die zweite Gleichung nach t auflösen und in die erste Gleichung einsetzen:

$3s - t = 3$

$t = 3s - 3$

$s - 5t = -1$

$s - 5(3s - 3) = -1$

$s - 15s + 15 = -1$

$-14s = -16$

$s = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

t berechnen:

$s = \frac{8}{7}$

$t = 3s - 3$

$t = 3\left(\frac{8}{7}\right) - 3 = \frac{24}{7} - \frac{21}{7} = \frac{3}{7}$

S und t in die dritte Gleichung einsetzen:

$7s - 4t = 6$

$7\left(\frac{8}{7}\right) - 4\left(\frac{3}{7}\right) = 6$

$\frac{54}{7} - \frac{12}{7} = 6$

$\frac{42}{7} = 6$

$6 = 6$

Damit sind alle drei Bedingungen erfüllt, somit schneiden sich die beiden Geraden.

Berechnung des Schnittpunktes:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{8}{7}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{64}{7} \\ \frac{52}{7} \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt lautet:

$S\left(\frac{64}{7} \middle| \frac{52}{7} \middle| 10\right)$

Aufgabe 483:

Welche Lage haben die beiden Geraden zueinander?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der beiden Geraden ist linear unabhängig.

Deshalb sind die beiden Geraden entweder windschief oder sie schneiden sich in einem Punkt.

Die beiden Geraden gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich drei Gleichungen:

$1 + 4s = 9 - 4t$

$-2 - 7s = -5 - 4t$

$8 - 8s = 3 + 3t$

$4s + 4t = 8$

$-7s + 4t = -3$

$-8s - 3t = -5$

Die erste Gleichung nach s auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen:

$4s + 4t = 8$

$s = 2 - t$

$-7s + 4t = -3$

$-7(2 - t) + 4t = -3$

$-14 + 7t + 4t = -3$

$11t = 11$

$t = 1$

s berechnen:

$s = 2 - t$

$s = 2 - 1 = 1$

In die dritte Gleichung einsetzen:

$-8s - 3t = -5$

$-8 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -5$

$-5 = -5$

Die Bedingung ist wahr, deshalb ergibt sich ein Schnittpunkt.

Berechnung des Schnittpunktes:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$s = 1$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat folgende Koordinaten:

$S(5|-9|0)$

Aufgabe 484:

Berechnen Sie die Spurpunkte der Geraden g, die sich mit den Koordinatenebenen ergeben:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Mit der x-y-Ebene:

$z = 0$

Daraus folgt aus der letzten Zeile der Geradengleichung:

$0 = 7 + 4s$

$$s = -\frac{7}{4}$$

In die Geradengleichung eingesetzt:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{38}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{19}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt lautet:

$$S\left(2\left|\frac{19}{2}\right|0\right)$$

Mit der x-z-Ebene:

$y = 0$

Daraus folgt aus der zweiten Zeile der Geradengleichung:

$0 = 1 + 6s$

$s = -\frac{1}{6}$

In die Geradengleichung eingesetzt:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt lautet:

$S(2|0|\frac{19}{3})$

Mit der y-z-Ebene:

$x = 0$

Daraus folgt aus der ersten Zeile der Geradengleichung:

$0 = 2$

Widerspruch, also keinen Schnittpunkt.

Aufgabe 485:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich drei Gleichungen:

$$7 + 8t = 3 - 2s + 5r$$

$$2 + 4t = -8 - 2s + 3r$$

$$-2 + 19t = 1 + s + 9r$$

$$-2s + 5r - 8t = 4$$

$$-2s + 3r - 4t = 10$$

$$s + 9r - 19t = -3$$

Vertauschen der ersten und der dritten Gleichung:

$$s + 9r - 19t = -3$$

$$-2s + 3r - 4t = 10$$

$$-2s + 5r - 8t = 4$$

Erste Gleichung mal 2 und zur zweiten Gleichung addieren:

$$s + 9r - 19t = -3$$

$$21r - 42t = 4$$

$$-2s + 5r - 8t = 4$$

Erste Gleichung mal 2 und zur dritten Gleichung addieren:

$s + 9r - 19t = -3$

$21r - 42t = 4$

$23r - 46t = -2$

Zweite Gleichung mal (-23) die dritte Gleichung mal (21) und addieren.

