Tutorium Statistik

Berufsbegleitende Studiengänge

Bodensee Campus Konstanz

Dozent

Dipl. Mathematiker (FH)

Roland Geiger

Aufgabe 1:

Um das Sozialverhalten von Studenten besser einschätzen zu können, werden 8 Studenten danach befragt, wie viele Personen sie zu ihrer letzten Geburtstagsfeier eingeladen haben. Es wurden folgende Angabe gemacht (ein Wert pro befragten Studenten):

10 10 34 16 1 16 0 150

a) Bestimmen Sie die Extremwerte (Maximum, Minimum) und den Modalwert.
b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel.
c) Berechnen Sie den Median
d) Berechnen Sie das untere und obere Quartil.

Lösung:

Geordnete Liste:

0 1 10 10 16 16 34 150

a) Min=0; Max=150

b) Mittelwert=29,625

c) Median=13

d) Q_u=5,5; Q_o=25

Aufgabe 2:

Zwischen den Kosten/Stück und der Produktionshöhe existiert ein Zusammenhang, der sich wie folgt darstellt:

Produkt	Kosten pro Stück	Stückzahl
A	2,5	320
B	1,0	500
C	2,5	300
D	5,8	80
E	3,0	350
F	4,0	120
G	3,0	300
H	4,3	90
J	3,0	400

a) Stellen Sie eine lineare Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen Kosten/Stück und der Produktionshöhe darstellt.

b) Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung: a)

xi	yi			x²	y²	x²*y²
2,5	320	-0,73	46,67	0,54	2177,78	-34,22
1	500	-2,23	226,67	4,99	51377,78	-506,22
2,5	300	-0,73	26,67	0,54	711,11	-19,56
5,8	80	2,57	-193,33	6,59	37377,78	-496,22
3	350	-0,23	76,67	0,05	5877,78	-17,89
4	120	0,77	-153,33	0,59	23511,11	-117,56
3	300	-0,23	26,67	0,05	711,11	-6,22
4,3	90	1,07	-183,33	1,14	33611,11	-195,56
3	400	-0,23	126,67	0,05	16044,44	-29,56
3,23	273,33			14,54	171400,00	-1423,00

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{-1423{,}00}{14{,}54} = -97{,}868$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 273{,}33 + (-97{,}868)\cdot 3{,}23 = -42{,}78$$

b)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{1=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\text{-}1423{,}00}{\sqrt{14{,}54\cdot 171400}} = \frac{\text{-}1423{,}00}{1578{,}66} = -0{,}9014$$

r=-1 maximaler reziproker Zusammenhang, d.h. mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nehmen die Y-Werte tendenziell ab, wenn die Werte der Variablen X zunehmen.

Aufgabe 3:

Die Häufigkeitstabelle zeigt die Anzahl der Kunden an der Kasse im Supermarkt in 30 aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten von je 10 Minuten.

Anz. d. Kunden	0	2	3	4	5	6	7	9
abs. Häufigkeit	1	3	4	5	8	3	2	4

Berechnen Sie den Median und das arithmetische Mittel.

Lösung:

Median:

0 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5
5 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 9 9 9 9

$\Rightarrow \underline{\underline{x_{Med} = 5}}$

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i \cdot n_i$ mit r = 8 Merkmalsausprägungen x_i

$(n_i =$ abs. Häufigkeit von $x_i)$

$\bar{x} = \frac{1}{30}(0\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 8 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2 + 9\cdot 4) = \frac{146}{30} \approx \underline{\underline{4{,}87}}$

Im Durchschnitt standen in jedem Zeitabschnitt 5 Personen an der Kasse, das entspricht dem Median $x_{Med} = 5$

Aufgabe 4:

Ein Händler für Bürotechnik verkauft in den Jahren 2000 und 2001 drei Arten von Kopierern in folgenden Mengen:

Jahr	Typ A		Typ B		Typ C	
	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis
2000	32	2000	15	5000	4	25000
2001	28	2100	18	4800	5	24000
2002	32	2200	19	4500	6	26000
2003	44	3000	25	5100	8	33000

Bestimmen Sie jeweils den Preis und Mengenindex zu Laspeyres und Paasche zum Basisjahr 2000 und dem Berichtsjahr 2001.

Lösung:

Laspeyres: $$IP_0^t(L) = \frac{67200 + 72000 + 96000}{64000 + 75000 + 100000} = \frac{235200}{239000} = 0{,}9841$$

$$IM_0^t(L) = \frac{56000 + 90000 + 125000}{64000 + 75000 + 100000} = \frac{271000}{239000} = 1{,}1339$$

Paasche: $$IP_0^t(P) = \frac{58800 + 86400 + 120000}{56000 + 90000 + 125000} = \frac{265200}{271000} = 0{,}9786$$

$$IM_0^t(P) = \frac{58800 + 86400 + 120000}{67200 + 72000 + 96000} = \frac{265200}{235200} = 1{,}1276$$

Aufgabe 5:

In der schriftlichen Abiturarbeit im Fach Biologie gab es folgende Noten:

3; 4; 3; 2; 3; 1; 5; 5; 4; 3; 3; 2; 1; 4; 2; 5; 4; 2; 4; 3

a) Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle und berechnen Sie die absoluten Häufigkeiten, relativen Häufigkeiten, absoluten Summenhäufigkeiten und die relativen Summenhäufigkeiten.

Lösung:

Note	abs. Häufigkeit	rel. Häufigkeit	abs. Summen-häufigkeit	rel. Summen-häufigkeit
1	2	0,1	2	0,1
2	4	0,2	6	0,3
3	6	0,3	12	0,6
4	5	0,25	17	0,85
5	3	0,15	20	1,0
Summe	20	1,0		

Aufgabe 6:

In einem Düngeversuch mit k=9 Düngungsstufen x_i erhielt man Erträge y_i. Im (X, Y)-Koordinatensystem zeigt sich, dass die Vermutung des linearen Verlaufs berechtigt ist. Wertetabelle zum Düngungsversuch:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
y_i	22,0	17,5	27,0	23,0	25,0	22,5	33,0	26,0	35,0

Berechnen Sie Regressionsgerade. (y = 12,317 + 2,967x)

Lösung:

Regressionskoeffizient: b = 2,967

Regressionskonstante: a = 12,317

Aufgabe 7:

Für den Preisindex für die Lebenshaltung liegen für das Basisjahr 1991 und das Basisjahr 1995 folgende Werte (in %) vor:

Jahr t:	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
${}_{L}P_{95,t}$					100	101,4	103,3	104,3
${}_{L}P_{91,t}$	100	105,8	109,8	112,8	114,8			

Berechnen Sie

a) durch rein rechnerische Verkettung für 1998 den Wert des Preisindex auf Basis 1991.

b) durch rein rechnerische Verkettung für 1992 den Wert des Preisindex auf Basis 1995.

Lösung:

Jahr t:	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
${}_{L}P_{95,t}$	87,11	92,16	95,64	98,26	100	101,4	103,3	104,3
${}_{L}P_{91,t}$	100	105,8	109,8	112,8	114,8	116,41	118,59	119,74

Aufgabe 8:

Jahr	Äpfel		Birnen	
	Menge	Preis	Menge	Preis
2004	100	1,0	100	2,0
2005	120	1,1	90	2,4
2006	150	1,3	75	2,8

a) Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres zwischen den Jahren 2004 und 2005.

b) Berechnen Sie den Preisindex nach Paasche zwischen den Jahren 2004 und 2005.

c) Berechnen Sie den Fisher-Index der Preissteigerung zwischen den Jahren 2004 und2005.

Lösung:

$$p^L = \frac{1{,}1 * 100 + 2{,}4 * 100}{1 * 100 + 2 * 100} = 1{,}1667$$

$$p^P = \frac{1{,}1 * 120 + 2{,}4 * 90}{1 * 120 + 2 * 90} = 1{,}16$$

$$p^F = \sqrt{p^P \cdot p^L} = \sqrt{1{,}16 * 1{,}1667} = 1{,}1633$$

Aufgabe 9:

Zwischen dem Alter eines Menschen in Jahren (x) und dessen Ohrendurchmesser in cm (y) wird ein Zusammenhang angenommen. Anhand der folgenden Daten sollen Sie diesen Zusammenhang überprüfen.

x	**23**	**59**	**37**	**46**	**29**	**21**	**42**	**51**	**39**	**55**
y	**5,0**	**6,8**	**5,8**	**5,9**	**5,2**	**5,3**	**6,0**	**6,4**	**5,6**	**6,2**

a) Berechnen und interpretieren Sie den Korrelationskoeffizienten!

b) Berechnen Sie die Regressionsgerade.

Lösung:

	x	y	$x-x_q$	$y-y_q$	$(x-x_q)*(y-y_q)$	$(x-x_q)^2$	$(y-y_q)^2$
	23	5,0	-17,2	-0,8	14,104	295,84	0,6724
	59	6,8	18,8	1,0	18,424	353,44	0,9604
	37	5,8	-3,2	0,0	0,064	10,24	0,0004
	46	5,9	5,8	0,1	0,464	33,64	0,0064
	29	5,2	-11,2	-0,6	6,944	125,44	0,3844
	21	5,3	-19,2	-0,5	9,984	368,64	0,2704
	42	6,0	1,8	0,2	0,324	3,24	0,0324
	51	6,4	10,8	0,6	6,264	116,64	0,3364
	39	5,6	-1,2	-0,2	0,264	1,44	0,0484
	55	6,2	14,8	0,4	5,624	219,04	0,1444
Summe	402	58,2			62,46	1527,6	2,856
Mittelwert	40,2	5,82					

a) $$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{62{,}46}{\sqrt{1527{,}6 \cdot 2{,}856}} = 0{,}9456$$

r=+1 maximaler gleichgerichteter Zusammenhang, d.h. mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nehmen die Werte der Variablen Y tendenziell zu, wenn die X-Werte zunehmen.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) \cdot (y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{62{,}46}{1527{,}6} = 0{,}041$$

b) $a = \bar{y} - b\bar{x} = 5{,}82 - 0{,}041 \cdot 40{,}2 = 4{,}172$

$y = a + b \cdot x = 4{,}172 + 0{,}041x$

Lösung:

Tutorium Mathematik

Berufsbegleitende Studiengänge

Bodensee Campus Konstanz

Dozent

Dipl. Mathematiker (FH)

Roland Geiger

Aufgabe 10:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Führen Sie folgende Rechenoperation durch:

$A + B$

Lösung:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Führen Sie folgende Rechenoperation durch:

$A - B$

Lösung:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Führen Sie folgende Rechenoperation durch:

$2 \cdot A + B$

Lösung:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$2 \cdot A + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Führen Sie folgende Rechenoperation durch:

$2 \cdot A - B$

Lösung:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$2 \cdot A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14:

Folgende Matrizen sind gegeben:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Führen Sie folgende Rechenoperation durch:

$A + B$

Lösung:

Da die beiden Matrizen nicht den gleichen Typ besitzen, kann die Addition nicht durchgeführt werden.

Aufgabe 15:

Transponieren Sie folgende Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie folgende Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

Aufgabe 17:

Für welchen Wert für t wird diese Determinante 0

$$D = \begin{vmatrix} t & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ t & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} t & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ \mathrm{t} & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} t & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ \mathrm{t} & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} t & 2 \\ 1 & 0 \\ t & 2 \end{matrix} = 0 + 6t + 6 - 0 - 6t - 4 = 2$$

Es gibt keinen Wert für t, damit diese Determinante Null wird.

Aufgabe 18:

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} = 0 + 12 - 4 + 0 - 0 - 0 = 8$$

Aufgabe 19:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Führen Sie folgende Rechenoperation durch:

$A \cdot B$

Lösung:

$$A \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 17 & 13 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Führen Sie folgende Rechenoperation durch:

$A \cdot B$

Lösung:

$$A \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21:

Zwei Studentinnen, Andrea und Olga, verbrauchen wöchentlich unterschiedlich viele Beauty-Produkte. Der wöchentliche Verbrauch der beiden sieht wie folgt aus (Angabe in Mengeneinheiten; ME):

Woche 1:

Andrea**:** 4 ME Lipgloss, 8 ME Nagellack, 12 ME Haarspray
Olga**:** 3 ME Lipgloss, 6 ME Nagellack, 8 ME Haarspray

Woche 2:

Andrea**:** 2 ME Lipgloss, 10 ME Nagellack, 7 ME Haarspray
Olga**:** 5 ME Lipgloss, 8 ME Nagellack, 3 ME Haarspray

Woche 3:

Andrea**:** 6 ME Lipgloss, 7 ME Nagellack, 9 ME Haarspray
Olga**:** 4 ME Lipgloss, 3 ME Nagellack, 12 ME Haarspray

Woche 4:

Andrea**:** 1 ME Lipgloss, 6 ME Nagellack, 5 ME Haarspray
Olga**:** 5 ME Lipgloss, 4 ME Nagellack, 6 ME Haarspray

a) Stellen Sie den wöchentlichen Verbrauch der beiden Studentinnen in Matrizen dar.

b) Wie viele Einzelprodukte verbrauchen diese zwei innerhalb der vier Wochen? Führen Sie dazu eine Matrizenoperation durch.

c) Nehmen wir an Andrea kann ihre Produkte bei zwei Drogerien kaufen. Nun möchte Sie wissen, wo Sie ihre Produkte am günstigsten kaufen erhält. Führen Sie auch hier eine Matrixoperation durch. Die Preise pro Mengeneinheit finden Sie in der nachfolgenden Tabelle. Es kann nur eine der beiden Drogerien ausgewählt werden. Dort müssen auch alle Produkte gekauft werden.

	Tinis Beauty-Oase	Ellis Schönheitsinsel
Lipgloss	9	7
Nagellack	2	4
Haarspray	4	5

Lösung:

a)

Andrea:

$$A_{W,A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 10 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Olga:

$$O_{W,A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 12 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$V_{W,A} = A_{W,A} + O_{W,A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 10 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 12 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 20 \\ 7 & 18 & 10 \\ 10 & 10 & 21 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

c)

$$P_{A,D} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Andrea:

			9	7
			2	4
			4	5
4	8	12	4·9+ 8·2+ 12 4	4·7+ 8·4+ 12 5
2	10	7	2·9+ 10·2+ 7 4	2·7+ 10·4+ 7 5
6	7	9	6·9+ 7·2+ 9 4	6·7+ 7·4+ 9 5
1	6	5	1·9+ 6·2+ 5 4	1·7+ 6·4+ 5 5

			9	7
			2	4
			4	5
4	8	12	100	120
2	10	7	66	89
6	7	9	104	115
1	6	5	41	56

$$K_{W,D} = A_{W,A} \cdot P_{A,D} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 10 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 120 \\ 66 & 89 \\ 104 & 115 \\ 41 & 56 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht ist Tinis Beauty-Oase wesentlich billiger.