$0 = -134$

Widerspruch, also schneiden Sie sich nicht.

Aufgabe 486:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich drei Gleichungen:

$11 + t = 3 - 2s + 5r$

$-4 - t = -8 - 2s + 3r$

$20 + 11t = 1 + s + 9r$

$-2s + 5r - t = 8$

$-2s + 3r + t = 4$

$s + 9r - 11t = 19$

Vertauschen der ersten und der dritten Gleichung:

$s + 9r - 11t = 19$

$-2s + 3r + t = 4$

$-2s + 5r - t = 8$

Erste Gleichung mal 2 und zur zweiten Gleichung addieren:

$s + 9r - 11t = 19$

$21r - 21t = 42$

$-2s + 5r - t = 8$

Erste Gleichung mal 2 und zur dritten Gleichung addieren:

$s + 9r - 11t = 19$

$21r - 21t = 42$

$23r - 23t = 46$

Zweite Gleichung mal (-23), dritte Gleichung mal (21)und addieren

$s + 9r - 11t = 19$

$0 = 0$

Allgemein gültig, d.h. die Gerade liegt in der Ebene.

Aufgabe 487:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich drei Gleichungen:

$7 + t = 3 - 2s + 5r$

$2 - t = -8 - 2s + 3r$

$2 + t = 1 + s + 9r$

$-2s + 5r - t = 4$

$-2s + 3r + t = 10$

$s + 9r - t = 1$

Die erste und die dritte Gleichung tauschen:

$s + 9r - t = 1$

$-2s + 3r + t = 10$

$-2s + 5r - t = 4$

Die erste Gleichung mal (2) und auf die zweite addieren:

$s + 9r - t = 1$

$21r - t = 12$

$-2s + 5r - t = 4$

Die erste Gleichung mal (2) und auf die dritte Gleichung addieren:

$s + 9r - t = 1$

$21r - t = 12$

$23r - 3t = 6$

Die zweite Gleichung mal 23, die dritte mal (-21) und addieren.

$40t = 150$

$t = \frac{150}{40} = \frac{15}{4}$

Den errechneten t-Wert in die Geradengleichung einsetzen:

$$\mathrm{g}: \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{15}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{4} \\ \frac{26}{4} \\ \frac{34}{4} \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist:

$$S\left(\frac{43}{4}\middle|\frac{26}{4}\middle|\frac{34}{4}\right)$$

Lineare Abbildungen

Aufgabe 488:

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenvektoren dieser Matrix.

Lösung:

1.1) Rechenansatz aufstellen

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1.2) Ausmultiplizieren

$$3 \cdot x + 0 \cdot y = \lambda \cdot x$$
$$-9x + 6 \cdot y = \lambda \cdot y$$

1.3) Alle Terme auf die linke Seite bringen

$$(3 - \lambda) \cdot x + 0 \cdot y = 0$$
$$-9 \cdot x + (6 - \lambda) \cdot y = 0$$

1.4) Charakteristisches Polynom berechnen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (3 - \lambda) & 0 \\ -9 & (6 - \lambda) \end{vmatrix}$$
$$= (3 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) - (-9) \cdot 0$$
$$= \lambda^2 - 9\lambda + 18$$

1.5) Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen

Mithilfe der Mitternachtsformel berechnen wir die Nullstellen dieser quadratischen Gleichung zu

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 6$

Dabei handelt es sich um die beiden Eigenwerte der Matrix A.

$\lambda_1 = 3$

$$\begin{aligned} (3-3)\cdot x + 0 \cdot y &= 0 \\ -9 \cdot x + (6-3)\cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Das können wir vereinfachen zu

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -9 \cdot x + 3 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Bei der 1. Gleichung handelt es sich um eine allgemeingültige Gleichung. Wir können sie deshalb weglassen. Übrig bleibt eine Gleichung mit zwei Variablen. Es gibt folglich unendlich viele Lösungen.

Eine spezielle Lösung erhalten wir, wenn wir für x oder y einen beliebigen Wert einsetzen.

Wir setzen $x = 1$ ein und erhalten:

$-9 \cdot 1 + 3 \cdot y = 0$

Wir lösen die Gleichung nach y auf und erhalten $y = 3$.

Der Eigenvektor ist also

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$