Kosten bei Tinis Beauty-Oase:100+66+104+41=311

Kosten bei Ellis Schönheitsinsel: 120+89+115+56=380

Aufgabe 22:

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Um so wenig wie möglich rechnen zu müssen, versucht man in einer Zeile oder Spalte möglichst viele Nullen zu erzeugen.

In diesem Beispiel setze ich die erste Spalte fest und erzeuge in der ersten Zeile so viel wie möglich Nullen.

Die erste Spalte mal (-1) und auf die zweite Spalte addieren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Die erste Spalte mal (-2) und auf die dritte Spalte addieren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Wir setzten jetzt die erste Zeile fest, bilden die vier Unterdeterminanten durch streichen der einzelnen Spalten. Alle Unterdeterminanten die als Schnittpunktelement Null besitzen, werden in der Rechnung Null und können weggelassen werden. Es bleibt folgende Determinante übrig.

Jetzt bilden wir die Unterdeterminante D_{11}.

Schnittpunktelement ist a_{11}, deshalb streichen wir die erste Zeile und die erste Spalte, Schnittpunktelement ist die 1 und das Vorzeichen aus der Vorzeichendeterminante ist +.

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ -1 & -7 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -63 + 2 - 10 + 35 - 12 + 3 = -45$$

Aufgabe 23:

Erzeugen Sie an der markierten Stelle Nullen und berechnen sie im Anschluss die Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Die zweite Spalte mal (-2) und auf die dritte Spalte addieren

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 + 2 = 4$$

Aufgabe 24:

Berechnen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Verfahrens nach Cramer (Cramersche Regel).

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & +z & = & 12 \\ 4x & -5y & -z & = & -4 \\ -2x & +y & +3z & = & 4 \end{array}$$

Lösung:

Berechnung der Nennerdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{matrix} = -45 + 4 + 4 - 10 + 3 - 24 = -68$$

Berechnung der drei Zählerdeterminanten:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 12 & 2 \\ -4 & -5 \\ 4 & 1 \end{matrix} = -180 - 8 - 4 + 20 + 12 + 24 = -136$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 12 \\ 4 & -4 \\ -2 & 4 \end{matrix} = -36 + 24 + 16 - 120 + 12 - 32 = -136$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 4 & -5 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{matrix} = -60 + 16 + 48 - 120 + 12 - 32 = -136$$

Berechnung der Ergebnisse:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-136}{-68} = 2$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-136}{-68} = 2$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-136}{-68} = 2$$

Aufgabe 25:

Berechnen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Verfahrens nach Cramer (Cramersche Regel).

$$\begin{array}{cccccc} x & -y & +2z & = & 100 \\ x & +y & -3z & = & 75 \\ 2x & -y & -4z & = & 50 \end{array}$$

Lösung:

Berechnung der Nennerdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -4 + 6 - 2 - 4 - 3 - 4 = -11$$

Berechnung der drei Zählerdeterminanten:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 100 & -1 & 2 \\ 75 & 1 & -3 \\ 50 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 100 & -1 \\ 75 & 1 \\ 50 & -1 \end{matrix} = -400 + 150 - 150 - 100 - 300 - 300 = -1.100$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 100 & 2 \\ 1 & 75 & -3 \\ 2 & 50 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 100 \\ 1 & 75 \\ 2 & 50 \end{matrix} = -300 - 600 + 100 - 300 + 150 + 400 = -550$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 100 \\ 1 & 1 & 75 \\ 2 & -1 & 50 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 50 - 150 - 100 - 200 + 75 + 50 = -275$$

Berechnung der Ergebnisse:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-1.100}{-11} = 100$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-550}{-11} = 50$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-275}{-11} = 25$$

Aufgabe 26:

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme (LGS) mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

$$\begin{array}{lcccl} (1): & 3x & -2y & +5z & = 13 \\ (2): & -x & +3y & +4z & = -1 \\ (3): & 5x & +6y & -z & = 3 \end{array}$$

Lösung:

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} +3 & -2 & +5 & +13 \\ -1 & +3 & +4 & -1 \\ +5 & +6 & -1 & +3 \end{pmatrix} zweite \cdot (-1);\ erste\ und\ zweite\ Gleichung\ vertauschen$$

$$\begin{pmatrix} +1 & -3 & -4 & +1 \\ +3 & -2 & +5 & +13 \\ +5 & +6 & -1 & +3 \end{pmatrix} \cdot erste\ Gleichung\ \cdot (-3)\ und\ zur\ zweiten\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} +1 & -3 & -4 & +1 \\ 0 & +7 & +17 & +10 \\ +5 & +6 & -1 & +3 \end{pmatrix} \cdot erste\ Gleichung\ \cdot (-5)\ und\ zur\ dritten\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} +1 & -3 & -4 & +1 \\ 0 & 7 & 17 & +10 \\ 0 & +21 & +19 & -2 \end{pmatrix} \cdot zweite\ Gleichung\ \cdot (-3), und\ zur\ dritten\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} +1 & -3 & -4 & +1 \\ 0 & 7 & 17 & +10 \\ 0 & 0 & -32 & -32 \end{pmatrix} \cdot$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich z=1

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich 7y=10-17 -> y=-1

Aus der dritten Gleichung ergibt sich x = 1 + 4z + 3y = 1 + 4 - 3 = 2

$L = \{(2, -1, 1\}$

Aufgabe 27:

Lösen Sie folgendes Lineares Gleichungssystem:

$$x + y - z = 6$$
$$-x + 2y + 3z = 7$$
$$2x - 3y + 2z = 5$$

Lösung:

I:	$x + y - z = 6$	$\vert\cdot 3$			$\vert\cdot 2$
II:	$-x + 2y + 3z = 7$				
III:	$2x - 3y + 2z = 5$				
$3\cdot$I:	$3x + 3y - 3z = 18$		$2\cdot$I:	$2x + 2y - 2z = 12$	
II:	$-x + 2y + 3z = 7$		III:	$2x - 3y + 2z = 5$	
$3\cdot$I + II:	$2x + 5y = 25$		$2\cdot$I + III:	$4x - y = 17$	$\vert\cdot 5$
	$20x - 5y = 85$				
	$22x = 110$			$4\cdot 5 - y = 17$	
	$x = 5$			$y = 3$	
in I:	$5 + 3 - z = 6$				
	$z = 2$				

Aufgabe 28:

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme (LGS) mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

a)

$$\begin{aligned}
(1)&: \quad x \quad +y \quad +z = 0\\
(2)&: -x \quad +y \quad = -1\\
(3)&: \quad 2x \quad -y \quad -z = 3
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(1)&: -3x \quad +2y \quad -5z = 7\\
(2)&: -2x \quad +y \quad +z = 8\\
(3)&: \quad 3y \quad +4z = 13
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
(1)&: \quad 2x \quad +y \quad z = 1\\
(2)&: \quad 4x \quad +y \quad +3z = 1\\
(3)&: -2x \quad +2y \quad +z = 7
\end{aligned}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
(1)&: \quad x \quad +y \quad +z = 0\\
(2)&: -x \quad +y \quad = -1\\
(3)&: \quad 2x \quad -y \quad -z = 3
\end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & -1 \\ +2 & -1 & -1 & +3 \end{pmatrix} \textit{erste und zweite addieren}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & +2 & 1 & -1 \\ +2 & -1 & -1 & +3 \end{pmatrix} \textit{erste } \cdot (-2) \textit{ und auf } 3 \textit{ addieren}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & +2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & +3 \end{pmatrix} \textit{zweite } \cdot (3) \textit{ und die dritte } \cdot (2)$$

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & +2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & +3 \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich: -3z = 3 ->z = -1

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich: 2y + z = -1 -> y = 0

Aus der ersten Gleichung ergibt sich: x + y +z = 0 -> x=1

$L = \{(1; 0; -1)\}$

b)

$(1): -3x \quad +2y \quad -5z = 7$
$(2): -2x \quad +y \quad +z = 8$
$(3): \quad 3y \quad +4z = 13$

Matrizenschreibeise:

$$\begin{pmatrix} -3 & +2 & -5 & +7 \\ -2 & +1 & +1 & +8 \\ 0 & +3 & +4 & +13 \end{pmatrix} erste \cdot (2), die\ zweite \cdot (-3)\ und\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} -3 & +2 & -5 & +7 \\ 0 & +1 & -13 & -10 \\ 0 & +3 & +4 & +13 \end{pmatrix} zweite \cdot (-3)\ und\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} -3 & +2 & -5 & +7 \\ 0 & +1 & -13 & -10 \\ 0 & 0 & +43 & +43 \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich: 43z = 43 ->z = 1

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich: y -13z = -10 -> y = 3

Aus der ersten Gleichung ergibt sich: -3x + 2y -5z = 7 -> x=-2

$L = \{(-2; 3; 1)\}$

c)

$(1): \quad 2x \quad +y \quad z = 1$
$(2): \quad 4x \quad +y \quad +3z = 1$
$(3): -2x \quad +2y \quad +z = 7$

Matrizenschreibeise:

$$\begin{pmatrix} +2 & +1 & +1 & +1 \\ +4 & +1 & +3 & +1 \\ -2 & +2 & +1 & +7 \end{pmatrix} erste \cdot (-2)\ und\ zur\ (2)\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} +2 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & -1 \\ -2 & +2 & +1 & +7 \end{pmatrix} erste\ zur\ (3)\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} +2 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & -1 \\ 0 & +3 & +2 & +8 \end{pmatrix} zweite \cdot (3)\ und\ zu\ (3)\ addieren$$

$$\begin{pmatrix} +2 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +5 & +5 \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich: z=1

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich: y=2

Aus der ersten Gleichung ergibt sich: x=-1

$L = \{(-1; +2; +1)\}$

Aufgabe 29:

Lösen Sie folgendes LOP mit Hilfe der grafischen Methode und bestimmen Sie den maximalen Z-Wert (verwenden Sie das Koordinatensystem im Anhang):

1) $x_1, x_2 \geq 0$

2) $4x_1 + 3x_2 \leq 600$

$2x_1 + 2x_2 \leq 320$

$3x_1 + 7x_2 \leq 840$

3) $2x_1 + 3x_2 = Z \rightarrow \text{Max}$

Lösung:

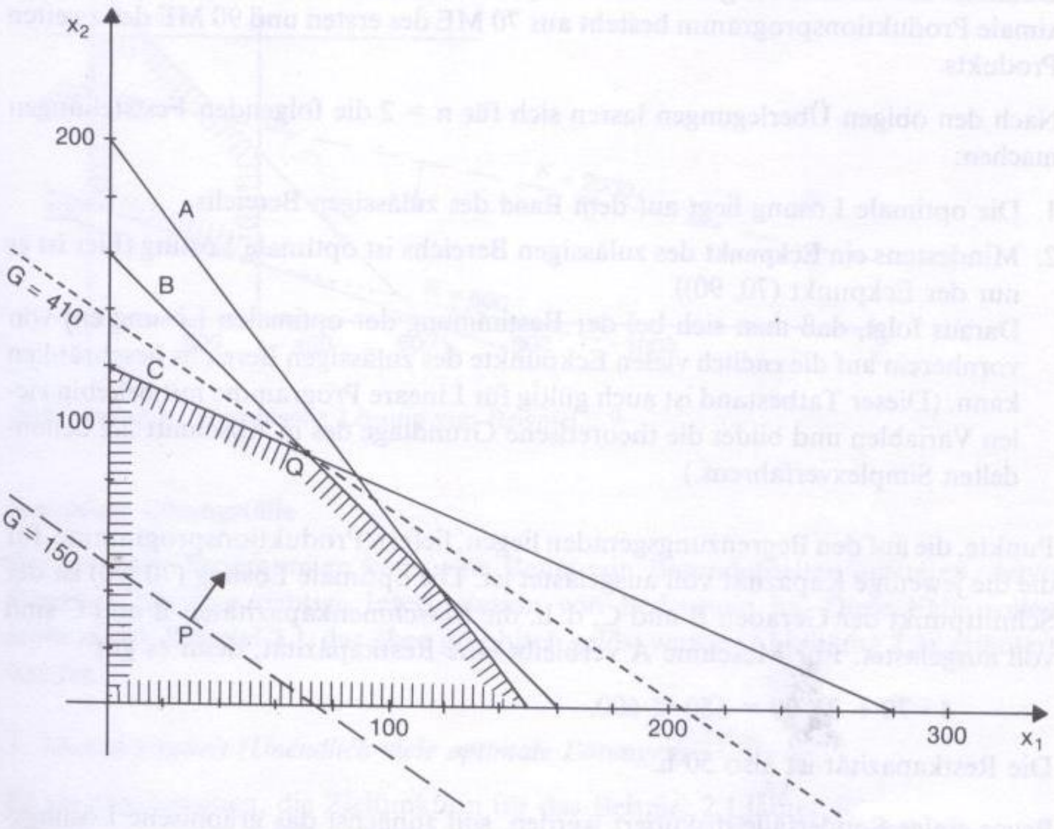
$$4x_1 + 3x_2 \leq 600$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 320$$
$$3x_1 + 7x_2 \leq 840$$
$$2x_1 + 3x_2 = G \rightarrow \text{Max}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Die Menge der zulässigen Lösungen war in Abbildung 2.1 skizziert und ist in Abbildung 2.2 noch einmal eingezeichnet.

Zur Bestimmung der optimalen Lösung betrachte man eine beliebige zulässige Lösung, beispielsweise $(x_1, x_2) = (30, 30)$. Dies ist in Abbildung 2.2 der Punkt P. Der Gewinn bei dem Produktionsprogramm (30, 30) ist $G = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 30 = 150$. Alle zulässigen Lösungen (x_1, x_2), die den Gewinn 150 liefern, liegen dann auf der Geraden

$$2x_1 + 3x_2 = 150.$$

Eine solche Gerade heißt **Isogewinngerade.** Im vorliegenden Fall ist es die gestrichelte Linie durch den Punkt P.



Man sieht unmittelbar, wie man, ausgehend von der Isogewinngeraden $G = 150$, den Gewinn erhöhen kann. Bewegt man die Gerade in die durch den Pfeil angedeutete Richtung, so erhält man Punkte, die einen größeren Gewinn liefern. Zwei zusätzliche Einheiten des ersten Produkts und drei zusätzliche Einheiten des zweiten Produkts erbringen beispielsweise den zusätzlichen Gewinn $G = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$. Aus diesen Überlegungen folgt, wie man das Lineare Programm graphisch löst:

> Man verschiebe die Isogewinngerade
>
> $2x_1 + 3x_2 = 150$
>
> parallel in Richtung des zunehmenden Gewinns bis zum Rand des zulässigen Bereichs.
> Alle so erhaltenen Randpunkte des zulässigen Bereichs sind optimale Lösungen.

Im vorliegenden Fall ist nur der Punkt Q optimal. Er hat die Koordinaten $x_1 = 70$ und $x_2 = 90$. Der maximale Gewinn ist

$$G_{max} = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 90 = 410.$$

Damit ist das Lineare Programm des Beispiels 2.1 graphisch gelöst. Das gewinnmaximale Produktionsprogramm besteht aus 70 ME des ersten und 90 ME des zweiten Produkts.

Nach den obigen Überlegungen lassen sich für $n = 2$ die folgenden Feststellungen machen:

1. Die optimale Lösung liegt auf dem **Rand** des zulässigen Bereichs.
2. Mindestens ein **Eckpunkt** des zulässigen Bereichs ist optimale Lösung (hier ist es nur der Eckpunkt (70, 90)).
   Daraus folgt, daß man sich bei der Bestimmung der optimalen Lösung(en) von vornherein auf die **endlich** vielen Eckpunkte des zulässigen Bereichs beschränken kann. (Dieser Tatbestand ist auch gültig für Lineare Programme mit beliebig vielen Variablen und bildet die theoretische Grundlage des in Abschnitt 2.2 behandelten Simplexverfahrens.)

Punkte, die auf den Begrenzungsgeraden liegen, liefern Produktionsprogramme, für die die jeweilige Kapazität voll ausgelastet ist. Die optimale Lösung (70, 90) ist der Schnittpunkt der Geraden B und C, d. h. die Maschinenkapazitäten B und C sind voll ausgelastet. Für Maschine A verbleibt eine Restkapazität, denn es gilt

$$4 \cdot 70 + 3 \cdot 90 = 550 < 600.$$

Die Restkapazität ist also 50 h.

Bevor einige Sonderfälle diskutiert werden, soll zunächst das graphische Lösungsverfahren anhand eines weiteren Beispiels geübt werden.

Aufgabe 30:

Was passiert wenn die Zielfunktion aus der Aufgabe 2 folgendermaßen geändert wird. Lösen Sie auch diese Aufgabe mit der grafischen Methode.

1) $x_1, x_2 \geq 0$

2) $4x_1 + 3x_2 \leq 600$

$2x_1 + 2x_2 \leq 320$

$3x_1 + 7x_2 \leq 840$

3) $2x_1 + 2x_2 = Z \rightarrow \text{Max}$

Lösung:

Dann fällt die „optimale" Isogewinngerade $2x_1 + 2x_2 = 320$ mit der Kapazität
$2x_1 + 2x_2 = 320$ der Maschine B zusammen (vgl. Abbildung 2.4). Die Eck
(70, 90) und (120, 40) sind optimale Lösungen sowie alle Punkte auf der Verbir
strecke, d. h. alle **x**, die sich als **Konvexkombination** ergeben. So ist beispiel

$$\mathbf{x} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}70\\90\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}120\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}95\\65\end{pmatrix}$$

ebenfalls eine optimale Lösung.

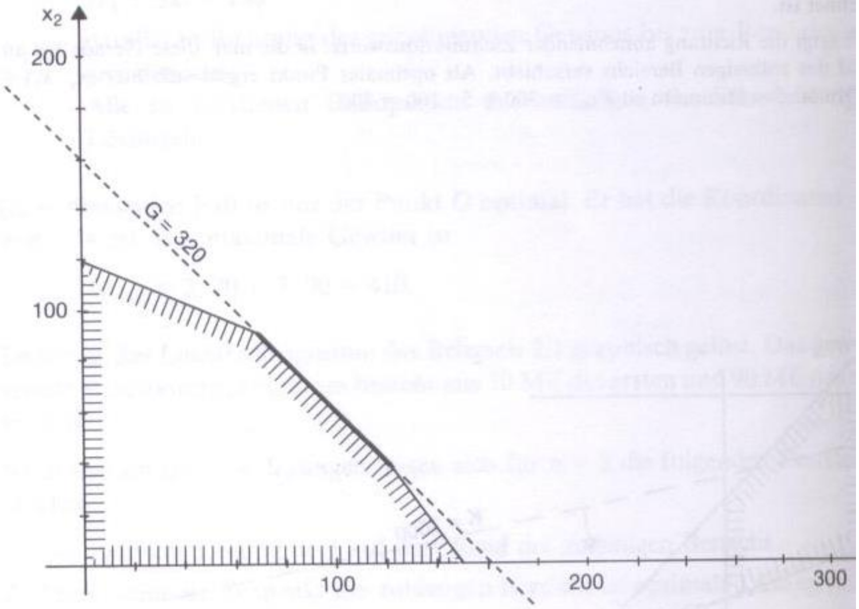


Abbildung 2.4 Mehrdeutigkeit bei Linearen Programmen

In Abbildung 2.4 ist die Strecke der optimalen Lösungen fett gezeichn
Unternehmen stehen damit unendlich viele gewinnmaximale Produktionsp
me zur Auswahl zur Verfügung. Es kann in diesem Fall weitere Entscheidu
rien für die Auswahl heranziehen, ohne daß auf die Maximierung des Gew
zichtet werden muß. Wird, z. B. aus beschäftigungspolitischen Gründen, eir
stung der Maschine C angestrebt, so wird man das Produktionsprogramm
wählen. Strebt man die Auslastung von A an, wird man (120, 40) wählen. U
ständen wird man sich aber für einen Zwischenpunkt entscheiden, der Gew
jedem Fall gleich.

2. Degeneration (Entartung)

Es sei angenommen, daß vom Maschinentyp A nicht 600 h sondern nur 5
Verfügung stehen. Dann lautet die zugehörige Nebenbedingung $4x_1 + 3x_2 \leq$
zulässige Bereich und die drei Kapazitätsgeraden sind in Abbildung 2.5 s

Aufgabe 31:

Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -4x_1 & - & 8x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 8 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

Lösung:

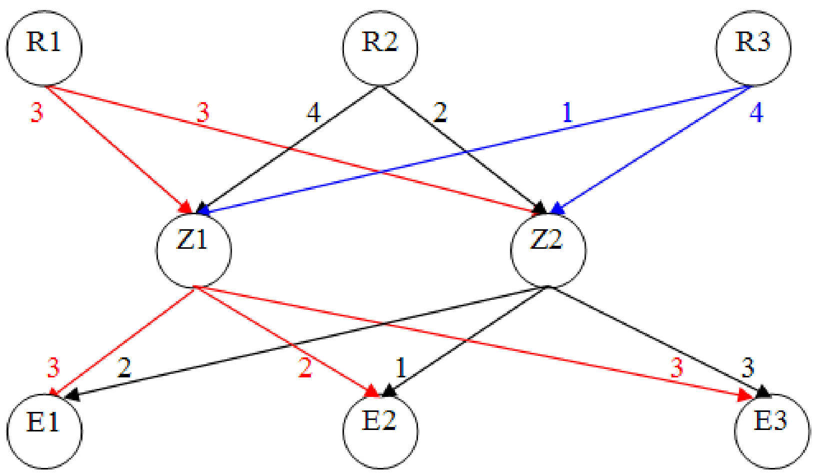
Unbekannte	Wert
x1	-6.0
x2	3.0
x3	-2.5

Aufgabe 32:

In einem Produktionsprozess werden zur Herstellung von 2 Zwischenprodukten Z1 und Z2 drei verschiedene Rohstoffe R1, R2, und R3 benötigt. Aus den beiden Zwischenprodukten entstehen dann 3 verschiedene Endprodukte E1, E2 und E3.

Der untenstehenden Figur kann entnommen werden, wie viel Mengeneinheiten der Rohstoffe für die jeweiligen Zwischenprodukte und wie viele Mengeneinheiten der Zwischenprodukte für die jeweiligen Endprodukte benötigt werden.

Gesucht ist der Rohstoffbedarf für die verschiedenen Endprodukte.



Lösung:

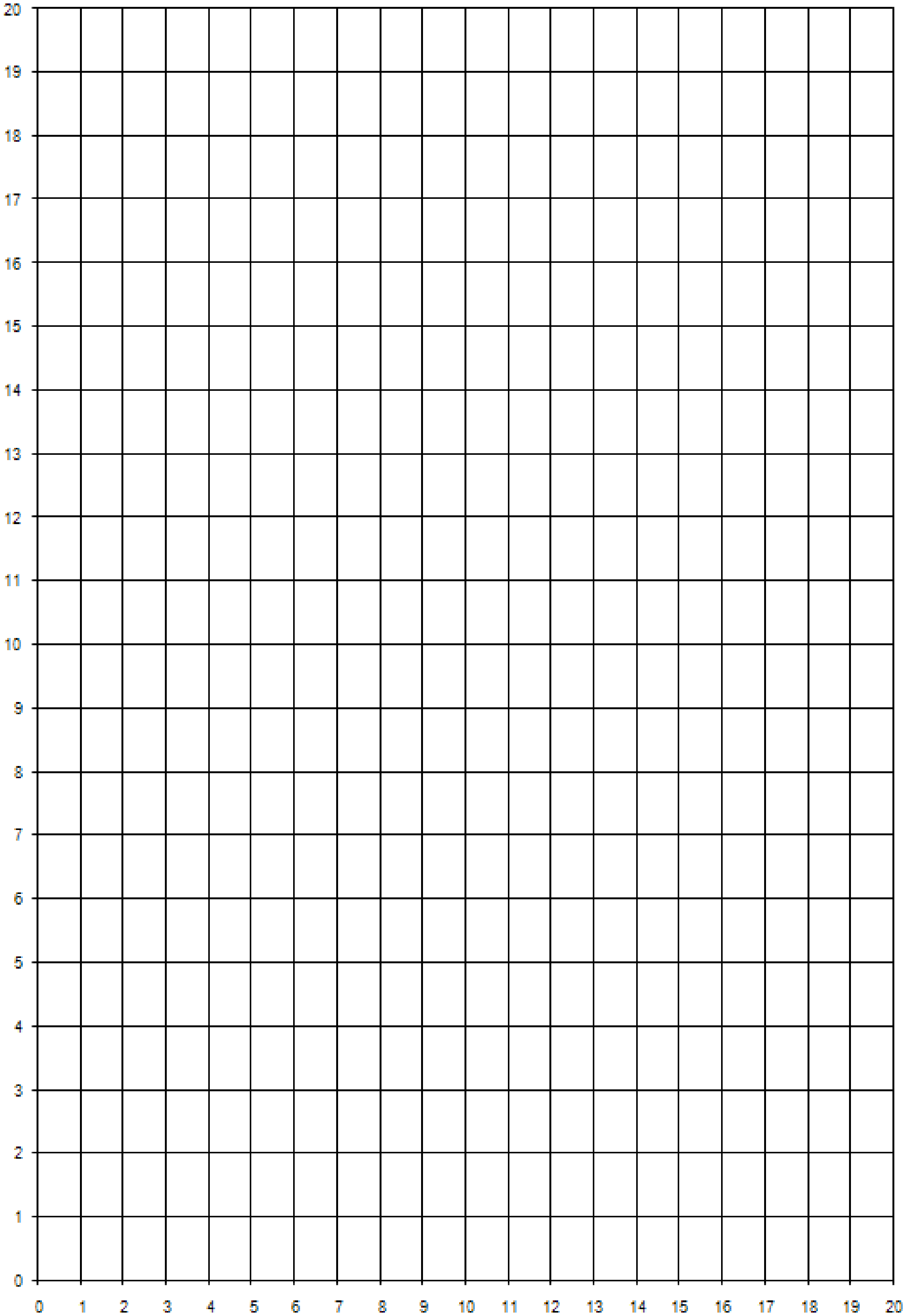
Der Bedarf an Zwischenprodukten für die Endprodukte und der Bedarf an Rohstoffen für die Zwischenprodukte werden häufig auch in Form von Tabellen angegeben:

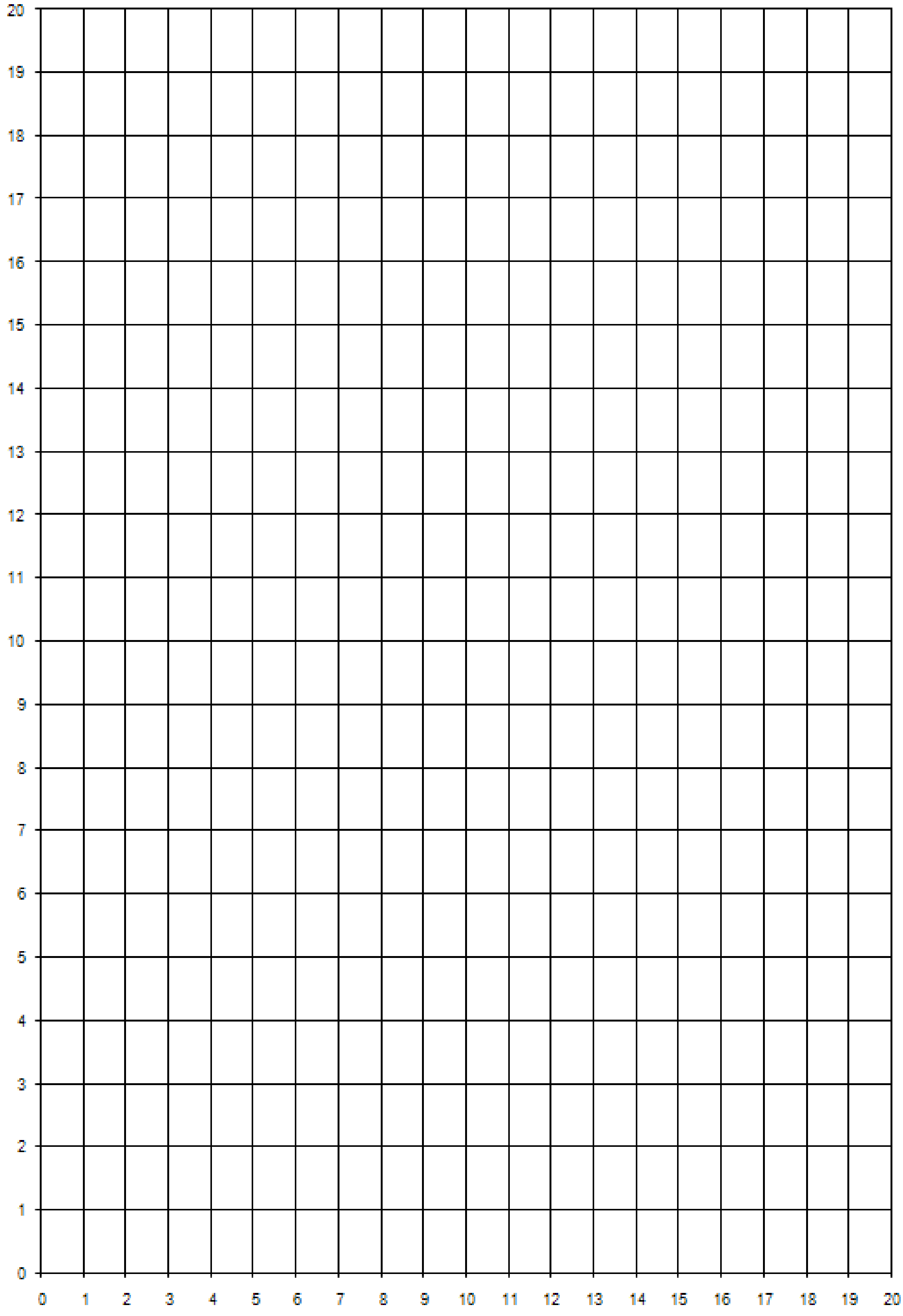
	Z_1	Z_2
E_1	3	2
E_2	2	1
E_3	3	3

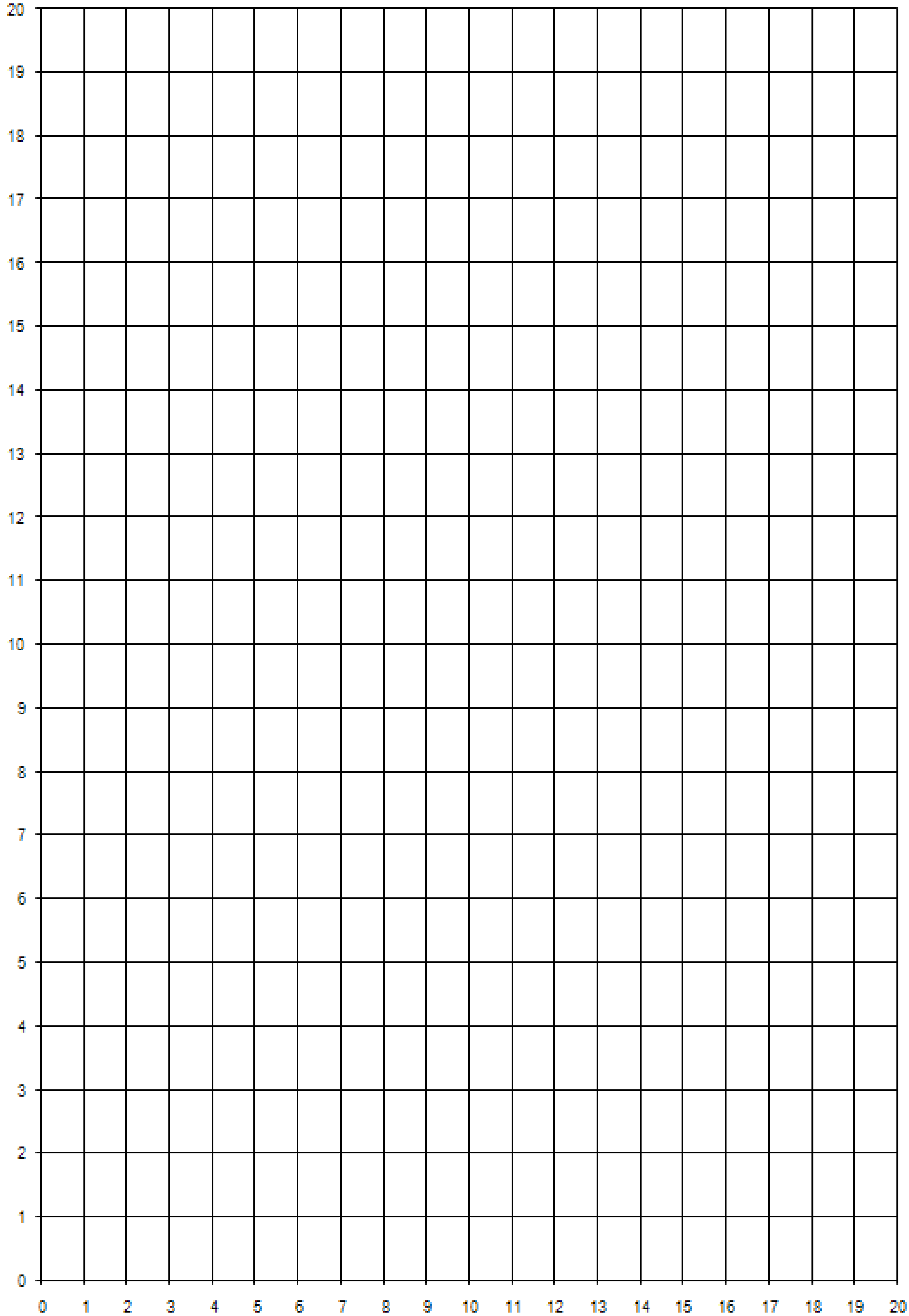
	R_1	R_2	R_3
Z_1	3	4	1
Z_2	3	2	4

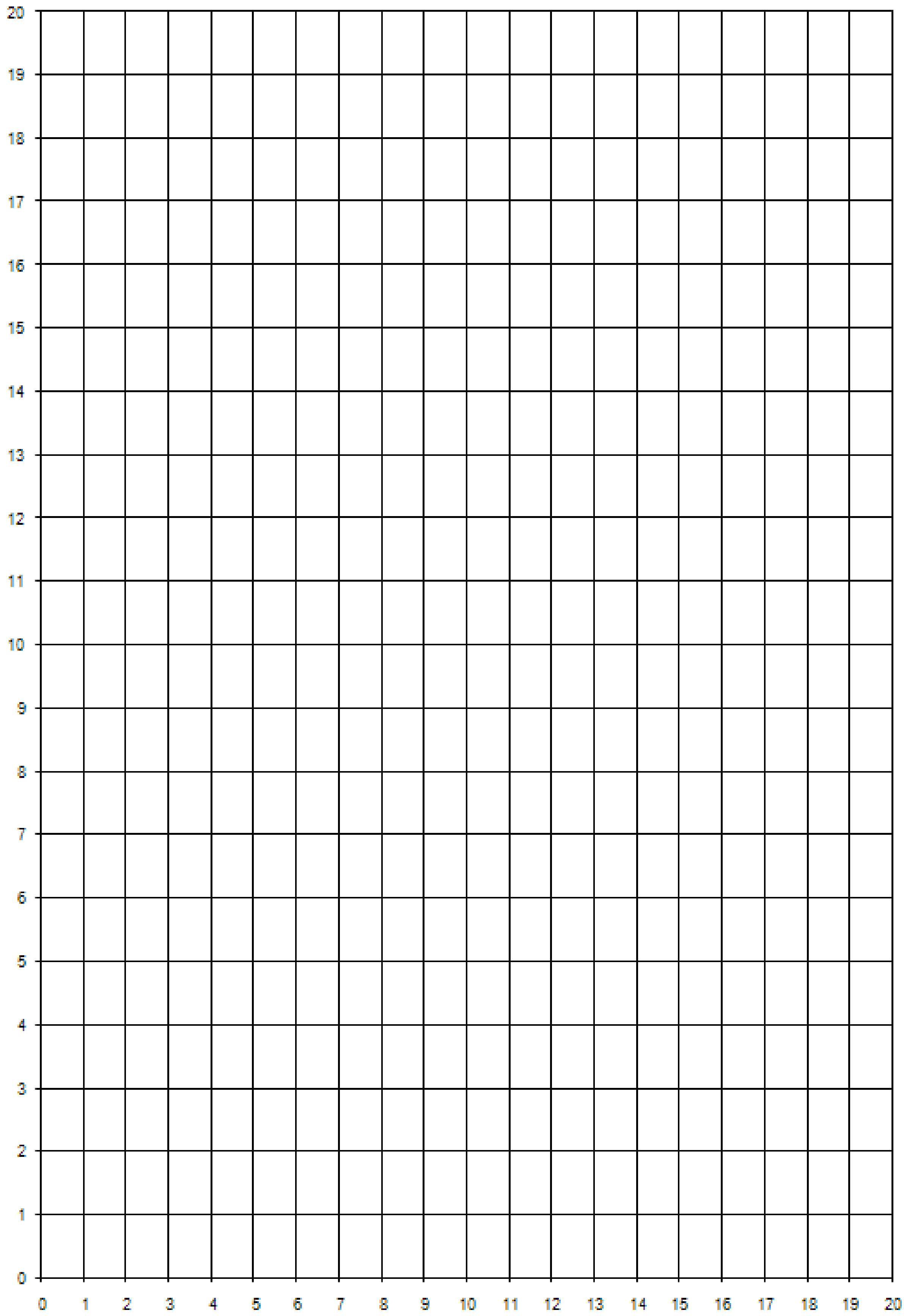
				R_1	R_2	R_3
			Z_1	3	4	1
			Z_2	3	2	4
	Z_1	Z_2				
E_1	3	2		15	16	11
E_2	2	1		9	10	6
E_3	3	3		18	18	13

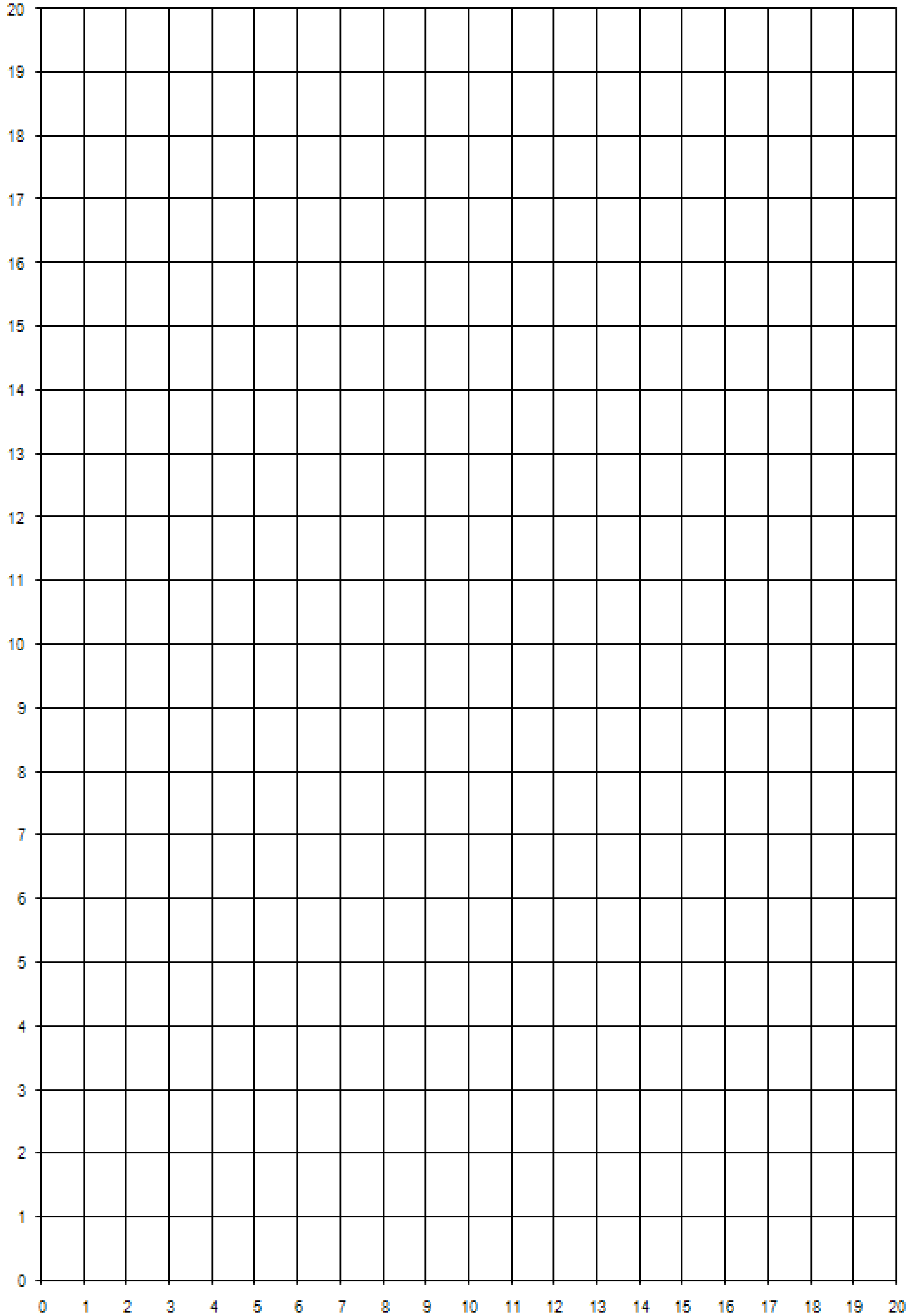
Für das Endprodukt E_2 zum Beispiel benötigt man also 9 Mengeneinheiten von R_1, 10 Mengeneinheiten von R_2 und 6 Mengeneinheiten von R_3.


20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20


20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20


20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20